北海道札幌東陵高等学校

数学参考書（Ⅰ A Ⅱ B Ⅲ C）

”栄冠を手にするために！”

年　　　組　　　番

氏名（　　　　　　　　　　　　　　　　）

「一国の青年を見ればその国の命運はわかる。」とカーライルは言った。青年が堕落しているところに未来はない。様々な社会状況の中で次代への期待を込め、またその飛翔を念願し、本書を著した次第である。さらにこの公式集が諸君の進路実現の一助となれば望外の喜びである。

平成１５年１月１７日

雪原の彼方を見つめながら

数学科　前田勝利

「生徒の学習風景を見ていると、どうしても公式集では不充分で、参考書の必要性を感じた。本務、あるいは雑務に追われ、なかなか作業が進まなかったが、ようやく参考書らしく見えてきた次第である。生徒の学習の手助けとなれば幸いである。」

平成１９年３月３１日

力強い陽光を感じながら

数学科　前田勝利

〇数学の本質はその自由性にある。（カントール）

〇巧言令色、鮮矣仁。剛毅木訥、近仁。（論語）

〇学而時習之、不亦説乎。（論語）

〇有朋自遠方来、不亦楽乎。（論語）

〇人不知不慍、不亦君子乎。（論語）

〇学而不思則罔、思而不学則殆。（論語）

〇破壊は一瞬、建設は死闘。（世界桂冠詩人）

〇闘う心があれば必ず勝つ。（世界桂冠詩人）

〇憧れを知る者のみ、我が悩みを知らめ。（ゲーテ）

〇未来は努力する者のためにある。（ベルクソン）

〇悪は多けれども、一善に勝つことなし。（格言）

〇数学者はいくぶんなりとも詩的感情がなければ、

真の数学者とはいえない。（ワイエルシュトラス）

はじめに

「学ぶ」と言う言葉は「まねぶ」という言葉のダブレットである。何のためにまなぶのか？教育基本法の第１条には教育の目的として「教育は、人格の完成をめざし、平和的な国家及び社会の形成者として、真理と正義を愛し、個人の価値をたつとび、勤労と責任を重んじ、自主的精神に満ちた心身ともに健康な国民の育成を期して行わなければならない。」と謳われている。

全米トップ３に入るといわれる寄宿制私立学校チョート・ローズマリー・ホールの校長は「何のために学習するのか？」といった問に対し、「教養がないと人生がつまらないものになる。」と答えた。

学習する内容を身に付けていくにはその前に基礎学力がなければならない。その基礎学力を付けるためには基礎の基礎学力がなければならない・・・。落語にでてきそうな話であるが、いつまでも同じような議論をしていても始まらないので、まずはその学年で相当といわれる学力を身に付けるよう生徒・教員が協力して取り組んでいくほかない。

数学教育についていえば、数学の力を身に付けていくということは数学を理解していく過程が対象化されたものであり、数学を了解していく過程のことである。了解していく過程が重要であり、了解しそこなった原因が解明されれば、わかるようになる。しかし現在の数学の教育の仕方として公式の意味や何故そのようになるのかという科学的な探求的姿勢よりも公式の使い方やうまく使えることのみに終始する傾向があり、そのため習っている期間は理解できているような気になるが、しばらくすると忘れるし、意味づけもないので、忘却の彼方に消え去ってしまう。人間は意味があることは覚えているが（有意味受容学習・・・ハビガースト)、意味のないことは 24 時間で約半分忘れる（エビングハウス・・・把持曲線)。学習が意味のないことだとは誰も思わないと思うが、無意識のうちにそう判断するのだろう。

生徒は好きな歌手やプレーステーションなどのテレビゲームの攻略法など興味のあることは細かく覚えている。それなら授業を楽しいものにしたらよいということになる。それは当然なことで、一頃「わかる授業」ということがいわれた。知的な興味がわくような

「わかる授業」「楽しい授業」ならよいが、考えなくてもよい「わかる授業」「楽しい授業」はむしろ生徒の学習意欲を減退させ、学習する喜びや目標を見失わせることにつながるであろう。どんなことでも学習して身に付けるには、それ相応の努力や苦労があり、それを乗り越えたときに喜びや面白さが生まれてくるのだと思う。勿論高校生に意味のない苦労をするだけの時間もないので、そこは教員の腕の見せ所である。学習については、今はむしろ教員が気を遣って、苦労させないよう、お金がかからないようにしている感がある。苦労したり、お金がかかっても、その後の人生に反映できれば、それは金の思い出となるのではないだろうか。

話は変わるが、大学に進学するというのはどのような意味をもつのだろうか。「大学」の意味として「社会の第一線に立つべき人を養成する学校」（新明解　国語辞典［三省堂］）とある。西洋では大学とは元来、学者と学生が共同研究をする場であった。イタリアのサレルノ大学は医学を、ボローニャ大学は法学を、フランスのパリ大学は神学を研究していた。イギリスのオックスフォード大学はパリ大学に範を取った。アメリカのハーバード大学はヨーロッパより清教徒が移住し、聖職者の育成、社会のリーダーの育成を目的として創立された。そのためハーバード大学は専門教育というより一般教養の育成に重きを置いていた。日本では天平文化のころから官吏養成機関としての大学があり、法律・漢文・数学・書道などが学ばれた。明治以降は昌平坂学問所が大学と改められ、近代の大学の基礎が築かれていった。（かつて昌平坂学問所では「儒学」が重んじられた。昌平坂学問所は孔子の生誕の地「昌平村」の名にちなんだものである。）

論語には次のような言葉がある。「学而時習之、不亦説乎、有朋自遠方来、不亦楽乎、人不知不慍、不亦君子乎」（学んでは適当な時期におさらいをする、いかにも心嬉しいことだね。［そのたびに理解が深まって向上していくのだから。］だれか友だちが遠い所からもたずねて来る、いかにも楽しいことだね。［同じ道について語りあえるから。］人が分かってくれなくとも気にかけない、いかにも君子だね。［凡人にはできないことだから。］※君子とは徳の習得に励む人、また徳のできあがった人を指す。）「学而不思則罔、思而不学則殆」（学んでも考えなければ、［ものごとは］はっきりしない。考えても学ばなければ、［独断におちいって］危険である。）（論語「岩波文庫」）

数学は、近年の科学技術や情報社会の進展に大きく貢献している。しかしながら、その貢献度の大きい割に、生徒から敬遠されているのも事実である。ギリシア語の　manthano

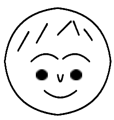
は「学ぶべきもの」という意味であるが、次第に数学を意味するようになった。また教育課程に携わっている人々も次第に数学者を意味するようになった。ギリシア時代、B.C.400 年頃プラトンの創立した学園アカデメイアの門に「幾何学を学ばざる者は、この門に入るべからず」と、書かれていたことはあまりにも有名である。ところが、その学園も A.D.529 年ユスティニアヌス大帝により閉校に追い込まれる。その背景には何があったのか。中世はスコラ哲学により自由な学問が制限された時代であったが、教会で学問自体は受け継がれていった。ルネッサンス時代は再び人間の復興が叫ばれ、自由な学問がわき起こった。その背景には人間主義のギリシア時代への強い郷愁があった。ギリシャ時代への郷愁とはある意味では「形式主義の打破」を意味するものであった。インドでは２世紀より以前に「０」の元となる「空」の概念が形成されていたといわれているが、それはナーガールジュナ（竜樹）が当時組織した大乗仏教中観派で形成された英知であるといわれている。中観派は「法華経」を宣揚していた。その後「０」はアラビアを通じてヨーロッパに伝わり、現在のような様式になるが、ヨーロッパに伝わった当時長く「不吉な数字」として、忌み嫌われたといわれている。現在では「０」はなくてはならないものとなっているが、１つの発見や哲学が浸透するには相等の星霜を重ねなければならないということの証左である。「０」の発見は東洋の英知が果たした大きな財産である。また、アメリカで理科系に力を入れ始めたのは、１９５７年のスプートニクショックの頃からである。冷戦時代に入り、東西の戦いは宇宙開発に取って代わった。アメリカは科学教育に自信を持ち、ソ連より相当リードしていると自負していた。ところが、無人衛星がソ連により打ち上げられると共産圏の科学教育の進歩を見せつけられた形になったのである。当時共産圏では１９５９年の数学オリンピック・ルーマニア大会の開催を予定し、英才教育にはかなり力を入れており、科学者が研究するには良い環境が確保されていた。教育は常に時代の影響を受ける。カジョリ・初等数学史には哲学者ショウペンハウエルがその当時の初級学校の授業内容をみて、数学全般に批判を加えたことが書かれていた。私が学生の頃、哲学の先生がショウペンハウエルと同じ論調で数学を批判していたのを覚えている。

現代は産業革命以後、大量生産、大量消費の習慣が定着し、唯物性の影響を強く受け、見やすく、わかりやすい物以外は受け入れられない時代となった。数学は高い抽象性を含んでいるので、敬遠されがちで、誤解を受けやすい。このような意味から数学者、数学教育者の使命として数学を大衆化していく必要性がある。（これは数学の質を落としたり、身近な物だけにとどめることを意味するのではない。）考える基本としての数学をもう一度見直し、地域ぐるみで数学に取り組んでいくことで、忍耐力のある、利発な子供を育てることができるのではないだろうか。本校に勤務して、７年目になるが、生徒のためになればと思い、数学公式集、数学問題集、数学参考書を編纂してきた。教員生活も１９年目になるが、真面目に物事に取り組む生徒が最後に勝利を得ると実感する次第である。微力ではあるが、その一助となればと日々考える。

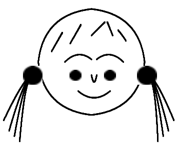
平成１９年7月３日　前田　勝利

〇登場人物

ぼさっと博士



大知（たいち）くん



蓮香（れんか）さん

目　　　次

北見工業大学後期

小樽商科大学前期

帯広畜産大学

公立はこだて未来大学

釧路公立大学

道外

東北大学理系前期

東北大学理系後期

東京大学理科前期

東京大学理科後期

東京大学文科前期

東京大学文科後期

名古屋大学理系前期

名古屋大学理系後期

名古屋大学文系前期

名古屋大学文系後期

京都大学理系甲前期

京都大学理系乙前期

京都大学文系前期

京都大学文系後期

大阪大学理系前期

大阪大学理系後期

大阪大学文系前期

大阪大学文系後期

九州大学理系前期

九州大学理系後期

九州大学文系前期

九州大学文系後期

東京工業大学

一橋大学

神戸大学

２００５年度

道内

北海道大学理系前期

北海道大学理系後期

北海道大学文系前期

北海道大学文系後期

札幌医科大学

旭川医科大学

室蘭工業大学前期

北見工業大学後期

小樽商科大学前期

帯広畜産大学

公立はこだて未来大学

釧路公立大学

道外

東北大学理系前期

東北大学理系後期

東京大学理科前期

東京大学理科後期

東京大学文科前期

東京大学文科後期

名古屋大学理系前期

名古屋大学理系後期

第一部　数学参考書

VICTORY-数学 I

1. 数と式

整式 ([illegible])

- 単項式 $(monomial)\cdots 3a, -x^2y^3, 5$ など

  数や文字またはそれらの積の形で表されるもの。

- 多項式 $(polymonial)\cdots x^2+2x+1, ab+a+b+1$ など

  単項式の和（差）の形で表されるもの。

  また１つ１つの単項式を項 $(term)$ という。

次のようにすることを、整式を整理するという。

$$2x^2y^2+4xy^2+5x^2y^2=(2+5)x^2y^2+4xy^2=7x^2y^2+4xy^2$$

また $2x^2y^2$ と $5x^2y^2$ を同類項 $(similar\ term)$ という。

	次数 $(degree)$	係数 $(coefficient)$
$3a$	1	3
$-x^2y^3$	5	-1
5	0	5

	次数 $(degree)$	定数項 $(constant\ term)$
$4x^2+xy^2-2x+y+5$	3	5
$4x^2+xy^2-2x+y+5$(x について)	2	y+5
$5x^3-3x^2y^3+y^4-8$	5	-8
$5x^3-3x^2y^3+y^4-8$(x について)	3	y^4-8
$x^3+x^2y-y^2+7x-4y+1$	3	1
$x^3+x^2y-y^2+7x-4y+1$(x について)	3	$-y^2-4y+1$

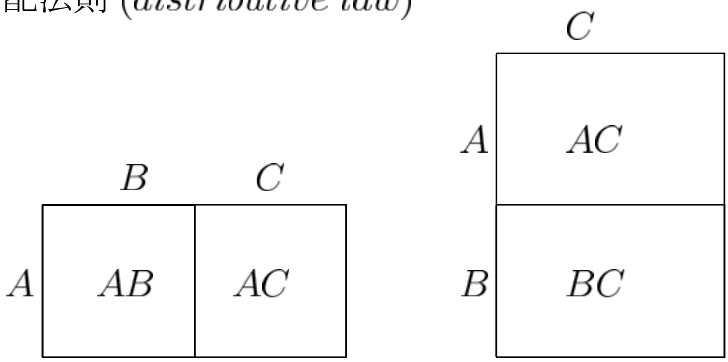
降幂の順 $(descending\ order\ of\ powers)$

　次数の高い項から順に並べること　例. $5x^2-7x+8$

昇幂の順 $(ascending\ order\ of\ powers)$

次数の低い項から順に並べること　例．$8-7x+5x^2$

分配法則 (*distributive law*)



$$A(B+C)=AB+AC \qquad (A+B)C=AC+BC$$

〇展開

次の式は乗法の公式 (*expansion formula*) であるが、右辺と左辺を入れ替えると

因数分解 (*factorialzation formula*) の公式となる。

※乗法の公式は展開の公式ともいう。

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(4) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(5) [illegible]

(6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(8) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(9) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

（参考）

[illegible]

(10) [illegible]

(11) [illegible]

置き換えによる展開の工夫

例. 1

$(a-b+c)(a-b-c)$ は

$a-b=t$ と置き換えて、

（与式）$=(t+c)(t-c)=t^2-c^2$

もとに戻して

$=(a-b)^2-c^2=a^2-2ab+b^2-c^2$

例. 2

$(a-b+c)(a+b+c)$ は

$a+c=t$ と置き換えて、

（与式）$=(t-b)(t+b)=t^2-b^2$

もとに戻して

$=(a+c)^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2$

※ [illegible] となるので、$b+c=t$ とはおけない。

〇因数分解

因数分解とは多項式を 1 次以上の整式の積の形で表すことである。また共通因数でくくりだすということがもっとも基本的な考え方である。以下のような形で表される。

$\boxed{\text{整式}}=\boxed{\text{因数}}\times\boxed{\text{因数}}\times\cdots\times\boxed{\text{因数}}$

例. [illegible]

[illegible]) などは違ったケースにみえるが、

[illegible] と考えると、

$x+4$ が共通因数となっている。

たすきがけ

(12) 整式の除法

整式 A を整式 B で割った商を Q, 余りを R とすると

※　Q は *quotient*、R は *remainder* の頭文字である。

$A = BQ + R,$　　　　　R の次数 $<$ B の次数

$$
\text{複素数}\begin{cases}\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{有限小数}\\ \text{循環小数}\cdots\text{無限小数}\end{cases}\\ \text{無理数}\cdots\text{無限小数}\end{cases}\\ \text{虚数}\end{cases}
$$

○数の分類

複素数 [illegible]

$\cdots$ [illegible] は実数) で表される数

実数 (*real number*)

$\cdots$ 有理数と無理数をあわせた数

有理数 (*rational number*)

$\cdots \dfrac{n}{m}(m, n$ は整数$, m \neq 0)$ で表される数

整数 (*integer*)

$\cdots -1, 0, 1, 2, 3$ など で表される数

有限小数 [illegible]

$\cdots$ [illegible] など で表される数

循環小数 (*circulating decimal*)

$\cdots 0.333\cdots, 0.31818\cdots$ など で表される数

無理数 ($irrational\ number$)

$\cdots \dfrac{n}{m}(m, n$ は整数$, m \neq 0)$ で表すことができない数、$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, e$ など

※ π(円周率), e(自然対数の底, ネピア数) のような数を特に超越数という。

虚数 ($imaginary\ number$)

$\cdots ci(c$ は実数$, c \neq 0)$ で表される数

2 つの実数 a, b の和 (sum) $a+b$、差 ($difference$) $a-b$、積 ($product$) ab、商 ($quotient$) $a \div b$ ($b \neq 0$) はまた実数である。

実数の加法と乗法については、次の 3 つの計算法則が成り立つ。

	加法 ($addition$)	乗法 ($multiplication$)
交換法則 ($commutative\ law$)	$a+b=b+a$	$ab=ba$
結合法則 ($associative\ law$)	(a+b)+c=a+(b+c)	$(ab)c=a(bc)$
分配法則 ($distributive\ law$)	a(b+c)=ab+ac	(a+b)c=ac+bc

数の範囲	和	差	積	商
自然数	○	△	○	△
整数	○	○	○	△
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○

※ $2-1$ は自然数であるが、$1-2$ は自然数ではない。

$2 \div 1$ は自然数であるが、$1 \div 2$ は自然数ではない。

$2 \div 1$ は整数であるが、$1 \div 2$ は整数ではない。

参考

２の倍数は「１の位の数」が２の倍数である

３の倍数は「各位の数の和」が３の倍数である

４の倍数は「下２桁の数」が４の倍数である

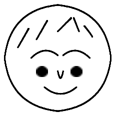
５の倍数は「１の位の数」が５の倍数である

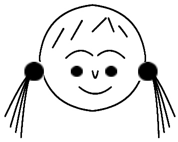
６の倍数は「２の倍数」かつ「３の倍数」である

８の倍数は「下３桁の数」が８の倍数である

９の倍数は「各位の数の和」が９の倍数である

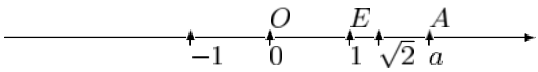
0の発見について 「ギリシア文化」が解体した後、それを継承したのは「アラビアの文化」であった。しかし「アラビア数字」といわれるものは実は「インド数字」であって、インドから取り入れられた。インドでは２世紀より以前に「０」の元となる「空」の概念が形成されていたといわれているが、それはナーガールジュナ（竜樹）が当時組織した大乗仏教中観派で形成された英知であるといわれている。中観派は釈迦が説いた教典の一つである「法華経」を宣揚していた。その後「０」はアラビアを通じてヨーロッパに伝わり、現在のような様式になるが、ヨーロッパに伝わった当時、長く「不吉な数字」として、忌み嫌われたといわれている。現在では「０」はなくてはならないものとなっているが、１つの発見や哲学が浸透するには相等の星霜を重ねなければならないということの証左である。「０」の発見は東洋の英知が果たした大きな財産である。





「なるほど！！」

○数直線 ($number\ line$)



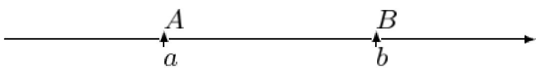
○絶対値

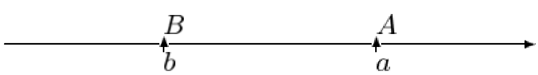
原点 ($Original\ Point$) $O(0)$ から点 ($Point$) $A(a)$ までの距離 ($distance$) OA

を a の絶対値 ($absolute\ value$) といい、$|a|$ で表す。

・絶対値の場合分け

① $a \geqq 0$ のとき　$|a| = a$　　② $a < 0$ のとき　$|a| = -a$





○２点間の距離

数直線上の 2 点 $A(a), B(b)$ 間の距離 $(distance)$ AB は

$a \geqq b$ のとき、$AB = a - b$

$a < b$ のとき、$AB = b - a$

であるから、

$AB = |b - a|$ または $AB = |a - b|$ と表される。

（13）実数 a に対して

i. $|a| \geqq 0$　$|a| = 0$ となるのは $a = 0$ のときに限る。

ii. $|-a| = |a|$

（証明）

① $a \geqq 0$ のとき $|-a| = -(-a) = a,\ |a| = a$

② $a < 0$ のとき $|-a| = -a,\ |a| = -a$

（14）$a \geqq 0$ のとき　$|a| = a$　　$a < 0$ のとき　$|a| = -a$

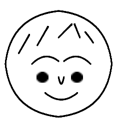
※　絶対値 $(absolute\ value)$ は原点からの距離である。

例．$|3| = 3,\ |-3| = -(-3) = 3$

（15）実数 $k > 0$ のとき

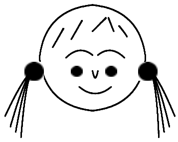
i. $|a| < k \Longleftrightarrow -k < a < k$

ii. $|a| > k \Longleftrightarrow a < -k$ または $k < a$



大知（たいち）くん

$|3| = 3$ で $|-3| = 3$ なら $|-3|$ の $-$ をとると考えればいいんだよね。

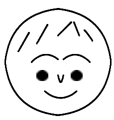


蓮香（れんか）さん

そうよね。$|-3| = -(-3) = 3$ って, なんだかややこしい。

ぼさっと博士

たしかに $|-3|$ のように,$-$ が目に見えるような場合は $-$ をとると考えてもいいんだけど,$a<0$ のように, 文字それ自体が $-$ を含んでいる場合はどうするのかな？こういう場合はやはり,$|a| = -a$ と考えると,$-a>0$ となるよね。そう考えると, 絶対値の中身が $-$ のときは $-$ をつけて絶対値をはずすと考えた方がどの場合も共通の考え方といえるね。



