北　数　教

第４３回　数学教育実践研究会

－教育現場における基礎研究－

行列方程式の解法について

（可換零因子の存在と一意性）

平成１４年１１月３０日(土)

ニッセイＭＫビル　　４階

北海道石狩南高等学校

数学科教諭　小栗　是徳

目　　次

	ページ
0、前回の訂正と補足	3
1、はじめに	5
2、零因子とは何か	6
3、零因子の定義	6
4、可換零因子の存在と一意性	7
5、行列方程式の解法について	8
6、まとめ　　　－今後の進展－	9

０、前回の訂正と補足

前回（第４２回 数学教育実践研究会兼第８回数実研“夏季セミナー”において発表したレポート『行列における零因子の構造』について、下記の通り訂正と補足をします。関係するのは、同レポート７頁下段～８頁上段です。第５７回北数教大会では、訂正、補足済みですが、改めてお詫び申し上げます。関係箇所を再掲すると

（３） $\boxed{\text{Ⅰ　}AB=O\text{となる}A,\ B\text{の必要十分条件は何か？}}$

$A=(m,\ n)$，$B=(n,\ l)$とする。

Prop２　$AB=O \Leftrightarrow \mathrm{Im}B \subseteq \mathrm{Ker}A$

pr）☆より『$AB=O \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}'_j=0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \perp \mathbf{b}'_j$』及びProp１のCorより成立。　□

Prop２は、Ⅰの回答として明快であるが、これについて補足する。

Cor　　$AB=O \Rightarrow \mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B \leqq n$

pr）Prop２により、$AB=O \Rightarrow \mathrm{Im}B \subseteq \mathrm{Ker}A \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}B) \leqq \dim(\mathrm{Ker}A)$
$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}B) \leqq n-\mathrm{rank}A$［∵Th３のCor
$\Rightarrow \mathrm{rank}B \leqq n-\mathrm{rank}A$　□

上記のCorは、⇐が成り立つとは限らない。そこで、零因子を改めて定義する。

Def８（零因子の定義）
　Aが零因子とは、OでないAに対して、$\exists B \neq O$ s.t. $AB=O$ または $BA=O$

このように定義して、『$\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B \leqq n$』を仮定すると、Aに対して『$\mathrm{Im}B \subseteq \mathrm{Ker}A$』つまり$B=(\mathbf{b}'_1 \cdots \mathbf{b}'_l)$を$\mathrm{Ker}A=\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_m\}^{\perp}$のsub.sp.ととれば、Corの⇐も成立。

この結果、Ⅰの回答として『$AB=O \Leftrightarrow \mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B \leqq n$』が得られる。　☆☆

４　$\boxed{\text{任意の行列}A\text{に対して、}AB=O,\ CA=O\text{となる}B,\ C\text{をそれぞれ構成せよ。}}$

$AB=O$となるBの構成については、３で明らかになった。

次に、$CA=O$となるCの構成については，Cを$(k,\ m)$行列とすると
☆☆より、『$CA=O \Leftrightarrow \mathrm{rank}C+\mathrm{rank}A \leqq m$』が得られる。
具体的には，Prop１を使うと、$V^m \supseteq \mathrm{Im}A$：sub.sp.より、$V^m=(\mathrm{Im}A)\oplus(\mathrm{Im}A)^{\perp}$
$(\mathrm{Im}A)^{\perp} \equiv \{x \in V^m : x \cdot \mathbf{a}'_i=0,\ 1 \leqq \forall i \leqq n\}$
$=\{{}^t x \in V^m : {}^t x A=0\}$　ここで、行ベクトル：${}^t x=(x_1 \cdots x_m) \in V^m$

はV^mのsub.sp.である。よって、$C=(c_{ij})=\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix}$　$\mathbf{c}_i \in V^m$　$1 \leqq \forall i \leqq k$の構成は、Aに対して、

$\{\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_k\}$を$(\mathrm{Im}A)^{\perp}$のsub.sp.ととればよい。

以上の中で、『Def８（零因子の定義）』からを、訂正、補足します。この中の、☆☆は成立しません。何故なら、『$\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B \leqq n$』を仮定すると、そのときA，Bは、既に与えられているので、Aに対して『$\mathrm{Im}B \subseteq \mathrm{Ker}A$』、つまり$B=(\mathbf{b}'_1 \cdots \mathbf{b}'_l)$を$\mathrm{Ker}A=\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_m\}^{\perp}$のsub.sp.ととることはできないからです。
したがって、これに関係した部分を、下記の通りに訂正します。
　また、この訂正の中で、左零因子、右零因子を使っていますので、上記のDef８（零因子の定義）『Aが零因子とは、OでないAに対して、$\exists B \neq O$ s.t. $AB=O$ または $BA=O$』を、本稿７

