第104回北数教
数学教育実践研究会

これからの算数・数学教育で育てたい資質・能力

平成30年1月27日（土）

大久保和義

川口淳一郎
「はやぶさ（一号）」プロジェクトマネージャー

ー既存のものを学ぶだけでなく新しいものに気づく能力を大切にしたいー

- 「はやぶさ」プロジェクトー加点法の評価

「失敗したから減点」ではなく、達成できたことへの得点を積み上げる方法

（減点を恐れて「しない」のは何も生み出さない）

- 「創造」することを育むために

日本の教育は、既にあるものを「学ぶ」に留まってきたのではないか

ディベート、プレゼンテーションが大切**(学び合い)**

PISAの教育国際比較調査

概要

- 参加国が共同して国際的に開発した15歳児を対象とする学習到達度問題を実施。
- 2000年に最初の本調査を行い、以後3年ごとのサイクルで実施。2015年調査は第6サイクルとして行われた調査。
- 読解力、数学的リテラシー、科学的リテラシーの3分野について調査。
- 2015年調査には、72か国・地域(経済協力開発機構加盟35か国、非加盟37か国・地域)の15歳児が参加。

PISA調査内容

- 読解力、数学的リテラシー、科学的リテラシーを含む主要3分野について調査
- 義務教育修了段階の15歳児がもっている知識や技能を、実生活の様々な場面で直面する課題にどの程度活用できるかどうかを評価

  （学校カリキュラムの習得度ではない。）
- 思考プロセスの習得、概念の理解、及び様々な状況でそれらを生かす力を重視

数学的リテラシーとは

・様々な文脈の中で定式化し、数学を適用し、解釈する個人の能力

・数学的に推論し、数学的な概念・手順・事実・ツールを使って事象を記述し、説明し、予測する力

・個人が世の中において数学が果たす役割を認識し、建設的で積極的、思慮深い市民に必要な確固たる基礎に基づく判断と決定を下す助けとなるもの

どっちが円高？

① 1ドル＝ 90円

② 1ドル＝100円

どうして？

数学的リテラシーの具体的問題例(領域：量)

為替レートに関する問題（PISA2003年調査問題）

　シンガポール在住のメイリンさんは、交換留学生として3か月間、南アフリカに留学する準備を進めています。彼女は、いくらかのシンガポールドル（SGD）を南アフリカ・ランド（ZAR）に両替する必要があります。

数学的リテラシーの具体的問題例

為替レートに関する問1（能力：再現）

メイリンさんが調べたところ、シンガポールドルと南アフリカ・ランドの為替レートは次のとおりでした。

$$1\ \mathrm{SGD} = 4.2\ \mathrm{ZAR}$$

メイリンさんは、この為替レートで、3000シンガポールドルを南アフリカ・ランドに両替しました。メイリンさんは南アフリカ・ランドをいくら受け取りましたか。

（正答率　日本　79%、　全体　80%）

数学的リテラシーの具体的問題例

為替レートに関する問2（能力：再現）

3か月後にシンガポールに戻る時点で、メイリンさんの手持ちのお金は**3900ZAR**でした。彼女は、これをシンガポールドルに両替しましたが、為替レートは次のように変わっていました。

1 SGD = 4.0 ZAR

メイリンさんはシンガポールドルをいくら受け取りましたか。（正答率　日本　74%、　全体　74%）

数学的リテラシーの具体的問題例

為替レートに関する問3（能力：熟考）

この3か月の間に、為替レートは、1 SGDにつき4.2 ZARから4.0 ZARに変わりました。現在、為替レートが4.2 ZARではなく4.0 ZARになったことは、メイリンさんが南アフリカ・ランドをシンガポールドルに両替するとき、彼女にとって好都合でしたか。

答えの理由も記入してください。

（正答率　日本　43%、　全体　40%）

（無答率　日本　22%、　全体　17%）

PISA調査における数学的リテラシーの結果(%)

	1未満	レベル1	レベル2	レベル3	レベル4	レベル5	レベル6
2012年調査（日本）	3.2	7.9	16.9	24.7	23.7	16.0	7.6
OECD平均	8	15	23	23	18	10	3
2009年調査(日本）	4.0	8.5	17.4	25.7	23.5	14.7	6.2
OECD平均	8.0	14.0	22.0	24.3	18.9	9.6	3.1
2006年調査(日本）	3.9	9.1	18.9	26.1	23.7	13.5	4.8
OECD平均	7.7	13.6	21.9	24.3	19.1	10.0	3.3
2003年調査（日本）	4.7	8.6	16.3	22.4	23.6	16.1	8.2
OECD平均	8.2	13.2	21.1	23.7	19.1	10.6	4.0

日本の位置

	2015年	2012年	2009年	2006年
日本の得点	532	536	529	523
OECD平均	490	494	496	498
OECD加盟国中の順位	1位	2位	4位	6位
OECD加盟国中の順位の範囲（注）		2～3位	3～6位	4～9位
全参加国中の順位	5位	7位	9位	10位

（注）平均得点には誤差が含まれるため、統計的に考えられる上位及び下位の順位をOECD加盟国の中で示したもの。

TIMSSの国際調査

- 第4学年（小学校4年生）と第8学年(中学校2年生）が対象

- 学校教育で得た知識や技能が
どの程度習得されているかについての調査

- 算数・数学教育や理科教育についての意識調査

TIMSS（2015）の問題

TIMSS　2011の結果

- 参加国　小学校は50か国・地域
  中学校は42か国・地域が参加
- 結果の概要

小学校では、各教科とも前回調査に比べ、平均得点が有意に上昇するとともに、習熟度の低い児童の割合が減少し、習熟度の高い児童の割合が増加。(585点　5位)

中学校では、各教科とも平均得点は前回調査と同程度だが、習熟度の高い生徒の割合が増加。（570点　5位）

TIMSS　2015の結果

・参加国　小学校は49か国・地域
　　　　　中学校は39か国・地域が参加

・結果の概要

小・中学校とも、各教科とも前回調査に比べ、平均得点が有意に上昇するとともに、引き続き上位を維持(小593点　中586点　ともに5位)

2003年以降、経年での変化で、550点未満の児童・生徒の割合が減少し、550点以上の児童生徒が増加の傾向。

数学科での国際比較（TIMSS）　%

	楽しい	日常	他教科	大学	仕事	得意
2003	39 （65）	62 （88）	57 （80）	68 （82）	47 （73）	39 （54）
2007	39 （67）	71 （90）	59 （81）	69 （85）	57 （82）	37 （49）
2011	48 （71）	71 （89）			62 （83）	35 （46）
2015	52 （71）	74 （84）			65 （81）	39 （48）

＊　()は国際平均値　＊日常：日常生活に役立つ

＊他教科：他教科の勉強に役立つ　＊大学：大学に入るため

＊仕事：仕事をするために必要

＊得意：不得意な教科でない

全国学力・学習状況調査　調査内容

（3）調査の内容

教科に関する調査

A:主として「知識」に関する問題

・身に付けておかなければ後の学年等の学習内容に影響を及ぼす内容

・実生活において不可欠であり常に活用できるようになっていることが望ましい知識

B:主として「活用」に関する問題

・知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力などにかかわる内容

・様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力などにかかわる内容

調査結果について

算数・数学の平均正答率（全国、北海道）

小6

H27 知識（76.2%、72.3%） 活用（45.0%、42.5%）

【H26 知識（78.1%、75.8%） 活用（58.2%、55.2%）】

【H25 知識（77.2%、74.9%） 活用（58.4%、54.0%）】

中3

H27 知識（64.4%、63.0%） 活用（41.6%、39.7%）

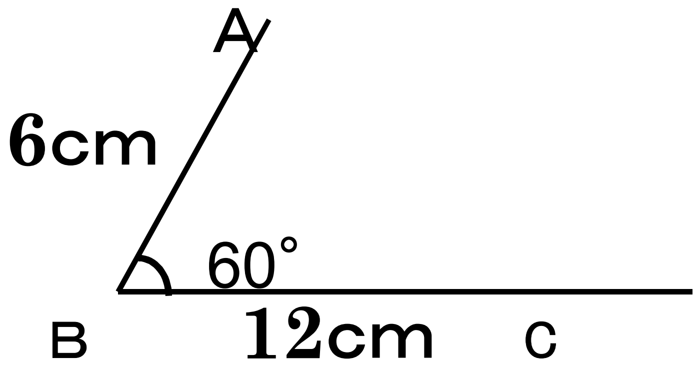
【H26 知識（67.4%、66.0%） 活用（59.8%、59.4%）】

【H25 知識（63.7%、62.3%） 活用（41.5%、39.1%）】

算数A(6)（正答率　52.0%、　47.2%）

平行四辺形の書き方

辺の長さが6 cm、12 cmで1つの角が60°の平行四辺形の書き方



コンパスで書ける理由を問う
(向かい合う辺の長さが等しい)