大知（たいち）くん

なるほど, そうか！

蓮香（れんか）さん

わかりました。ありがとうございました。

○平方根（*square root*, 2 乗根）

平方（*square* 2 乗）すると、a になる数を a の平方根という。

① $a>0$ のとき a の平方根は 2 つあり、

正 (*positive*) の方は $\sqrt{a}$、負 (*negative*) の方は $-\sqrt{a}$ で表される。

② $a=0$ のとき a の平方根は 0 のみである。

③ $a<0$ のとき a の平方根は実数の範囲では存在しない。

※複素数の範囲では $\sqrt{-1}=i$ とする。i は $imaginary\ number$（虚数）の頭文字である。

例　3 の平方根は $\sqrt{3}$ と $-\sqrt{3}$ である。

4 の平方根は $\sqrt{4}=2$ と $-\sqrt{4}=-2$ である。

ただし、$\sqrt{9}=3$ であり、$-\sqrt{9}=-3$ である。

$\boxed{\text{参考}}$

・実数の範囲では、27 の立方根（$cube\ root,$ 3 乗根）は 3 であり、-27 の立方根（3 乗根）は -3 である。

$\sqrt{27}=3,\ \sqrt{-27}=-3,$

・16 の 4 乗根は 2 と -2 である。

$\sqrt{16}=2,\ -\sqrt{16}=-2$

$\boxed{\text{有名な平方根の覚え方}}$

$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$（ひと夜ひと夜に人見ごろ）

$\sqrt{3}=1.7320508\cdots$（人なみにおごれや）

$\sqrt{5}=2.2360679\cdots$（富士山麓オーム鳴く）

$\sqrt{6}=2.4494897\cdots$（似よよくよく）

$\sqrt{7}=2.6457513\cdots$（菜に虫いない）

$\sqrt{8}=2.8284271\cdots$（にやにや）

$\sqrt{10}=3.1622776\cdots$（ひとまるは3色2並ぶ）

$\boxed{\text{参考}}$ 開平 ($extraction$) 計算

○ $\sqrt{2}$ の

近似値 [illegible]

[illegible]

[illegible] $\sqrt{2.00|00|00\cdots}$

1 1

24 1 00

4 96

281 4 00

1 2 81

2824 1 19 00

4 1 12 96

2828⋯ 6 04 00

○ $\sqrt{5}$ の近似値

2. 2 3 6⋯

2 $\sqrt{5.00|00|00\cdots}$

2 4

42 1 00

2 84

443 16 00

3 13 29

446⋯ 2 71 00

○ $\sqrt{101}$ の近似値

1 0. 0 4 9⋯

1 $\sqrt{1|01.00|00|00\cdots}$

1 1

20 1

0 0

200 1 00

0 0

2004 1 00 00

4 80 16

20089 19 84 00

9 18 08 01

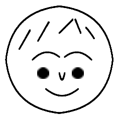
20098⋯ 1 75 99

（16）実数 k に対して

i. $k \geqq 0$ のとき $\sqrt{k^2} = k$

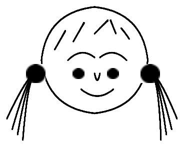
ii. $k < 0$ のとき $\sqrt{k^2} = -k$

例. $\sqrt{5^2} = 5,\ \sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$



大知（たいち）くん

あれー！ $\sqrt{5^2} = 5$ は, わかるんだけど, $\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$ って, どういう意味かな？

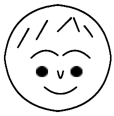


蓮香（れんか）さん

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25}$ だから,$\sqrt{5^2} = 5$ って, ことかしら？でも $\sqrt{(-5)^2} = -5$ とするといけないのかしら？

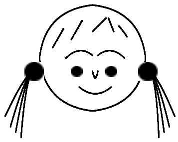
ぼさっと博士

あとで虚数という数の仲間が出てくるんだけど, 今は実数の話だから, ルートの中身が正か 0 でなければなりません。また, ルート自体も 0 以上だよね。だから $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ となるんだよ。また、$\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$ とも考えられるね。これは絶対値のところでも話したけど,$-$ が目に見えるような場合は $-$ をとると考えてもいいんだけど,$a < 0$ のように, 文字それ自体が $-$ を含んでいる場合はやはり, $\sqrt{a^2} = -a$ と考えると,$-a > 0$ となるよね。そう考えると, $\sqrt{a^2}$ で $a < 0$ の場合は $-a$ のように $-$ をつけてルートをはずすと考えた方がどの場合も共通の考え方といえるね。



なるほど, そうか！だんだん数のことがわかってきたぞ！

大知（たいち）くん



なんだかだんだん楽しくなってきたわ。ありがとうございました。

蓮香（れんか）さん

（17）$a > 0, b > 0$ のとき

i. $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

ii. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

○分母 $(denominator)$ の有理化 $(rationalization)$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1 \times (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{1}{a-b}$$

（18）$a > 0, b > 0$ のとき

i. $\boxed{\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}}$

（証明 $(proof)$）

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b} > 0$ より

$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$

例. $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$

ii. $\boxed{\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b} \quad \text{ただし } a > b}$

（証明）

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ より

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$$

例．$\sqrt{11-2\sqrt{30}} = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}-\sqrt{5}$

EX 次の式を因数分解せよ。

[illegible] 愛知学泉大

(2)$2x^3-5x^2+5x+4$（係数が整数の範囲で） (03) 鳥取大

[illegible] 法政大

EX 次の問に答えよ。

(1)$\dfrac{1}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}+\dfrac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}$ を簡単にせよ。 (03) 鳥取大

(2)$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ。 (03) 千葉工大

(3)$\dfrac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ (03) 職能開発大

EX (03) 東京工科大 $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}$ を簡単にせよ。ただし、i は虚数単位を表す。

EX 次の問に答えよ。

(1) 3 次式 [illegible] 1 が、x についての恒等式となるとき、定数 a, b, c の値を求めよ。 (03) 中京大

(2)a, b を整数とする。$x^4+ax^3+11x^2+bx+1$ が、ある 2 次式の平方になるとき、a, b の値を求めよ。 (03) 摂南大

EX 次の問に答えよ。

(1)$x^5+3x^4+5x^3+7x^2+12x+17$ を x^2+2x+3 で割ったときの商と余りを求めよ。 (03) 駒澤大

(2)x の整数 $4x^3-2x^2-9x+7$ を x の整式 A で割ると、その商が B で余りが $x+1$ となる。また、A と B の和は $2x^2+4x-5$ である。このとき、A と B を求めよ。 (03) 岩手大

$\boxed{\text{EX}}$ 次の問に答えよ。

(1)x の整式 P を x^3-1 で割ると商が $x+3$ であり、$x+1$ で割ると余りが $5, x^2+x+1$ で割ると余りが $-7x-1$ となる。このとき、P を x^2 で割ったときの余りを求めよ。 (03) 法政大

(2) 整式 $A(x), B(x)$ を x^2+1 で割ったときの余りが、それぞれ $x+a, bx+c(a, b, c$ は定数) である。また、$A(x)+B(x)$ を x^2+1 で割ったときの余りが $3x+4$ であり、$A(x)B(x)$ を x^2+1 で割ったときの余りが $7x+1$ であるという。このとき、a, b, c の値を求めよ。 (03) 近畿大

$\boxed{\text{EX}}$ 多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか。 (03) 京都大

$\boxed{\text{EX}}$ 次の 2 つの等式を同時に満たす x, y の組 (x, y) をすべて求めよ。 [illegible]

[illegible] 関西大

$\boxed{\text{EX}}$ 次の問に答えよ。

(1) 等式 $2|x|+|2x+3|=7$ を満たす実数 x の値を求めよ。 (03) 松山大

(2) 不等式 $|3x-23|<x+1$ を満たす整数 x の最大値と最小値を求めよ。 (03) 同志社女子大

$\boxed{\text{EX}}$ a を定数とするとき、x についての不等式

$(a-2)x^2+(4-a)x-2 \geqq 0$ を解け。 (03) 愛知教育大

$\boxed{\text{EX}}$ 整式 $f(x)=-4x^4+11x^3+ax^2+bx+2$ は x^2+x-2 で割り切れる。

(1) 定数 a, b の値を求めよ。

(2)$x=2+\sqrt{3}$ のときの $f(x)$ の値を求めよ。 (03) 法政大

$\boxed{\text{EX}}$ 次の問に答えよ。

(1)$x=\sqrt{16+2\sqrt{15}}, y=\sqrt{16-2\sqrt{15}}$ のとき

$x+y, x^2+y^2, \dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}$ の値を求めよ。 (03) 阪南大

(2)$x=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ のとき、$x^3-\dfrac{1}{x^3}$ の値を求めよ。 (03) 福岡大

(3)$a+b=4, ab=2, c+d=5, cd=3$ のとき、[illegible]

[illegible] の値を求めよ。 (03) 北里大

$\boxed{\text{EX}}$ $abc\neq 0$ で $\dfrac{(a+b)c}{ab}=\dfrac{(b+c)a}{bc}=\dfrac{(c+a)b}{ca}$ が成り立つとき、$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ の値を求めよ。 (03) 立命館大

$\boxed{\text{EX}}$ $x=\dfrac{4a}{1+a^2}(a>0)$ のとき、$\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$ の値を求めよ。 (03) 昭和薬大

2. 式 $(expression)$ と証明 [illegible]

[illegible] $\dfrac{\cdot}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x^2-1}$

のような、文字にどのような値を代入しても、常に成り立つ等式を $\boxed{\text{恒等式}}$ といいます。

(1) $P=Q$ が x についての恒等式 $(identical\ equation)$ である

$\Longleftrightarrow P, Q$ の同じ次数の項の係数が一致する

(2) $P=0$ が x についての恒等式である

$\Longleftrightarrow P$ の係数がすべて 0 である

(3) 等式 $(equation)$ $A=B$ の主な証明方法

① A を B に変形 $(deformation)$ する。または、B を A に変形する。

② A, B をそれぞれ同じ式 C に変形する。

③ $A-B=0$ を示す $(indicate)$。

(4) 不等式 $(inequality)$ の基本性質 $(basic\ property)$

i. $a>b$ かつ $b>c \Longrightarrow a>c$

ii. $a>b \Longrightarrow a+c>b+c$

iii. $a>b$ かつ $c>0 \Longrightarrow ac>bc,\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

iv. $a > b$ かつ $c < 0 \Longrightarrow ac < bc,\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

○ $a < b$ のとき、

$a + 3 < b + 3,\ a - 2 < b - 2,\ 2a < 2b,\ \dfrac{a}{2} < \dfrac{b}{2},\ (-2)a > (-2)b,\ \dfrac{a}{-2} > \dfrac{b}{-2}$

※方程式や不等式は両辺を平等に扱うようにするとよい。ただし、両辺に同じ負の数をかけた（わるときは分数をかけると考えて）ときは不等号の向きが変わる。

(5) 実数 a に対し $a^2 \geqq 0$ 　とくに $a^2 = 0 \Longleftrightarrow a = 0$

(6) $A > 0$ かつ $B > 0$ のとき　$A \geqq B \Longleftrightarrow A^2 \geqq B^2$

(7) 絶対不等式 [illegible]

[illegible] $\geqq |a + b|$

（証明）

(左辺)^2 − (右辺 [illegible]

[illegible] $\geqq 0$

(左辺)$^2 \geqq$ (右辺)^2 が証明された。

ここで、$|a| + |b| \geqq 0,\ |a + b| \geqq 0$ より

(左辺) $\geqq$ (右辺)

等号 $(equalsign)$ は $ab \geqq 0$ のとき成り立つ。

(8) 相加平均 $(arithmetic\ mean)$・相乗平均 $(geometric\ mean)$

$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ に対し　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

（証明）

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$ を展開して、

$a - 2\sqrt{ab} + b \geqq 0$

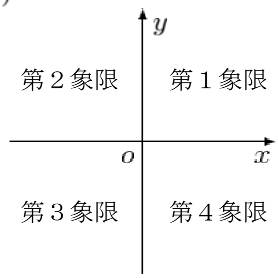
よって、$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは $a = b$ のときである。

3. 2次関数 $(quadratic\ function)$

(1) 座標平面 $(plane\ coordinates)$



第１象限は $the\ first\ quadrant$, 第２象限は $the\ second\ quadrant$

第３象限は $the\ third\ quadrant$, 第４象限は $the\ forth\ quadrant$

といいます。

※　x 軸,y 軸はどの象限にも所属しません。

(2) $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ $(graph)$

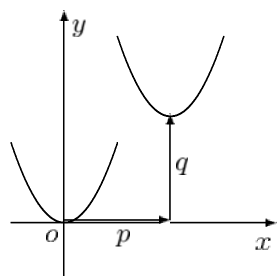
$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは、

$y=ax^2$ のグラフを

x 軸 $(axis)$ の方向 $(direction)$ に p,　y 軸の方向に q

だけ平行移動 $(parallel\ displacement)$ した放物線 $(parabola)$ である。

軸は直線 $(line)$ $x=p$,　頂点 $(vertex)$ は点 (p,q)



(3) 一般形 $(general\ form)$ から標準形 $(canonical\ form)$ への変形 $(transfomation)$

２次関数 $y=ax^2+bx+c$ は

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x)+c \\
&= a\{x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2\}+c \\
&= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

と変形できる。

$y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを

x 軸の方向に $-\frac{b}{2a}$，y 軸の方向に $-\frac{b^2-4ac}{4a}$

だけ平行移動した放物線で、

軸は直線 $x=-\frac{b}{2a}$，頂点は $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$

(4) グラフの平行移動

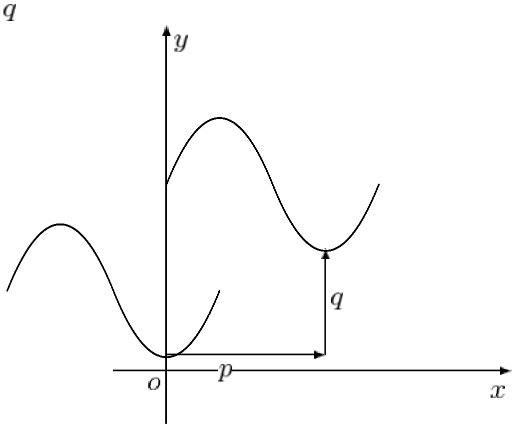
$y=f(x)$ のグラフを

x 軸の方向に p，y 軸の方向に q

だけ平行移動すると

$y-q=f(x-p)$

よくある形にすると、$y=f(x-p)+q$



(5) グラフの対称移動 [illegible]

[illegible]) のグラフを

x 軸について対称移動すると、$y=-f(x)$

y 軸について対称移動すると、$y = f(-x)$

原点について対称移動すると、$-y = f(-x)$

(6) 判別式 (*discriminant*) D の符号 (*sign*) と共有点 (*common point*)

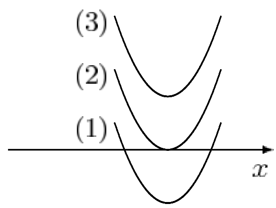
２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係 (*position*) は

判別式を $D = b^2 - 4ac$ とすると、

(1) $D > 0 \Longleftrightarrow$ ２点を共有する

(2) $D = 0 \Longleftrightarrow$ １点を共有する

(3) $D < 0 \Longleftrightarrow$ 共有点なし



(7) ２次関数のグラフと x 軸との共有点

２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、

２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解である。

(8) ２次方程式の解 (*solution*) の公式 (*formula*)

２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(求め方)

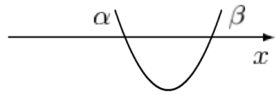
$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = 0$$
$$a\{(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\} + c = 0$$
$$a\{(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\} = -c$$
$$a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} = -c$$

$$
\begin{aligned}
&a(x+\frac{b}{2a})^2=-c+\frac{b^2}{4a}\\
&a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{-4ac}{4a}+\frac{b^2}{4a}\\
&a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a}\\
&(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
&x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&x=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}\\
&x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

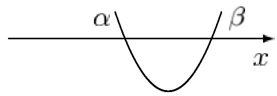
(9) ２次不等式 [illegible]

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の２解を α,β とすると、

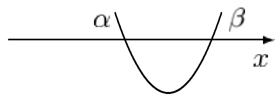
$ax^2+bx+c \geqq 0$ の解は　$x \leqq \alpha, \beta \leqq x$



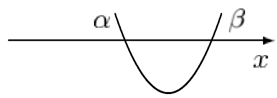
$ax^2+bx+c<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$



$(x-\alpha)(x-\beta) \geqq 0$ の解は　$x \leqq \alpha, \beta \leqq x$



$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$



例. [illegible]

[illegible]

[illegible]

例. $x^2-4x-5<0$

$(x-5)(x+1) \leqq 0$

$-1 \leqq x \leqq 5$

例．$x^2+4x+4 \geqq 0$

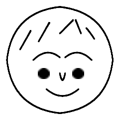
$(x+2)^2 \geqq 0$

すべての実数

例．$x^2+4x+4 \leqq 0$

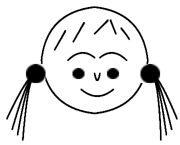
$(x+2)^2 \leqq 0$

$x=-2$



大知（たいち）くん

２次不等式って、むずかしいなあ。



蓮香（れんか）さん

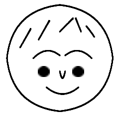
私も苦手～！

どんな風に考えたらいいのかしら？

ぼさっと博士

例えば、２次関数 $y=x^2-5x+4$ で x 軸との交点は y を 0 として、$x^2-5x+4=0$ として、$(x-1)(x-4)=0$ となるので、$x=1,4$ となるよね。

それなら $x^2-5x+4>0$ となっている場合はどのように解釈したらいいのかな？

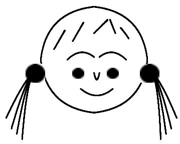


大知（たいち）くん

２次関数 $y=x^2-5x+4$ で x 軸との交点は y を 0 としたから、$x^2-5x+4>0$ なら、２次関数のグラフが x 軸の上になっているところを見たらいいんじゃないかな？

ぼさっと博士

そのとおり。さっきの話で、２次関数 $y = x^2 - 5x + 4$ で x 軸との交点は $x = 1{,}4$ となっていたから、グラフの x 軸の上の部分の x 座標は $x < 1{,}4 < x$ となるのだよ。
今度は $x^2 - 5x + 4 < 0$ となっている場合はどのように解釈したらいいのかな？

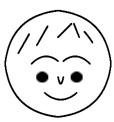


蓮香（れんか）さん

２次関数 $y = x^2 - 5x + 4$ で x 軸との交点は y を０としたから、$x^2 - 5x + 4 < 0$ なら、２次関数のグラフが x 軸の下になっているところを見たらいいのかしら？

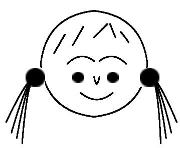
ぼさっと博士

そのとおり。２次関数 $y = x^2 - 5x + 4$ で x 軸との交点は $x = 1{,}4$ となっていたから、グラフの x 軸の下の部分の x 座標は $1 < x < 4$ となるのだよ。



大知（たいち）くん

うわ〜。もう２次不等式は、むずかしくないぞー。



蓮香（れんか）さん

ほんと！なんだか２次不等式は得意になった感じ！

EX. ２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフの頂点の座標が $(3, -8)$ であるとき、b, c を a で表せ。更に、このグラフが $x = m$ および $x = m + 4$ で x 軸と交わるとき、m の値を定め、a の値を求めよ。(03) 青山学院大

EX. ２次関数 $y = 2x^2 + 4x$ のグラフを x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動すると、x 軸と２点 $(3,0), (7,0)$ で交わるという。このとき、a, b の値を定めよ。(03) 日本工大

EX. 関数 $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$ がある。不等式 $|f(x)| \leqq 3$ を満たす x の値の範囲を求めよ。また、曲線 $y = |f(x)|$ と直線 $y = x + k$ が共有点を３個以上もつような定数 k の最大値を求めよ。(03) 南山大

EX. ２つの２次関数 $y = -x^2 + 5x, y = -2x^2 - ax + a^2$ (a は０でない定数) のグラフは、交点を２つもつことを示せ。また、２つの交点の y 座標が両方とも負となる a の値の範囲を求めよ。(03) 岩手大