頁のDef１で、左零因子、右零因子、可換零因子まで言及して再定義しました。

［訂正後］
上記Prop２のCorの逆は、成り立たない。
本稿７頁のDef１のように定義すると、Ⅱの回答は、与えられたＡに対してProp２より、『$\mathrm{Im}B \subseteq \mathrm{Ker}A$』、つまり$B=(b'_1 \cdots b'_l)$を$\mathrm{Ker}A=\{a_1 \cdots a_m\}^{\perp}$のsub.sp.となるようにＢを構成すればよい。Ｂ＝Ｏは自明であるので、これを除外したＢが構成できるためのＡの条件を考えると、次のようになる。

Prop３　Ａが左零因子$\Leftrightarrow 1 \leqq \mathrm{rank}A \leqq n-1$

pr)（⇒）Def８より$A \neq O$に対して、$\exists B \neq O$ ｓ．ｔ．$AB=O$
$A \neq O$より、$1 \leqq \mathrm{rank}A$。
$B \neq O$より、$1 \leqq \mathrm{rank}B$。よって、Prop２のCorより、$\mathrm{rank}A \leqq n-\mathrm{rank}B \leqq n-1$
$\therefore\ 1 \leqq \mathrm{rank}A \leqq n-1$
（⇐）Th３のCorより、$1 \leqq n-\dim(\mathrm{Ker}A) \leqq n-1$　$\therefore 1 \leqq \dim(\mathrm{Ker}A) \leqq n-1$
$B \equiv \mathrm{Ker}A$ととれば、$B \neq O$かつProp２より$AB=O$　よって、Ａは左零因子　□

Cor１　Ａが右零因子$\Leftrightarrow 1 \leqq \mathrm{rank}A \leqq m-1$

Cor２　Ａが零因子　$\Leftrightarrow 1 \leqq \mathrm{rank}A \leqq \mathrm{Max}(m,\ n)-1$

次に、$CA=O$となるＣの構成については，Ｃを（ｋ，ｍ）行列とすると，Prop１より、
$V^m \supseteq \mathrm{Im}A$：sub.sp.、$V^m=(\mathrm{Im}A)\oplus(\mathrm{Im}A)^{\perp}$
$(\mathrm{Im}A)^{\perp} \equiv \{x \in V^m : x \cdot a'_i = 0,\ 1 \leqq \forall i \leqq n\}$
$= \{{}^t x = (x_1 \cdots x_m) \in V^m : {}^t x A = \mathbf{0}\}$
はV^mのsub.sp.である。
よって

$$C=(c_{ij})=\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_k \end{pmatrix} \quad c_i \in V^m$$

$1 \leqq \forall i \leqq k$の構成は、Ａに対して、$\{c_1 \cdots c_k\}$を$(\mathrm{Im}A)^{\perp}$のsub.sp.ととればよい。
［以上、訂正終］

本稿は、前回とリンクしているのですが、前回のレポートをみていない方も対象に記述しました。そのため、前回と一部重複しているところがあります。

１、はじめに

実数や複素数の世界では、零因子は存在しないので『ｘｙ＝０⇔ｘ＝０　または　ｙ＝０』が成立する。これゆえに、２次以上の方程式の解は因数分解によって求めることができる。 ところが、行列の世界では、因数分解ができても零因子が存在するために厄介である。
例えば『$A^2-A-2E=O$をみたす正方行列Ａを求めよ』という問題は$(A-2E)(A+E)=O$より、$A=2E$，$-E$は明らかだが、これ以外にも$A=A_0$なる解が存在する。このとき、$A_0-2E\neq O$，$A_0+E\neq O$，$(A_0-2E)(A_0+E)=O$が成立するので、A_0-2E、A_0+Eを零因子という。
この零因子を回避した解の求め方については、公文国際学園の石濱文武氏は『数研通信』４３号で『行列ｎ次方程式の解法』と題して、次のように統一的に論じている。

２次の正方行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$については、
Caylay-Hamiltonの方程式 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$を使えば、Ａのｎ次方程式$F(A)=O$に対してＡの次数を下げて、$sA=tE$とできる。
（ｉ）$s\neq 0$のとき、$A=kE$，ここでｋは$F(k)=O$の解
（ii）$s=0$のとき、$t=0$，このときＡは、$s=t=0$なる行列
としている。