算数B１（２）（正答率 55.2%、 49.1%）

「37× ３=111 ⇒ 37×24＝888」

となる理由を説明する。

＊計算の決まりを使って、説明すること

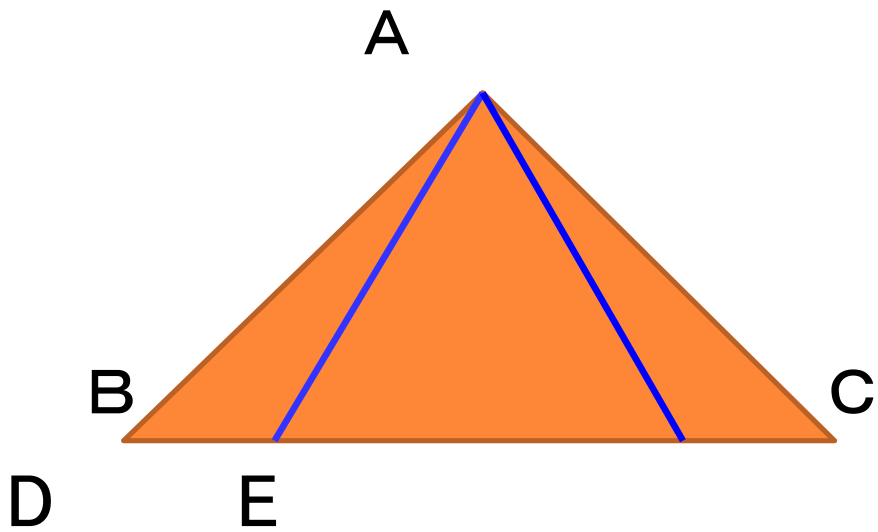
37×24

＝ 37×$\underline{（3×8）}$

＝ $\underline{（37×3）}$×８

＝ 111 × ８

数学B4(1)（正答率 39.8%、 39.4%）



△ABCは二等辺三角形
BD＝CE
このとき AD＝AE を示せ。

H27年度学力テスト問題（算数）

B2(2)　場面の読み取りと処理・判断（おつかい）

　次に、せんざいを買います。家で使っているせんざいが、20%増量して売られていました。増量後のせんざいの量は480mLです。

増量前のせんざいの量は何mLですか。求める式と答えを書きましょう。

どんな式で求める？

H27学力調査算数B2(

考え方

（1）　場面を式化する

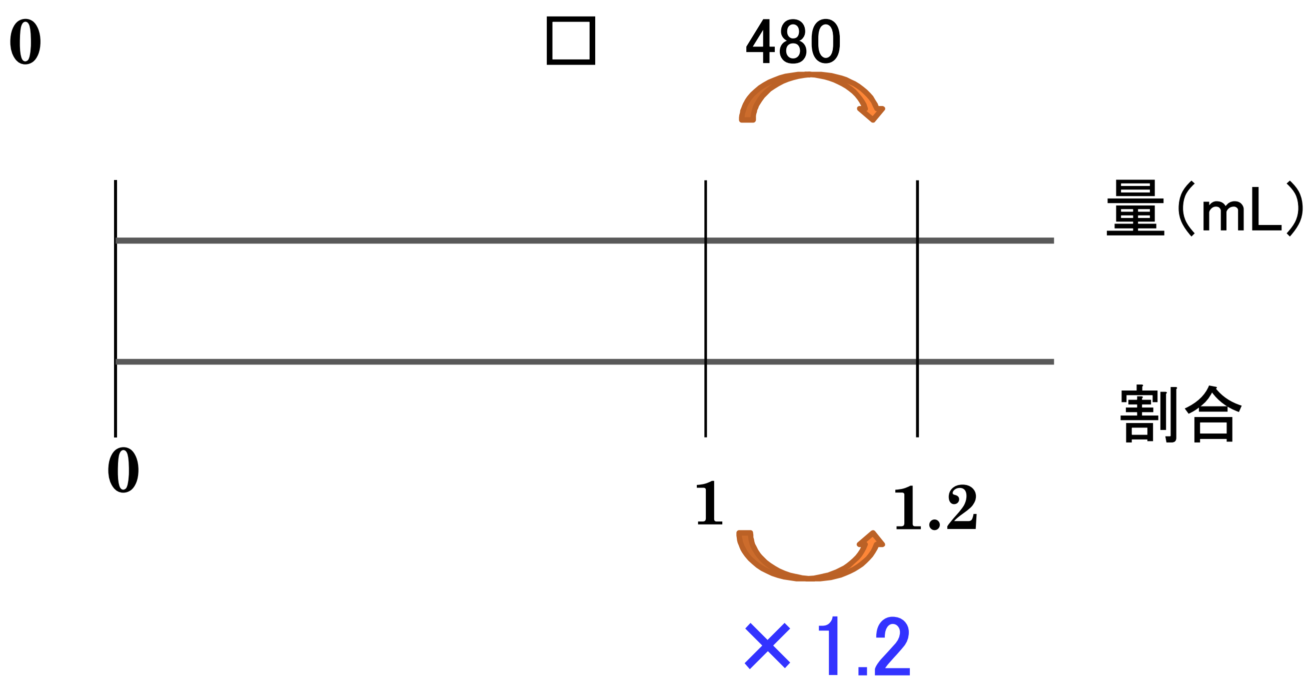
□×1．2　＝　480

考え方

（1）　場面を式化する

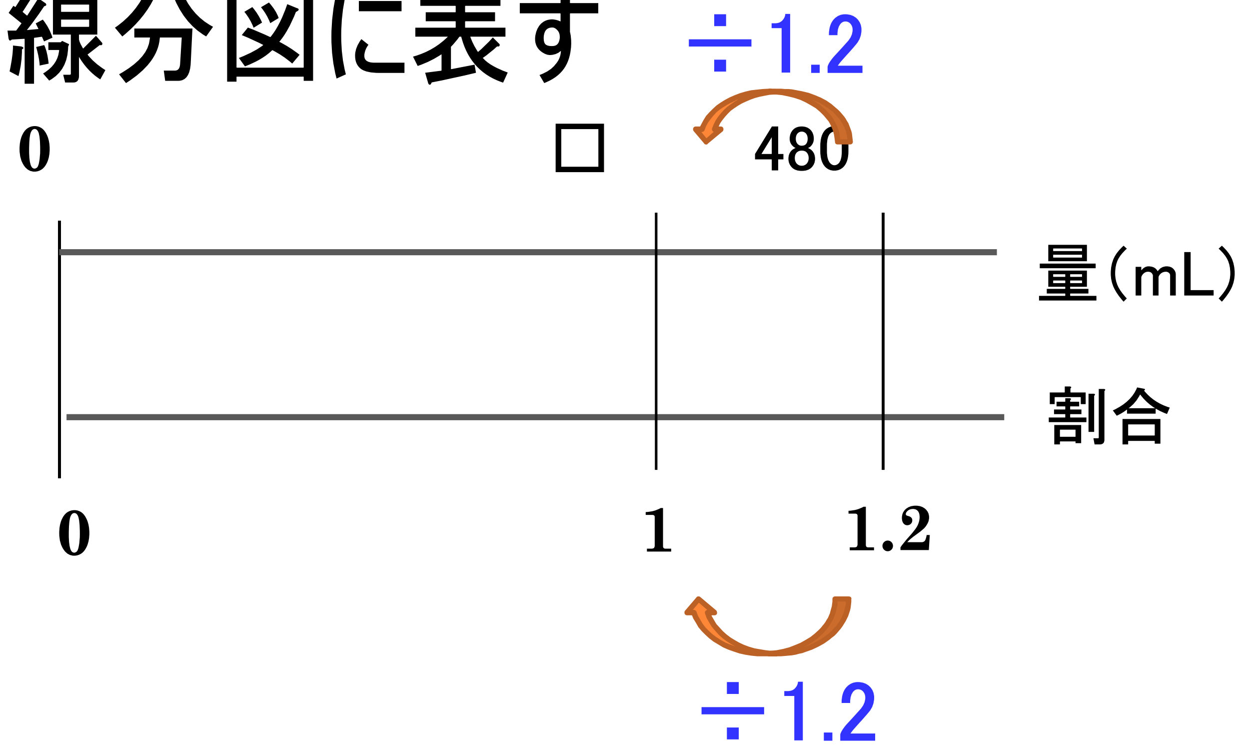
$$\square \times 1.2 = 480$$

（2）　線分図に表す　×1.2



考え方

（3） 線分図に表す



□　＝　480÷1．2

考え方の基礎・基本が大事

どの学年でどのような考え方を身につけるか

（計算の習熟を軽視するわけではない）

現行学習指導要領の成果と課題（長尾氏）

PISA,TIMSSの結果から

　PISA2015では、数学的リテラシーの平均得点は国際的に見ると高く、引き続き上位グループに位置しているなどの成果が見られるが、学力の上位層の割合はトップレベルの国・地域よりも低い結果となっている。

現行学習指導要領の成果と課題

PISA,TIMSSの結果から

TIMSS2015では、小・中学生の算数・数学の平均得点は平成7年（1995年）以降の調査において最も良好な結果になっているとともに、中学生は数学を学ぶ楽しさや、実社会との関連に対して肯定的な回答をする割合も改善が見られる一方で、いまだ諸外国と比べると低い状況にあるなど学習意欲面で課題がある。さらに、小学校と中学校の間で算数・数学の勉強に対する意識に差があり、<u>小学校から中学校に移行すると、数学の学習に対し肯定的な回答をする生徒の割合が低下する傾向</u>にある。

全国学力・学習状況調査等の結果

小学校では、「基準量、比較量、割合の関係を正しく捉えること」や「事柄が成り立つことを図形の性質に関連付けること」

中学校では、「数学的な表現を用いた理由の説明」
（例：三角形の内角の和が180°になること）

全国学力･学習状況調査等の結果

高校では

「数学の学習に対する意欲」

（頑張る生徒： ３０～４０％）

「事象を式で数学的に表現したり論理的に説明すること」

算数・数学教育で求められるもの

国際学力調査（PISA、TIMSS）・教育課程実施状況調査等の結果から

・思考力・判断力・表現力を問う問題に課題

①算数の用語を用いて事象の関係を理解したり、表現すること

②方法や理由を言葉や数を用いて記述するとき、場面の状況や問題の条件に基づいて必要な事柄を過不足なく記述すること

単にでき上がった算数・数学を教えられて表面的・形式的にその内容を知るのではなく、活動を通して学ぶことを経験し理解し創造する過程で数学の面白さ、考えることの楽しさを味わう

- 自ら事象を観察して性質・法則を見つける
- 具体的な操作や実験を試みることを通して算数・数学的な内容を理解し創造する

↓

事象を数学的に見たり、考えたりする

算数・数学の方法等に関わる資質・能力を身に付いていく

次期学習指導要領の改訂に向けて

方向性

　グローバル化や技術革新が進み、変化の激しい社会の中で高い志を持ちつつ、他者と協働しながら新たな価値を創造することのできる、**自立的・協働的・創造的な人間像を描き、その育成に向けたさらなる改善**

全体を貫く基本的な考え方

　自立的・協働的・創造的な人間像を踏まえた、学校教育を通じて今後**育成すべき資質・能力の明確化**と、こうした資質・能力を踏まえた**学習指導要領の構造化**

前川喜平文部科学省初等中等教育局長

（『教職研修』 H26 ４月号　教育開発研究所）

H26.11.20 文科大臣から中教審への諮問

・自立した人間として多様な他者と協働しながら創造的に生きていくために必要な資質･能力をどのように捉えるか。

・それらの育成すべき資質･能力と、各教科等の役割や相互の関係はどのように構造化されるべきか。

・育成すべき資質･能力を確実に育むための学習･指導方法はどうあるべきか。

H26.11.20 文科大臣から中教審への諮問

・「何を学ぶか」だけではなく、より主体的・協働的に学ぶための「アクティブ・ラーニング」などの「学び方」の具体的なあり方はどうあるべきか。

・そうした学びを充実させていくため、学習指導要領等において学習・指導方法をどのように教育内容と関連付けて示していくべきか。

など、幅広く検討すること。

算数・数学教育の学力観の変遷

学習指導要領　　　　　　　　　　　学力観

- 昭和22年学習指導要領（試案）

  生活上の問題中心の内容

- 昭和26年　生活経験の重視　　　生活志向の学力

  生活単元学習　　　　　　　　　　（生活を営む力）

  ＜問題解決の呼称＞

- 昭和33年　系統学習への移行　　　基礎志向の学力

  基礎学力の向上、基準的性格の強化

  （読み、書き、算）

  4領域（数量関係）

  「数学的考え方」の導入

算数・数学教育の学力観の変遷

学習指導要領　　　　　　　　**学力観**

・昭和43年　現代化への移行　　　**科学志向の学力**
　数学教育の現代化　　　　　　（科学的探究力）
　「集合、関数、確率の導入」
　数学的な考え方　ー　統合、発展の重視

・昭和52年　ゆとりと充実　　　**人間性志向の学力**
　現代化の行き過ぎの修正　　（基礎的な知識、技能
　　教材の精選、重点化　　　　　正しい判断、実践力）

・平成元年　意欲の重視　　　　**主体性志向の学力**
　心の教育につながる算数・数学　（思考力、判断力、表現力）
　　情意面に重視　　　　　　　見通し、よさ、活用の重視

算数・数学教育の学力観の変遷

学習指導要領	学力観
・平成10年　生きる力の育成	総合化を志向した学力
基礎、基本の徹底	（主体性、創造性、社会性）
個性の尊重	
創造性の開発	
算数・数学的活動の重視	
・平成20年　生きる力を育む	活用する力
知識・技能の確実な習得	（スパイラルによる学習）
思考力・判断力・表現力の育成	考え、表現する力
（言語活動の充実）	算数・数学的活動の重視
主体的に学習に取り組む態度の育成	

算数・数学科の教育課程改訂への動き

基礎的・基本的な内容・技能の確実な定着

（「速く」「簡単」にでよい？）

算数・数学の実用性、活用の強調

・進んで生活や学習に活用する態度を育てる

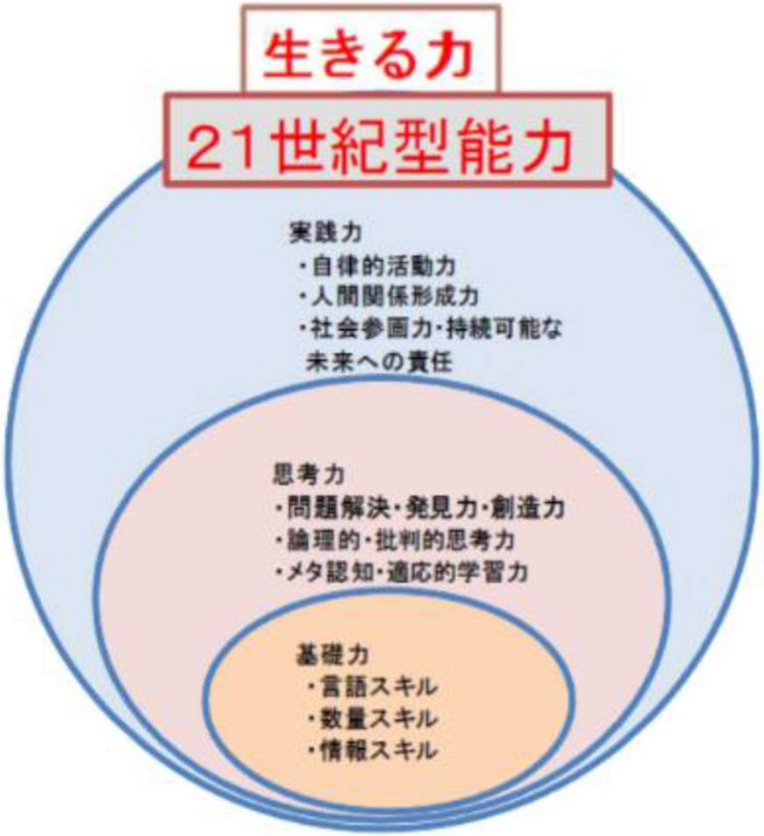
・算数・数学の実用性を明示（算数・数学の教育的価値ー人間性、実用性、文化性）

例：統計的な見方・考え方

離散数学

算数・数学的な思考力・表現力を育てる

21世紀型能力（国立教育政策研究所(2013)



21世紀型能力とは？
３つの構成要素からなる。

- 中核にあるのが**思考力**
- 思考力をささえる**基礎力**
- 思考力の使い方を方向付ける**実践力**

育成すべき資質・能力を踏まえた指導要領の見直し

①育成すべき資質・能力

・他者と協働しながら、新しい価値を創造する力

「主体性・自律性に関わる力」

「対人関係能力」

「問題解決力」

「グローバル化に対応する力」

「情報活用能力」等

・受け身でなく、主体性を持って学ぶ力

（アクティブ・ラーニング）

・リーダーシップ、企画力・創造力、意欲や志

育成すべき資質・能力を踏まえた指導要領の見直し

②育成すべき資質・能力に対応した教育目標・内容

ア）教科等を横断する汎用的なスキル（コンピテンシー）等に関わるもの

①汎用的なスキル等としては、例えば、問題解決、論理的思考、コミュニケーション、意欲等

②メタ認知（自己調整や内省、批判的思考等を可能にするもの）

イ）教科等の本質に関わるもの（教科等ならではの見方・考え方等）

例：算数・数学的な見方・考え方　等

ウ）教科等に固有の知識や個別スキルに関するもの

例：計算力、図形の概念・性質、統計的な見方等

③育成すべき資質・能力に対応した評価

評価の基準を「何を知っているか」にとどまらず、「何ができるか」へと改善する方向

次期学習指導要領の改定に向けて（日数教）

次期学習指導要領への考え(日数教会誌 96-11、2014)

1．検討課題

平成20-21年度版学習指導要領算数・数学の特徴

- 国際的な通用性
- 教育課程の構造の明確化

⇩

「知識・技能を活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力その他の能力をはぐくむ」

- 算数的活動・数学的活動の充実
- 指導内容を領域内容との"縦横"関係の構造的な位置づけ

高等学校〔数学的活動〕（H20）

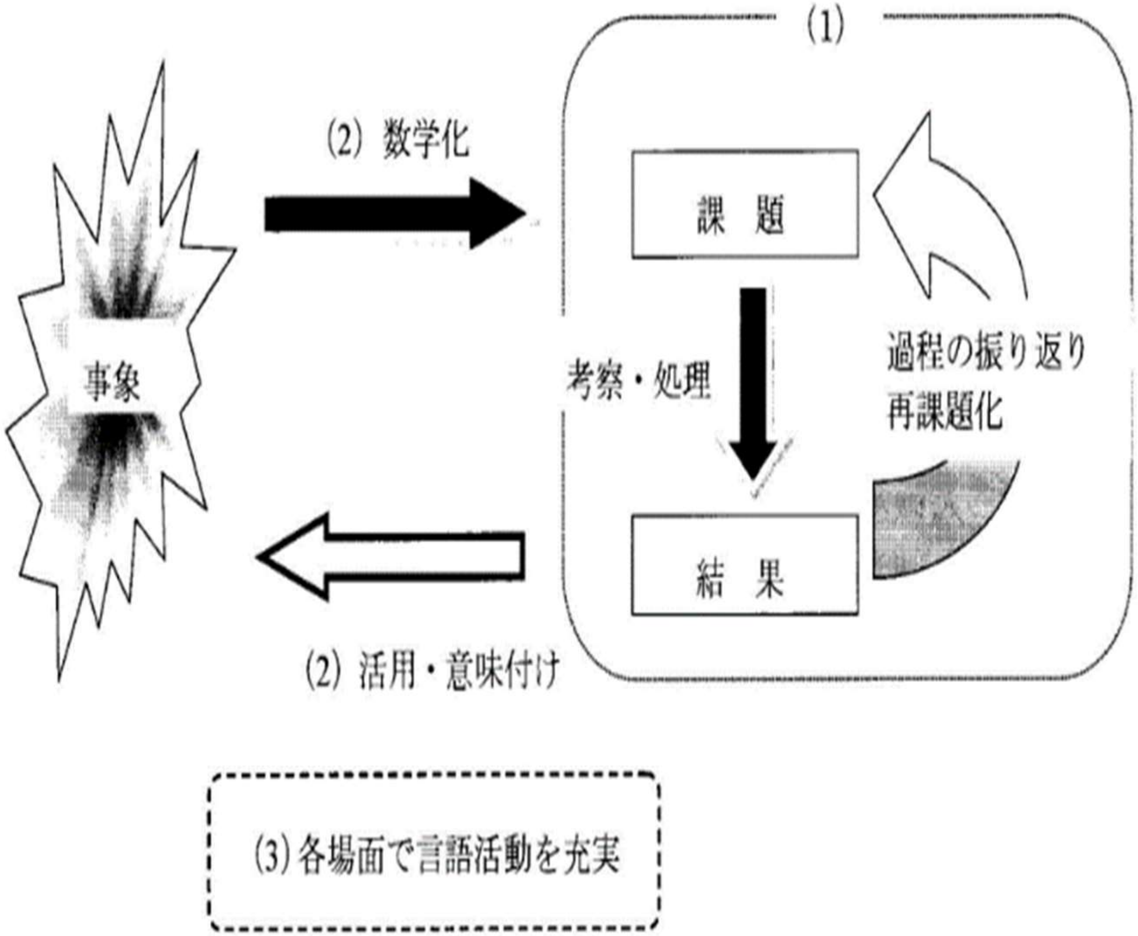
（1）　自ら課題を見いだし、解決するための構想を立て、考察・処理し、　その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること。