EX. a, b は定数とし、$a > 0$ とする。関数
[illegible]
の $-2 \leqq x \leqq 2$ における最大値は 14, 最小値は 3 であるとする。
$t = x^2 + 2x + 3$ とおくと、$y = at^2 - 2at + b$ となり、
$-2 \leqq x \leqq 2$ における実数 t のとりうる値の範囲は、$\boxed{\text{ア}}$ である。
よって、a=$\boxed{\text{イ}}$,b=$\boxed{\text{ウ}}$ である。(03) 東京理科大

EX. 関数 $f(x)$ を $f(x) = |x^2 - 5x + 4| + x + 1$ とし、曲線 $y = f(x)$ 上に点 $P(x, f(x))$ をとる。また、２点 $A(1,0)$ と $B(4,1)$ をとり、$\triangle ABP$ の面積を S とする。
(1)$y = f(x)$ のグラフをかけ。
(2)$x \leqq 4$ とするとき、S を x で表せ。
(3)$0 \leqq x \leqq 4$ とするとき、S の最大値と最小値を求めよ。
(03) 同志社大

EX. $f(x)=x+a, g(x)=x^2-x+2$ とする。次の条件が成り立つ a の値の範囲をそれぞれ求めよ。
(1)$f(x)<g(x)$ が、ある実数 x に対して成り立つ。
(2)$f(x)<g(x)$ が、すべての実数 x に対して成り立つ。
(3)$f(x)>g(x)$ が、ある実数 x に対して成り立つ。
(4)$f(x)>g(x)$ が、すべての実数 x に対して成り立つ。
(03) 北見工大

EX. 不等式 $x^2+y^2+z^2 \geqq tx(y-z)$ がすべての実数 x, y, z に対して成り立つような実数 t の値の範囲を求めよ。
(03) 芝浦工大

EX. x についての 2 つの方程式 $x^2+ax+12=0 \cdots$ ①,
$x^2+2x+6a=0 \cdots$ ②について考える。ただし、a は実数の定数である。
(1) ①が 2 より大きい解と 2 より小さい解をもつとき、a のとりうる値の範囲を求めよ。このとき、②の 2 つの解を $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ とする。α, β のとりうる値の範囲を求めよ。
(2) ①と②がただ 1 つの共通解をもつとき、a の値と共通解を求めよ。(03) 自治医大

EX. a, b, c を奇数とする。x についての 2 次方程式
$ax^2+bx+c=0$ に関して
(1) この 2 次方程式が有理数の解 $\dfrac{q}{p}$ をもつならば、p と q はともに奇数であることを背理法で証明せよ。ただし、$\dfrac{q}{p}$ は既約分数とする
(2) この 2 次方程式が有理数の解をもたないことを (1) を利用して証明せよ。(03) 鹿児島大

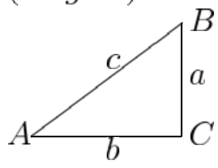
EX. p を素数とする。x に関する 2 次方程式
$px^2+(5-p^2)x-3p=0$ が整数の解をもつのは、
$p=2$ のときに限ることを示せ。(03) 千葉大

4. 三角比 (*trigonometric ratio*)

（1）正弦 (*sine*)・余弦 (*cosine*)・正接 (*tangent*)

右の図の直角三角形 ABC

において、



$\sin A = \dfrac{a}{c}, \cos A = \dfrac{b}{c}, \tan A = \dfrac{a}{b}$

$a = c\sin A, b = c\cos A, a = b\tan A$

（2）$90^\circ - A$ の三角比

上の図で、$B = 90^\circ - A$ とすると、

$\sin A = \dfrac{a}{c},\ \cos A = \dfrac{b}{c},\ \tan A = \dfrac{a}{b}$

$\sin B = \dfrac{b}{c},\ \cos B = \dfrac{a}{c},\ \tan B = \dfrac{b}{a}$

したがって、

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(90^\circ - A) = \cos A & \cos(90^\circ - A) = \sin A \\ \tan(90^\circ - A) = \dfrac{1}{\tan A} & \end{array}}$$

（3）三角比の相互関係 (*the reciprocal relation of the trigonometric ratio*)

上の図で、

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan A$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \cdots (*)$$

$\triangle ABC$ は直角三角形であるから、三平方の定理より $a^2 + b^2 = c^2$

よって、$(*) = 1$

$$1 + \tan^2 A = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{\frac{b^2}{c^2}} = \frac{1}{\cos A}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} & \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \\ 1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A} & \end{array}}$$

注意　$\sin^2 A$ は $(\sin A)^2$, $\cos^2 A$ は $(\cos A)^2$, $\tan^2 A$ は $(\tan A)^2$ を表す

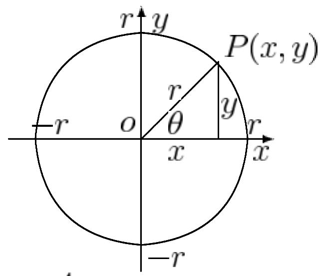
（4）三角比の定義 (*definition of the trigonometric ratio*)

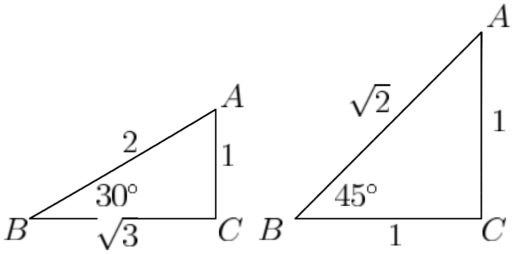
$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき、原点を中心とする半径 r の円において、x 軸の正の向きから左回りに角 θ をとったときの半径を OP とし、点 P の座標を (x, y) とする。

このとき

$\sin\theta = \dfrac{y}{r},\ \cos\theta = \dfrac{x}{r},\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

と定める。





※ OP を $\boxed{動径\ radius}$ という。

(5) $0°, 90°, 180°$ の三角比

$\sin 0° = 0, \sin 90° = 1, \sin 180° = 0$

$\cos 0° = 1, \cos 90° = 0, \cos 180° = -1$

$\tan 0° = 0, \tan 90°$ は定義されない , $\tan 180° = 0$

(6) $180° - \theta$ の三角比

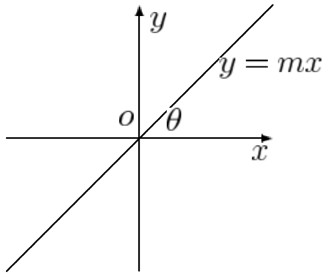
$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$ $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

(7) 直線の傾き $(slant)$ と正接

直線 $y = mx$ が x 軸の正の向きとなす角を θ とすると、

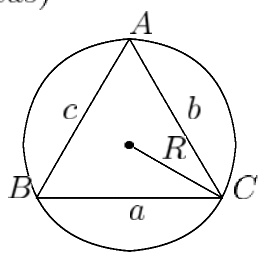
$m = \tan\theta$



(8) 正弦定理 ($sine's\ theorem$)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R は $\triangle ABC$ の外接円 ($circumcircle$) の半径 ($radius$)

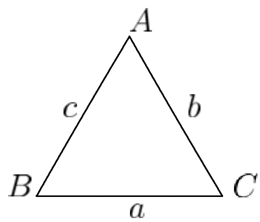


(9) 余弦定理 ($cosine's\ theorem$)

i. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ii. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

iii. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



(10) 三角形の辺 ($side$) と角 ($angle$) の大きさ ($size$)

$\triangle ABC$ において、$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ より

$\cos A$ の値の符号 ($sign$) と $b^2 + c^2 - a^2$ の値 ($value$) の符号は一致

$(coincidence)$ するので、

i. $a^2 < b^2 + c^2 \iff A < 90^\circ$

ii. $a^2 = b^2 + c^2 \iff A = 90^\circ$

iii. $a^2 > b^2 + c^2 \iff A > 90^\circ$

（11）三角形の面積 $(area)$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C}$$

（証明）

$S = \dfrac{1}{2}\sin A$ を示す。

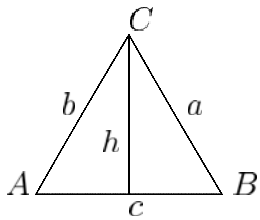
（$\triangle ABC$ の面積）$= \dfrac{1}{2}\cdot c\cdot h$

ここで $\sin A = \dfrac{h}{b}$

よって、$h = b\sin A$

したがって、$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

$S = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ についても同様に証明できる。



また内接円 $(inscribed\ circle)$ の半径を r とすると、

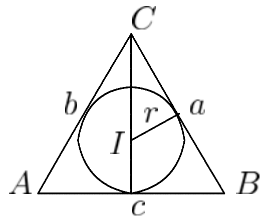
$$\boxed{S = \frac{1}{2}r(a+b+c)}$$

（証明）

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$\triangle ABC = \triangle ABI + \triangle BCI + \triangle CAI$

$$=\frac{1}{2}\cdot c\cdot r+\frac{1}{2}\cdot a\cdot r+\frac{1}{2}\cdot b\cdot r=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$



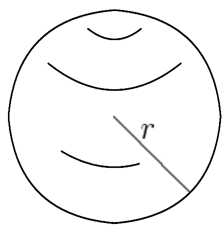
（12） 相似 ($similarity$)

相似比 ($similitude\ ratio$) が $m:n$ ならば、面積比 ($superficial\ ratio$) は $m^2:n^2$ であり、体積比 ($cubic\ ratio$) は $m^3:n^3$ である。

（13） 球 $sphere$

球の体積　　$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$（暗記法：身の上に心配あるので、参上）

球の表面積　　$S=4\pi r^2$（暗記法：心配ある事情）



$\boxed{\text{EX.}}$ x の方程式 $-4(\sin^2 x-\cos x)+a=0$ が解をもつような a の値の最大値を求めよ。(03) 自治医大

$\boxed{\text{EX.}}$ n を自然数とする。(03) 名城大

(1) 3 辺の長さが $n,\sqrt{n^2+1},n+3$ であるような三角形ができるための必要十分条件を n に関する不等式で求めよ。

(2)(1) の三角形が鈍角三角形になる n をすべて求めよ。

$\boxed{\text{EX.}}$ 円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。(03) 東京大

$\boxed{\text{EX.}}$ 鋭角三角形 ABC の 3 辺の長さをそれぞれ $BC = a, CA = b, AB = c$ とする。辺 AB 上に点 D をとり、$AD = x, BD = y$ とおく。

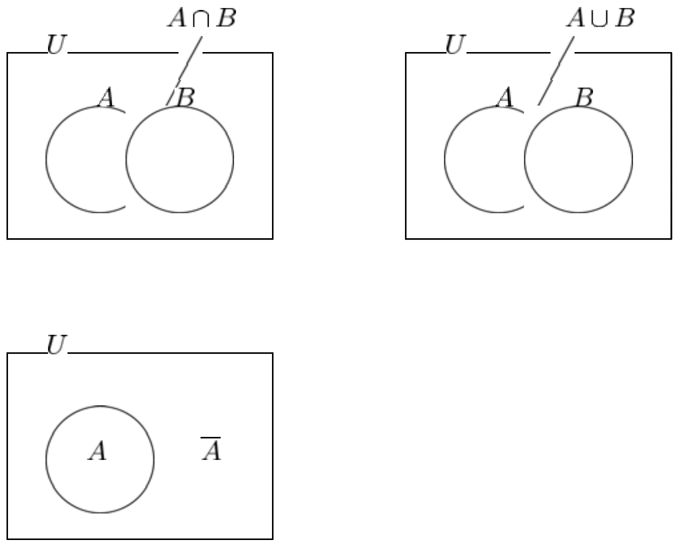
(1) 辺 AB が線分 CD のとりうる値の範囲は、$0 < r \leqq \boxed{ウ}$ である次に、円板 O が $\triangle ABC$ の少なくとも 1 つの辺に接しながら、$\triangle ABC$ の内側を 1 周するときに、円板が通過した領域を D とし、D の面積を S とする。右図のように、領域 D で囲まれた $\triangle PQR$ ができるのは、$0 < r < \boxed{エ}$ のときであり、このとき、$\triangle PQR$ の面積を r を用いて表すと、$\triangle PQR$=$\boxed{オ}$である。また、$\triangle ABC$ から領域 D および $\triangle PQR$ を除いた部分の面積 T を r を用いて表すと、$T = \boxed{カ}$ である。したがって、D の面積 S は、

$$S = \begin{cases} \boxed{キ} & (0 < r < \boxed{エ}) \\ \boxed{ク} & (\boxed{エ} \leqq r < \boxed{ウ}) \end{cases}$$

となる。よって、r の値が $0 < r < \boxed{ウ}$ の範囲で変化するとき、領域 D の面積は $r = \boxed{ケ}$ のとき、最大値$\boxed{コ}$をとる。(03) 関西大

VICTORY-数学 A

1. 集合と論理 (*set theory and logic*)



（1）集合と要素 [illegible]

[illegible] に対し、

[illegible] とすると、

$3 \in A$ であり、$8 \notin A$ である。

また、包含関係 (*relation of inclusion*) については $A \supset C$ であり、空集合 (*empty set*) ϕ はすべての集合の部分集合 (*subset*) である。

集合 A, B の共通部分 (*intersection set*)、和集合 (*union set*) についてみると、

[illegible] がいえる。

※　U は *Universal Set*（全体集合）の頭文字である。

（2）補集合 (*complement set*)

全体集合 U に対し、

$\overline{\overline{A}} = A,\ A \cap \overline{A} = \phi,\ A \cup \overline{A} = U$

がいえる。

例.

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ に対し、

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$ とすると、$\overline{A}=\{7,8,9\}$ となり、

$\overline{\overline{A}}=A,\ A\cap\overline{A}=\phi,\ A\cup\overline{A}=U$

がいえる。

(3) ド・モルガンの法則 $(the\ law\ of\ de\ Morgan)$

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(4) 和集合・補集合の要素の個数

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

とくに、$A\cap B=\phi$ のとき

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

※ $n(A)$ は集合 A の要素の個数を表す。

命題 $(proposition)$ と論証 $(proof)$

命題・・・正しいか正しくないか判断できる文や式

命題が正しいとき、「その命題は真 $(proper)$ である」といい、

命題が正しくないとき、「その命題は偽 $(falsehood)$ である」という。

「p ならば q である」ということを「$p\Longrightarrow q$」と表す。

このとき、p を「仮定 $(assumption)$」、q を「結論 $(conclusion)$」という。

例.「x が有理数ならば $2x$ は有理数である」は

「x は有理数 $\Longrightarrow 2x$ は有理数」と表される。

ある命題「p ならば q である」が偽であることを示すには、「p であるのに q でない」という例 $(example)$ を 1 つあげればよい。そのような例を「反例 $(counter-$

$example$)」という。

（1） ド・モルガンの法則

i. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

（A, B は集合）

ii. $\overline{p \text{ かつ } q} \Longleftrightarrow \overline{p}\text{または}\overline{q} \qquad \overline{p \text{ または } q} \Longleftrightarrow \overline{p}\text{かつ}\overline{q}$

(p, q は条件)

※ $\overline{p}$ は条件 p の否定

（2） 必要条件 ($neccessary\ condition$)・十分条件 [illegible]

i. $p \Longrightarrow q$

十分条件　必要条件

ii. $p \Longleftarrow q$

必要条件　十分条件

例．東苗穂に住む $\Longrightarrow$ 札幌に住む

「東苗穂（札幌東陵高校の所在地）に住むことは札幌に住むための十分条件である。」

（東苗穂に住めば、札幌市に住んでいることになる。）（十分条件）

「札幌に住むことは東苗穂に住むための必要条件である。」

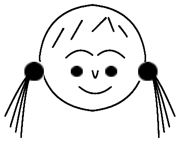
（東苗穂に住むためには、札幌市に住むことが必要だ。）（必要条件）

iii. $p \Longleftrightarrow q$ （p と q は同値 ($equivalence$) ともいう）

必要十分条件 [illegible]　必要十分条件

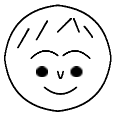
iv. 「$p \Longrightarrow q$」$\Longleftrightarrow$「$P \subseteqq Q$」

(p, q は条件　P, Q は集合)



蓮香（れんか）さん

理屈はわかるんだけど、なんだかこの分野の苦手意識が強くて。



大知（たいち）くん

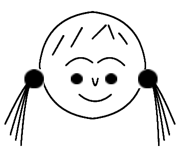
僕もさ。理屈はわかるんだけな〜。

ぼさっと博士

まず矢印がどちら向きになるのか考えよう。それは一方の条件の集合が他方の条件の集合に含まれるとき（包含関係）、集合の大きい方に矢印を向けるのだよ。

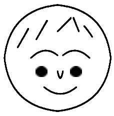
矢印の向きが決まったら、矢印の手前が「十分（じゅうぶん）条件」、矢印の向こうが「必要（ひつよう）条件」ということになるね。

「じ」は「さ行」、「ひ」は「は行」だから矢印の決まった方向に順に「じ」「ひ」と書けば、「十分条件」「必要条件」ということになるね。



蓮香（れんか）さん

へえ〜。おもしろ〜い。これでなんとかなりそう。



大知（たいち）くん

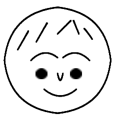
でも、「じ」は「ざ行」だから順番は後回しになるんじゃないの。

ぼさっと博士

細かいことをいうなあ。数学についての議論でもっと細かいことを言ってほしいものだが・・・。

じゃあ、これはどうかな？

ぼさっと博士は「じひ深い先生だ。」これで「じ」「ひ」という順番になるね。



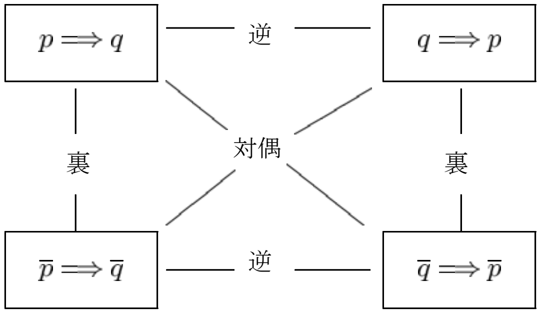
大知（たいち）くん

これはおもしろい！これでなんとかなりそうだ。ありがとうございます。

ぼさっと博士

単純じゃな。

(3) 命題・逆 $(inverse)$・裏 $(obverse)$・対偶 $(contraposition)$



「命題が真であっても、その命題の逆は真とは限らない」

「命題が真であっても、その裏は真とは限らない」

「対偶が証明されたら、もとの命題も真である」

(4) ある命題を証明する ($prove$) ため、その命題が成り立たないと仮定し、矛盾 ($contradiction$) を導き、その命題が成り立つことを証明する論法 ($argument$) を 背理法 ($reduction\ to\ absurdity$) という

EX. 実数 a に対して、集合 A, B を

$A = \{x | x^2 + (1 - a^2)x + a^3 - 2a^2 + a \leqq 0, x$ は実数 [illegible]
[illegible] は実数 $\}$
と定める。共通部分 $A \cap B$ が空集合でないような a の値の範囲を求めよ。(03) 東北大

(5) 和の法則 ($sum\ rule$)

ことがら A, B について、これらは同時には起こらないとする。A の起こり方が m 通り、B の起こり方が n 通りあるとき、A または B の起こる場合の数は、$m + n$ 通りである。

(6) 積の法則 ($product\ rule$)

ことがら A, B について、A の起こり方が m 通りあり、そのおのおのの起こり方に対して、B の起こり方が n 通りあるとき、A, B がともに起こる場合の数は、$m \times n$ 通りである。

（7）順列 $(permutation)$

n 個の異なるものから r 個取りだして並べた順列

[illegible]

$$= \frac{[illegible]}{(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{[illegible]}$$

[illegible]

「！」は階乗 $(factorial)$ と読む

例. $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}$ の 4 枚のカードから 3 枚のカードを取り出し、並べる方法を考える。

$\boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{3}$	$\boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{4}$	$\boxed{1}-\boxed{3}-\boxed{4}$	$\boxed{2}-\boxed{3}-\boxed{4}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\boxed{1}-\boxed{3}-\boxed{2}$	$\boxed{1}-\boxed{4}-\boxed{2}$	$\boxed{1}-\boxed{4}-\boxed{3}$	$\boxed{2}-\boxed{4}-\boxed{3}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\boxed{2}-\boxed{1}-\boxed{3}$	$\boxed{2}-\boxed{1}-\boxed{4}$	$\boxed{3}-\boxed{1}-\boxed{4}$	$\boxed{3}-\boxed{2}-\boxed{4}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\boxed{2}-\boxed{3}-\boxed{1}$	$\boxed{2}-\boxed{4}-\boxed{1}$	$\boxed{3}-\boxed{4}-\boxed{1}$	$\boxed{3}-\boxed{4}-\boxed{2}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\boxed{3}-\boxed{1}-\boxed{2}$	$\boxed{4}-\boxed{1}-\boxed{2}$	$\boxed{4}-\boxed{1}-\boxed{3}$	$\boxed{4}-\boxed{2}-\boxed{3}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\boxed{3}-\boxed{2}-\boxed{1}$	$\boxed{4}-\boxed{2}-\boxed{1}$	$\boxed{4}-\boxed{3}-\boxed{1}$	$\boxed{4}-\boxed{3}-\boxed{2}$