この方法を仮に『ｓＡ＝ｔＥ法』と名付けよう。
ところが、同氏は『§５　おわりに　注②』で、『$(A-2E)(A+E)=O$より、$\det(A-2E)=0$，$\det(A+E)=0$から、$A=2E$，$-E$以外の解を得ることもできるが理論的に難点があることに注意しなければならない』としている。
同氏のここでいう難点とは、零因子の存在である。つまり、行列方程式を解くに当たり、立ちはだかるのが零因子なのである。
実際の教育の現場で、生徒に指導する場合は、上記の『ｓＡ＝ｔＥ法』が容易であり、零因子を避けて指導することになる。しかし、生徒は後述のように零因子に興味、関心をもっているので、教育的指導の立場からは、逆に積極的に零因子を研究し動機づけに大いに活用したいものである。そうすることによって、教師自身も生徒と共に学ながら数学の世界を広げられよう。
本稿の目的は、前回のレポートを発展させ、『行列における零因子とはいかなる構造をしているか』という生徒からの質問に、さらに具体的に応えると共に、零因子を応用した行列方程式の解法である。
本稿でのキーワードは、可換零因子であるが、このアイデアは、極めて単純である。それは、$(A-2E)(A+E)=(A+E)(A-2E)=O$を観察していて、$A-2E$と$A+E$とが可換であることから思いついたのである。したがって、本稿は、この『可換零因子』を重要な条件として展開している。

２、零因子とは何か

行列における零因子とは、例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように、Ａ≠Ｏ，Ｂ≠Ｏ、ＡＢ＝Ｏ が成り立つとき、Ａ，Ｂを零因子という。
ここで、左側の零因子の例は、非可換である。よって、一般に零因子は可換でない。

（１） 高校生にとっての零因子

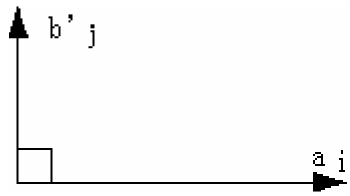
高校生にとって初めての零因子との出会いは、新鮮な驚きである。本校でも、かつて数学Ｃの授業で生徒から『行列における零因子とはいかなる構造をしているか』『どうすれば零因子がつくれるのか』という質問があったばかりでなく、昨年の本校生徒の加賀谷英樹君は、以下の通りの小研究を試みた。

（２） 生徒の小研究（要旨）

上記のような例から、２次の正方行列について『零因子⇒逆行列をもたない』ことが予想されるので、これを背理法によって証明。（必要条件）
ところが、逆に

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように、『逆行列をもたない』からといって『零因子』になるとは限らないので、十分条件についても考えた。



$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b'}_1 & \boldsymbol{b'}_2 \end{pmatrix}$$

とおくとき、必要条件より、$\mathbf{a}_1 // \mathbf{a}_2$、$\mathbf{b}'_1 // \mathbf{b}'_2$であるが、必要十分条件として
『$\mathrm{AB}=\mathrm{O} \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}'_j = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \perp \mathbf{b}'_j \quad 1 \leqq \forall i,\ j \leqq 2$』 を導いた。

３、零因子の定義

通常、『Ａ≠Ｏ，Ｂ≠Ｏ、ＡＢ＝Ｏ が成り立つとき、Ａ，Ｂを零因子という。』としているが、この定義では、ＡとＢの双方を零因子としているため混乱が生じている。実際、石濱氏や本稿２２の生徒の小研究では、『ＰＱ＝Ｏ⇒detＰ＝０ かつ detＱ＝０は成立するが、この逆は成立しない』としている一方、例えば数研出版の『改訂版 チャート式 解法と演習 数学Ⅲ＋Ｃ』の267頁のinf.では、『Ｐが零因子⇔Ｐは逆行列をもたない』としている。
いずれも、零因子の定義がwell-definedでないために起こる混乱である。そこで、零因子を次のように定義する。