（2）　学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること。

（3）　自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること。

現行の高等学校における数学的活動の図式

（学習指導要領 「第3章　各科目にわたる指導計画の作成と内容の取扱い」の「第2節　指導上配慮すべき事項」）



（1） 従来の数学的活動を重視
今回の中学校の数学的活動を踏まえたもの

・生徒にとって解決する必要性のある課題であること

・その課題を分析し、解決のための構想を立て、考察・処理するが、場合によっては再度、構想を立て直すことも必要である。結果を得たら、その過程を振り返り、条件がどこに生かされているか、条件を変えると結果はどのように変わるか、見方を変え違うやり方で結果を得ることはできないかなどを検討し、可能ならば新たな課題を設定する。このような一連の活動を通して、主体的に数学を学ぶ態度が育てられる。

改善すべき事項

○算数的活動・数学的活動を「数学的活動」に統一

　小中高での教科ならではの見方・考え方を育成する活動の一層の強化

　育成すべき資質・能力に関する算数・数学科の一貫的な教育課程上の構造の明確化

　算数・数学科ならではの見方・考え方として，「算数・数学の創造的活動」「創造性の基礎を培う」を不可欠のものとする。具体例の示し方については、目的と内容、行為、手段、過程に留意する。

（2） 学習した内容を日常生活や社会生活などにおける問題の解決に活用すること

日常生活や社会生活などにおける事象の数学的な側面に着目し、数学的に表現（数学化）することが必要である。また、数学的な結果が得られたら、結果を元の事象に戻し、その意味を考えることも必要である。このような活動が、数学的な表現を見直し、そのよさを認識することにつながるのである。

（3） 言語活動の充実に直接かかわること

数学の論理は、元来、自分自身が納得し、回りの他者を納得させるためのもの。

数学の学習においても当然、「説明する」、「議論する」という場面があってしかるべきものである。このような活動が、内容の理解を深めるとともに、様々な場面で数学を活用することや健全な批判力を育てることにつながる。

中学校学習指導要領における数学的活動（平成20年）

・数や図形の性質などを見出す活用
・数学を利用する活動
・数学的に説明し伝えあう活動

中学校学習指導要領における数学的活動（平成29年度）

- 数学を利用する活動
- 数や図形の性質などを見出す活用
- 数学的に説明し伝えあう活動

＊実社会との関わり意識した数学的
活動の充実(2017　永田潤一郎)
（川嶋　哲典先生　修論）

○ 統計領域の充実

・社会生活などの様々な場面において、必要なデータを収集して分析し、その傾向を踏まえて課題を解決したり意思決定をしたりすることが求められており、そのような能力を育成するため、高等学校情報科等との関連も図りつつ、小・中・高等学校教育を通じて統計的な内容等の改善について検討していくことが必要

・数学の学びを社会生活で活用する場面として、統計に関する学習を充実させていくことが重要である。

「理数探究」の新設なども踏まえて、「数学活用」を発展的に廃止するとともに、「数学C」を新設するなど科目構成を見直すこと

中教審答申（2016年12月）

2つの問題解決過程

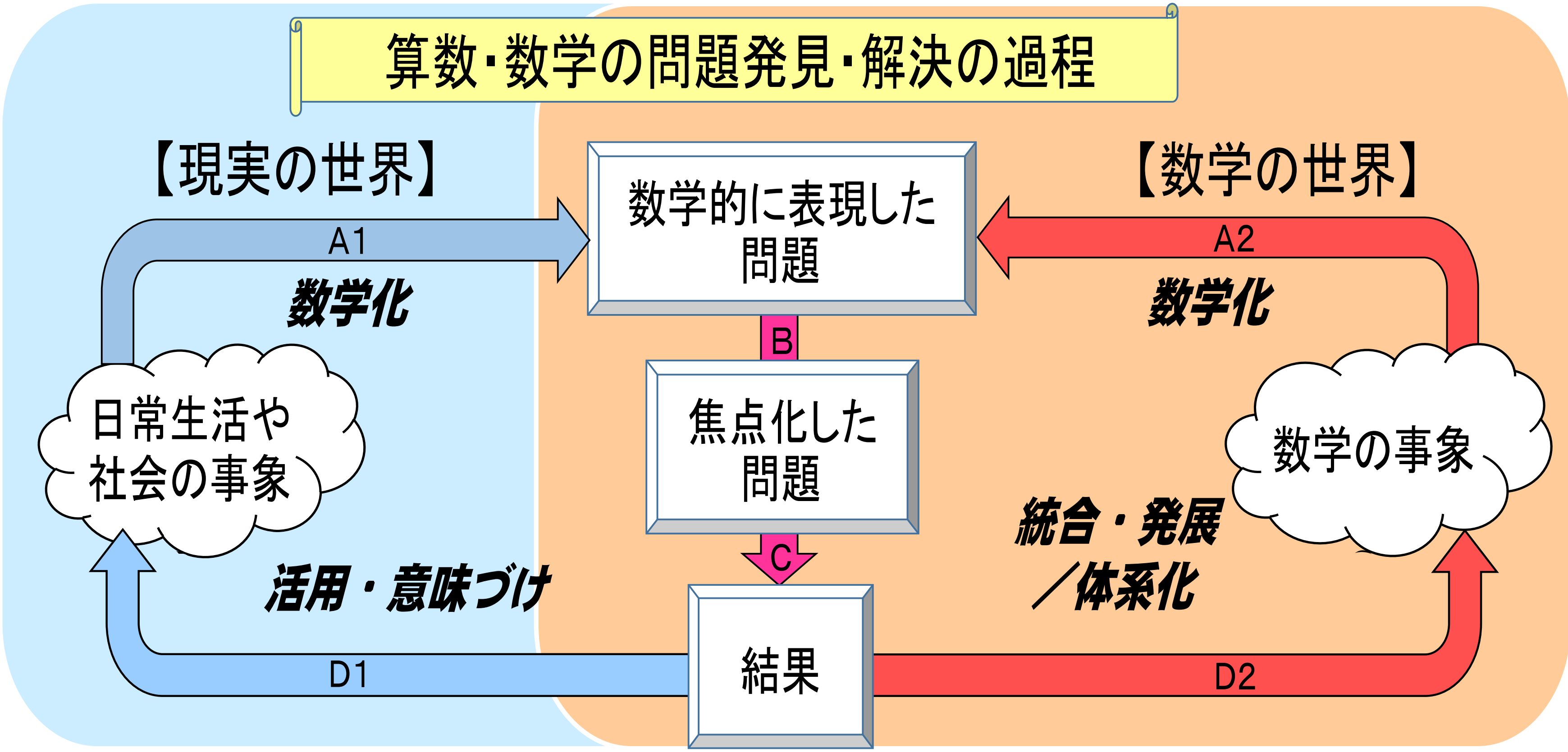
【現実の世界】

日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する。

【数学の世界】

数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し、数学的に処理し、問題を解決し、解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする。

算数・数学の学習過程のイメージ



日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に処理し、問題を解決することができる。

数学の事象について統合的・発展的に考え、問題を解決することができる。

事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決することができる。

※各場面で、言語活動を充実
※これらの過程は、自立的に、時に協働的に行い、それぞれに主体的に取り組めるようにする。
※それぞれの過程を振り返り、評価・改善することができるようにする。

出典 「算数・数学の学習イメージ（文部科学省）」

育成を目指す資質・能力の3つの柱
（H28年12月　中教審答申）

① 生きて働く『知識・技能』の習得

何を理解しているか、何ができるか

② 未知の状況にも対応できる『思考力・判断力・ 表現力』の育成

理解していること・できることをどう使うか

③ 学びを人生や社会に生かそうとする『学びに向かう力・人間性等』の涵養

どのように社会・世界と関わり、よい人生を送るか

指導の在り方

「主体的な学び」の視点

算数科・数学科では、児童生徒自らが、問題の解決に向けて見通しをもち、粘り強く取り組み、問題解決の過程を振り返り、よりよく解決したり、新たな問いを見いだしたりするなどの「主体的な学び」を実現することが求められる。

「対話的な学び」の視点

また、算数科・数学科では、事象を数学的な表現を用いて論理的に説明したり、よりよい考えや事柄の本質について話し合い、よりよい考えに高めたり事柄の本質を明らかにしたりするなどの「対話的な学び」を実現することが求められる。

「深い学び」の視点

算数科・数学科では、数学に関わる事象や、日常生活や社会に関わる事象について、「数学的な見方・考え方」を働かせ、数学的活動を通して、新しい概念を形成したり、よりよい方法を見いだしたりするなど、新たな知識・技能を身に付けてそれらを統合し、思考、態度が変容する「深い学び」を実現することが求められる。

このような活動については、現行の学習指導要領においても意図されており、既に各学校でも取り組まれていると考えられる。今後は、このような活動を通して児童生徒の「主体的な学び」「対話的な学び」「深い学び」が実現できているかどうかについて確認しつつ一層の充実を求めて進めることが重要であり、育成を目指す資質・能力及びその評価の観点との関係も十分に踏まえた上で指導計画等を作成することが必要である。

高校の数学科の科目構成（資料で示す）

科目構成の見直し

　高等学校の「数学活用」については、開設されている学校が少ない（履修率3%程度）ことや、スーパーサイエンスハイスクールなどの取組で成果を上げている課題研究と同様の趣旨の「理数探究」及び「理数探究基礎」が新設されることに伴い廃止する。ただし、「数学活用」は事象を数理的に考察する能力や数学を積極的に活用する態度などを育てる内容で構成されており、これらは今回の改訂でも重視すべきこと。

新たに「数学C」を設けて高等学校数学科を「数学I」、「数学Ⅱ」、「数学Ⅲ」、「数学A」、「数学B」、「数学C」に再編するとともに、「数学活用」の内容をその趣旨などに応じてそれぞれ「数学A」、「数学B」、「数学C」に移行することが適当である。なお、高等学校数学科の必履修科目は「数学I」とする。（別添4－4を参照）

「数学C」は、高等学校の多様な履修形態に対応し、活用面において基礎的な役割を果たす「データの活用」その他の内容で構成することが適当と考えられる。

なお、高等学校の統計的な内容については、特に情報科などとの連携を重視することが求められる。

評価に関して（和田文興先生）
評価ツールの作成

学校教育

・思考力・判断力・表現力の育成が重要

・知識・技能の育成

から

◎観点別評価の重要性（H28 中教審答申）

「・・・高等学校教育においても、観点別の記載欄を設けた指導例を示すことなどを通じて評価の観点を明確にし、観点別評価の一層の充実を支援していくことが重要である。」

離散数学の話題（杉本先生）

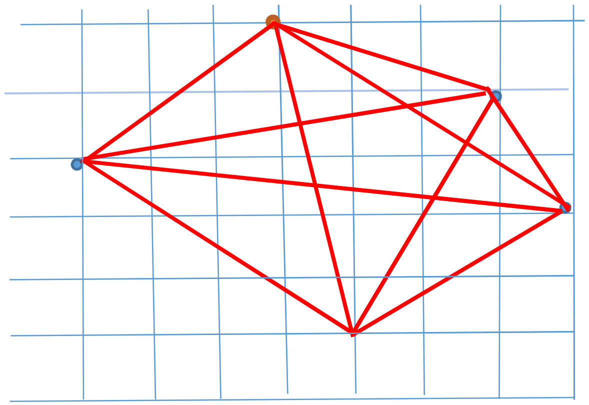
【鳩の巣原理（Pigeonhole Principle）】

　n、pを自然数として、$n \div p = q$ あまり r で $r \neq 0$ とする。

　このとき、「鳩がn羽、鳩の巣がpこあるとする。これらの鳩が鳩の巣に入るとき、$q+1$ 羽以上の鳩がいる巣が必ずある。」

例1. 格子点の数学(根上　鳩の巣原理)

格子点上に異なる5点を取ったとき、その5点を結ぶ線分が格子点を通らないようにできるだろうか？



完全グラフ:全ての点（頂点）の組み合せが線（辺）で結ばれ図形（グラフ）のこと。
(格子点上に配置した5頂点の完全グラフ)

３次元座標の場合は？

格子点の何点をとると、それらを結ぶどれかの線分は格子点を通るだろうか？

例2. ラムゼーの定理

・２人で次のゲームを行う

１．円周上何点か（３点以上）とる

２．じゃんけんで先攻、後攻を決める

３．先攻は１．の円周上の点から2点を赤い線で結ぶ。

４．後攻は１．の2点を取り青い線で結ぶ。

（ただし、２．と同じ線はだめ）

５．３，４を繰り返す。

・勝敗：１．で取った点を頂点として3辺とも同じ色の三角形ができた方が勝ち。

定理：6点以上なら、必ず勝敗がつく。

ラムーゼの定理の活用

6人のパーティには、互いに知っている3人組か、互いに身知らずの3人組が必ずいます。

各科目にわたる指導計画の作成と内容の取り扱い

第２節　指導上配慮すべく事項

（１）各教科の内容の「用語・記号」は、当該科目で扱う内容の程度や範囲を明確にするために示したものであり、内容と密接に関連させて扱うこと。

（２）各教科の指導に当たっては、必要に応じて、コンピュータや情報通信ネットワークなどを適切に活用し、学習の効果を高めようとすること。

例１：学ぶ意欲を高める授業作り

（コンピュータの活用: GC）

学ぶことを楽しむ数学授業

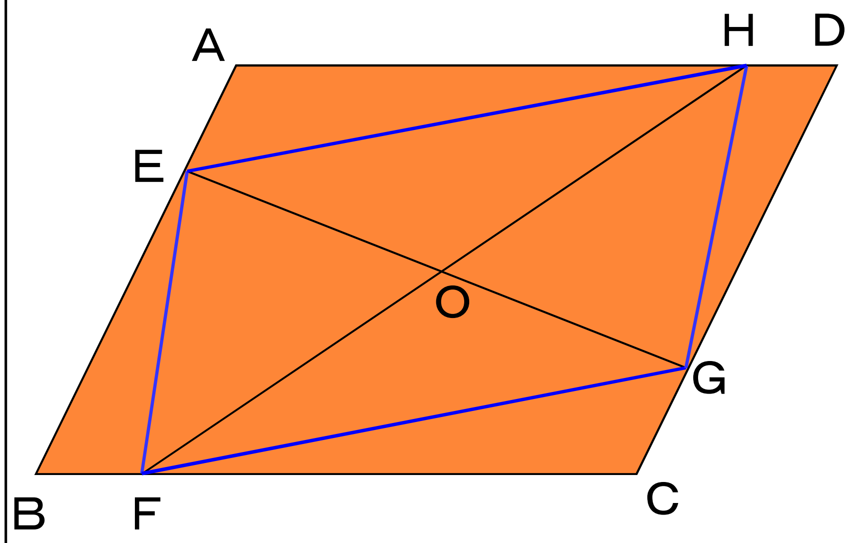
単にでき上がった数学を知るのではなく、事象を観察して法則を見つけて事柄の性質を明らかにしたり、具体的な操作や実験を試みることを通して数学的な内容を帰納したりして、数学を創造し発展させる活動を通して数学を学ぶことを体験させ、その過程の中にみられる工夫、驚き、感動を味わい、数学を学ぶことの面白さ、考えることの楽しさを味わえるようにすることが大切