${}_4P_3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$（通り）

（8）円順列 $(circular\ permutation)$

n 個の異なるものの円順列の総数は $(n-1)!$

円順列は 1 個を固定して考えれば、残り $(n-1)$ 個を 横 1 列に並べた順列と考えることができる。

（9）重複順列 [illegible])

n 個の異なるものから r 個とった重複順列の総数は n^r

（10）組み合わせ ($combination$)

n 個の異なるものから r 個取りだして作った組み合わせ

$${}_nC_r = \frac{nPr}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

例．$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}$ の 4 枚のカードから 3 枚のカードを取り出し、並べる方法を考える。ただし、順は考えない。

$\boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{3}\quad \boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{4}\quad \boxed{1}-\boxed{3}-\boxed{4}\quad \boxed{2}-\boxed{3}-\boxed{4}$

順を考えないので、3!（通り）少なくなるので、

$${}_4C_3 = \frac{{}_4P_3}{3!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4\text{（通り）}$$

例．4 人の生徒を次のように分ける。

（1）2 人ずつ A, B の 2 組に分ける。

$\boxed{\boxed{\text{A}\boxed{\text{a,b}}}\quad\boxed{\text{B}\boxed{\text{c,d}}}}\qquad \boxed{\boxed{\text{A}\boxed{\text{c,d}}}\quad\boxed{\text{B}\boxed{\text{a,b}}}}$

$\boxed{\boxed{\text{A}\boxed{\text{a,c}}}\quad\boxed{\text{B}\boxed{\text{b,d}}}}\qquad \boxed{\boxed{\text{A}\boxed{\text{b,d}}}\quad\boxed{\text{B}\boxed{\text{a,c}}}}$

$\boxed{\boxed{\text{A}\boxed{\text{a,d}}}\quad\boxed{\text{B}\boxed{\text{b,c}}}}\qquad \boxed{\boxed{\text{A}\boxed{\text{b,c}}}\quad\boxed{\text{B}\boxed{\text{a,d}}}}$

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} \times \frac{{}_2P_2}{2!} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} \times \frac{2\cdot 1}{2\cdot 1} = 6\text{（通り）}$$

（2）2 人ずつ 2 組に分ける。

$\boxed{\boxed{\text{A}\boxed{\text{a,b}}}\quad\boxed{\text{B}\boxed{\text{c,d}}}}$

$\boxed{\boxed{\text{A}\boxed{\text{a,c}}}\quad\boxed{\text{B}\boxed{\text{b,d}}}}$

$\boxed{\boxed{\text{A}\boxed{\text{a,d}}}\quad\boxed{\text{B}\boxed{\text{b,c}}}}$

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_2C_2}{2!} = \frac{6}{2!} = 3\text{（通り）}$$

（11）同じものを含む順列（重複組み合わせ $repeated\ combination$）

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_{n-p-q}C_r = \frac{n!}{p!q!r!}$$

ただし、$p+q+r=n$

例．7 文字 a,a,a,a,b,b,c を 1 列に並べる。

これは、場所の取り方と考えるとよい。

□ □ □ □ □ □ □

まず、a の 4 つの場所を選ぶ。次に b の 2 つの場所を選ぶ。最後に c の 1 つの場所を選ぶ。

よって、

$${}_7C_4 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = \frac{{}_7P_4}{4!} \cdot \frac{{}_3P_2}{2!} \cdot \frac{{}_1P_1}{1!}$$
$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1} = 105 \text{（通り）}$$

上の式からもわかるように以下のように計算してもよい。

$$\frac{7!}{4!2!1!} = 105 \text{（通り）}$$

例．方程式の自然数解の個数

（1）8 を x,y,z の 3 つの自然数の和として表すことは、

方程式 $x+y+z=8$ を満たす自然数解 x,y,z を求めることになる。

たとえば、$x=3, y=4, z=1$ という解を下図のように考える。

○ ○ ○|○ ○ ○ ○|○

x,y,z の値は左から順に | で仕切られた ○ の個数を数えればよい。

それでは | はどのようにして配置すればよいのだろう？

○∧○∧○∧○∧○∧○∧○∧○

2 つ | の場所の決め方は 7 つの ∧ の場所から決めればよいので、

${}_7C_2$

（2）x,y,z を 0 以上の整数として

方程式 $x+y+z=8$ を満たす整数解 x,y,z を求めると、

たとえば、$x=3, y=5, z=0$ という解を下図のように考える。

○ ○ ○|○ ○ ○ ○ ○|

これは 2 つの | の場所の決め方は 8 つの ○ と 2 つの | を合わせて、10 の場所

から２つの場所を選ぶと考えればよいので、

${}_{10}C_2$

となる。

EX. 分母を 210, 分子を 1 から 209 までの整数とする真分数 $\{\frac{1}{210}, \frac{2}{210}, \cdots, \frac{209}{210}\}$ を作る。このとき

これらの中で約分ができないものの個数を求めよ。

(03) 日本工大

EX. (1) 百の位、十の位、一の位の数字がそれぞれ $1, 2$ または 3 である３桁の整数は何個あるか。

(2) 一万の位、千の位、百の位、十の位、一の位の数字がそれぞれ $0, 1, 2$ または 3 である５桁の整数のうち 10 の倍数でない整数は何個あるか。

(3)(2) の条件を満たし、連続する２つの位の数字がともに 0 でない整数は何個あるか。(03) 中央大

EX. 両親と子供４人の家族が円形テーブルに着席するとき、次のような並び方はそれぞれ何通りあるか。ただし子供は男の子が３人、女の子が１人とする

また、問題文中の”男の子３人が隣り合わない”とは、

３人が連続して着席しないことであり、２人は隣り合って着席してもよい。(03) 広島女子大

（ア）両親が隣り合う並び方

（イ）男の子３人が隣り合わない並び方

（ウ）男の子３人が隣り合わず、両親が隣り合う並び方

EX. 右図のＡからＨの８個の領域を青・赤・黄の３色で塗り分ける。ただし、※の領域には色を塗らず、辺または辺の一部で隣り合う領域には異なる色を塗るものとする。このような塗り方が全部で何通りあるか求めよう。
３つの領域Ａ，Ｄ，Ｅは互いに隣り合うので異なる色が塗られる。Ａに色Ｐが、Ｄに色Ｑが、Ｅに色Ｒが、それぞれ塗られるとしようまず、Ｂに塗られる色で場合分けをする。

(1) Ｂに色$\boxed{\text{ア}}$が塗られる場合は、２つの領域$\boxed{\text{イ}}$を除いて塗る色が決まってしまう。その２つの領域の塗り方を考えると、この場合の塗り方は$\boxed{\text{ウ}}$通りである。
(2) Ｂに色$\boxed{\text{エ}}$が塗られる場合は、Ｃに塗る色が２通りある。それぞれを個別に考えることにより、この場合の塗り方は$\boxed{\text{オ}}$通りである。以上によりＡ，Ｄ，Ｅに塗られる色を固定した場合に（$\boxed{\text{ウ}}+\boxed{\text{オ}}$）通りの塗り方がある。Ａ，Ｄ，Ｅの塗り方は$\boxed{\text{カ}}$通りであるから、８個の領域の塗り方は全部で$\boxed{\text{キ}}$通りである。

(03) 上智大

EX. ある運送会社では引越しサービスを行っており
従業員は２人ずつのペアを組んで仕事をする。
ただし、ペアを組んだ２人のうち、少なくとも１人は
運転免許を持っていなければならない。
(1) ６人の従業員を３つのペアに分ける場合を考える。
運転免許を持っている人が３人のとき、分け方は全部で
何通りあるか。また、６人全員が運転免許を持っている
とき分け方は全部で何通りあるか
(2) ８人の従業員を４つのペアに分ける場合を考える。
運転免許を持っている人が４人のとき、分け方は全部で
何通りあるか。また、８人全員が運転免許を持っている
とき分け方は全部で何通りあるか (03) 東京理科大

EX. m 個の玉すべてを３つの袋Ａ，Ｂ，Ｃに分けて
入れる。このとき、玉は区別しないものとし、
また玉の入っていない袋があってもよいものとする。
また、袋Ａ，Ｂ，Ｃに入れる玉の数をそれぞれ x, y, z と
する。
(1)$m = 18$ のとき、$x > y > z \geqq 0$ を満たす入れ方は何
通りあるか。
(2)$m = 6n$ のとき、$x > y > z \geqq 0$ を満たす入れ方は何
通りあるか。
n を用いて表せ。ただし、n は自然数とする。
(03) 山口大

EX. 次の各問いについて、A地点からB地点へ行く最短経路の数は何通りあるか。

(1) 図－１のような路の場合、最短経路の数は何通りあるか。

(2) 図－２のようなサイコロの内部を含む立体的な路の場合、最短経路の数は何通りあるか。

(3) 図－３のようなサイコロの表面のみからなる路の場合、最短経路の数は何通りあるか。(03) 名城大

2. 確率 ($probability$)

(1) 事象の確率

試行 ($trial$)・・・結果が偶然に決まるような実験や観察

事象 ($event$)・・・試行の結果として起こる事柄

事象 A の起こり得る確率は

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{a}{N} = \frac{\text{事象Aの起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

※ P は $Probabirity$ の頭文字である。U は全事象。

例. 1 個のさいころを投げて、偶数 ($even\ number$) の目が出る確率は

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

※さいころを投げたとき、さいころの目の出方はどの目も同じである。このようなことを「目の出方は同様に確からしい」という。

(2) 確率の基本性質 ($basic\ property$)

i. 任意 ($arbitrariness$) の事象 A に対して

$0 \leqq n(A) \leqq n(U)$ なので、

この不等式の各辺を $n(U)$ で割ると、

$0 \leqq P(A) \leqq 1$

ii. 全事象 (*whole event*) U の確率　　$P(U) = \dfrac{n(U)}{n(U)} = 1$

iii. 空事象 (*empty event*) ϕ の確率　　$P(\phi) = \dfrac{0}{n(U)} = 0$

和事象 (*sum event*)・・・事象 A または事象 B が起こることを $A \cup B$ で表す。

積事象 (*product event*)・・・事象 A と事象 B がともに起こることを $A \cap B$ で表す。

例. 1 個のさいころを投げる試行で、偶数の目が出る事象を A、2 以下の目が出る事象を B とする。

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2\}$

$A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{1}{6}$$

また、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

iv. A, B が排反事象 (*exclusive event*) のとき、

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A, B が排反事象ではないとき、

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(3) 余事象の確率

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

例. 3 個の硬貨を同時に投げる。このとき、少なくとも 1 枚が表となる確率を求める。

全事象を U とし、求める事象を A、3 枚とも裏となる事象を B とすると、

$B = \{$（裏、裏、裏）$\}$ より $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(U)} = \dfrac{1}{8}$

よって、$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$ となる。

(4) 独立な試行 ($independent\ event$) の確率

２つの試行 T_1, T_2 が独立であるとき、T_1 で事象 A が起こり、T_2 で事象 B が起こる確率は

$P(A) \cdot P(B)$

(5) 反復試行 ($repeated\ trials$) の確率

ある試行において、事象 A が起こる確率を P、その余事象の確率を $q = 1 - p$ とする。この試行を n 回くり返す反復試行において、事象 A が r 回起こる確率は

${}_nC_r p^r q^{n-r} \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots, n)$

である。ただし、$p^0 = 1, q^0 = 1$ とする。

(6) 期待値 ($expectation$)

ある試行において、事象 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ は排反事象で、そのうちどれか１つが必ず起こるものとする。このとき、確率 [illegible] を $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ とすれば、次の式が成り立つ。

$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$

また、$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ が起こるとき、ある数量 x がそれぞれ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ という値をとるとする。このとき、

$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n$

を、数量 x の期待値という。

EX. 赤球と白球合わせて１０個の球が入っている袋がある。袋の中の赤球の個数を n とする。この袋から２個の球を同時に取り出す。
(1)$n=3$ のとき、白球が出ない確率を求めよ。
(2) 赤球が２個出る確率と、赤球と白球が１個ずつ出る確率が等しいとき、n の値を求めよ。
ただし、$n \geqq 2$ とする。
(3) 赤球と白球が１個ずつ出る確率が $\dfrac{1}{3}$ 以上になる n の値の範囲を求めよ。(03) 北里大

EX. 立方体が袋に入っている。それぞれの立方体はすべて同じ大きさで、６色の異なる色のペンキをすべて使って６面が異なる色に塗られている。この袋の中のものと同じ立方体を用意し、同じ６色のペンキをすべて使って６面を異なる色に塗り分けたとき、どのように塗ってもこれを適当に回転させれば、この袋の中に色の塗り方が６面とも全く同じになる立方体が必ず２個あり、２個未満のことも３個以上あることもないものとする。ただし、１つの立方体の１面は、１色で塗りつぶされているものとする。(03) 島根医大
(1) 袋の中には何個の立方体が入っているか。
この立方体がちょうど２個縦に重なって入る。透明な直方体の箱がある。袋の中でこの箱に２個の立方体を入れて袋の外に取り出すと２個の立方体が接する２面だけが外から見えないものとする。ただし、箱にどの立方体がどの向きに入るかは同様に確からしいものとする。
(2) 箱の外から見える面に６色すべての色が揃う確率を求めよ。
(3) 箱の４つの側面（長方形の面）のいずれにおいても、２個の立方体のその向きの色が一致する確率を求めよ。

EX.

赤、青、緑の玉がそれぞれ２個ずつ入った中の見えない袋がある。２人の人がそれぞれこのような袋を持ち１回に１個ずつ玉を取り出す。ただし、取り出した玉はもとに戻さないものとする。

(1) 一方の人が６個の玉を全部取り出す取り出し方は何通りあるか。ただし、同じ色の玉は区別しない。

(2) ２人の１回目に取り出した玉の色が同じであったとき、２人の２回目に取り出す玉の色がまた同じである確率を求めよ。

(3) ２人の１回目に取り出した玉の色が異なっていたとき、２人の２回目に取り出す玉の色が同じである確率を求めよ。

(4) １回目も２回目も２人の取り出した玉の色が同じであったとき、３回目もまた同じである確率を求めよ。

(03) 島根医大

EX.

１つの箱の中に１から１０までの数が書かれたカードが４枚ずつ計４０枚入っている。この箱から k 枚 $(3 \leqq k \leqq 12)$ のカードを同時に取り出す。

このうちの３枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする。

(1)$p(k)$ を求めよ。

(2)$(4 \leqq k \leqq 12)$ のとき、$f(k) = \dfrac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ。

(3)$p(k)$ を最大にする k の値を求めよ。(03) 名古屋大

EX.

３つの選択肢から１つだけある正解を選ぶ問題が問１から問８まで８題ある。各問題とも選択肢をでたらめに選ぶとき、次の確率を求めよ。

(1) すべて誤りとなる確率

(2) 問１から問４までに２題以上、かつ問５から問８までに１題以上正解が選ばれる確率

(3) 正解が５題以上選ばれ、そのうちちょうど５題だけ連続する確率 (03) 法政大

EX.

点 P は数直線上を原点から出発して、投げたサイコロの目が $1,2,3$ または 4 なら正の向きに 2 進み、5 または 6 なら負の向きに 1 進むものとする。
点 P の座標を x として、サイコロを n 回投げたとき、$x=15$ となる確率を p_n とする。

(1)n 回中、5 または 6 の目が k 回出る確率を n と k を用いて表せ。ただし、$k=0,1,\cdots,n$ とする。
(2)p_9 と p_{10} を求めよ。
(3)$n \geqq 9$ とするとき、p_n を求めよ。(03) 新潟大

EX.

さいころを振り、出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし、1 で割った余りは 0 である。さらにさいころを振り、出た目の数で X_1 を割ったあまりを X_2 とする。以下同様にして、X_n が決まればさいころを振り、出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。(03) 東京大
このようにして、$X_n(n=1,2,\cdots)$ を定める。
(1)$X_3=0$ となる確率を求めよ。
(2) 各 n に対し、$X_n=5$ となる確率を求めよ。
(3) 各 n に対し、$X_n=1$ となる確率を求めよ。

EX. 1から10までの数が1つずつ書かれた１０本のくじがあり、このうち連続する2つの数の２本が当たりである。ただし、10と1は連続しているとする。当たりくじ1本の賞金は1万円である。このくじを3本引くとして、次の２通りの引き方を考える。

連番方式 : 1から10までの数の中からでたらめに1つ選ぶ。選ばれた数をNとして$N, N+1, N+2$の3本のくじを引く。ただし、$N=9$のときは$9, 10, 1$の3本を引き、$N=10$のときは$10, 1, 2$の3本を引く。

バラ方式 : １０本のくじからでたらめに3本を引く。

(1) 連番方式で、k本$(k=0,1,2)$当たる確率$P(k)$を求めよ。(03) 長岡技科大

(2) バラ方式で、k本$(k=0,1,2)$当たる確率$Q(k)$を求めよ。

(3) 連番方式の賞金の期待値Eを求めよ。

(4) バラ方式の賞金の期待値Fを求めよ。

EX. kを整数としqを実数とする。A, Bの2人が次のようなゲームを行う。まずAが3枚の硬貨を投げ、表の出た枚数をXとする。$X>k$ならAの勝ち、$X<k$ならBの勝ちとする。$X=k$のときは当たる確率がqのくじをAが引き、当たればAの勝ち、そうでなければBの勝ちとする。A, Bとも、勝った場合には$X+1$円の賞金がもらえ、負けた場合には何ももらえない（0円もらう）とする。ここでkおよびqの値は、AとBのもらう賞金の期待値が等しくなるように定める。(03) 千葉大

(1)kとqの値を求めよ。

(2) 上のゲームを2回行ったとき、Bの賞金総額が3円であった。このとき、Aの賞金総額も3円である条件付き確率を求めよ。

EX. 座標平面上に $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて、$y \leqq x(a-x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし、$0<a \leqq 2$ とする。

(1) ボールを１回落とす。当たる確率を求めよ。

(2) １回目は $a=\dfrac{1}{2}$, ２回目は $a=\dfrac{3}{2}$, として、ボールを２回落とす１回だけ当たる確率を求めよ。

(3)a の値を変えずにボールを３回落とす。少なくとも１回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であり、当たりの数の期待値が $\dfrac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。(03) 九州大

EX. A,B ２つの袋があり、A には白石３個、黒石３個、B には白石２個、黒石２個が入っている。まず、A から石を１個取り出し、見ないで B に入れた。(03) 大阪歯大

(1) この後、B から１個取り出したとき白石であった。この白石が A から来た白石である確率を求めよ。

(2)A から３個取り出すときの黒石の数を X, B から３個取り出すときの白石の数を Y とする。X と Y のそれぞれの平均と分散を求めよ。また、$\dfrac{2}{5}X+\dfrac{3}{5}Y$ の平均を求めよ。

EX. 任意の正の実数 a,b,x,y に対して、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また等号が成立する条件を求めよ。

$$\sqrt{ax+by}\sqrt{x+y} \geqq \sqrt{a}x+\sqrt{b}y \qquad \text{(03) 甲南大}$$

EX. 次の問に答えよ。(03) 上智大

(1)k を実数の定数とする。実数 x, y が $x+2y=k$ を満たすとき、x^2+2y^2 の最小値を求めよ。

(2) 2変数関数 $f(x,y)=\dfrac{x+2y+3}{x^2+2y^2+3}$ の最大値を求めよ。

EX. 47^{2003} の一の位の数を求めよ。(03) 自治医大

EX. $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ は、$x=1,-1,-2$ で、整数値 $f(1)=r, f(-1)=s, f(-2)=t$ をとるものとする。

(1)a, b, c をそれぞれ r, s, t の式で表せ。

(2) すべての整数 n について、$f(n)$ は整数になることを示せ。

(03) 岡山大

EX. 次の問に答えよ。

(1)$\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(2)ω が無理数、a, b が有理数で a が 0 でないとき、$a\omega+b$ が無理数であることを証明せよ。

(3) 座標平面上に2点 $A(p,q), B(r,s)$ をとり、原点を O とする。$\triangle OAB$ が正三角形となるとき、p, q, r, s のうち少なくとも1つは有理数とならないことを証明せよ。(03) お茶の水大

EX. $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$ には、下の $(a) \sim (d)$ の中から正しいものを1つ選べ。a, b を正の整数とする。