Def１（零因子の定義）
ⅰ Ａが左零因子とは、ＯでないＡに対して ∃Ｂ≠Ｏ ｓ．ｔ．ＡＢ＝Ｏ
ⅱ Ａが右零因子とは、ＯでないＡに対して ∃Ｂ≠Ｏ ｓ．ｔ．ＢＡ＝Ｏ
ⅲ Ａが零因子とは、Ａが左零因子または右零因子、つまり
　ＯでないＡに対して ∃Ｂ≠Ｏ ｓ．ｔ．ＡＢ＝Ｏ または ＢＡ＝Ｏ
ⅳ Ａが可換零因子とは、Ａが左零因子かつ右零因子、つまり
　ＯでないＡに対して ∃Ｂ≠Ｏ ｓ．ｔ．ＡＢ＝ＢＡ＝Ｏ

Remark このように定義すると、『Ｐが零因子⇔Ｐは逆行列をもたない』が成立する

Def２（行相似、列相似）
正方行列Ｐ，Ｑについて
ＰとＱが『行相似』とは、ＰとＱの対応する各行ベクトル同士が従属

ＰとＱが『列相似』とは、ＰとＱの対応する各列ベクトル同士が従属

Remark 通常の線型代数学では
『ＰとＱ相似⇔∃Ａ s.t. detＡ≠０ かつ $Q = A^{-1}PA$』と定義しているが、ここでの行相似、列相似とは、単純に各行や列の成分の定数倍のことである。

以下すべて、２次の正方行列に限るものとする。

Lemma１（左零因子同士または右零因子同士の関係） Ａ≠０のとき、
ＢＡ＝ＣＡ＝Ｏ⇒ＢとＣは、行相似、つまり、左零因子同士は行相似
ＡＢ＝ＡＣ＝Ｏ⇒ＢとＣは、列相似、つまり、右零因子同士は列相似

pr）detＡ＝０より、Ａの各列ベクトル $\mathbf{a}'_j$ 同士が従属
したがって、$B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_1\\ \boldsymbol{c}_2\end{pmatrix}$ とおくと、ＢＡ＝ＣＡ＝Ｏより $\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{a}'_j=\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{a}'_j=0$
つまり、$\mathbf{b}_i\perp\mathbf{a}'_j$ かつ $\mathbf{c}_i\perp\mathbf{a}'_j$ よって、$\mathbf{b}_i$ と $\mathbf{c}_j$ は従属となり、ＢとＣは、行相似
同様に、『ＡＢ＝ＡＣ＝Ｏ⇒ＢとＣは、列相似』も成立する □

Lemma２．Ａ≠０のとき、ＢＡ＝ＣＡ＝Ｏ かつ ＡＢ＝ＡＣ＝Ｏ
⇒∃ｋ:スカラー s.t. Ｃ＝ｋＢ または Ｂ＝ｋＣ

pr）Ｂ＝Ｏ または Ｃ＝Ｏのときは、ｋ＝０ととれば成立するので、Ｂ≠Ｏ かつ Ｃ≠Ｏとする
detＢ＝０より $B=\begin{pmatrix}k_1\boldsymbol{b}_1\\ k_2\boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}\boldsymbol{b}$ detＣ＝０より $C=\begin{pmatrix}l_1\boldsymbol{c}\\ l_2\boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ とおくと、Lemma１よりＢとＣは行相似
だから $\mathbf{c}=l\,\mathbf{b}$ とおくと $C=\begin{pmatrix}l_1 l\boldsymbol{b}\\ l_2 l\boldsymbol{b}\end{pmatrix}=l\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}\boldsymbol{b}$

次に、再びLemma１より $B=\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}\boldsymbol{b}$ とＣは列相似より、$\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}$ とおくと $C=(lm)B$ が成立。
このとき、$k=lm$ とおくと $k\neq0$ □

４、可換零因子の存在と一意性

Main Theorem１．Ａ≠Ｏとする
　detＡ＝０⇔$\exists^1$Ｂ≠Ｏ s.t. ＡＢ＝ＢＡ＝Ｏ 但しＢの一意性は定数倍を除いてである

pr)⇐については、背理法により成立
　⇒についてＡ$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\neq 0$とすると、detＡ＝ａｄ－ｂｃ＝０

［第１段］Ｂの存在を示す
Caylay-Hamiltonの方程式より、$A^2-(a+d)A=O$
　　$\{A-(a+d)E\}A=A\{A-(a+d)E\}=O$
よって、Ａ≠Ｏに対して、$B=g(A)\equiv A-(a+d)E=\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$とおけば、
Ｂ≠Ｏ かつ ＢＡ＝ＡＢ＝Ｏ が成立する