創造的な学習活動に参加する授業の構成

具体例　通常の教科書にある問題

平行四角形ABCDの対角線の交点Oを通る2直線が、右図のように 辺AB、BC、CD、DAと交わる 点をそれぞれE、F、G、Hとする。

このとき、四角形EFGHは平行四辺形になることを証明せよ。



創造的な活動を促す問題設定

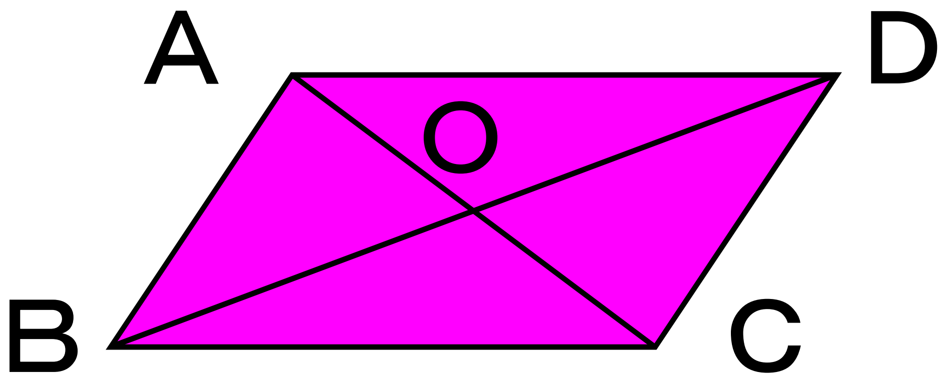
平行四角形ＡＢＣＤの対角線の交点Ｏを通る２直線が、右図のように辺ＡＢ、ＢＣ、ＣＤ、ＤＡと交わる点をそれぞれＥ、Ｆ、Ｇ、Ｈとする。

このとき、四角形ＥＦＧＨはどのような四辺形になるでしょうか。また、そのことを証明しましょう。

GC: Geomeric Constructor

（愛知教育大　飯島康之先生）

平行四辺形の性質



四角形ABCDが平行四辺形である。

⇕

AO＝CO、BO＝DO

証明

△BFOと△DHOで

BO = DO（平行四辺形の対角線は互いに二等分される。）

∠BOF=∠DOH（対頂角）

∠FBO = ∠HDO（錯角）

∴　△BFO≡△DHO

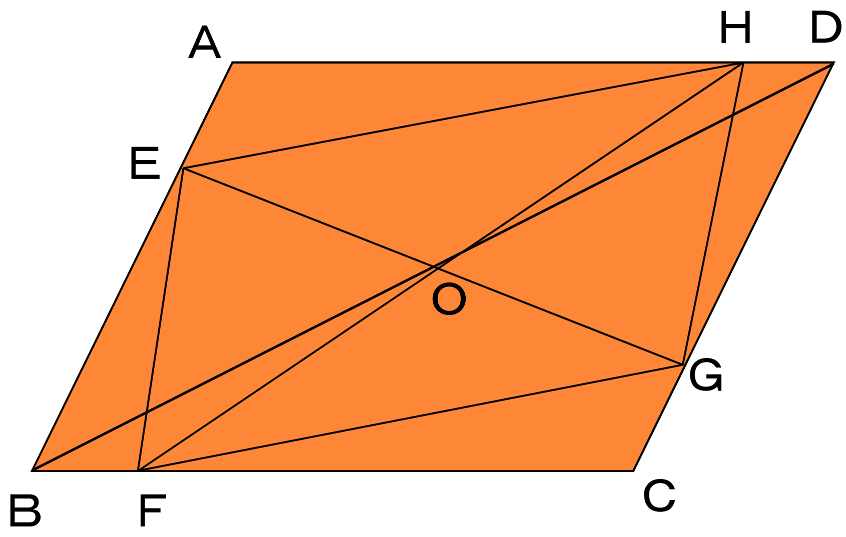
よって　FO = HO

同様に　EO = GO

よって、

□EFGHは平行四辺形

（2本の対角線が二等分される四角形は平行四辺形）



発展的な考え

・問題を自分で発見

「…がいえそうだ。」「…に違いない。」

・「何故だろう」と疑問から問題の探求

（問題に対する主体的な関わり）

既存のものを学ぶだけでなく新しいものに気づく能力を大切にしたい

川口淳一郎（「はやぶさ」プロジェクトマネージャー）

・新たな課題

どんなときに長方形、ひし形、正方形になる？

例2　図形の一次変換

（資料の提示）

一次変換によるねこの変形

（後出）

「習得・活用・探求」に関して

- 「生きる力」の継承

「習得 → 活用 → 探求」 型の学習

基礎的・基本的な知識・技能の習得

↓

知識・技能を活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力の育成

↓

学習過程や日常の問題に対応して総合的・横断的に探求し課題解決する能力の育成

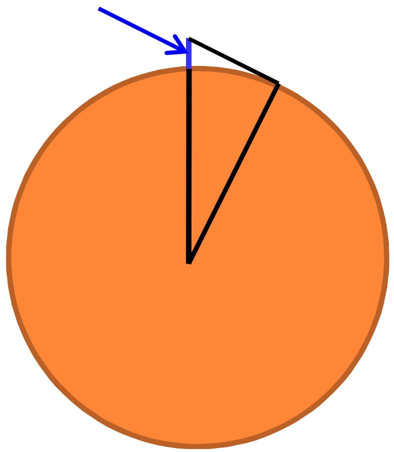
活用の例

三平方の定理の学習後

　JRタワーには高さ160mのところに展望室があります。

　その展望台からは、どれくらい遠くまで見渡すことができるでしょうか。（ただし、地球の半径は6、400kmとします。（より正確には6、368km）

JRタワー（160m）



$$s=((6400+0.16)^2-6400^2)^{1/2}$$

$$\fallingdotseq(2\cdot 6400\cdot 0.16)^{1/2}$$

$$=4\cdot 8\cdot 2^{1/2}$$

$$\fallingdotseq 44.8$$

<u>44.8km</u>

東京スカイツリー（634m）の展望台（350m）からはどれくらい遠くが見えるのだろうか。

$$s = \left((6400 + 0.35)^2 - 6400^2 \right)^{1/2}$$

$$\fallingdotseq (2 \cdot 6400 \cdot 0.36)$$

$$= 8 \cdot 6 \cdot 2^{1/2}$$

$$\fallingdotseq 67.2$$

<u>**67.2km**</u>

富士山(3776m)の頂上からはどれくらい遠くが見えるのだろうか。

$$s \fallingdotseq \left(\left(6400+4\right)^{2} - 6400^{2}\right)^{1/}$$

2

$$\fallingdotseq \left(2 \cdot 6400 \cdot 4\right)$$

$$= 80 \cdot 2 \cdot 2^{1/2}$$

$$\fallingdotseq 224$$

<u>**224km**</u>

数についての話

数の概念

数（自然数）って何？

・ ５ ＜ **2** 　は間違い？？

数ってどんなときに使う？

・集合数（いくつ）－集合の大きさ（個数）を表す

1対１対応が基本

・順序数（何番目）－集合での要素の順番を示す

基準（０）となるものに注意

0の意味

1. 何もない

2. 十進位取り記数法での空

3. 数直線での基準の位置

位取り記数法

記数法－書き記すことによって数を表現する方法

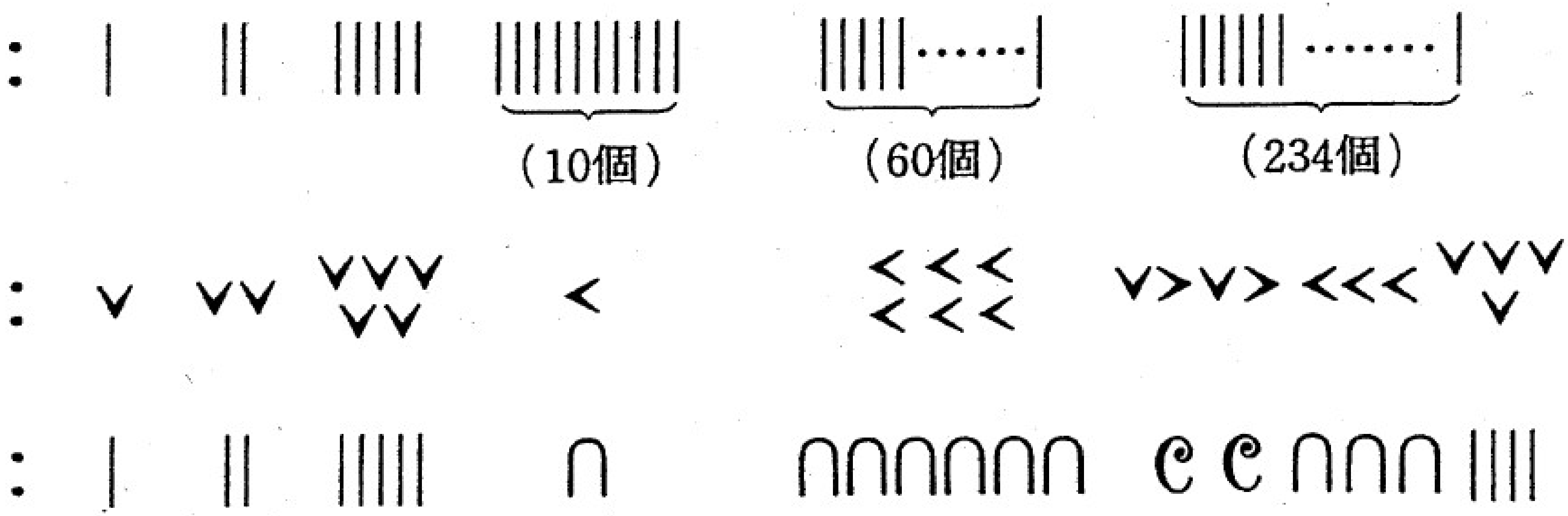
記数法エジプト（BC3、300年頃）

バビロニア

ローマ

中国

十進法が根幹であるが、<u>記録のための記数法</u>



:	I	II	V	X	LX	CCXXXIV
:	一	二	五	十	六十	二百三十四
:	1	2	5	10	60	234

位取り記数法

バビロニア（BC2、000年頃）

十進位取り記数法

インドの数字ーそろばんの組み立てと同じに考える

“0”の発見（5C～6Cにかけて）

7Cの始めにプラーマグプタの本で記述

インドの数字　→　アラビア　→　ヨーロッパ

（代数学が発達）

日本に移入ー1564年にポルトガル人による

<u>記録と計算のための記数法</u>

十進位取り記数法

L:　任意の集合

Lの要素を10個ずつにまとめてできた山の数をq_1、残りをa_1とする。

Lの大きさ　＝　$q_1 \times 10 + a_1$

$q_1 > 10$　のとき、q_1をさらに10ずつまとめて

$q_1 = q_2 \times 10 + a_2$

よって、Lの大きさ　＝　$q_2 \times 10^2 + a_2 \times 10 + a_1$

・・・・・・

このことを続けて、$q_{n-1} < 10$　のとき、$a_n = q_{n-1}$ とおいて

Lの大きさ

$$= a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \cdots + a_2 \times 10 + a_1$$

このとき、Lの大きさ　＝　$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ と表す。　（演習）

演習

十進法で42の数を五進法で表してみよう。

（解）　132_5

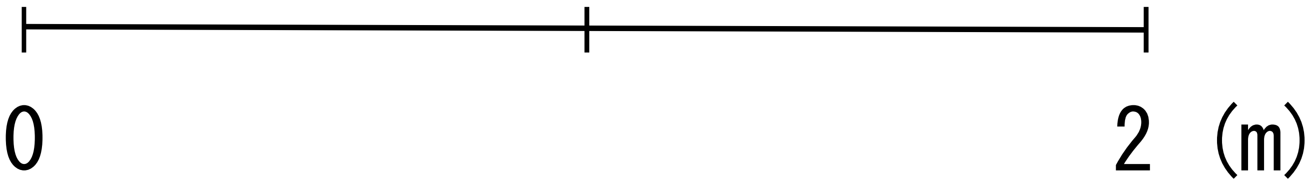
$$42 = 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$$

分数って何？

どんな時に使う？

例３　分割分数と量分数の理解の深化（3学年）

３／４ｍを数直線に表そう。(2mのテープ)



ねらい

分割分数と量分数の意味を理解する。

【授業の展開】

・前時に　１／５ｍ、２／５ｍ、・・・の学習を行っている。（量分数の概念）

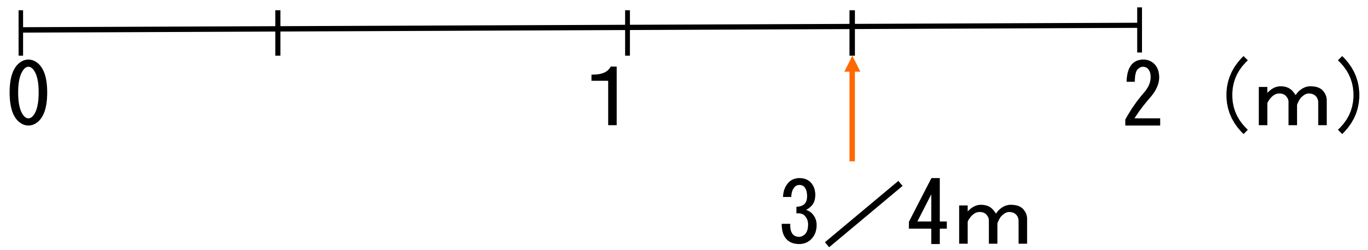
・自分の立場をはっきりさせる（仲間と議論）

青帽子（分割分数）16名

・全部で2mなんだから

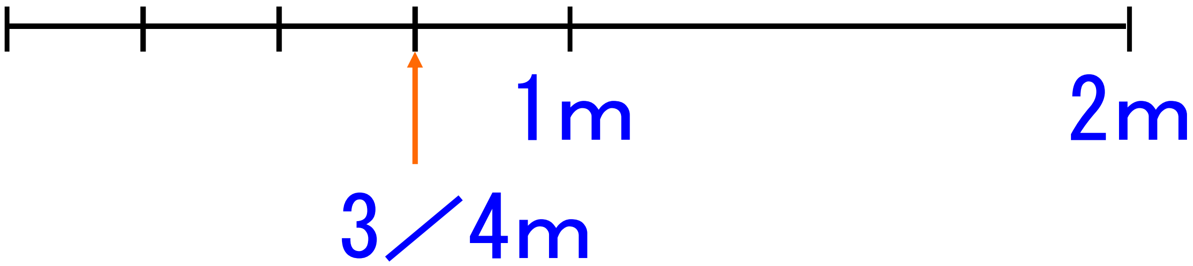
・全部で2mだから、1mにすると残りは？

・2mなら4等分した3つでいいんでない



白帽子（量分数）6名

- 1／4 mは1mを4等分した1つだから、2mを4等分した3つは、1／2m、2／2m、3／2mでないか。
- 3／4mは、1mを4等分した3つ分ということ



・既習の 1／5m、2／5m、・・の学習に戻る

(5／5mが1mだった。)