(1)「$a+b<3$」は、「$a^2+b^2<6$ である」ための $\boxed{ア}$

(2)「$a+b<ab+1$」は、「$a \geqq 2$ かつ $b \geqq 2$」ための $\boxed{イ}$

(3)「$ab<a+b$」は、「$a+b<4$」ための $\boxed{ウ}$

(a) 必要十分条件である

(b) 必要条件であるが、十分条件ではない

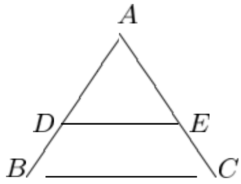
(c) 十分条件であるが、必要条件ではない

(d) 必要条件でも十分条件でもない (03) 上智大

3. 平面図形 $(plane\ figure)$

(1) 三角形と比

$\triangle ABC$ と辺 AB, AC 上に、それぞれ点 D, E があるとき



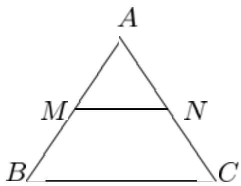
○ $DE//BC$ ならば $AD : AB = AE : AC = DE : BC$

$AD : DB = AE : EC$

○ $AD : AB = AE : AC$ ならば $DE//BC$

○ $AD : DB = AE : EC$ ならば $DE//BC$

(2) 中点連結定理 [illegible]

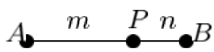


$\triangle ABC$ の 2 辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とすると

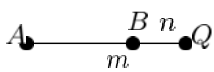
$MN//BC,\ MN = \dfrac{1}{2}BC$

(3) 内分 $(internal\ division)$・外分 $(external\ division)$

線分 $(segment)$ AB 上に点 P があり、$AP : PB = m : n$ であるとき、点 P は線分 AB を $m : n$ の比に内分するという。



線分 AB の延長 $(prolong)$ 上に点 Q があり、$AQ : QB = m : n$ であるとき、点 Q は線分 AB を $m : n$ の比に外分するという。

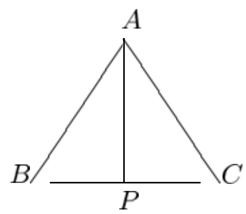


(4) 内角 ($internal\ angle$) の二等分線 ($bisector$) と比 ($ratio$)

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と対辺 ($opposite\ \ side$) BC との交点 ($intersection\ point$) を P とすれば、点 P は BC を $AB : AC$ に内分するので、

$BP : PC = AB : AC$

となる。

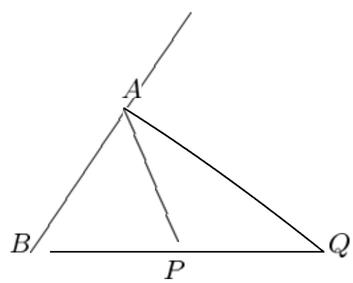


(5) 外角 ($external\ angle$) の二等分線と比

$\triangle ABC$ の頂点 ($vertex$) A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすれば、点 Q は BC を $AB : AC$ に外分するので、

$BQ : QC = AB : AC$

となる。



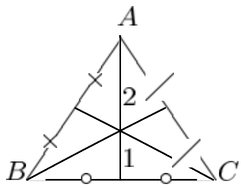
(6) 角の二等分線と比の定理の逆

$\triangle ABC$ において、辺 BC を $AB : AC$ の比に内分および外分する点をそれぞれ P, Q とすると

○ AP は頂点 A における内角を二等分する。

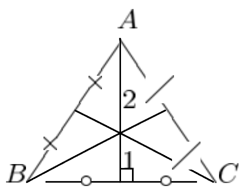
○ AQ は頂点 A における外角を二等分する。

(7) 三角形の重心 ($barycentre$)



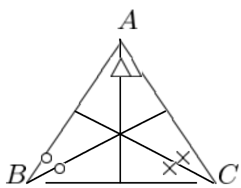
三角形 ($triangle$) の 3 つの中線 ($median$) は 1 点で交わる。その交点はそれぞれの中線を $2:1$ に内分する。

(8) 三角形の外心 ($circumcenter$)



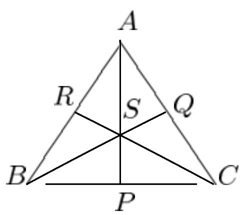
三角形の 3 辺の垂直二等分線 ($perpendicular\ bisector$) は 1 点で交わる。

(9) 三角形の内心 ($incenter$)



三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。

(10) チェバの定理 ($Ceva's\ theorem$)



$\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R があり、3 直線 ($line$)

AP, BQ, CR が 1 点で交われば

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

となる。

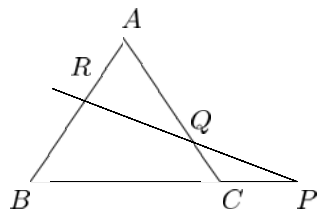
（11） チェバの定理の逆

$\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R があり、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

が成り立てば、3 直線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる ($intersect$)。

（12） メネラウスの定理 ($Menelaus'\ theorem$)



ある直線が $\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB またはその延長線とそれぞれ点 P, Q, R で交われば

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

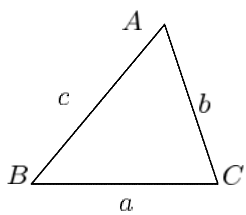
となる。

（13） 辺と角の大小関係

三角形において、長い辺に対する角は短い辺に対する角より大きい。

c の対角は $\angle ACB$, b の対角は $\angle ABC$

$c > b$ より $\angle ACB > \angle ABC$

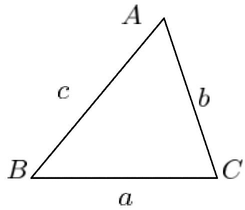


（14） 三角形の 3 辺の長さの性質

三角形において、

○ 2 辺の長さの和は、他の 1 辺の長さより大きい。

○ 2 辺の長さの差は、他の 1 辺の長さより小さい。

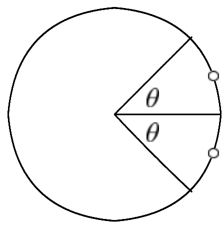


(15) 円 $(circle)$

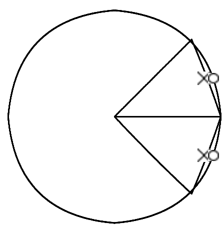
(16) 円の基本性質

(17) １つの円で、等しい中心角 $(central\ angle)$ に対する弧 (arc) の長さは等しい。

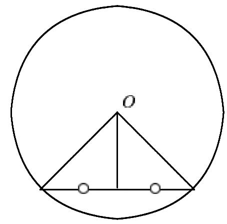
逆も成り立つ。



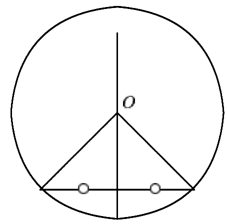
(18) １つの円で、長さの等しい弧に対する弦 $(chord)$ の長さは等しい。



(19) 円の中心から弦にひいた垂線 $(perpendicular)$ は、その弦を二等分する $(bisect)$。



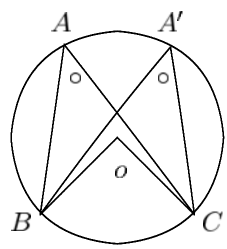
(20) 弦の垂直二等分線は、円の中心を通る。



4. 円周角 $(angle\ of\ circumference)$ の定理

定理　1つの弧に対する円周角の大きさは一定 $(constant)$ であり、その弧に対する中心角の半分 $(half)$ である。

$$\angle BAC = \angle BA'C = \frac{1}{2}\angle BOC$$



5. 円周角と弧

定理　1つの円において

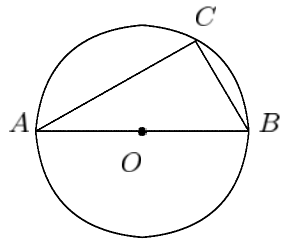
(1) 等しい円周角に対する弧は等しい。

(2) 等しい弧に対する円周角は等しい。

6. 直角 $(right\ angle)$ と円周角

定理　線分 AB を直径 $(diameter)$ とする円の周上に A, B と異なる点 P をとれば

$\angle APB = 90^\circ$ である。



7. 円周角の定理の逆

定理　4点 A, B, P, Q について、P, Q が直線 AB の同じ側にあって

$\angle APB = \angle AQB$ ならば、この4点は1つの円周上にある。

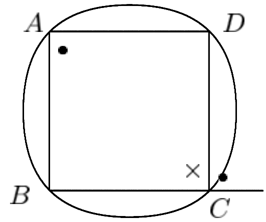
8. 円に内接する $(inscribe)$ 四角形 $(quadrangle)$ の性質

定理　円に内接する四角形では

(1) 対角 $(diagonal)$ の和は 180° である。

$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

(2) 外角はそれと隣り合う内角の対角に等しい。



9. 四角形の内接条件

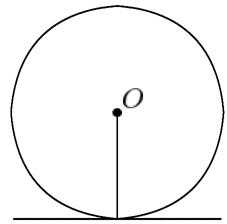
定理　次の条件のどちらかが成り立つ四角形は円に内接する。

(1)　1組の対角の和が 180° である。

(2)　1つの外角はそれと隣り合う内角の対角に等しい。

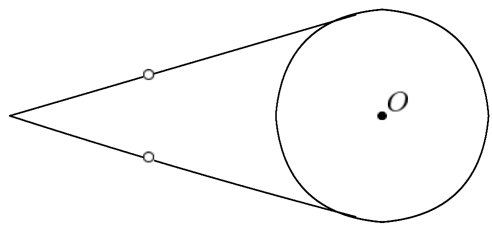
10. 円の接線

円の接線は、接点を通る半径に垂直である。



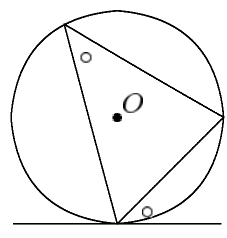
11. 接線の長さ ($length$)

定理　円外の１点からその円にひいた２つの接線の長さは等しい。



12. 接線と弦のつくる角

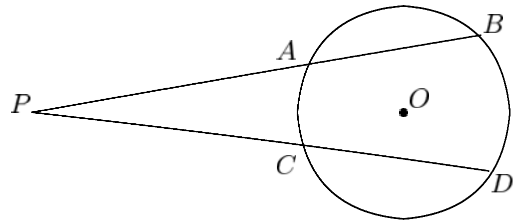
定理　円の接線とその接点を通る弦のつくる角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



13. 方べきの定理 ($power\ theorem$)(i)（正方形の累乗の定理）

定理　円 O の外部の点 P から円 O と 2 点 A, B で交わる直線と、円 O と 2 点 C, D で交わるを引くと

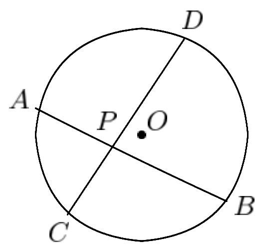
$PA \cdot PB = PC \cdot PD$



14. 方べきの定理 (ii)

定理　円 O の内部の点 P を通る 2 本の弦 AB, CD をとると

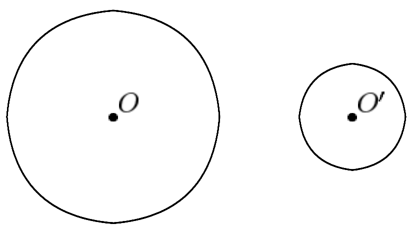
$PA \cdot PB = PC \cdot PD$



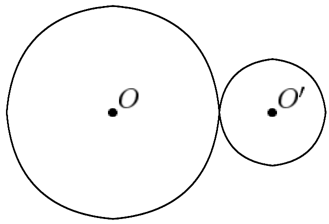
15. 2 つの円の位置 ($location$) 関係

円 O の半径を r、円 O' の半径を r'、中心間の距離を d とすると、

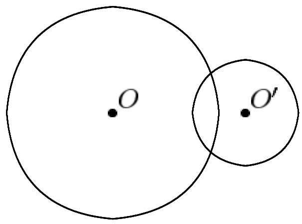
(1) 互いに外部にある $\Longleftrightarrow d > r + r'$



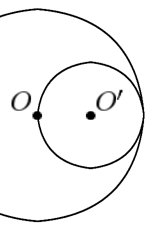
(2) 外接する ($circumscribe$) $\Longleftrightarrow d = r + r'$



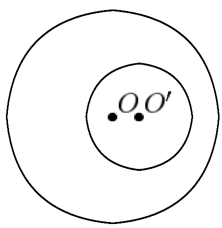
(3) 2点で交わる $\Longleftrightarrow r - r' < d < r + r'$



(4) 内接する $\Longleftrightarrow r - r' = d$



(5) 一方が他方を含む $(include)$ $\Longleftrightarrow r - r' > d$



VICTORY-数学 II

1. 方程式 $(equation)$・式 $(expression)$ と証明

(1) 複素数 $(complex\ number)$

数の範囲をこれまでの実数から複素数に拡張して考えましょう。

これまで学んできたように

$x^2=5$ は $x=\pm\sqrt{5}$

となりますが、同様に考えると

$x^2=-5$ は $x=\pm\sqrt{-5}$

となります。

ここで、$\sqrt{-5}$ について考えましょう。

$\sqrt{-5}=\sqrt{5}\sqrt{-1}$ と考えられます。

$\sqrt{-1}$ を虚数と呼び、$i=\sqrt{-1}$ と定義します。

したがって、$x^2=-5$ は $x=\pm\sqrt{5}i$ となります。

a, b を実数とするとき、

$a+bi$ を複素数といい、

a を実部 $(real\ part)$、b を虚部 $(imaginanry\ part)$ といいます。

$a+bi$ において、$b=0$ のとき、実数となり、

$b\neq 0$ のとき、虚数となります。

とくに、$a=0,\ b\neq 0$ のとき、純虚数 $(purely\ imaginary\ number)$ といいます。

(2) 複素数の相当 $(equality)$

$a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c$ かつ $b=d$

とくに $a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0$ かつ $b=0$

$a+bi=0$ は $a+bi=0+0i$ と考えられますね。

(3) 複素数の四則 $(four\ operations)$ 計算

i. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

ii. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

iii. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

iv. $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ （ただし $c+di\neq 0$）

(4) 負の数の平方根

$a>0$ のとき、$-a$ の平方根は、$\sqrt{a}i$ と $-\sqrt{a}i$ である。

(5) $a>0$ のとき $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ とくに $\sqrt{-1}=i$

(6) 2 次方程式 $(quadratic\ equation)$ の解 $(solution)$ の公式 $(formula)$

i. 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ii. 2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(7) 判別式 $(discriminant)$ と解の種類 $(type)$

b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式といい、$D=b^2-4ac$ とすると (i)$D>0\iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ

(ii)$D=0\iff$ 実数の重解 $(multiple\ root)$ をもつ

(iii)$D<0\iff$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

２次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を

$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ としても (i), (ii), (iii) がいえる。

（8） ２次方程式の解と係数 $(coefficient)$ の関係

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の２つの解を α,β とすると

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$
$$=a(x-\alpha)(y-\beta)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$

となるので、

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

となることがわかる。

（数学Ａの応用・展開公式の変形）

i. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

ii. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

iii. $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

iv. $\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

（9） ２数を解とする２次方程式

２数 $\alpha\beta$ を解とする２次方程式の１つは、

$\alpha+\beta=p,\alpha\beta=q$ とすると、

$x^2-px+q=0$

と表せる。

（10） 実数解の符号

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$、２つの解を α,β とすると

i. α,β は実数で共に正 $\Longleftrightarrow D\geqq 0,\alpha+\beta>0,\alpha\beta>0$

ii. α, β は実数で共に負 $\Longleftrightarrow D \geqq 0, \alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$

iii. α, β は実数で異符号 $\Longleftrightarrow \alpha\beta<0$

（11）因数の定理 ($factor\ theorem$)

i. 整式の除法 ($division\ of\ polynomials$)

整式 $A(x)$ を 0 でない整式 $B(x)$ で割った商を $Q(x)$、余りを $R(x)$ とすると、

$$A(x)=B(x)Q(x)+R(x) \qquad R(x) \text{ の次数} < B(x) \text{ の次数}$$

とくに、$R(x)=0$ となるとき、$A(x)$ は $B(x)$ で割り切れるといい、$B(x)$ は $A(x)$ の因数であるという。

ii. 剰余の定理 ($multiplication\ of\ polynomials$)

整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余り R は

$R=P(\alpha)$ で与えられる。

iii. 因数定理

整式 $P(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ $\Longleftrightarrow P(\alpha)=0$

（12）１の３乗根 ($third\ radical\ root$)

$x^3=1$ より

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1, \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

※虚数の一方を ω とする。

i. １の３乗根は、$1, \omega, \omega^2$ の３つである。

ii. $\omega^2+\omega+1=0$

iii. $\omega^2=\overline{\omega}$

※ $\overline{\omega}$ は複素数 ω の共役 ($conjugate$) な複素数である。

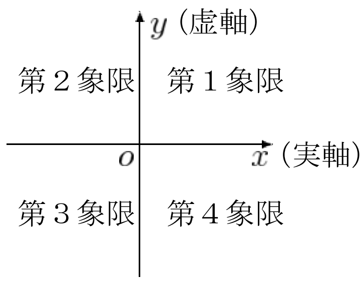
(13) 複素数の範囲では「n 次方程式は n 個の解をもつ」ということが知られている。

ただし、このとき 2 重解なら解 2 個，3 重解なら解 3 個というように数える。

(14) 複素数平面 ($complex\ number\ plane$)（ガウス平面）

原点を O とする xy 平面上に、複素数 $z = x + yi$ の (x, y) を点として対応させることで、すべての複素数は平面上の点として表される。

例. $z = 1 + 2i \Longrightarrow (1, 2)$



(15) 複素数の絶対値

点 z と原点 O との距離を複素数 z の絶対値といい、$|z|$ で表す。

$z = x+yi$ (x, y ともに実数) とすると、$|z| = |x+yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$

i. $|z| \geqq 0$ とくに $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

ii. $|z| = |\overline{z}|$

iii. $|z|^2 = z\overline{z}$

(16) 複素数の和

複素数平面上の 3 点 O, z, w が同一直線上になければ、4 点 $O, z, z + w, w$ は平行四辺形をつくる。

(17) 複素数の極形式 ($polar\ \ form$)

$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ただし

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = arg\ z$（θ を複素数 z の偏角 ($argument$) という）

（18）$|\overline{z}| = |z|, arg\ \overline{z} = -arg\ z$

（19）複素数の積と商

i. 積

$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, arg\ (z_1z_2) = arg\ z_1 + arg\ z_2$

ii. 商

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

$|\dfrac{z_1}{z_2}| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, arg\ (\dfrac{z_1}{z_2}) = arg\ z_1 - arg\ z_2$

（20）複素数の積と回転 ($rotation$)

$w = \cos\theta + i\sin\theta$ とするとき、wz の表す点は、点 z を原点 O を中心として角 θ だけ回転した点となる。

（21）ド・モアブル ($De\ Moivre$) の定理

整数 n に対して　　$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

複素数の計算で、ド・モアブルの定理を使うと計算が簡単になる場合がある。

例．$(1+i)^{20} = \left\{\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i}\right)\right\}^{20}$

$= \{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\}^{20} = (\sqrt{2})^{20}(\cos 900^\circ + i\sin 900^\circ)$

$= 2^{10}(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = -2^{10} = -1024$

$\boxed{参考}$ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \cdots (*)$ の証明

（証明）

$n=1$ のとき

(左辺) $=(\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos\theta+i\sin\theta$

(右辺) $=\cos\theta+i\sin\theta$

よって、$n=1$ のとき成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つと仮定する。

$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta\cdots$ (i)

(i) の両辺に $\cos\theta+i\sin\theta$ をかけると

$(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+$ [illegible]

$=$ [illegible] $-$ [illegible] $+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)$

$=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$

これは、$n=k+1$ のときにも成り立つことを示している。

したがって、任意の n について $(*)$ が成り立つ。

また、$n=0$ のとき $(*)$ は

(左辺) $=(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$

(右辺) $=1$

よって、$n=0$ のときも成り立つ。

さらに n が負の整数のとき、$n=-N$ とすると

N は自然数で

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-N}$$
$$=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^N}=\frac{1}{\cos N\theta+i\sin N\theta\cdots}$$
$$=\cos(-N\theta)+i\sin(-N\theta)=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

ゆえに、任意の整数について $(*)$ が成り立つ。

また三角関数の 2 倍角、3 倍角などの公式も作ることができる。

（2 倍角）

$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (cos\theta + i \sin\theta)^2$ より

$(\text{右辺}) = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i \sin\theta \cos\theta$

左辺と比べて

[illegible]

[illegible]

（3 倍角）

$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (cos\theta + i \sin\theta)^3$ より

$(\text{右辺}) = (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

左辺と比べて

[illegible]

[illegible]

