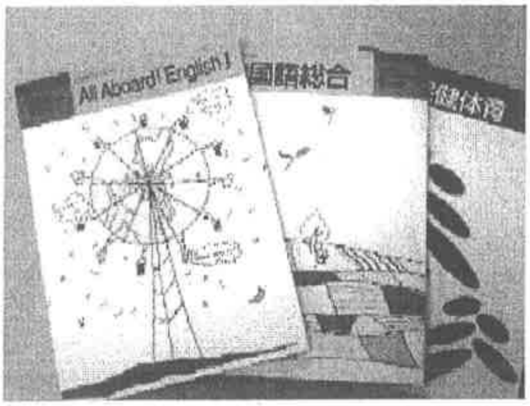
整数の性質のことを少しだけ

有朋高校通信制課程　大谷　健介

0　はじめに



通信制は「自学自習」が基本となるため、教科書だけでレポートを作成したり、学習を進めたりすることがたいへんです。そこで、「学習書」というものを各自が持って、学びを進めましょう…と言うことになっています。「学習書」は、教科書の内容に沿ったやさしい参考書のようなもので、本来、各学校で作成し、生徒に持たせることが望ましいようです。しかし、実際に1冊の教科書に対し1冊の学習書を各学校で作成することはとてもたいへんな作業ですので、それでは全国で互助組織を作って、統一した「学習書」を作成しましょうということとなりました。

このたびの改訂版教科書の発行により、学習書も改訂することとなり、私が「数学A」の学習書の監修を担当することとなりました。

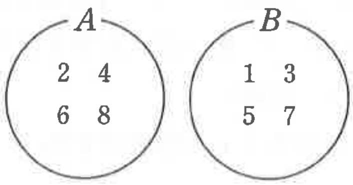
正直、監修と言ってもすでにほぼ完成されて本をチェックするだけだと思っていたので、安易に構えていたのですが…

最初のページにこんな内容が載っていました。

例題 4　$A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 3, 5, 7\}$ について
$A\cap B$, $A\cup B$ を求めなさい。

解答

$A\cap B=\phi$
$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$



➔教科書 p.7 問3の類題

◀奇数の集合と偶数の集合には共通部分がないので，共通部分は空集合である。記号はギリシャ文字の ϕ（ファイ）で表す。

Point　$\{\phi\}$ とは書かないこと。

で、「これはちゃんと見ないといけないのでは」と思い、相当まじめに監修させていただきました。改めて数学Aの教科書をまじまじと見る機会となり、いくつか感想らしいものを持ったので本日の発表としたいと思います。

高等学校通信教育規程
（昭和三十七年九月一日文部省令第三十二号）
（通信教育の方法等）
第二条　高等学校の通信制の課程で行なう教育（以下「通信教育」という。）は、添削指導、面接指導及び試験の方法により行なうものとする。
2　通信教育においては、前項に掲げる方法のほか、放送その他の多様なメディアを利用した指導等の方法を加えて行なうことができる。
3　通信教育においては、生徒に通信教育用学習図書その他の教材を使用して学習させるものとする。

1　で、空集合の記号の話

どのソースで自分の知識を確認すればよいかと考えていたところ、やっぱりこれでしょう！と言う感じです。安心しました。

記号の履歴書

∅

空集合（英：*empty set*）

ニコラ・ブルバキ（フランスの若手の数学者集団の筆名）によって生みだされたらしい。ブルバキ自体が1935年に生みだされたのでそれ以降と思われる。初めは空集合に0を用いたこともあったようだが混同を避けるために、タイプライターにおいて0（ゼロ）の上から/（スラッシュ）を重ね打ちしたものが起源である。

記号 ∅ は表示できないことが多く、見た目が似ているギリシャ文字の φ（ファイ）や Ø（ノルウェー語またはデンマーク語のアルファベット）で代用することが多い。

（吉田奏介先生　「数学史の一端として～記号の話」より無断転載）

2　約数の話

右のポイント（2）は「15の正の約数の集合D，要素を書き並べて表せ」の例題に対するヒントを与えています。

「1，2，3，4…と一つずつ割っていって調べるとよい」と読めます。この方法だと「72 の約数」くらいではもう相当厳しいと考えられます。

「約数を見つけるときは、2 つの整数のかけ算をすべて見つけ出す。出てきた整数がすべて約数」と教えて来ました。

先生「かけて15になる2つの数は？」→「1×15」「3×5」

先生「あとは？」→「5×3」→「数字の入れ替えはなしね」

　　→「…もうない」→「正解！」

「もうない」に気づくことがもっとも重要ですね。

➔📖教科書 p.6 問 1 の類題

Point (1)1桁の正の整数は1から9まで。
偶数は，2でわり切れる数。奇数は2でわり切れない数。
(2)計算は，与えられた数を1，2，3，4，…などの数でわっていき、わり切れればその約数。
約数には，1とその数自身の数15も入れる。

3　素因数分解の話

どの素数からわっても同じ結果になるのなら、大きい素数から順にわった方がよいのではないだろうか？

```
2)72
2)36
2)18
3) 9
    3
```