【教師】

・4／4mが１ｍの確認

青さんのなら、説明がつくかい？

【児童】つかない！

【教師】白さんのなら？　【児童】つく

まとめ

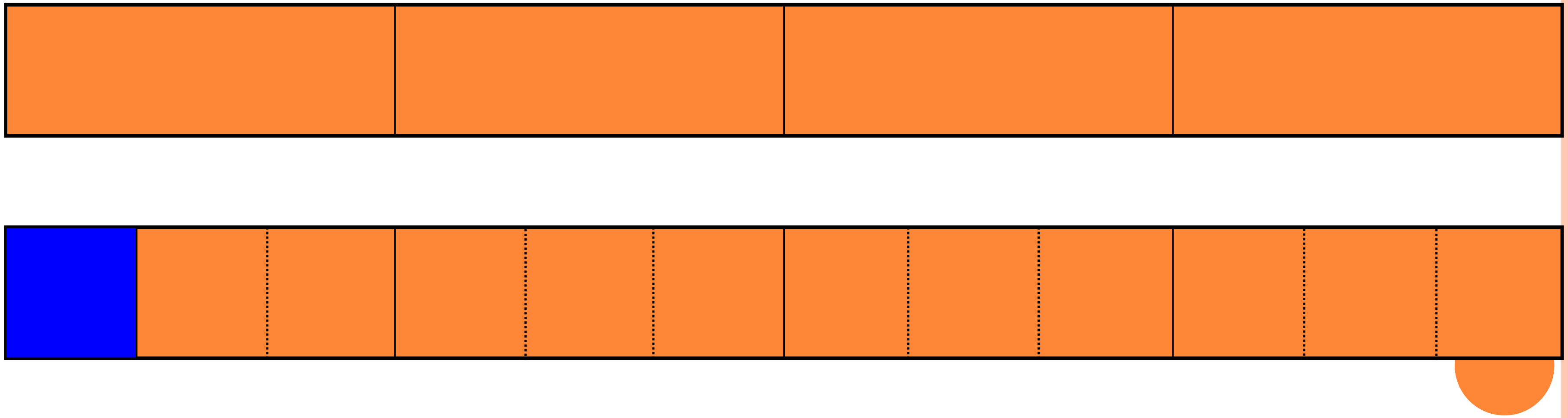
3／4mって、もとの長さ１ｍの３／４の長さ

元の長さって大事だね。

例2　割合分数と量分数の理解の深化 (6学年)

4mのリボンがあります。1／3mずつに切ると何本のリボンが作れますか。

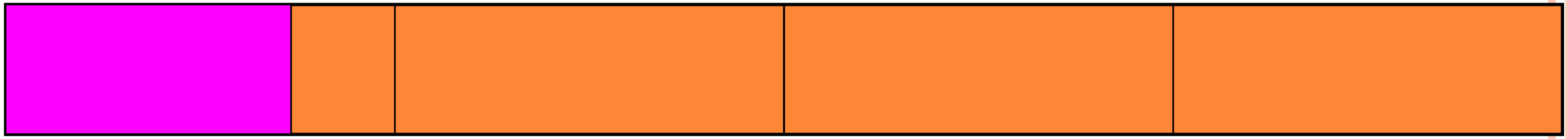
式　　4　÷　1／3



4×3＝15　　　答　15本

４ｍのリボンから1本３／４ｍのはちまきを作ります。はちまきは何本作れて、何ｍあまりますか。

式　　４　÷　３／４



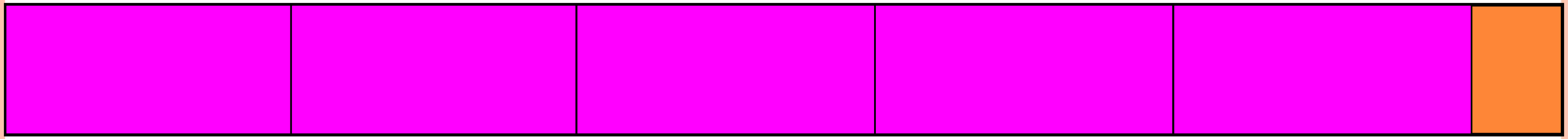
４　÷　３／４

＝　４　×　４／３

＝　１６／３　＝　５　１／３

<u>答　5本とれてあまり　１／３ｍ</u>

でも、具体的に操作をすると？



1／4

５本とれて、あまりは　１／４m

あれれ、どうして　？？！！

分数の意味

- 分割分数
- 量分数
- 割合分数（操作分数）
- 商分数

計算力のとらえ

計算力とは

- 数の概念の理解
- 計算（四則計算）の意味
- 計算の方法
- 計算の習熟

数概念の理解 → 計算の意味 → 計算の方法 → 計算の習熟

数の世界

X:　集合

（X　＊）　＊:X上の演算

例:　X（＝N）:自然数の集合

＊:「＋」(加法)

このとき、Xが＊について閉じているとは、

ｘ＊ｙ＝ｚ　で2つがXの要素の時に残りの1つもXの要素となること（少し例外あり）

例1：　集合　N_0（0以上の整数の集合）

＊（＝　＋　）：足し算

N_0は＊に閉じている？

（＋に閉じた世界をつくるためには？）

例2：　集合　N（自然数の集合）

＊（＝　×　）：かけ算

Nは＊に閉じている？

（×に閉じた世界をつくるためには？）

数の世界の拡張

N: 自然数の集合

Z: 整数の集合

N $\Rightarrow$ Z

加法に
閉じた

数の世界の拡張

Ｎ: 自然数の集合

Ｚ: 整数の集合

Ｑ: 有理数の集合

Ｎ ⟶ Ｚ ⟶ Ｑ

加法に　乗法に

閉じた　閉じた

数の世界の拡張

N: 自然数の集合

Z: 整数の集合

Q: 有理数の集合

R: 実数の集合

N ⟹ Z ⟹ Q ⟹ R

加法に閉じた　乗法に閉じた　正の平方根

数の世界の拡張

N：自然数の集合（Natural）

Z：整数の集合（Zahlen）

Q：有理数の集合（Quotient）

R：実数の集合（Rael）

C：複素数の集合（Complex）

N → Z → Q → R → C

N → Z	Z → Q	Q → R	R → C
加法に閉じた	乗法に閉じた	正の平方根	n次方程式の解

n次方程式が解をもつ

例：　$x^2 = -1$の解は？　・・・①

（この方程式の解も数とみる。）

実数の世界を広げる必要あり！

R　から　C　への拡張

C　での演算（＋、×等）

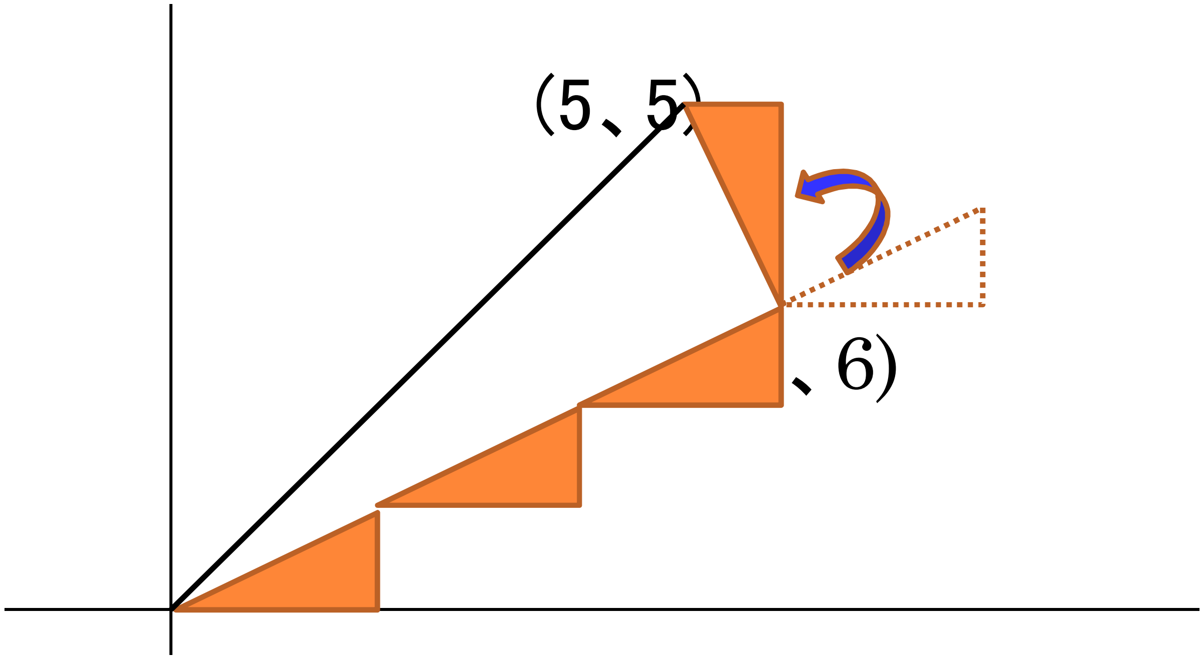
①　の解

$$x = \pm i$$

（FILEの） COMPLEX NUMBER の表示

(2+i)(3+i) の計算と図的意味

$$(2+i)(3+i)=3(2+i)+i(2+i)$$
$$=5+5i$$



数と行列の関係

複素数　　　　　　　行列

$$z=a+ib \longleftrightarrow \mathbf{Az} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