（22） α の n 乗根

$z^n = \alpha$ の解を α の n 乗根という。

2. 図形 $(figure)$ と方程式

（1） ２点間の距離

２点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 間の距離は

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

とくに、原点 O と点 $P(x, y)$ との間の距離は

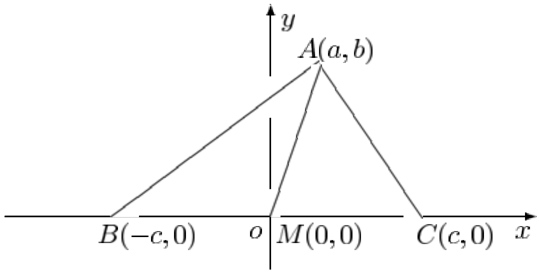
$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

（2） 中線定理 [illegible]

[illegible] C の辺 BC の中点を M とすれば、

$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

である



(3) 内分点 [illegible]・外分点 [illegible] の

座標 ($ccordinate$)

２点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ を結ぶ線分 AB を

$m:n$ に内分する点の座標は $(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\dfrac{my_2+ny_1}{m+n})$

$m:n$ に外分する点の座標は $(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\dfrac{my_2-ny_1}{m-n})$

とくに、線分 AB の中点の座標は $(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$

(4) 三角形の重心 ($barycentre$) の座標

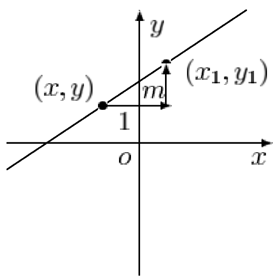
[illegible] を３頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標は

$$(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$$

(5) １点を通り傾き m の直線

点 (x_1,y_1) を通り、傾き m の直線の方程式は

$y-y_1=m(x-x_1)$

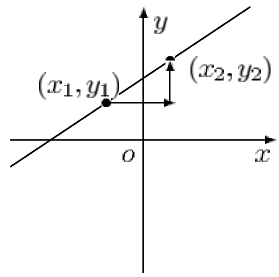


(6) 異なる２点を通る直線

２点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　　$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

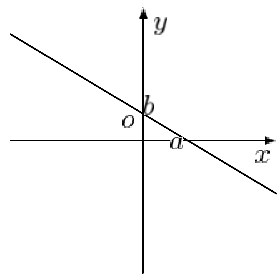
$x_1 = x_2$ のとき　　$x = x_1$



(7) 両軸上の２点 $(a,0),(0,b)$ を通る直線

$a \neq 0, b \neq 0$ とするとき、２点 $(a,0),(0,b)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

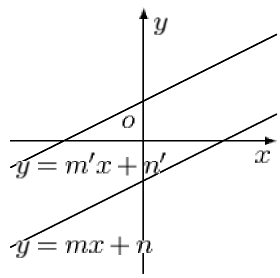


(8) ２直線の平行 $(parallel)$ 条件・垂直 $(perpendicular)$ 条件

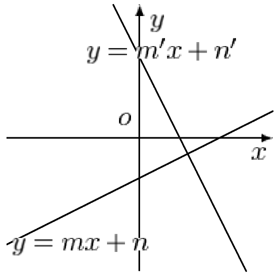
２直線 $y = mx + n,\ y = m'x + n'$ について

○平行 $\Longleftrightarrow m = m'$

$m = m',\ n = n'$ のときは２直線が一致するが、この場合も平行であると考える。



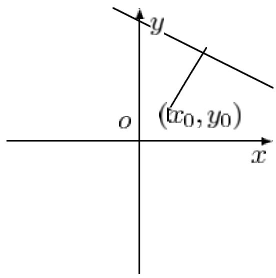
○垂直 $\Longleftrightarrow mm' = -1$



(9) 点と直線の距離

点 (x_0, y_0) と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



(10) ２直線の交点を通る直線

２つの直線 $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$ が１点で交わるとき、その交点を通る直線の方程式は

$$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0 \quad (k\text{ は定数})$$

※　ただし、この場合 $a'x+b'y+c'=0$ は表せない。

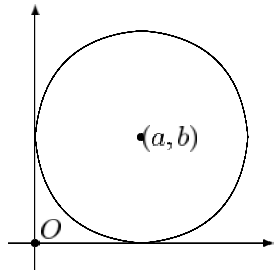
$k(ax+by+c)+(a'x+b'y+c')=0$ とした場合は

$k=0$ とすれば、$a'x+b'y+c=0$ を表すことができる。

(11) 円の方程式

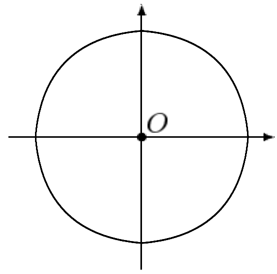
点 (a, b) を中心とする半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



とくに、原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$x^2+y^2=r^2$$

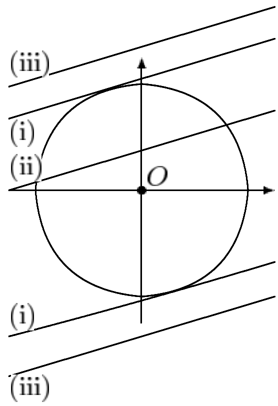


（12） 円と直線の共有点 $(common\ point)$

(i)$D>0 \Longleftrightarrow$ 円と直線は２点で交わる

(ii)$D=0 \Longleftrightarrow$ 円と直線は１点で接する

(iii)$D<0 \Longleftrightarrow$ 円と直線は共有点をもたない



（13） 円の接線

○円 $x^2+y^2=r^2$ の周上の点 (x_0,y_0) における接線の方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

○円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の周上の点 (x_0,y_0) における接線の方程式は

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

（14） ２つの円の交点を通る直線の方程式

２つの円が共有点をもつとき

$x^2+y^2+ax+by+c=0 \cdots(1)$

$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \cdots(2)$

の交点を通る直線の方程式は

$(x^2+y^2+ax+by+c)+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$ （k は定数）

と表されます。

（15） 軌跡 ($locus$)

与えられた条件を満たす点の軌跡が図形 F であることを証明するには、

(i) 与えられた条件を満たす点は、図形 F 上にある。

(ii) 逆に、図形 F 上のすべての点は、与えられた条件を満たす。

を示す。(ii) が明らかな場合は省略することが多い。

（16） アポロニウス ($Apollonius$) の円

$m \neq n$ のとき、異なる２定点 A, B に対し、$AP : BP = m : n$ を満たす点 P の軌跡は、線分 AB を $m : n$ に内分する点と外分する点を直径 ($diameter$) の両端とする円となる。この円を「アポロニウスの円」という。

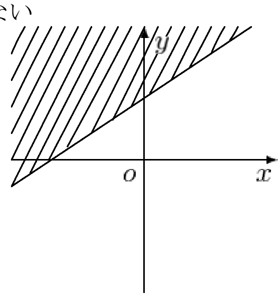
（17） 不等式の表す領域 ($domain$)

i. 不等式と直線の上側・下側

直線 $y = mx + n$ を l とすれば

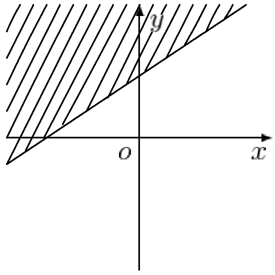
○ $y > mx + n$ の表す領域　　l の上側

ただし、境界線を含まない



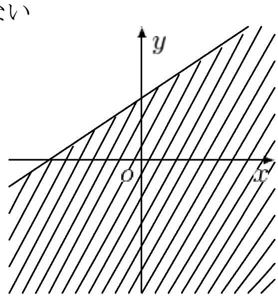
○ $y \geqq mx + n$ の表す領域　　l の上側

ただし、境界線を含む



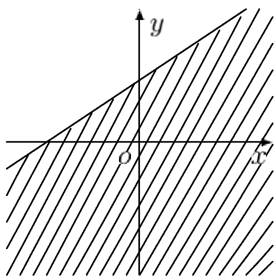
○ $y < mx + n$ の表す領域　　l の下側

ただし、境界線を含まない



○ $y \leqq mx + n$ の表す領域　　l の下側

ただし、境界線を含む

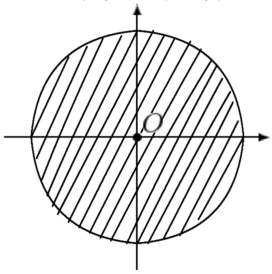


ii. 不等式の円の内部・外部

円 $(x-a)^2 + (x-b)^2 = r^2$ を C とすれば、

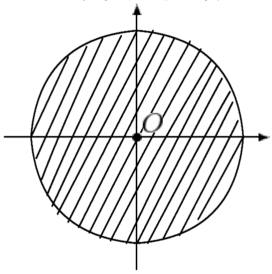
○ $(x-a)^2 + (x-b)^2 < r^2$ の表す領域は C の内部 $(interior)$

ただし、境界線を含まない



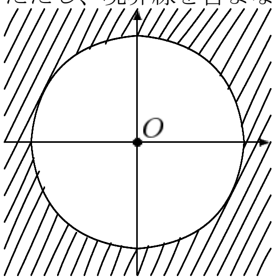
○ $(x-a)^2+(x-b)^2 \leqq r^2$ の表す領域は C の内部 $(interior)$

ただし、境界線を含む



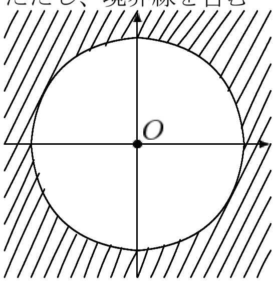
○ $(x-a)^2+(x-b)^2 > r^2$ の表す領域は C の外部 $(exterior)$

ただし、境界線を含まない



○ $(x-a)^2+(x-b)^2 geqqr^2$ の表す領域は C の外部 $(exterior)$

ただし、境界線を含む



3. 三角関数

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

（暗記法：咲いたコスモス、コスモス咲いた）

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

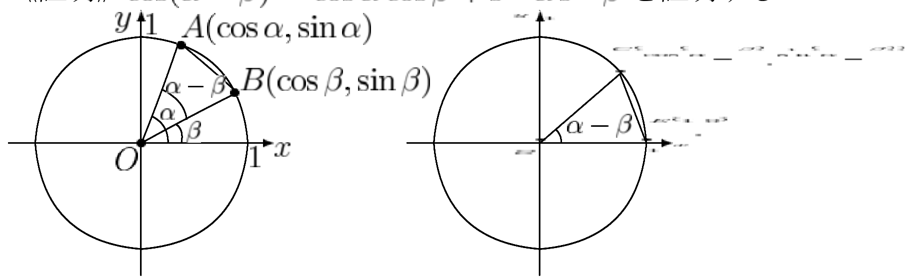
（暗記法：越さない越さないまだ先々も）

（4）$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

（5）$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

（6）$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

《証明》$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ を証明する



上の図のように４点 A, B, A', B' をとると、それらの座標は

$A(\cos\alpha,\sin\alpha), B(\cos\beta,\sin\beta), A'(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)), B'(1,0)$

となる。

２点間の距離の公式を用いて、$AB^2, A'B'^2$ を計算すると

$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

$\quad=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$A'B'^2=\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\{\sin(\alpha-\beta)-0\}^2=2-2\cos(\alpha-\beta)$

$AB=A'B'$ すなわち $AB^2=A'B'^2$ であるから証明された。

（7）$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

（証明）

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ について

β を α として

$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos\alpha$

（8）$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

（証明）

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

β を α として

$\cos(\alpha +$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

（9） $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

（証明）

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

β を α として

$\tan(\alpha + \alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha}$

$= \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

（10） $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}, \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$

（証明）

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ より

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$

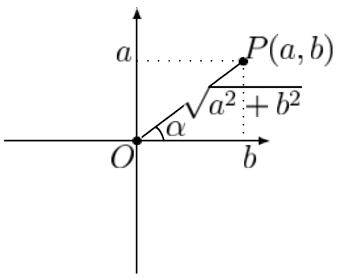
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ より

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$

（11） 三角関数の合成 $(composition)$

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$

ただし、α は $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を満たす。



（例）

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta)$

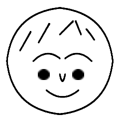
$=2(\sin\theta\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\frac{1}{2})$

$=2(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6})$

(ここで、$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$ を利用すると)

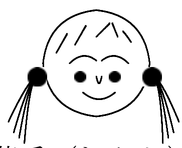
$=2\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$

※　$2=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}$



三角関数の合成って、難しいなあ〜

大知（たいち）くん



そうよね。私もよくわからないわ。

蓮香（れんか）さん

みんな苦手とするところだね。上の例で考えてみると

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

$=\square(\sin\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\square}+\cos\theta\cdot\dfrac{1}{\square})$

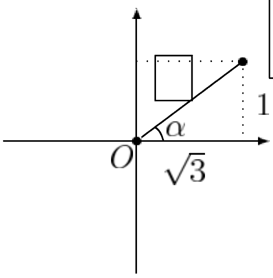
として、$sine$ の加法定理に当てはめてみると

$=\square(\sin\theta\cdot\cos\alpha+\cos\theta\cdot\sin\alpha)$

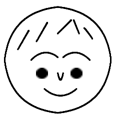
$=\square\sin(\theta+\alpha)$

となるよね。さあ、$\square$には何が入るのかな？

ぼさっと博士

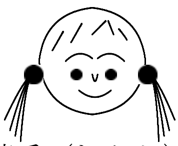


えーと、三平方の定理で考えればいいから、$\square$に入るのは 2 かな？



大知（たいち）くん

それと、α は $\dfrac{\pi}{6}$ じゃないかしら。

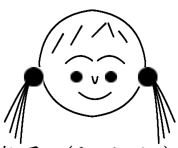


蓮香（れんか）さん

その通り！よくわかったね。

ぼさっと博士

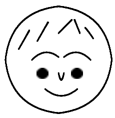
でも、α がうまく表せないときはどうしたらいいのかしら？



蓮香（れんか）さん

ぼさっと博士

では $3\sin\theta+2\cos\theta$ の合成について考えてみよう。



大知（たいち）くん

$3\sin\theta+2\cos\theta$

$=\square(\sin\theta\cdot\dfrac{3}{\square}+\cos\theta\cdot\dfrac{2}{\square})$

として、$sine$ の加法定理に当てはめてみると

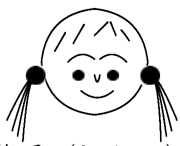
$=\square(\sin\theta\cdot\cos\alpha+\cos\theta\cdot\sin\alpha)$

$=\square\sin(\theta+\alpha)$

となるよね。$\square$ には $\sqrt{13}$ が入るから

$=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$

かな？

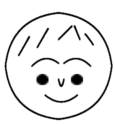


蓮香（れんか）さん

でも、それでいいのかしら？

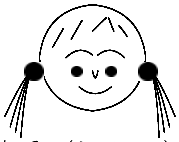
ぼさっと博士

但し書きをすればいいんじゃよ。最後に「ただし、$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}},\ \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$」と書いておけば、どのような角なのか、わかるからね。



大知（たいち）くん

そうかあ。わかったぞー！ありがとうございました。



蓮香（れんか）さん

私もよくわかりました。これで三角関数の合成は得意になったきがします。ありがとうございました。

（12）三角関数の和と積の変換 $(transformation)$ 公式

$$\text{(i)}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\text{(ii)}\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\text{(iii)}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\text{(iv)}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

(i)+(ii) より

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}}$$

(i)−(ii) より

$$\boxed{\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}}$$

(iii)+(iv) より

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}}$$

(iii)−(iv) より

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}}$$

(i) の両辺を 2 倍して右辺、左辺を入れ替える。

$\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B$ とすると

$\alpha=\dfrac{A+B}{2},\ \beta=\dfrac{A-B}{2}$

よって、

$$\boxed{\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

同様に (ii) より

$$\boxed{\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

同様に (iii) より

$$\boxed{\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

同様に (iv) より

$$\boxed{\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$\boxed{\text{EX.}}$ $AB = 5, BC = 4, CA = 3$ の三角形 ABC がある。このとき、$\tan\dfrac{A}{2} = \boxed{\text{ア}}, \tan\dfrac{A}{2} = \boxed{\text{イ}}$ である。いま、$\triangle ABC$ の内部（周を含む）にある円板 O の半径を r とするとき、r のとりうる値の範囲は、$0 < r \leqq \boxed{\text{ウ}}$ である。次に、円板 O が $\triangle ABC$ の少なくとも 1 つの辺に接しながら、$\triangle ABC$ の内側を 1 周するときに、円板が通過した領域を D とし、D の面積を S とする。右図のように、領域 D で囲まれた $\triangle PQR$ ができるのは、$0 < r < \boxed{\text{エ}}$ のときであり、このとき、$\triangle PQR$ の面積を r を用いて表すと、$\triangle PQR = \boxed{\text{オ}}$ である。また、$\triangle ABC$ から領域 D および $\triangle PQR$ を除いた部分の面積 T を r を用いて表すと、$T = \boxed{\text{カ}}$ である。したがって、D の面積 S は、

$$S = \begin{cases} \boxed{\text{キ}} & (0 < r < \boxed{\text{エ}}) \\ \boxed{\text{ク}} & (\boxed{\text{エ}} \leqq r < \boxed{\text{ウ}}) \end{cases}$$

となる。よって、r の値が $0 < r < \boxed{\text{ウ}}$ の範囲で変化するとき、領域 D の面積は $r = \boxed{\text{ケ}}$ のとき、最大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。(03) 関西大

$\boxed{\text{EX.}}$ 関数 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\ (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ について

(1)$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき、$f(\theta)$ を t で表せ。また、t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)$f(\theta)=0$ を満たす θ の値をすべて求めよ。

(3)$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。(03) 金沢大

$\boxed{\text{EX.}}$ 次の問に答えよ。

(1) 正弦・余弦の加法定理を述べ、$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ を導け。

(2) 次の方程式を満たす x の値 $(0^\circ \leqq x < 360^\circ)$ をすべて求めよ。

（ア）$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$

（イ）$\sin x+\sin 4x+\sin 7x=0$ (03) 三重大

$\boxed{\text{EX.}}$ $\triangle ABC$ において、$a=BC, b=CA, c=AB$ とする。

(1)$\dfrac{\tan A}{a^2}=\dfrac{\tan B}{b^2}$ が成り立つとき、$\triangle ABC$ はどのような三角形か。

(2)$b=\dfrac{a+c}{2}$ が成り立つ $\triangle ABC$ に対し、$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ の値を求めよ。(03) 横浜国大

$\boxed{\text{EX.}}$ 2 次方程式 $2x^2-2ax-a+1=0$(a は定数) の 2 つの解が $\sin\theta, \cos\theta(0^\circ \leqq x < 360^\circ)$ であるとき、a, θ の値を求めよ。(03) 昭和薬大

4. 指数関数 (*exponential function*)・対数関数 (*logarithmic function*)

(1) 指数の拡張

a を n 個かけあわせたものを a の n 乗といい、

$a \times a \times \cdots \times a = a^n$

とかく。

$m,\ n$ を正の整数とするとき、次の指数法則が成り立つ。

$a^m a^n = a^{m+n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$

上記より

$a^m a^0 = a^{m+0} = a^m$

両辺を a^m で割って、$a^0 = 1$

また

$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$

両辺を a^n で割って、$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^3 a^{-5} = a^3 \times \dfrac{1}{a^5} = \dfrac{1}{a^2} = a^{-2} = a^{3+(-5)}$

$(a^3)^{-5} = \dfrac{1}{(a^3)^5} = \dfrac{1}{a^{15}} = a^{-15} = a^{3\times(-5)}$

$(ab)^{-5} = \dfrac{1}{(ab)^5} = \dfrac{1}{a^5 b^5} = \dfrac{1}{a^5} \times \dfrac{1}{b^5} = a^{-5} b^{-5}$

また

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^m \times \dfrac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = (ab^{-1})^n = a^n (b^{-1})^n = a^n b^{-n} = \dfrac{a^n}{b^n}$

(2) 累乗根の性質

n を正の整数とするとき、

$x^n = a$ を満たす数 x を、a の n 乗根という。

-3 は -27 の 3 乗根、$2, -2$ はともに 16 の 4 乗根という。

2 乗根、3 乗根、4 乗根、$\cdots$ を累乗根という。

○ n が奇数の場合

$x^n = a$ を満たす実数 x がただ 1 つ定まる。

これを $\sqrt{a}$ で表す。

○ n が偶数の場合

・$a > 0$ のとき

$x^n = a$ を満たす実数 x はただ 2 つあり、

正の方を $\sqrt{a}$、負の方を $-\sqrt{a}$

とする。

・$a = 0$ のとき

$\sqrt{0} = 0$ とする。

・$a < 0$ のとき

$x^n = a$ を満たす実数 x は存在しない。

$a > 0, b > 0$ で、m, n が正の整数のとき

i. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

ii. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

iii. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

iv. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

v. $\sqrt{a^m} = \sqrt[r]{a^{mp}}$

正の数 a に対して、$m,\ n$ を正の整数とする。正の有理数 $r = \dfrac{m}{n}$ と $s = n$ について、指数法則より

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$$

$a^{\frac{m}{n}}$ の n 乗は a^m となるので、

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt{a^m}$ と表せる。

正の有理数 r について

$a^r a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^0 = 1$ より $a^{r+(-r)} = 1$