［第２段］Ｂの一意性を示す
　if，∃Ｃ≠Ｏ s.t. ＡＣ＝ＣＡ＝Ｏとすると
detＡ＝０、ＢＡ＝ＣＡ＝Ｏ かつ ＡＢ＝ＡＣ＝Ｏが成立しているので、
Lemma２.より，∃ｋ≠０:スカラー s.t. Ｃ＝ｋＢ
よって、ＣはＢの定数倍 となり、Ｂの一意性が成立する　□

Th２.（可換零因子の構造）
　Ａ≠Ｏ、Ｂ≠Ｏとする。$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$で表すと
　　ＡＢ＝ＢＡ＝Ｏ⇔detＡ＝detＢ＝０ かつ ∃ｋ≠０:スカラー s.t.
　　　　$k a_{ii}+b_{jj}=0$，$k a_{ij}=b_{ij}$，$1\leqq\forall i\neq j\leqq 2$

pr)⇐についてＡ$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\neq 0$とおくと、detＡ＝ａｄ－ｂｃ＝０
　$k a_{ii}+b_{jj}=0$，$k a_{ij}=b_{ij}$　$1\leqq\forall i\neq j\leqq 2$より、$B=k\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}\neq 0$となる
　このとき、ＡＢ＝ＢＡ＝Ｏが成立
⇒について 背理法によりdetＡ＝detＢ＝０が成立
　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\neq 0$とすると、Main Theorem１．より$B=k\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$であるから
　　$k a_{ii}+b_{jj}=0$，$k a_{ij}=b_{ij}$　$1\leqq\forall i\neq j\leqq 2$が成立　□

Cor.　Ａ≠Ｏ，$A^2=O$ ⇔ detＡ＝trＡ＝０

pr) Th２.で、Ｂ＝Ａとおけばよい　□

Def３．$A^m=O$ かつ $A^{m-1}\neq O$となるＡを冪零行列という。

　冪零行列は、Def１から可換零因子の特別な場合である。次のCor２.ように、行列方程式が重解のとき、冪零行列になるので、冪零行列の構造についても調べる必要がある。

Pop１．（冪零行列と固有値）
　　Ａを冪零行列、つまり$A^m=O$ かつ $A^{m-1}\neq O$⇔Ａの固有値はすべて０

pr)⇐については、Caylay-Hamiltonの方程式で解と係数の関係から成立
⇒について、Ａの任意の固有値をλとすると、$\exists\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ ｓ．ｔ．$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$
　よって、$A^m\mathbf{x}=A^{m-1}(A\mathbf{x})=A^{m-1}(\lambda\mathbf{x})=\lambda(A^{m-1}\mathbf{x})$

以下同様にして、$A^m x=\lambda^m x$が成立。　$A^m=O$より$\lambda^m=0$　∴$\lambda=0$　□

Remark１．Prop１は、その証明も含めｎ次正方行列に拡張できる

Cor１．２次の正方行列では、Ａが冪零行列⇔ $A^2=O$ かつ $A\neq O$

Remark２．このCorの結果、冪零行列Ａの構造は、ｍ＝２のときについて調べればよい

Cor２．$(A-\alpha E)^k=O, k\geqq 2$ ⇔ $A=\alpha E$、$\alpha E+A0$ ここで $\det A_0=\mathrm{tr}A_0=0$

５、行列方程式の解法について

Prop２．２次の正方行列Ａについての行列方程式 $A^2+kA+lE=O$ の解は、特性方程式 $x^2+kx+l=0$ の２つの解をα、βとするときα＝β（重解）も含めて
（ｉ）$A=\alpha E$、βE
（ⅱ）$\mathrm{tr}A=-k$，$\det A=l$をみたす任意のＡ

pr) 条件より、因数分解して $(A-\alpha E)(A-\beta E)=(A-\beta E)(A-\alpha E)=O$ ☆
よって、（ｉ）$A=\alpha E$、βE は成立　次に(ⅱ)は、Th２を使って示す

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\text{とおくと、}A-\alpha E=\begin{pmatrix}a-\alpha&b\\c&d-\alpha\end{pmatrix}\quad A-\beta E=\begin{pmatrix}a-\beta&b\\c&d-\beta\end{pmatrix}$$