このとき

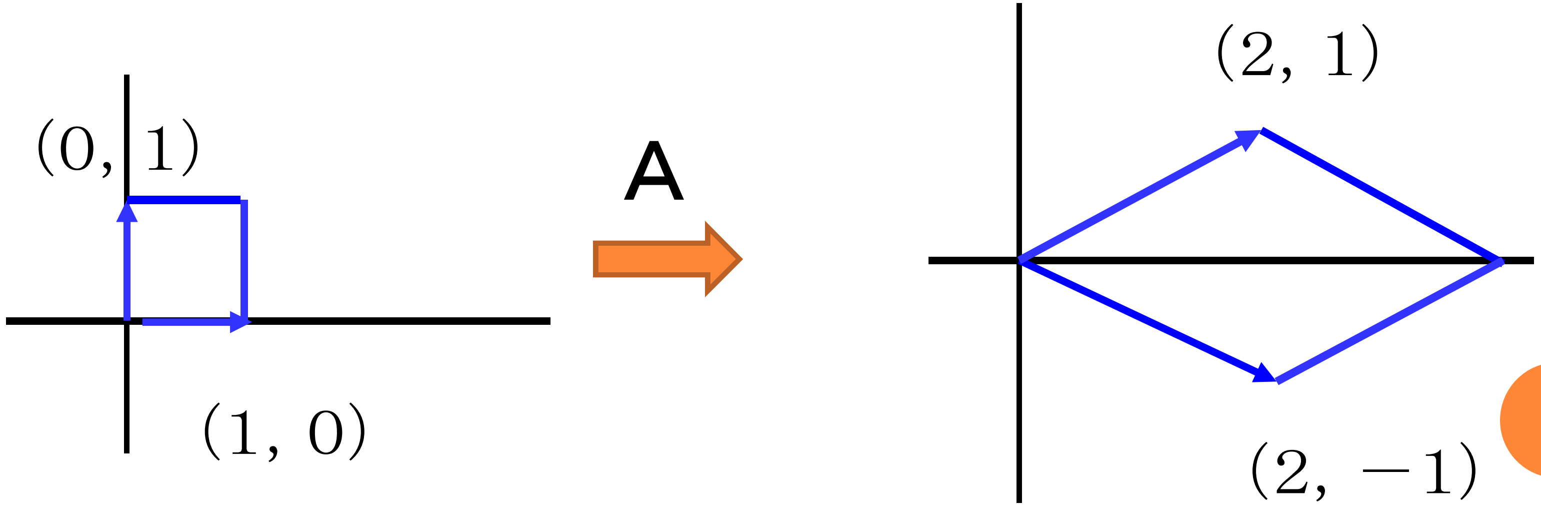
$$Az\cdot z' = Az\ Az'$$

図形の一次変換

- 例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{とする。}$$

このとき



（ねこの一次変換）

１次変換と小沢ねこ（話題源数学）

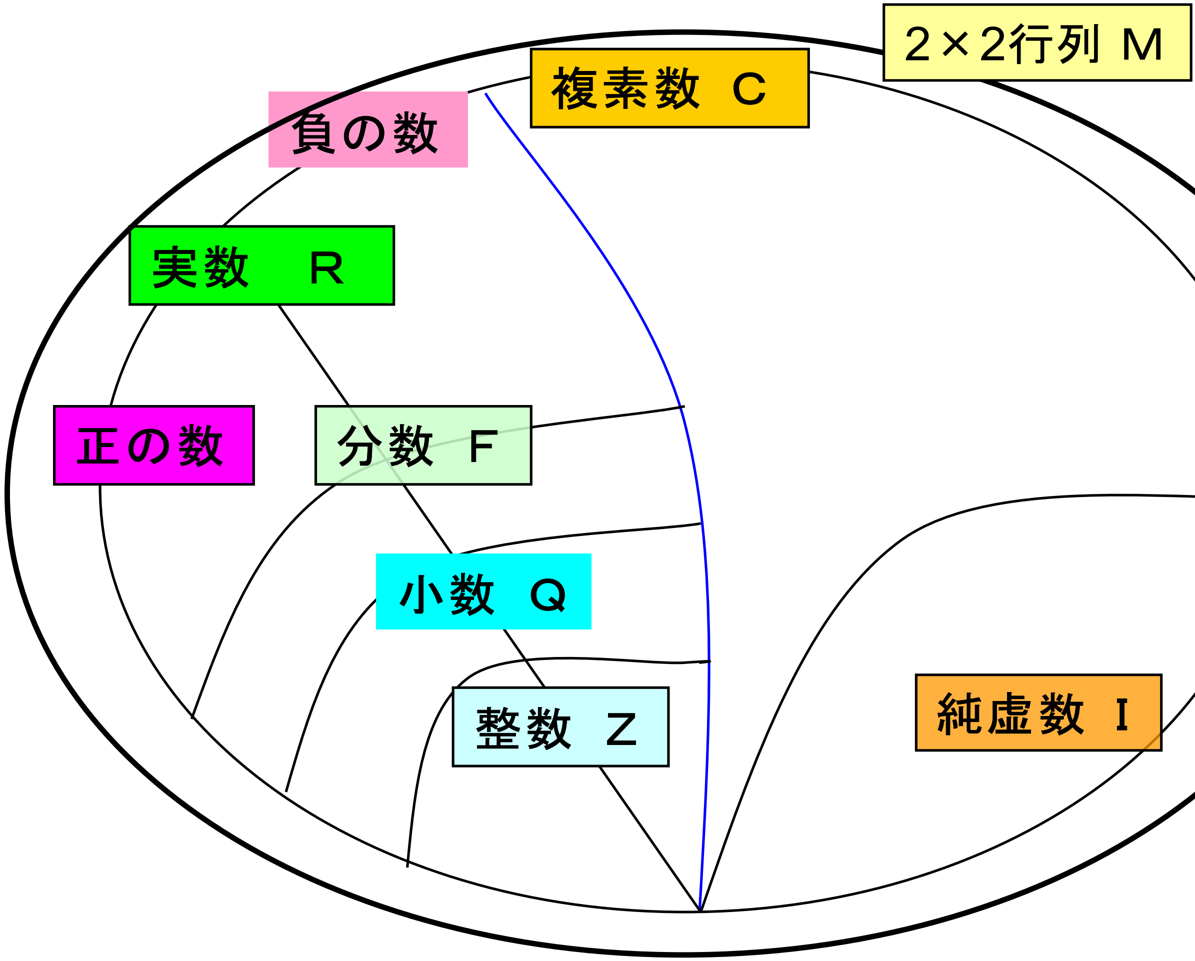
大山　斉　先生（小樽双葉高校）

「Nレポートの出現を欣ぶ」（いずみ）

（N:中村文則先生　新川高校？）

（一次変換って？）

数の構造



数学の学習における思考

帰納的な考え(一般化)

ハノイの塔

ピックの定理

何本かの直線で分けると、領域はいくつできる？

演繹的な考え

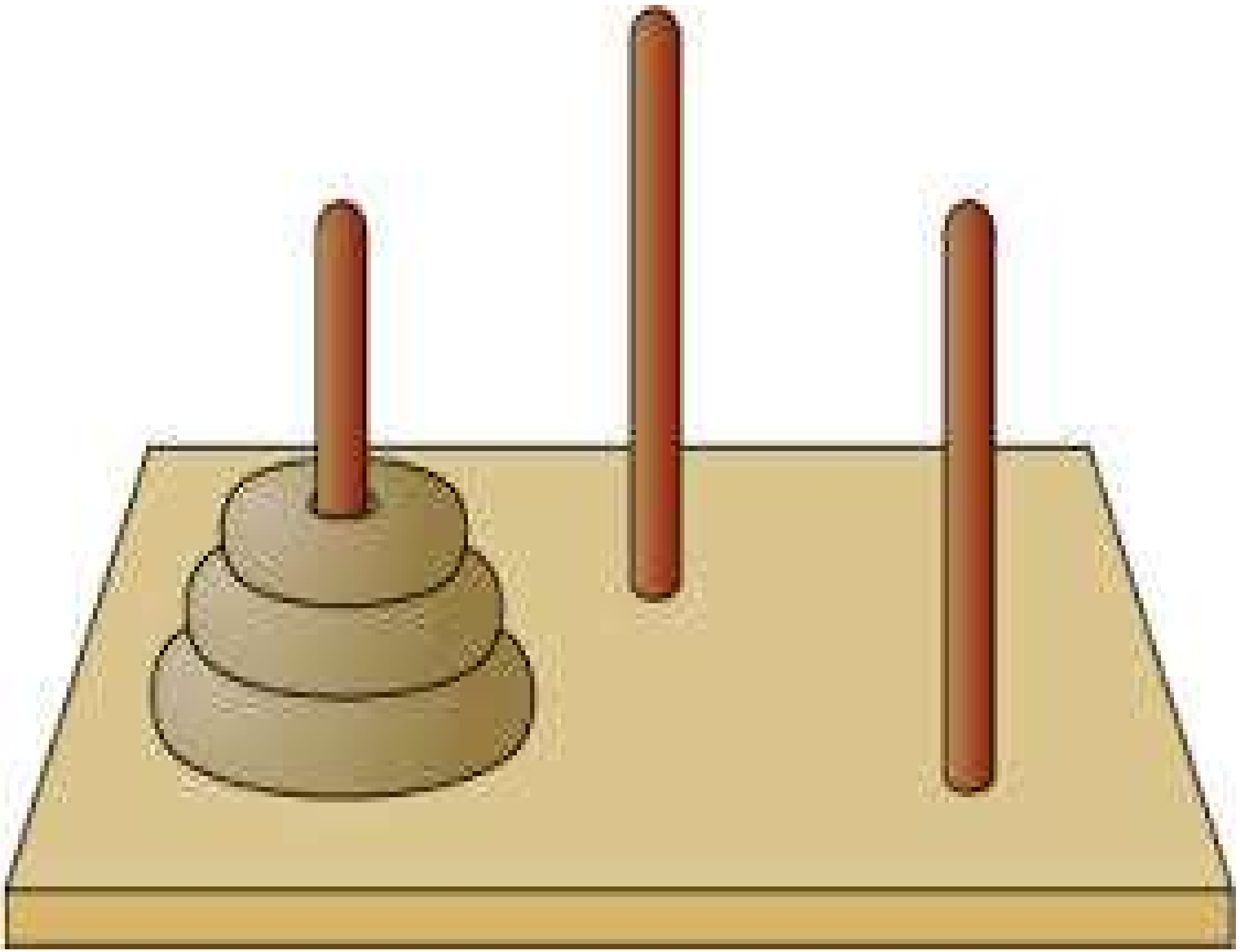
・二等辺三角形の頂点から垂線を下ろすと、底辺を2等分する（どうして？）

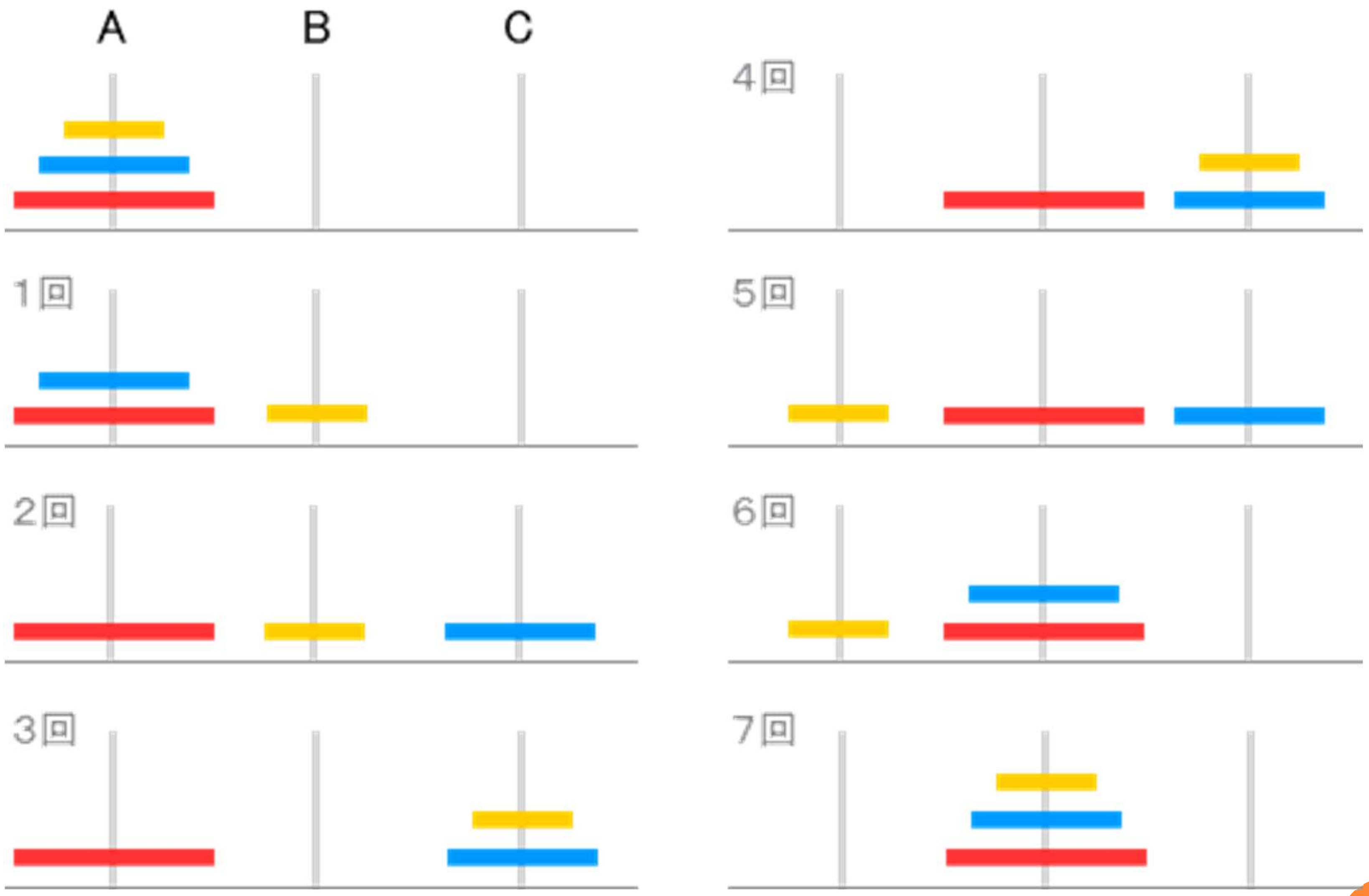
・平行四辺形は向かい合う辺の長さが等しい

類推的な考え （スパイラルな考え）

一般化の考え（帰納的な考え）

・ハノイの塔




A
B
C
1回
2回
3回
4回
5回
6回
7回

S_n: n個のハノイの塔を作る回数

このとき、次の関係がいえる。

$$S_n = S_{n-1} + 1 + S_{n-1}$$
$$= 2S_{n-1} + 1$$

よって、 $S_n + 1 = 2(S_{n-1} + 1)$

故に $S_n + 1 = 2^n$

$S_n = 2^n - 1$

がいえる。

一般化の考え

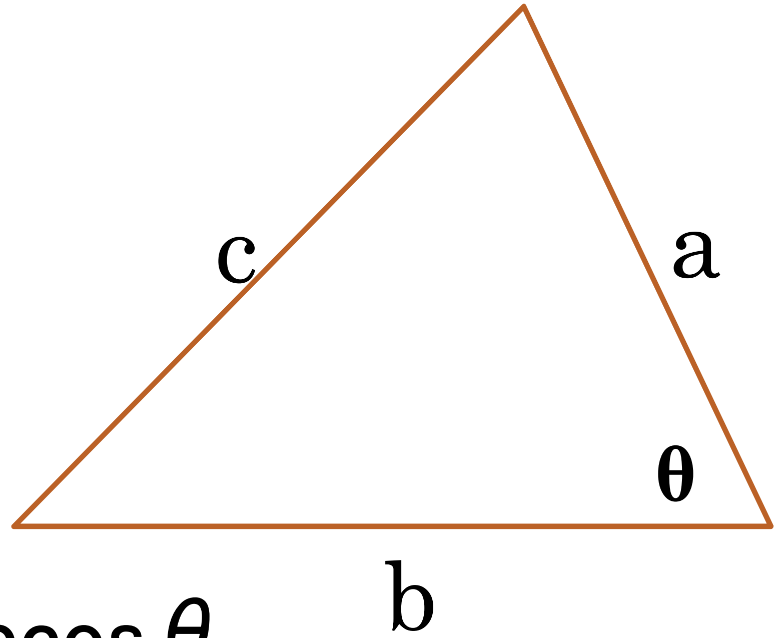
・三平方の定理と余弦定理

直角三角形

$$c^2 = a^2 + b^2$$

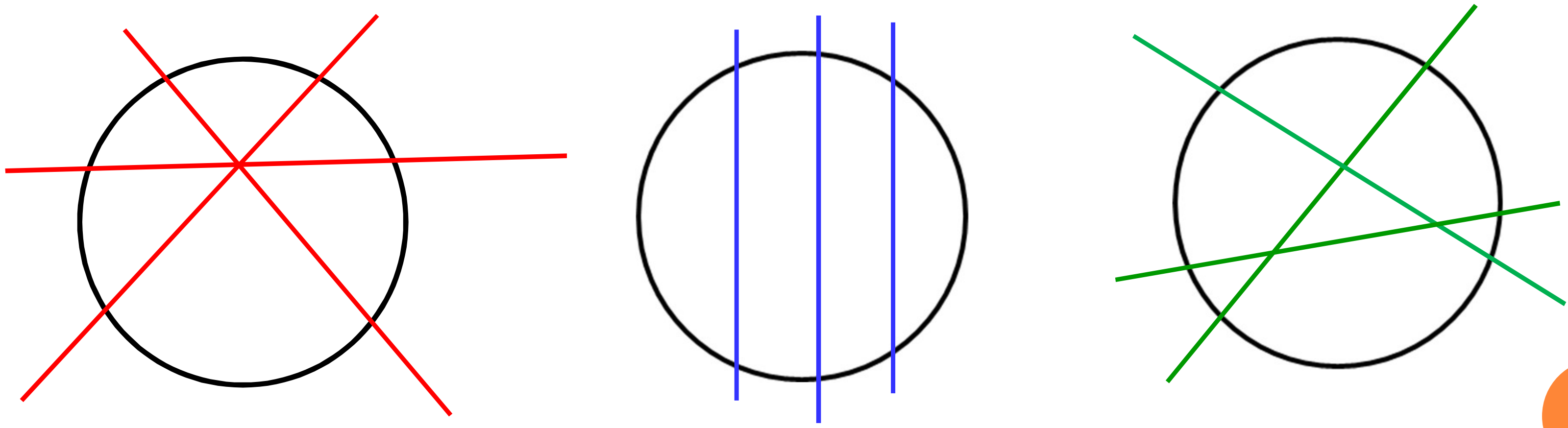
一般の三角形

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$



4学年　変わり方　（帰納的な見方、考え方の例）

「円に直線を5本引いて分割しました。いくつに分けられたでしょう。」



ピックの定理

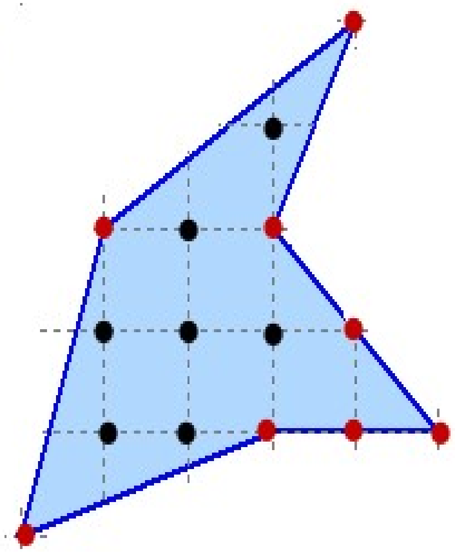
[ピックの定理]