◀どの素数からわっても同じ結果になるから，小さい素数から順にわっていくとよい。

さらに、少しできる生徒になったら平方数を使ってわる！と指導するのがよい方法だと思っています。64 を 2，2，2，2，…とわっていくのってたいへんだと思うのですが、生徒は頑張りますよね。

＊余談…ノ＿＿　←この素因数分解の計算のしかたの通称はなんですか？私は小学生の頃「げた箱算」と教わりましたが、平成前半の頃、檜山の生徒は「L算」と習ったと言っていました。

4　最大公約数と最小公倍数の話

今まで自分の授業では、これらの関連性に触れてこなかったので、改めてここで載せておきたいと思います。二つの計算方法は実はまったく同じことをしていることだと認識することで、小学生の頃にやったノ＿＿＿←この計算と同じものが高校では形を変えたのだと深まる…かも。

$$
\begin{aligned}
36 &= \boxed{2}\times 2\times 3\times 3\\
60 &= \boxed{2}\times 2\times 3\qquad\times 5\\
&\boxed{2}\times 2\times 3\times 3\times 5 = 180
\end{aligned}
$$

最小公倍数

$$
\begin{array}{r|rr}
\boxed{2} & 36 & 60\\
2 & 18 & 30\\
3 & 9 & 15\\
 & 3 & 5
\end{array}
$$

$$\boxed{2}\times 2\times 3\times 3\times 5 = 180$$

最小公倍数

5　10進数を2進数で表す計算の話

この方法としては、右のように2でわったあまりを使って求めるのが主流かなと思っています。これが、2進法に限らず3進法、4進法にも使えるからです。

しかし、2進法しか教えなくてすむのであれば

$$21 = 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2 + 1$$

		余り
2	21	1
2	10	0
2	5	1
2	2	0
	1	

このことを利用して、16　8　4　2　1 と書いて、たして21になる組み合わせを考えて、「使ったとこは1、使わなかったとこは0」出表現する。すなわち 10101　となる…。

⑯　8　④　2　①

この方法では、2進数を10進数にすることも簡単なので、とても良いです

6　中村先生は「しっくりこない」と言っていた方法ですが、私には救世主だった不定方程式の整数解を導く話

〔例題〕不定方程式 $37x + 15y = 1$ の整数解を1組求めなさい.

$37 \div 15 = 2$ 余り 7 なので　$37 = 15\times 2 + 7 \rightarrow 37 - 15\times 2 = 7$ ・・・①

$15 \div 7 = 2$ 余り 1 なので　$15 = 7\times 2 + 1 \rightarrow 15 - 7\times 2 = 1$ ・・・②

②の7に①を代入すると　$15 - (37 - 15\times 2)\times 2 = 1$

37と15に着目して整理すると $37\times(-2) + 15\times 5 = 1$

したがって $x = -2, y = 5$

このパターンはちょっと厳しい。とばしたくなります。A=BQ+R を知らないとならないし、「7に代入する」というのが生徒には見慣れない“はなれわざ”です…たぶん

中村先生は、3 年前の 6 月の数実研でこのタイプの問題について、さまざまな方法で解く実践をされています…が、その「簡便法」と呼ばれるものでもちょっと難しいな～と私は感じていました。この発表の際、中村先生は「最近出た数研通信№79 には、さらに違う方法が掲載されていますが、私はちょっとしっくり来ませんでした」とおっしゃっていました。不勉強な私は読んでいなかったので、そのときはなんの話かわからなかったのですが…そのあと、調べてみますと「これならいけるかも！」と思いました。その後、授業ではいつもこの方法での解法を紹介しています。内容を飛ばさずにすんだ、と言うお話です。数実研の威力です。

7　まとめ

今回のレポートは、多くの先生方がすでにやっている、知っているものばかりかと思います。わざわざ発表物にしてすみません。ですが整数の性質に関して、特に正の整数は小学校 1 年生からおつきあいがあるものなので、生徒にはなじみの深いものであり、中学校までの既習事項を深めることができるところだと思っています。

しかし、学習指導要領が変わってこの単元を初めて取り扱ったときに、生徒が「ここの内容、なんか飽きる」と言いました。わたしはおもしろいと思ってやっていたので、あらら…という感じでした。そのときには、なかなか考えているようにはいかないなーと思いました。

また、学習書の監修を通じて、全国の通信制の生徒が少しでも数学を「自学自習」できれば、と言う思いで張り切りましたが、反面、どのくらいの生徒が目を通すのか…という気持ちもあります。そして、数実研を通じて、「通信教育」の一面を知っていただければと言う思いもけっこう強くあったりするところです。

第 100 回数実研の開催、本当におめでとうございます。

整数の性質　～不定方程式

HR:　　　氏名：

■　次の方程式を満たすx，yの組を１組求めよ．

(1) $37x + 15y = 1$

(2) $28x + 19y = 1$

(3) $93x + 40y = 1$

(4) $163x + 78y = 1$

(5) $7x + 5y = 1$

(6) $223x + 105y = 1$