両辺を a^r で割ると $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

有理数を指数にもつ累乗を考えると

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

指数法則は指数が任意の実数に対して成り立つ。

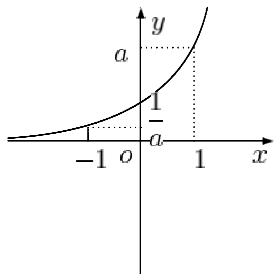
(3) 指数関数 $y = a^x$ の性質

i. 定義域は実数全体、値域は正の実数全体である。

ii. グラフは点 $(0,1)$ を通り、x 軸がその漸近線 $(asymptotic\ line)$ となる。

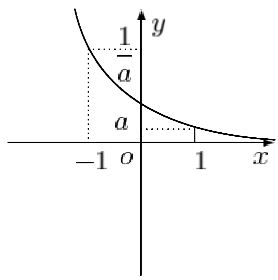
○ $a>1$ のときは、x が増加すると y も増加し、y が増加すると x も増加する。

$x_1<x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$



○ $0 \leqq a \leqq 1$ のときは、x が増加する $(increase)$ と y は減少し、y が増加すると x は減少する $(decrease)$。

$x_1<x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$



(4) 対数と指数 $a>0, a \neq 1, M>0$ のとき

$\log_a M=p \Longleftrightarrow a^p=M$

※　$\log_a M$ は底を a とする M の対数という。

(5) 対数の性質

i. $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

（証明）$\log_a M=p,\ \log_a N=q$ とおくと

$M=a^p,\ N=a^q$ となる

よって $MN=a^p \cdot a^q=a^{p+q}$

したがって、$\log_a MN=\log_a a^{p+q}=p+q=\log_a M+\log_a N$

ii. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

（証明）$\log_a M = p,\ \log_a N = q$ とおくと

$M = a^p,\ N = a^q$ となる

よって $\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

したがって、$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a a^{p-q} = p - q = \log_a M - \log_a N$

iii. $\log_a M^r = r \log_a M$

（証明）$\log_a M = p$ とおくと $M = a^p$ となる

$M = a^p$ の両辺を r 乗すると

$M^r = (a^p)^r = a^{pr}$

よって $\log_a M^r = \log_a a^{pr} = pr = r \log_a M$

iv. $\log_a \dfrac{1}{N} = -\log_a N$

v. $\log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n} \log_a M$

(6) 底 $(base)$ の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

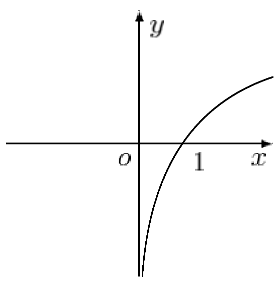
(7) 対数関数の性質

i. 定義域は正の実数全体、値域は実数全体である。

ii. グラフは点 $(1,0)$ を通り、y 軸がその漸近線となる。

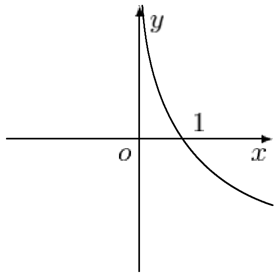
○ $a > 1$ のときは、$y = \log_a x$ は増加関数である。

$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$



○ $0 < a < 1$ のときは、$y = \log_a x$ は減少関数である。

$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$



(8) 常用対数 ($common\ logarithm$)

i. 正の数 M が、$n-1 \leqq \log_{10} M < n$ を満たすとき、

$10^{n-1} \leqq M < 10^n$

であるから、M は整数部分 ($integral\ part$) が n 桁 ($place$) の数である。

ii. 正の数 N が、$-(n-1) \leqq \log_{10} N < -n$ を満たすとき、

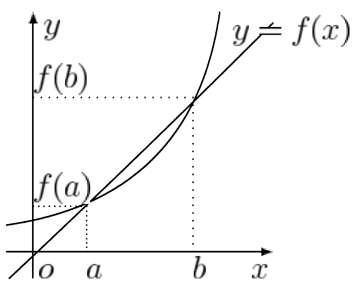
$10^{-(n-1)} \leqq N < 10^{-n}$

であるから、N は小数 ($decimal$) 第 $n-1$ 位にはじめて 0 でない数字が現れる。

5. 微分法 ($differentation$)・積分法 ($integration$)

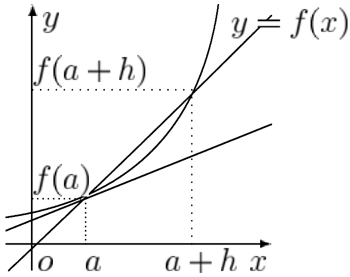
(1) 平均変化率 ($average\ rate\ of\ change$)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



(2) 微分係数 ($differential\ coefficient$)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



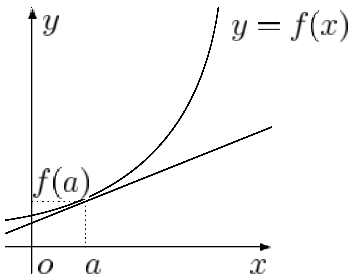
(3) 微分係数と接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きは微分係数 $f'(a)$ に等しい。

したがって接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

で表される。



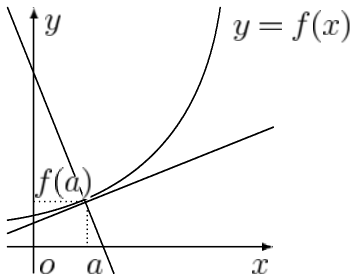
《参考》

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における法線の傾きは微分係数 $f'(a)$ との積が -1 となる $-\dfrac{1}{f'(a)}$ に等しい。

したがって法線の方程式は

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

で表される。



（4）導関数 $(derivative)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

（5）x^n の導関数

$n=1,2,3$ のとき、$(x^n)'=nx^{n-1}$

（6）導関数の公式

i. c が定数で　　$y=c$ ならば $y'=0$

ii. k が定数で　　$y=kf(x)$ ならば $y'=kf'(x)$

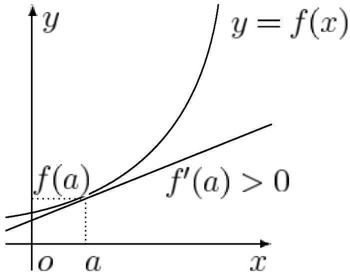
iii. $y=f(x)+g(x)$ ならば $y'=f'(x)+g'(x)$

iv. $y=f(x)-g(x)$ ならば $y'=f'(x)-g'(x)$

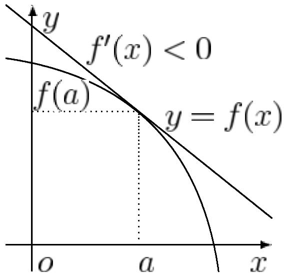
（7）導関数の符号と関数の増減

ある区間で

つねに $f'(x)>0$ ならば、$f(x)$ はその区間で増加する。



つねに $f'(x)<0$ ならば、$f(x)$ はその区間で減少する。

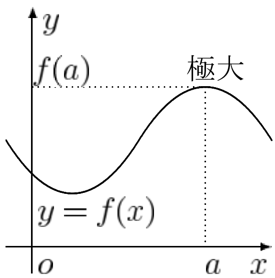


(8) 極大 $(relative\ maxima)$・極小 $(relative\ minima)$

$f'(a)=0$ となる $x=a$ を境にして

$f'(x)$ が正から負に変われば

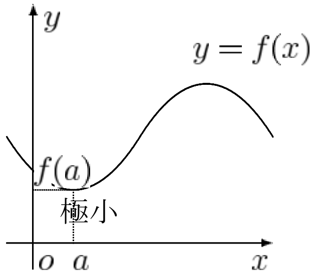
$f(a)$ は極大値



$f'(x)$ が負から正に変われば

$f(a)$ は極小値

$x=a$ を境にして $f'(x)$ の符号が変わらなければ、$f(a)$ は極値ではない。



《参考》ー「解析学概論」（高木貞治著）よりー

導関数 ($derived\ function$, 略して $deribative$) とは「微分法によって $f(x)$ から導き出される関数」ということの略称である。導関数 $f'(x)$ は区間に関する呼称であるが、一点 x における $\dfrac{dy}{dx}$ すなわち $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は $Newton$ のいわゆる「流動率 ($fluxion$)」である。ドイツ系統では、$Leibniz$ の伝統に従って、この極限値 $\dfrac{dy}{dx}$ を微分商 ($Differentialquotient$) といっているが、英米系統では、それを改称して微分係数 ($differential\ coefficient$) という。フランス系では、微分商も導関数も共に $derivee$ という。

（9） x^n の不定積分 ($indefinite\ integral$)

$n=0,1,2$ のとき、$\displaystyle\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

（10） 定数倍、和、差の不定積分

i. $\displaystyle\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ 　　（k は定数）

ii. $\displaystyle\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

iii. $\displaystyle\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

（11） 定積分 ($definite\ integral$)

$f(x)$ の原始関数 ($antidelivative$) の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

（12） 定積分の公式

i. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$　　（k は定数）

ii. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

iii. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

（13） 定積分の性質

i. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

ii. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

iii. $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

（14） 定積分と微分

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad \text{ただし、} a \text{ は定数}}$$

（証明）

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

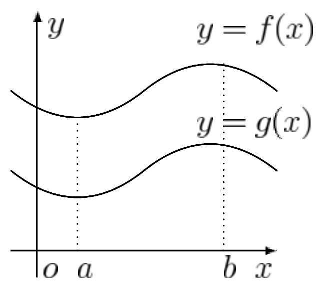
（15） 2 曲線間の面積

区間 $(interval)$ $a \leqq x \leqq b$ において、$g(x) \leqq f(x)$ であるとき、

2 曲線 $y = f(x), y = g(x)$ と 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形

の面積 S は

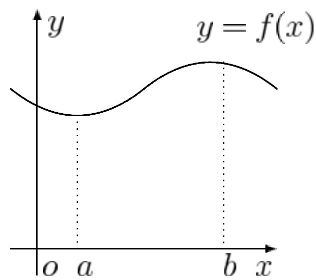
$$S = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



また区間 $(interval)$ $a \leqq x \leqq b$ において、$0 \leqq f(x)$ であるとき、

曲線 $y=f(x)$ と x 軸，２直線 $x=a, x=b$ で囲まれた図形の面積 S は

$S=\int_a^b f(x)dx$



参考

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

参考

任意の放物線に対して、その上の任意の異なる 2 点を P, Q とし、それらの中点 M を通り放物線の軸に平行な直線と放物線の交点を R としたとき、放物線と直線 PQ で囲まれる図形の面積を S とすると

$S=\frac{4}{3}\triangle PQR$

である。

参考

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)^2 dx = -\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$$

参考

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 dx = \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

(16) 立体 $(solid)$ の体積

x 軸上の点 x で x 軸に垂直な平面を X とし、ある立体の X による切り口の面積を $S(x)$ とすれば、この立体の $a \leqq x \leqq b$ の部分の体積 V は

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

VICTORY-数学Ｂ

1. 数列 ($sequence$)

（1）等差数列 ($arithmetic\ sequence$) の一般項 ($general\ term$)

初項 ($first\ term$) a、公差 ($common\ difference$) d の等差数列の一般項 a_n は、

$a_2 = a_1 + d = a + d$

$a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d$

$a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d$

$a_5 = a_4 + d = (a + 3d) + d = a + 4d$

第 n 項は初項 a に公差 d を $n-1$ 個加えたものとなるので、

$$\boxed{a_n = a + (n-1)d}$$

（2）等差数列の和 (sum)

初項 a、公差 d、項数 n、末項 ($last\ term$) l の等差数列の和を S_n とすると

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$= a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + \{a + (n-3)d\} + \{a + (n-2)d\} + \{a + (n-1)d\}$

また

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$

$= \{a + (n-1)d\} + \{a + (n-2)d\} + \{a + (n-3)d\} + \cdots + (a + 2d) + (a + d) + a$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}n(a + l) = \frac{1}{2}\{2a + (n-1)d\}}$$

（3）等比数列 ($geometric\ sequence$) の一般項

初項 a、公比 ($common\ ratio$) r の等比数列の一般項 a_n は、

$a_2 = a_1 \times r = ar$

$a_3 = a_2 \times r = ar \times r = ar^2$

$a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3$

$a_5 = a_4 \times r = ar^3 \times r = ar^4$

第 n 項は初項 a に公比 r を $n-1$ 個かけたものとなるので、

$$\boxed{a_n = ar^{n-1}}$$

(4) 等比数列の和

初項 a、公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r \neq 1$ ならば　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$ ならば　$S_n = na$

(5) $\sum$ 記号の性質

$$\sum_{k=1}^{n}(a_n + b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_n = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(6) $\sum$ の公式

i.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

ii.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

iii.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$$

iv.

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n(n+1)(n+\frac{1}{2})(n^2+n-\frac{1}{3})$$

v.

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{6}n^2(n+1)^2(n^2+n-\frac{1}{2})$$

（7）階差数列 $(differeces\ of\ a\ sequence)$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

（8）数列の和と一般項数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$a_1 = S_1$$

$n \geqq 2$ のとき　　$a_n{=}S_n{-}S_{n-1}$

（9）漸化式 $(recurrence\ formula)$

i. 等差型 [illegible]

ii. 等比型 $a_{n+1} = ra_n \Longrightarrow a_n = a_1 r^{n-1}$

iii. 階差型 $a_{n+1} - a_n = b_n \Longrightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$　$(n \geqq 2)$

iv. 特性方程式型

$a_{n+1} = pa_n + q$　ただし、[illegible]

[illegible]

（10）数学的帰納法 $(mathematical\ induction)$

自然数 n に関する命題が

「すべての自然数 n に対して成り立つ」

ことを証明するには、次の２つのことを証明すればよい。

i. $n = 1$ のとき成り立つ

ii. $n = k$ のとき成り立つと仮定すれば、

$n = k + 1$ のときにも成り立つ。

(11) パスカル $(Pascal)$ の三角形

$n = 1$　　　　1　1

$n = 2$　　　1　2　1

$n = 3$　　1　3　3　1

$n = 4$　1　4　6　4　1

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

(12) 二項定理 [illegible]

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$ となるので、

①　②　③

展開すると、$a^3,\ a^2b,\ ab^2,\ b^3$ の項が現れる。

（1） $\boxed{a^3\text{ の項について}}$

a^3 の項は

①の $(a+b)$ から a を取り、②の $(a+b)$ から a を取り、③の $(a+b)$ から a を取ったものである。

（2） $\boxed{a^2b\text{ の項について}}$

a^2b の項は

①の $(a+b)$ から a を取り、②の $(a+b)$ から a を取り、③の $(a+b)$ から b を取ったものと、

①の $(a+b)$ から a を取り、②の $(a+b)$ から b を取り、③の $(a+b)$ から a を取ったものと、

①の $(a+b)$ から b を取り、②の $(a+b)$ から a を取り、③の $(a+b)$ から a を取ったものの 3 種類を合わせたものである。

（3） $\boxed{ab^2\text{ の項について}}$

ab^2 の項は

①の $(a+b)$ から a を取り、②の $(a+b)$ から b を取り、③の $(a+b)$ から b を取ったものと、

①の $(a+b)$ から b を取り、②の $(a+b)$ から a を取り、③の $(a+b)$ から b を取ったものと、

①の $(a+b)$ から b を取り、②の $(a+b)$ から b を取り、③の $(a+b)$ から a を取ったものの 3 種類を合わせたものである。

（4） $\boxed{b^3 \text{ の項について}}$

b^3 の項は

①の $(a+b)$ から b を取り、②の $(a+b)$ から b を取り、③の $(a+b)$ から b を取ったものである。

つまり、

aaa の並べ替えは 1 通り。（${}_3C_0=1$ と考えることもできる。）

aab の並べ替えは ${}_3C_1=3$ 通り。

abb の並べ替えは ${}_3C_2=3$ 通り。

bbb の並べ替えは 1 通り。（${}_3C_3=1$ と考えることもできる。）

したがって、

$$(a+b)^3={}_3C_0a^3b^0+{}_3C_1a^2b^1+{}_3C_2a^1b^2+{}_3C_3a^0b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+$$

$$\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots$$

$$\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$$

${}_nC_ra^{n-r}b^r$ を展開式の一般項という。

（13） $(a+b+c)^n$ の展開式の一般項

$(a+b+c)^n$ を展開する。

$a+b=X$ として、

[illegible]

一般項は

${}_nC_rX^{n-r}c^r$

ここで、

[illegible]

となるので、

[illegible]

$= \frac{[illegible]}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{[illegible]} \cdot [illegible]$

$= \frac{[illegible]}{[illegible]} \cdot [illegible]$

[illegible] t とおくと、さらに一般項は

$\frac{n!}{r!s!t!} \cdot a^t \cdot b^s \cdot c^r$

と書き換えることができる。

よって、一般項は

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$$

ただし　$p+q+r=n$

EX.	次の問に答えよ。(03) 近畿大

(1) 初項 a, 公比 r がともに実数の等比数列について、初項から第 n 項までの和を S_n とすると、$S_3 = 31, S_6 = 3906$ であった。このとき a, r の値を求めよ。(03) 小樽商大

(2)$a_4 = 24, a_7 = 192$ である等比数列 $\{a_n\}$ を考える。このとき初項と公比を求めよ。また、初項から第 10 項までの和を求めよ。

EX. 次の問に答えよ。

(1) 3 つの数 $1, \log_4 5, \log_8 x$ がこの順で等差数列になるように、実数 x の値を定めよ。 (03) 武蔵工大

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列とする。$\{a_n\}$ の初項から第 85 項までの和を求めよ。また、$\{a_n\}$ の初項から第 85 項までのうち整数であるものの和を求めよ。 (03) 大同工大

EX. 初項 a, 公差 17 の等差数列 $a, a+17, a+34, a+51, \cdots$ を考え、初項 a は 0 以上の整数とする。この等差数列において、値が、1000 以下の項の和を $S(a)$ とするとき、$S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。 (03) 慶応大

EX. n を自然数とするとき、次の等式を証明せよ。

ただし $\sin\dfrac{\beta}{2} \neq 0$ とする。

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\alpha + k\beta) = \frac{\sin\dfrac{n\beta}{2}\sin(\alpha + \dfrac{n-1}{2}\beta)}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\alpha + k\beta) = \frac{\sin\dfrac{n\beta}{2}\cos(\alpha + \dfrac{n-1}{2}\beta)}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$$ (03) 信州大

EX. 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を以下の手順で求めよ。

[illegible]

(1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列は等差数列である。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)(2) の結果を用いて、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (03) 佐賀大

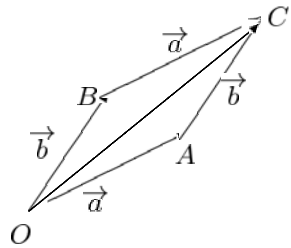
> $\boxed{\text{EX.}}$ 次のような、第 n 群に n 個の項が含まれる群数列を考える。ただし、$n=1,2,3,\cdots$ とする。
>
> 1 群 2 群 3 群 4 群
>
> $\left|\frac{1}{1\cdot 2}\right|,\left|\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3}\right|,\left|\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},\frac{1}{3\cdot 4}\right|,\left|\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},\frac{1}{3\cdot 4},\frac{1}{4\cdot 5}\right|,\cdots$
>
> (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 を求めよ。
>
> (2) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列は等差数列である。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
>
> (3)(2) の結果を用いて、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (03) 佐賀大

2. ベクトル $(vector)$

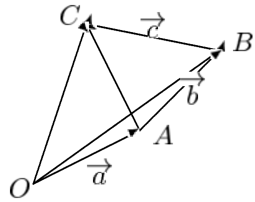
向きと大きさで定まる量を一般に $\boxed{\text{ベクトル}}$ という。

有効線分 AB の表すベクトルを、記号 $\overrightarrow{AB}$ と書く。

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

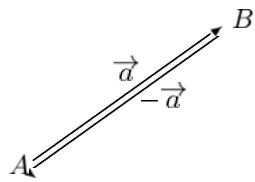


(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

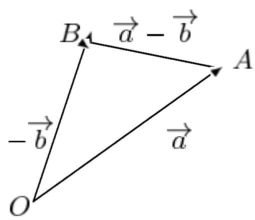


(3) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}$

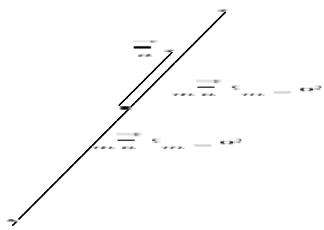
(4) $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$