頂点が全て格子点(座標がx,yとも整数)である多角形の面積をAとすると次の式が成り立つ

$$A=\frac{1}{2}B+I-1$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{ただし、}\\ \quad B\text{:辺上の格子点の個数}\\ \quad I\text{:内部の格子点の個数}\end{array}\right)$$

(例)



$A=10$

$B=8$

$I=7$

$\downarrow$

$$\frac{1}{2}B+I-1=10$$

類推的な考え
例：単位の考え

単位の考えによって数概念の理解を深める

整数の加法 ➡ 小数の加法 ➡ 分数の加法

数概念の理解が深まる

２６＋３７

2.6+0.37

２/３＋４/５

　２　６
＋３　７

右端をそろえる

２．６
＋０．３７

小数点をそろえる

２/３＋４/５＝
１０/１５＋１２/１５

分母をそろえる

単位の考え（統合）

離散数学の話題(杉本先生)

【鳩の巣原理(Pigeonhole Principle)】

n、pを自然数として、$n \div p = q$ あまり r で $r \neq 0$ とする。

このとき、「鳩がn羽、鳩の巣がpこあるとする。これらの鳩が鳩の巣に入るとき、q+1羽以上の鳩がいる巣が必ずある。」

具体的な例

１．ある町の住民１、０００人を調査したところ、この町の住人の中に、同じ誕生日の人が3人以上いる日があります。

【解】
　鳩：住民　１、０００人
　巣：1年の日（365日）

具体的な例

２．１辺が70cmの正方形に鳩が50羽いたときに、少なくとも２匹の鳩の差は15cm以下である。

具体的な例

３．n個の自然数、a_1、a_2、…、a_n に対してその中の何個かをとって、和を作ります。このとき、それらの和の中でnで割り切れるものがあります。

$A_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$（$1 \leqq i \leqq n$）とする。
このとき、$A_i = q_i n + r_i$（$0 \leqq r_i < n$、$1 \leqq i \leqq n$）
ある $1 \leqq i < j \leqq n$ で、$r_i = r_j$ だから
$A_j - A_i = q_j n - q_i n = (q_j - q_i)n$

具体的な例

２．n個の自然数、a_1、 a_2 、 …、 a_n に対してその中の何個かをとって、和を作ります。このとき、それらの和の中でnで割り切れるものがあります。

例：　３、４、９、１３、１４では？

具体的な例

2．n個の自然数、a_1、 a_2 、 …、 a_n に対してその中の何個かをとって、和を作ります。このとき、それらの和の中でnで割り切れるものがあります。

例： 3、4、9、13、14では？

A_1 ＝ 3、A_2 ＝ 3＋4＝7、

A_3 ＝ 3＋4＋9＝16、

A_4 ＝ 3＋4＋9＋13＝29、

A_5 ＝ 3＋4＋9＋13＋14＝43、

$A_5 - A_1 = A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 40$

離散数学の話題

【グラフの利用】

　１０人で新幹線で旅行をします。ただし、座席は隣には知っている人が、また、3人の席はどの3人も知り合いになるようにします。どのように席を決めればよいでしょうか。

ただし、知り合い関係は以下のようになっています。

AはB，C，D　しか知りません

EはF，C，G　しか知りません.

HはE，H，B，Ｉ　しか知りません.

HはF，J，G　しか知りません.

JはH，B，G，D　しか知りません.

BはA，F，J，C　しか知りません.

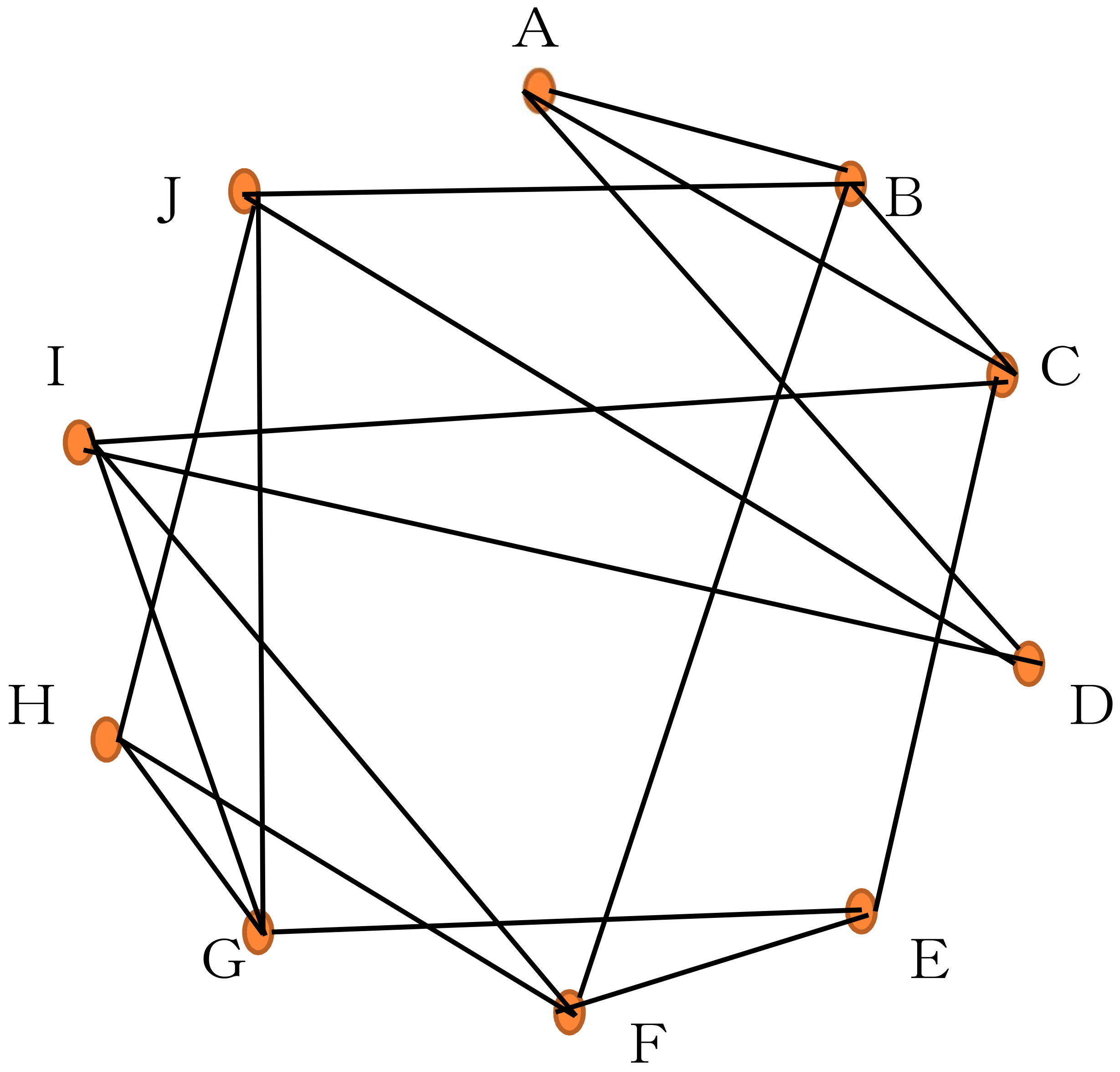
CはA，E，B，Ｉ　しか知りません.

GはE，H，J，Ｉ　しか知りません.

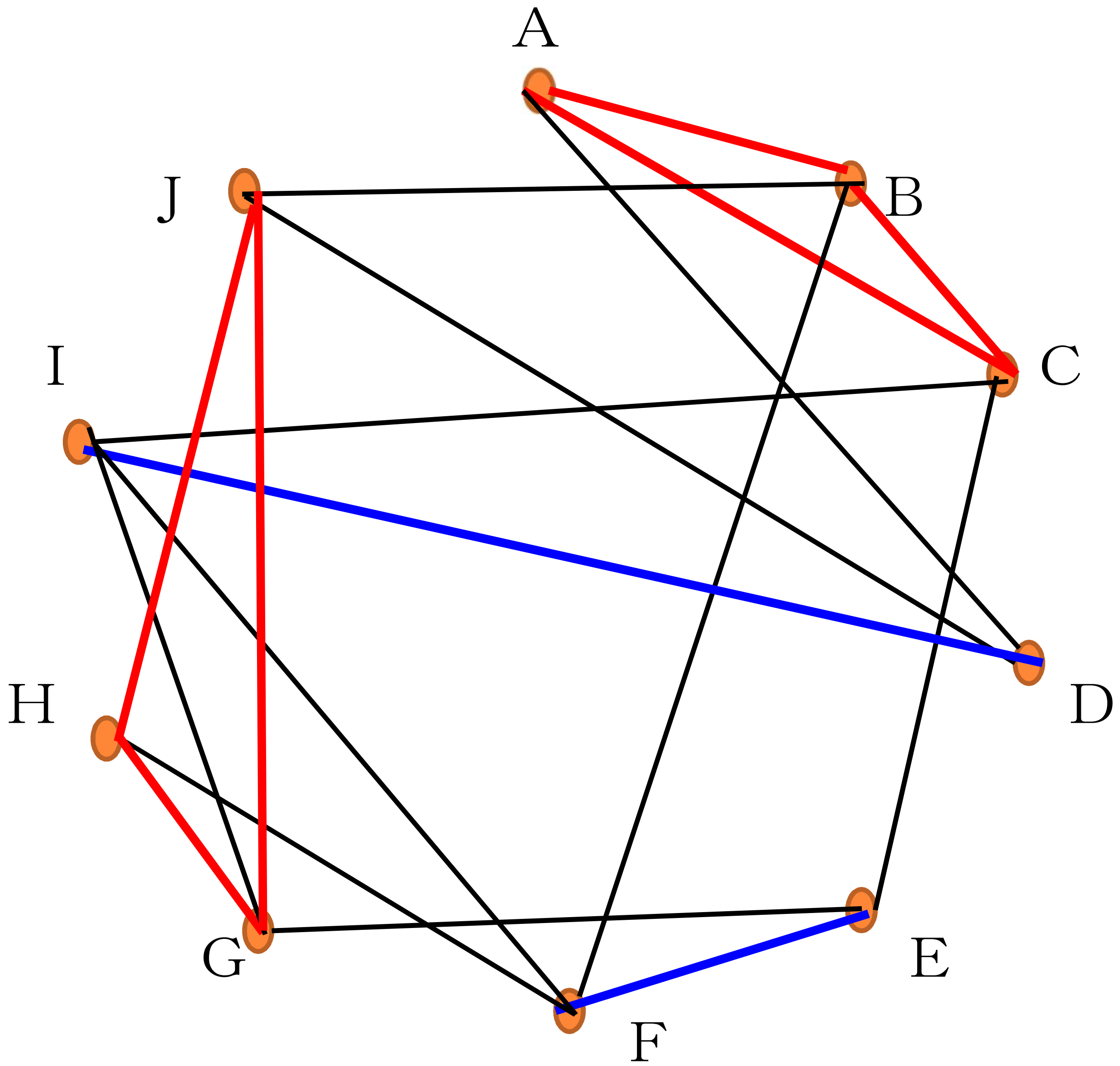
DはA，J，Ｉ　しか知りません.

ＩはF，C，G，D　しか知りません.

グラフでの表示

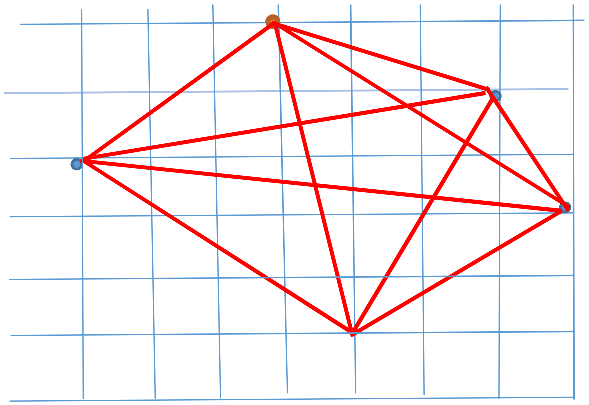


グラフでの表示



格子点の数学（根上　鳩の巣原理）

格子点上に異なる5点を取ったとき、その5点を結ぶ線分が格子点を通らないようにできるだろうか？



完全グラフ：全ての点（頂点）の組み合せが線（辺）で結ばれ図形（グラフ）のこと。
（格子点上に配置した5頂点の完全グラフ）

この考えを3次元空間にすると？

算数・数学教育の学力観の変遷

学習指導要領　　　　　　　　　学力観

・昭和22年学習指導要領（試案）

　　生活上の問題中心の内容

・昭和26年　生活経験の重視　　　生活志向の学力

　生活単元学習　　　　　　　　（生活を営む力）

　＜問題解決の呼称＞

・昭和33年　系統学習への移行　　　基礎志向の学力

　　基礎学力の向上、基準的性格の強化　（読み、書き、算）

　　4領域（数量関係）

　「数学的考え方」の導入

算数・数学教育の学力観の変遷

学習指導要領　　　　学力観

・昭和43年　現代化への移行　　　科学志向の学力
　数学教育の現代化　　　　（科学的探究力）
　「集合、関数、確率の導入」
　数学的な考え方　ー　統合、発展の重視

・昭和52年　ゆとりと充実　　　人間性志向の学力
　現代化の行き過ぎの修正　　（基礎的な知識、技能
　　教材の精選、重点化　　　　正しい判断、実践力）

・平成元年　意欲の重視　　　　主体性志向の学力
　心の教育につながる算数　　（思考力、判断力、表現力）
　情意面に重視　　　　　　見通し、よさ、活用の重視

算数・数学教育の学力観の変遷

学習指導要領 **学力観**

・平成10年　生きる力の育成　総合化を志向した学力

基礎、基本の徹底　（主体性、創造性、社会性）

個性の尊重

創造性の開発

算数・数学的活動の重視

・平成20年　生きる力を育む　活用する力

知識・技能の確実な習得　（スパイラルによる学習）

思考力・判断力･表現力の育成　考え、表現する力

（言語活動の充実）　算数・数学的活動の重視

主体的に学習に取り組む態度の育成

算数・数学科の教育課程改訂への動き

基礎的・基本的な内容・技能の確実な定着

（「速く」「簡単」にでよい？）

算数・数学の実用性、活用の強調

・進んで生活や学習に活用する態度を育てる
・算数・数学の実用性を明示（算数・数学の教育的価値－人間性、実用性、文化性）

例：統計的な見方・考え方

算数・数学的な思考力・表現力を育てる

平均の話し（平均って？）　（量と測定領域）

（１）　5人でボール投げをしました。それぞれ投げた距離は、２５m、３２m、２６m、２８m、３４mでした。1回あたりの平均は何mでしょう。

（２）　A地点とB地点の距離は24kmあります。自転車でA地点から出発してB地点に行くのに時速１２kmで、B地点からA地点には時速８kmで帰ってきました。平均の速さは時速何kmでしょうか。