ここで、$A-\alpha E\neq O$，$A-\beta E\neq O$であるから、Th２より☆は次の２式と同値
$\det(A-\alpha E)=\det(A-\beta E)=0$ かつ $(a-\alpha)+(d-\beta)=0$
解と係数の関係より $a+d=-k, ad-bc=l$ つまり$\mathrm{tr}A=-k$，$\det A=l$が成立。
特に、α＝β（重解）のとき、$(A-\alpha E)^2=O$より、$A=\alpha E$以外の解は、Th２のCorより、
$\det(A-\alpha E)=0$ かつ $\mathrm{tr}(A-\alpha E)=0$ と同値である。同様に解と係数の関係より
$a+d=-k, ad-bc=l$ つまり$\mathrm{tr}A=-k, \det A=l$が成立　□

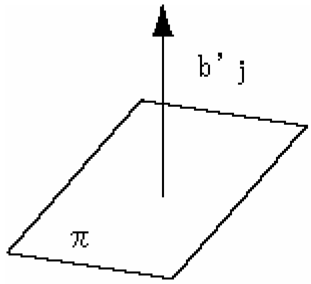
６、まとめ　－今後の進展－

（１）　解の存在と一意性

Th２は、『可換零因子の構造』についての明快な結果である。それを可能にしたのは、MainTheorem１で『可換零因子の解の存在と一意性』が保証されたからである。一般に、数学では、存在は容易であるが、その一意性が問題になることが多い。

具体例を上げると、例えば本校の職員レクリエーションでかつて、余興的に出題された問題である。『$1/3=(1/x)+(1/y)+(1/z)$ をみたす異なる自然数（ｘ，ｙ，ｚ）の組を３０秒間で求めよ』と言われて時間内にできなかったことがある。要領のいい人は、多分ｘ，ｙ，ｚとして適当な３の倍数を考えて、数当てをするであろう。しかし、その結果、答えの１つが見出されたとしても、それは答えの１つが求まっただけであって、解の全てである保証はない。ここが、算数と数学の分岐点である。数学では、解の存在の次に、解は唯一つか、それ以外に解はないか、さらに論証しなければならないのである。

本稿で、２次の正方行列について、『可換零因子の構造』が明らかになったが、これを３次以上にすると様相が一変する。３次元空間を考えただけでも、$AB=O$のとき、次のように３通り考えられるので、一意性は言えなくなってしまうからである。



ＣＡＳＥ２

Ａ，Ｂが３次の正方行列のとき

ＣＡＳＥ１：Ａ，Ｂが２次のときの単純な拡張。このとき、a_i、b'_jで１つの平面πを決定している。（πを３次元空間の真部分空間という。）

ＣＡＳＥ２：a_iが１つの平面πを決定して、$\pi\perp b'_j$ （このとき、πを $\{b'_j\}$ の直交補空間、または $\{b'j\}$ をπの直交補空間という。）

ＣＡＳＥ３：上と逆にb'_jが１つの平面πを決定して、π⊥a_i（直交補空間も同様）

まとめると、空間（３次元）では
『ＡＢ＝Ｏ⇔a_iを含む平面πまたは直線ｌと、b'_jを含む直線ｇまたは平面Σが、垂直』
(このとき、平面π、直線ｌを、それぞれ直線ｇ、平面Σの直交補空間という。)
　一般に、これをｎ次元に拡張すると、ｎ次元空間を垂直な２つの部分空間W_1、W_2に分割したとき、このW_1からa_iを、W_2から$b'j$をとれば、ＡＢ＝Ｏが成立する。
　このように一意性は無理としても、前回のレポートでｎ次元空間で可換零因子の存在が証明できたので、ｎ次正方行列の中で可換零因子が集合的にどんな位置付けになるか研究する余地は残っている。この場合、本稿での議論がどれだけ３次元以上に拡張、発展できるか、今のところ全く見通せていない。また、２次正方行列でも、行列次方程式の解法以外に、可換零因子が応用が考えられる。
　教育的にも研究的にも、零因子はその定義すら曖昧で、厄介者扱いされているようで残念なことである。一般の零因子は、明らかに研究対象にはなり得ないが、行列における零因子は大いに教育的かつ研究的に開発の余地を残していると思う。

(２)　数学教育における説明責任

　最近、情報公開と共に説明責任が盛んに言われるようになった。数学教育の世界でも、いろいろな場面で説明責任が問われるであろう。この中で、生徒からの数学に関する質問、疑問に対して、きちんと対応することは、説明責任ということばを使うまでもなく、数学教師としては当然の義務である。これらの責任や義務を果たさないと、教師と生徒間の信頼関係は根本から崩れてしまうであろう。数学教師として数学に関して生徒に責任をもつためには、今回の『零因子』に限らず、基礎研究は必要不可欠である。