（２）の解

$$\text{時速} = (\text{距離})/(\text{時間})$$

$$= \frac{48}{(24/12 + 24/8)}$$

$$= \frac{2(12\cdot 8)}{12+8}$$

$$= 9.6$$

<u>平均時速　９．６km</u>

平均の話し（平均って？）　（量と測定領域）

（３）　2年連続で物価が上昇しています。最初の年は4倍になり、次の年は2倍になりました。平均して1年に何倍上がったといえるでしょうか。

平均　（２＋４）÷6　＝　３　？

前の年	最初の年	次の年
100	100×４	400×２
100	100×３	300×３（？？）

（3）の解

平均 ＝ $\sqrt{(4 \cdot 2)} = 2 \cdot \sqrt{2}$

（1） 算術平均
（2） 調和平均
（3） 幾何平均

一般に （1）≧（3）≧（2）

日本の授業研究

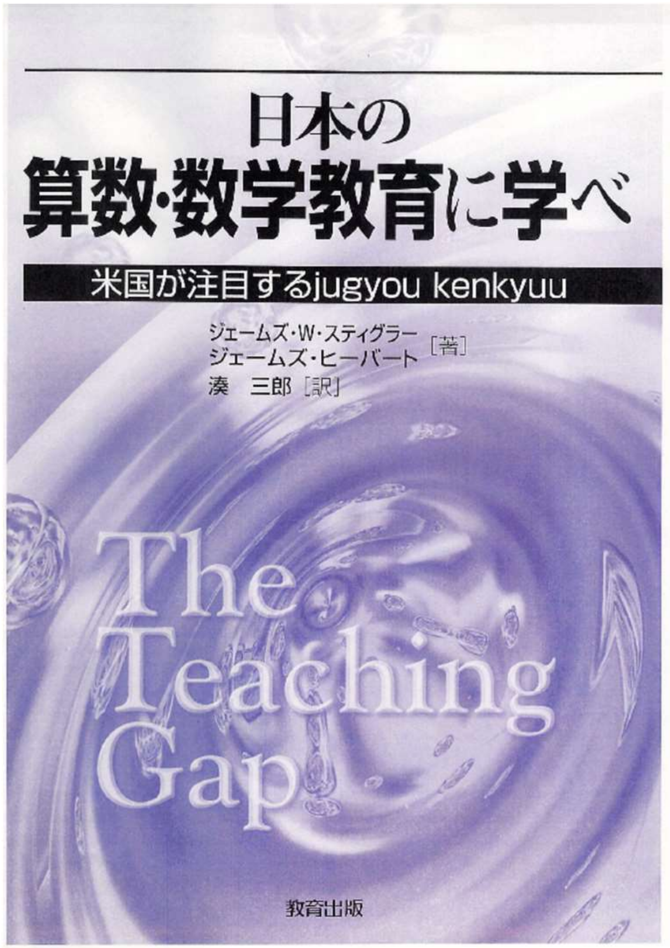
「日本の算数・数学教育に学べ」（2002）

ジュームズ・W・スティグラー

ジェームズ・ヒーバート

湊　三郎（訳）

教育出版



日本の授業研究の

世界的広がり

授業研究ー日本流授業改善方式

日本：授業実践の改善の責任は教師にある

「校内研修」

学校単位の専門職的能力開発の持続的過程ーほとんど全ての教師が参加

学年部会、教科部会、専門委員会等

最大の共通事項ー授業研究

授業研究

授業研究過程の段階

（１）問題の明確化
（２）学習指導案の立案
（３）授業の演示（授業事前研究）
（４）授業評価とその効果の反省
（５）授業の改訂
（６）校内研究授業
（７）再度の授業評価と改訂
（８）結果の共有

授業研究で得たもの

- 学習指導に関する長期にわたる改善過程
- 授業研究の過程は児童・生徒の学習に不断の焦点化
- 学習指導をその場面の中で直接改善することに焦点化（カリキュラム、教材）
- 教員の協同的な取り組み
- 授業研究に参加する教師は、それが自己の専門職的能力に対してだけでなく、学習指導に関する知識の開発にも貢献

問題解決を通して

1．基礎・基本の確実な定着

（1）内容としての基礎・基本

・教科書で示されている内容

（知識・理解、表現・処理(技能)）

「計算の意味・方法」、「図形の概念・性質」

・数学的な見方・考え方

（知識や技能を生み出す基になるもの）

・単位の考え

・論理的な考え

・関数の考え、図形の構成要素に着目する考え

（2）方法としての基礎・基本(考える過程の重視)

・自らの目標や解決への問いをもって授業をすすめること

・自ら解決の見通しをもち、解決の計画を立てて自力解決すること

・既習の内容や経験を活用し、発展させること

・ノートに授業の記録をし、集団の交流に生かしたり自己評価に生かすこと

・積極的にコミュニケーションを交わし、集団との学び合いを高めようとすること

問題解決を通して

２．主体的な活動を重視

創造性の基礎を培う

日常生活に積極的に活用しようとする態度を育てる

３．数学を楽しむことを重視

発見　……「わかった」

感動　……「すごい」「うまい」「なるほど」

達成感……「できた」「わかった」

４．算数・数学の活用能力を高める授業

単元を通した問題提示の在り方

問題解決による授業の過程（ポリヤ）

A.問題の理解・把握〔問題を構成する情報を集めたり整理して自ら問題をつくったり、与えられた問題について問題状況を知り、自分の問題としてとらえる。〕

B.解決の計画〔解決に必要な条件や情報(既習の経験や知識、技能、考え方など)を用意し、解決の見通しを立てる。〕

C.解決の実行〔算数・数学的活動の試行錯誤を通し、解決すべき内容（概念の形成、知識、技能の習得、数学的な考え方の気づきなど)の一応の結論を自力で導く〕

D.解決の検討〔見通したことを結果と照合して確かめたり、集団による子ども相互の解決内容を検討し、洗練した結論を導く〕

E.まとめ、ふり返り〔目標の到達状況を確認(基礎・基本の習得や評価規準の実現状況など)したり、授業活動について自己評価をする〕

問題解決と数学的な考え方

- 算数科においては、問題を解決したり、判断したり、推論したりする過程において、見通しを持ち筋道を立てて考える力を高めていくことを重要なねらいとしている。

  特に算数科の中では、類推的、帰納的、演繹的な思考が大事である。

  （平成20告示　学習指導要領解説　文科省）

- 問題解決に関わって情報の収集、選択、処理、活用、創造などの活動をさせるためには、筋道を立て、見通しをもって考えるなどのことが必要である。（論理的思考や直観力などの数学的な考え方が重要）

数学的な考え方の分類
（片桐重男の分類）

Ａ　数学的な態度（Ｂ、Ｃの原動力）

Ｂ　数学の方法に関係した数学的な考え方

Ｃ　数学の内容に関係した数学的な考え方

参考　「数学的な考え方の具体化と指導」
（算数・数学の真の学力向上を目指して）　片桐重男・著　明治図書

A 数学的な態度

1. 自ら進んで自己の問題や目的・内容を明確に把握しようとする

① 疑問をもとうとする

② 問題意識をもとうとする

③ 事象の中から数学的な問題を見つけようとする

2. 筋道の立った行動をしようとする

①目的に立った行動をしようとする

②見通しを立てようとする

③使える資料や既習事項、仮定に基づいて考えようとする

B 数学の方法

帰納的な考え方
類推的な考え力
演繹的な考え方
統合的な考え方
発展的な考え方
抽象化の考え方

抽象化、具体化
理想化、条件の
明確化

単純化の考え方
一般化の考え方
特殊化の考え方
記号化の考え方

記号化、数量化、
図形化の考え方

算数・数学的活動

C 数学の内容

単位の考え－単位の大きさや関係に着目する

表現の考え－表現の基本原理に基づいて考えようとする

操作の考え－ものや操作の言味を明らかにしたり、広げたり、それに基づいて考えようとする

アルゴリズムの考え－操作のし方を形式化しようとする()

概括的把握の考え－ものや操作の方法を大づかみにとらえたり、その結果を用いようとする

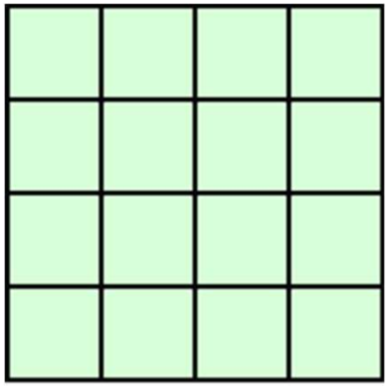
基本的性質の考え－基木的法則や性質に着目する

関数的な考え－何を決めれば、何が決まるかということに着目したり、変数間の対応のルールを見つけたり、用いたりしようとする

式についての考え－事柄や関係を式に表したり、式をよもうとする

数学の方法（帰納的、類推的な考え）

下図のように1辺nの正方形の縦、横がn等分され、平行線が引かれている。この図の中に正方形は大小合わせていくつあるか。



［n=4 の場合］

（附属札幌小学校　授業研究会（H24．02．10）
4学年　加瀬先生）

この問題における数学的な考え方

・問題の明確化

　全部の個数を求めること

　上手な数えやすい数え方の工夫

・分類をして数えることのよさ

　正方形の大きさによって分類

・記号化のよさ

・確かな操作によって、より明確に結果の正しいことを判断する

・より明確、簡単な数え方を工夫する

この問題における数学的な考え方

- 関数関係にある数え易いものに置き換えよう

  正方形と頂点

- 数え方を式に表そう

  4×４＋３×３＋２×２＋１×１

- 一般化しよう

  1辺の長さが５、６になったら？

- 帰納的な考え方
- 類推的な考え方
- 演繹的な考え方

数学の内容（単位の考え）

単位の考えによって数概念の理解を深める

整数の加法 ➡ 小数の加法 ➡ 分数の加法

数概念の理解が深まる

26＋37

2.6＋0.37

2/3＋4/5

　２　６
＋３　７

右端をそろえる

　２．６
＋０．３７

小数点をそろえる

2/3＋4/5＝
10/15＋12/15

分母をそろえる

単位の考え（統合）

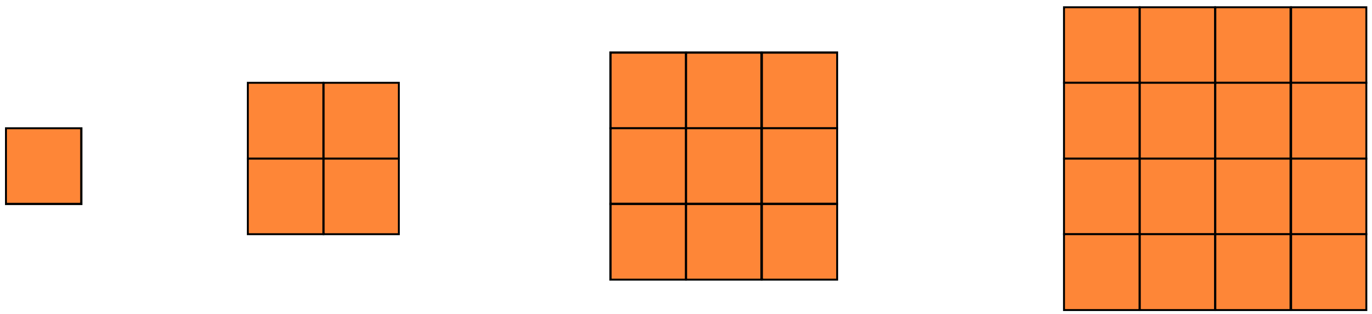
小4の解答

①１辺の長さが１、２、３･･･の場合を数えて帰納的に規則を見つけていく。

長さ1のとき　１個、　長さ2のとき　５個

長さ3のとき　１４個、　長さ4のとき　･･･

ふえ方になんか決まりはないかな？



$$1 \xrightarrow[4]{} 5 \xrightarrow[9]{} 14 \xrightarrow[16]{} 30$$

小４の解答

②表を作成する。

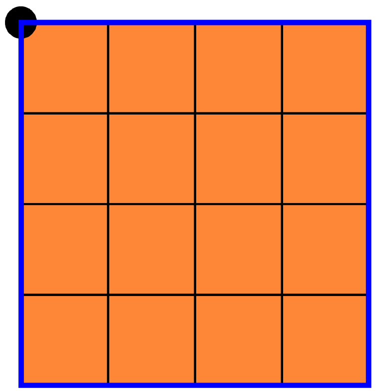
	長さ　１	長さ　２	長さ　３	長さ　４	長さ　５
１マス	1	4	9	16	
４マス		1	4	9	
９マス			1	4	
16マス				1	
マス					

数学的な考え方:帰納的な考え方

中学生の解答

数え方の工夫

作られる正方形と頂点（左上）の対応



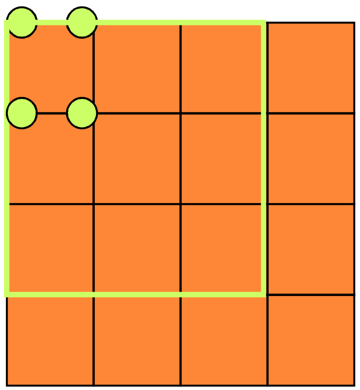
長さ4（16マス）の長方形と

左上の頂点　１個

中学生の解答

数え方の工夫

作られる正方形と頂点（左上）の対応



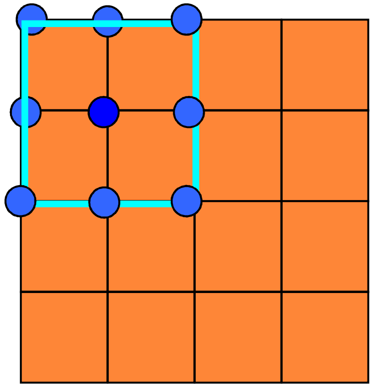
長さ3の長方形と

左上の頂点　4個

中学生の解答

数え方の工夫

作られる正方形と頂点（左上）の対応



長さ2の長方形と
左上の頂点　９個

この考察を続けることによって、長さnのときにできる、全部の正方形の数は

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

で求められる。（演繹的な考え方）