(5) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})$



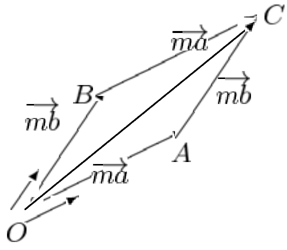
(6) $|m\overrightarrow{a}|=|m||\overrightarrow{a}|$



(7) $m(n\overrightarrow{a})=(mn)\overrightarrow{a}$

(8) $(m+n)\overrightarrow{a}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{a}$

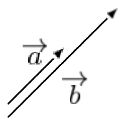
(9) $m(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=m\overrightarrow{a}+m\overrightarrow{b}$



(10) ベクトルの平行

$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ のとき、

$\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}\iff\overrightarrow{b}=m\overrightarrow{a}$　　　m は実数

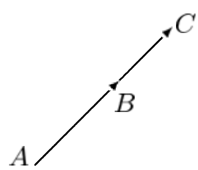


(11) 3点が1直線上にあるための条件

異なる3点 A,B,C が1直線上にある

$\iff\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}$　　　m は実数

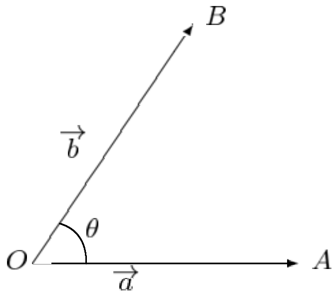
となる



(12) ベクトルの1次独立

$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ かつ $\overrightarrow{a}\nparallel\overrightarrow{b}$ のとき、

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は1次独立であるという

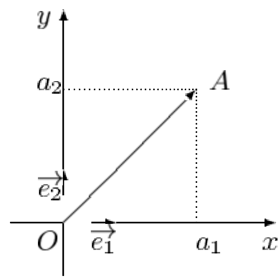


（13）ベクトルの表示

$\overrightarrow{OA} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$　　基本ベクトルによる表示

$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$　　成分表示

ただし、$\overrightarrow{e_1}$ は大きさ 1 で、x 軸と平行で x 軸の正の向きのベクトルを表し、$\overrightarrow{e_2}$ は大きさ 1 で、y 軸と平行で y 軸の正の向きのベクトルを表す。



（14）ベクトルの大きさ $(magnitude)$

$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ のとき　　$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

（15）成分による演算

i. $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

ii. $(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

iii. $m(a_1, a_2) = (ma_1, ma_2)$　　(m は実数)

（16）座標と成分表示

$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ のとき、

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

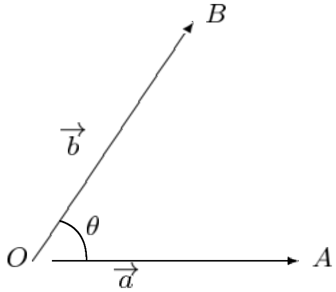
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2}$

（17） ベクトルの平行

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Longleftrightarrow (a_1, a_2) = m(a_1, a_2)$ 　　ただし、$m \neq 0$

（18） 内積（*inner puroduct*）の定義

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$



内積の定義は物理でいう「仕事」と考えることができます。

点 O の位置に物体があり、半直線 OA の方向に物体を引っ張り、半直線 OB の方向に物体が移動したとします。物体を引っ張る力を F、移動した距離を S とすると、

$\boxed{W\text{（仕事量）} = F\text{（力）} \cdot S\text{（距離）}}$

となります。

実際に移動した向きには $F\cos\theta$ の力が働きます。

図でいうと、$|\vec{b}|\cos\theta$ ということになります。これは $\vec{b}$ を $\vec{a}$ の上に正射影したものの大きさです。

※　辺 OA, OB を棒と考えます。辺 OA の真上から光を当てると辺 OA 上に辺 OB の影ができます。　これを辺 OB の正射影 (*projection*) といいます。

つまり内積とは一方のベクトルの大きさと他方のベクトルの正射影の大きさの積ということになります。

（19） ベクトルの垂直と内積

$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2 つのベクトルのなす角が 90° であるとき、$\cos 90^\circ = 0$ より

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = 0$

となる。

（20）内積の性質［１］

i. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$

ii. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2, |\overrightarrow{a}|=\sqrt{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}}$

iii. $|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\leqq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$

（21）内積の成分表示

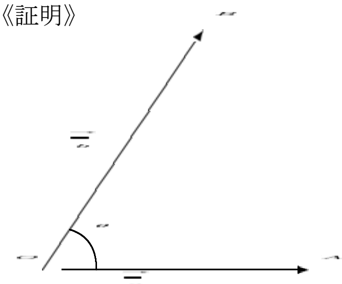
$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2), \overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ のとき、

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\dfrac{[illegible]}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

《証明》



[illegible] のとき、$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$ の証明

２つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の成分表示をそれぞれ

$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2), \overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ とする。

いま、上の図のように $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$ とし、

$\angle AOB=\theta$ とすれば、余弦定理によって、

[illegible]

ここで、[illegible]

[illegible] であるから

[illegible] となる。

$(*)$ において

左辺 $=$ [illegible]

右辺 $=$ [illegible]

$=$ [illegible]

したがって、

$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2), \overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ のとき、$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$

が成り立つ

参考

$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2),\ \overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ は基本ベクトル $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}$ を用いて、

[illegible] と表せるので、

[illegible]

$=$ [illegible]

$=$ [illegible]

※ [illegible]

(22) 内積の性質［２］

[illegible] （t は実数）

[illegible]

[illegible]

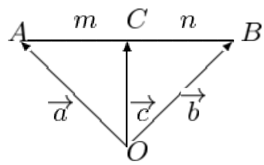
(23) 内分点の位置ベクトル $(position\ vector)$

２点 $A(\overrightarrow{a}), B(\overrightarrow{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 C の

位置ベクトル $\overrightarrow{c}$ は

$$\overrightarrow{c}=\frac{m\overrightarrow{b}+n\overrightarrow{a}}{m+n}$$

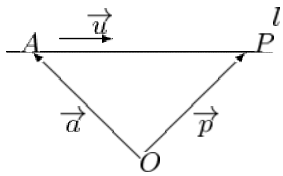
とくに、線分 AB の中点の位置ベクトルは、$\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}$



(24) 直線のベクトル方程式 ($vector\ equation$)

i. 定点 $P_0(\overrightarrow{p_0})$ を通り、方向ベクトル ($direction\ vector$) $\overrightarrow{u}$ に平行な直線

$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + t\overrightarrow{u}$ (t は実数)



ii. 2点 $A(\overrightarrow{a}), B(\overrightarrow{b})$ を通る直線

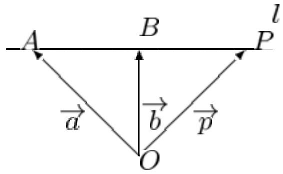
$\overrightarrow{p} = (1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ (t は実数)

または

$\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$　　$s+t=1$ (s, t は実数) $\cdots(l)$

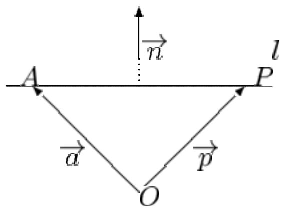
ここで $s \geqq 0, t \geqq 0$ なら、上記のベクトル方程式 (l) は線分 AB を表す。

また (l) で $s+t \leqq 1$ ならば、点 P の存在範囲 ($existence\ range$) は $\triangle ABC$ の内部および周上 ($periphery$) を表す。



iii. 定点 $(fixed\ point)$ $P_0(\overrightarrow{p_0})$ を通り、法線ベクトル $(normal\ vector)$ が $\overrightarrow{n}$ である直線

$\overrightarrow{n}\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_0})=0$



(25) 円のベクトル方程式

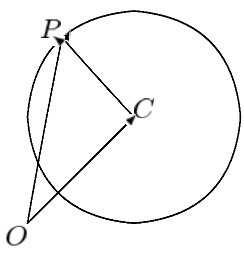
点 $C(\overrightarrow{c})$ を中心とし、半径が r である円の周上の任意の点を $P(\overrightarrow{p})$ とすれば

$|\overrightarrow{CP}|=r$ より

$|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}|=r$

$\overrightarrow{p}=(x,y),\ \overrightarrow{c}=(a,b)$ とすると、

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$



また中心が原点 $(0,0)$ の円のベクトル方程式は

$|\overrightarrow{p}| = r$

$\overrightarrow{p} = (x, y)$ とすると

$x^2 + y^2 = r^2$

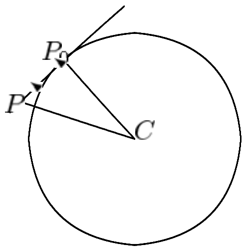
(26) 円の接線のベクトル方程式

点 $C(\overrightarrow{c})$ を中心とし、半径が r である円の周上の任意の点 $P_o(\overrightarrow{p_o})$ における接線のベクトル方程式は

$(\overrightarrow{p_o} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}) = r^2$

$\overrightarrow{p} = (x, y), \overrightarrow{c} = (a, b), \overrightarrow{p_o} = (x_o, y_o)$ とすると、

$(x_o - a)(x - a) + (y_o - b)(y - b) = r^2$



また中心が原点 $(0, 0)$ の円の接線のベクトル方程式は

$\overrightarrow{p_o} \cdot \overrightarrow{p} = r^2$

$\overrightarrow{p} = (x, y), \overrightarrow{p_o} = (x_o, y_o)$ とすると、

$x_o x + y_o y = r^2$

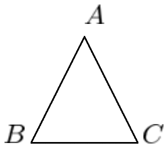
(27) $\triangle ABC$ の面積

$\triangle ABC$ において $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ とし、面積を S とすると、

$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}$

O を原点とし、$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とすると、$\triangle OAB$ の面積は

$S = \dfrac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$



$\boxed{\text{外積（}outer\ product\text{）について}}$

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ を外積といいます。

$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とすると、

これは基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ を用いて、

$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ と表せます。

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}) \times (b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3})$

$= a_1b_1\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1} + a_1b_2\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} + a_1b_3\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3}$

$+a_2b_1\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} + a_2b_2\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2} + a_2b_3\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3}$

$+a_3b_1\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} + a_3b_2\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2} + a_3b_3\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3}$

ここで、

$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1} = 0,\ \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2},$

$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2} = 0,\ \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1},$

$\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3} = 0$

なので、

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = a_1b_2\overrightarrow{e_3} - a_1b_3\overrightarrow{e_2} - a_2b_1\overrightarrow{e_3} + a_2b_3\overrightarrow{e_1} + a_3b_1\overrightarrow{e_2} - a_3b_2\overrightarrow{e_1}$

$= (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{e_3}$

成分表示すると、

$\overrightarrow{a} \times$ [illegible]

統計 (*statistics*) とコンピュータ (*computer*)

(1) 資料 ($data$) の整理

調査した資料の特性を数量で表す変数を $\boxed{\text{変量}}$ という。

変量にはとびとびの値しかとらない $\boxed{\text{離散変量}}$ と連続的な値をとる $\boxed{\text{連続変量}}$ がある。

ある値のデータの個数をその値の $\boxed{\text{度数 } (frequency)}$ という。

各値に度数を対応させたものを $\boxed{\text{度数分布 } (frequency\ distributiojn)}$ といい、それを表にしたものを $\boxed{\text{度数分布表 } (frequency\ table)}$ という。

各値の度数を度数の和で割った値を $\boxed{\text{相対度数 } (relative\ frequency)}$ という。

各値に相対度数を対応させたものを

$\boxed{\text{相対度数分布 } (relative\ frequency\ distribution)}$ という。

データの度数分布を考えるとき、データの値を互いに重ならない範囲に分け、各範囲に入るデータの個数を数える。この範囲を $\boxed{\text{階級 } (notation)}$ という。

各階級の端点の平均をその階級の $\boxed{\text{階級値 } (class\ mark)}$ といい、端点の差を $\boxed{\text{階級の幅}}$ という。

度数分布をグラフで表した図を $\boxed{\text{ヒストグラム } (histogram)}$ という。

ヒストグラムの長方形の上の辺の中点を線分で結んだ折れ線グラフを $\boxed{\text{度数折れ線 } (frequency\ polygon)}$ という。

縦軸に度数の代わりに相対度数をとれば、相対度数分布のヒストグラムや $\boxed{\text{相対度数折れ線 } (relative\ frequency\ polygon)}$ が得られる。

○散布図 ($scatter\ diagram$)

x 座標、y 座標がわかっている点をとって、図にすると $\boxed{\text{散布図}}$ ができる。

x, y の一方が増加すれば、他方も増加する傾向にある場合、x, y の間に $\boxed{\text{正の相関 } (positive\ correlation)}$ があるという。

x, y の一方が増加すれば、他方は減少する傾向にある場合、x, y の間に $\boxed{\text{負の相関 } (negative\ correlation)}$ があるという。

(2) 資料の分析 ($analysis$)

データの特徴を表す数値を $\boxed{\text{代表値 } (representative\ value)}$ という。代表値としてよく用いられるのは $\boxed{\text{平均値 } (mean)}$ である。

すべてのデータを小さい順に並べたとき、中央の順位にくるデータの値を $\boxed{\text{メジアン } (median)}$ または $\boxed{\text{中央値 } (middle\ value)}$ という。

(3) 分散 ($variance$) と標準偏差 ($standard\ deviation$)

分散 $s^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ ただし、$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$

標準偏差 $s = \sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$

また

分散 $s^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \overline{x}^2$ ただし、$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$

標準偏差 $s = \sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \overline{x}^2}$

(4) 相関係数 ($correlation\ coefficient$)

x, y のデータの平均値をそれぞれ $\overline{x}, \overline{y}$ とすると

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ は正の相関があるときは正となり、負の相関があるときは負となる。

これを x, y のデータの標準偏差でわった値を $\boxed{\text{相関係数}}$ という。

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

4. 数値計算とコンピュータ

BASIC での計算では、普通の数の四則計算と同様、乗除計算は加減計算より優先される。

(　) でくくられた部分は先に計算する。

かけ算では × の代わりに * を使う。

わり算では ÷ の代わりに / を使う。

PRINT 〈式〉　　〈式〉の計算結果を画面に表示して改行する。

PRINT "〈文〉"　　〈文〉を画面に表示して改行する。

PRINT "〈式〉";　　〈文〉を画面に表示して改行しない。

LET S=〈式〉　　〈式〉の計算結果が変数 S に代入される。

INPUT PROMPT "〈文〉":X　　〈文〉が表示される。その次にキーボードから数を書くと、その数が変数 X に代入される。

FOR N=A TO B STEP S　N は A から始めて S ずつ加え、B を超えるまで NEXT N のある行までの〈命令〉をくり返し実行する。

○ IF 〈条件〉 THEN

〈命令 1〉

END IF

〈命令 2〉

○ FOR～NEXT の構造から抜け出すには、EXIT FOR 命令を用いる。

○ IF 〈条件〉 THEN

〈命令 1〉

ELSE

〈命令 2〉

END IF

〈命令 3〉

○ IF 〈条件〉 THEN

〈命令 1〉

ELSEIF 〈条件 2〉 THEN

〈命令 2〉

ELSE

〈命令 4〉

END IF

〈命令 3〉

$\boxed{\text{EX.}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)$ を求めよ。

（04　名古屋市大・芸術工）

$\boxed{\text{EX.}}$ $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}$ を求めよ。

（04　早稲田大・人間科学）

$\boxed{\text{EX.}}$ n を自然数とし、正の実数 a, b が $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2n}$ を満たしているとする。このとき、$a+b, ab$ は不等式 $a+b \geqq \boxed{\text{ア}}n, ab \geqq \boxed{\text{イ}}n^{\boxed{\text{ウ}}}$ を満たす。また、n を自然数とし、正の実数 a, b が

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{7n^2+1}$ を満たしているとする。

このとき、$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}n^{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}n^{\boxed{\text{キ}}}+\boxed{\text{ク}}}$ となり、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=\boxed{\text{ケ}}$ となる。（04　東京理科大・基礎工）

$\boxed{\text{EX.}}$ n を 2 以上の自然数とする。x^{2n} を $x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}$ で割った余りを a_nx+b_n とする。すなわち、x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n}=P_n(x)\left(x^2-x+\frac{n-1}{n^2}\right)+a_nx+b_n$$

が成り立っているとする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n, \lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。

（04　京都大・理系）

$\boxed{\text{EX.}}$ n を 3 以上の自然数とする。点 O を中心とする半径 1 の円において、円周を n 等分する点 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ を時計回りにとる。各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して、直線 OP_{i-1}, OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}, P_i で接するような放物線を C_i とする。ただし、$P_n = P_0$ とする。放物線 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき、$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。(04　大阪大・理系)

1 から 6 までの目が等確率で出るさいころを使うものとして、次の問に答えよ。

（1）4 個のさいころを同時に投げるとき、$aabb$ というように同じ目がちょうど 2 つずつ生じる確率を求めよ。ここで、a と b は互いに異なる 1 から 6 までの目を表す。

（2）$n = 4, 5, 6, \cdots$ として、n 個のさいころを同時に投げる。このとき、少なくとも $(n-2)$ 個のさいころに同じ目がそろって出る確率 P_n を求めよ。また、$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{p_n}$ を求めよ。(04　浜松医大)

$\boxed{\text{EX.}}$ （無限級数）

次の無限級数の和を求めよ。

（1）$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \cdots$

(04　湘南工科大)

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2}$ (04　芝浦工大・工)

$\boxed{\text{EX.}}$ 次の問に答えよ。

（１）無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2-n} - (-1)^n}{2^{3n+1}}$ を求めよ。（04　奈良県立医大）

（２）無限級数の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin \frac{k\pi}{2}$ を求めよ。（04　東京電機大・工）

（３）無限等比級数 [illegible] $\cdots$ が収束するとき、x の値の範囲を求めよ。（04　湘南工科大）

$\boxed{\text{EX.}}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n について、$S_n = n^2 + 2n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立っている。

（１）一般項 $\{a_n\}$ を求めよ。

（２）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n}$ を求めよ。

（３）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ を求めよ。（04　龍谷大・理工）

$\boxed{\text{EX.}}$ 3 点 $A_1(0,0), B_1(1,0), A_2(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ に対し、右図のように原点 A_1 を中心とし、半径 1 で中心角 $\frac{\pi}{4}$ の扇形 $A_1B_1A_2$ を考える。点 A_2 から線分 A_1B_1 に下ろした垂線の足を B_2 とする。扇形 $A_1B_1A_2$ から $\triangle A_1B_2A_2$ を除いた部分を D_1 とする。点 A_2 を中心とし、点 B_2 を通る円と線分 A_1A_2 の交点を A_3 とする。

以下 $j \geqq 3$ に対し順次、点 A_j から線分 $A_{j-1}B_{j-1}$ に下ろした垂線の足を B_j とし、扇形 $A_{j-1}B_{j-1}A_j$ から $\triangle A_{j-1}B_jA_j$ を除いた部分を D_{j-1} とする。点 A_j を中心として点 B_j を通る円と線分 A_jA_{j-1} の交点を A_{j+1} とする。この操作を無限に繰り返す。

（1）点 B_2、点 A_3 の座標を求めよ。

（2）点列 $\{A_n\}$ の極限点の座標を求めよ。

（3）$D_1, D_2, \cdots$ の面積の総和を求めよ。(04　お茶の水大・理)

$\boxed{\text{EX.}}$ 複素数平面上に 3 点 $A_1(z_1), B_1(z_2), C_1(z_3)$ と、これらの複素数の 2 乗が表す点 $A_2({z_1}^2), B_2({z_2}^2), C_2({z_3}^2)$ がある。$\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ が正三角形となるとき、次の問に答えよ。

（1）z_1, z_2 を z_3 で表せ。また $\triangle A_1B_1C_1$ の重心を表す複素数を求めよ。

（2）$\triangle A_1B_1C_1$ と $\triangle A_2B_2C_2$ の面積比が $2:1$ のとき、$|z_3|$ を求めよ。

（3）${z_1}^k, {z_2}^k, {z_3}^k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ が表す点を A_k, B_k, C_k とし、$\triangle A_kB_kC_k$ の面積を S_k とする。$|z_3|$ が（2）で求めた値のとき、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ。ただし、3 点 A_k, B_k, C_k が三角形を作らないときは $S_k = 0$ とする。(04　名古屋市大・医)

$\boxed{\text{EX.}}$ 袋の中に 3 枚のカードが入っており、それぞれ K, S, U と書かれている。この袋からカードを 1 枚取り出して文字を記録し、再び袋の中に戻すという試行を繰り返す。n 回 $(n \geqq 2)$ の試行を行ったとき、初めて 2 回続けて同じ文字が出たときまでの試行回数を得点とする。また、同じ文字が続けて出なかった場合は 0 点とする。例えば、試行を 5 回行ったときに、記録された文字を左から順に並べて得られる文字列が $SKKUU$ や $SKKKU$ の場合は得点は 3 点である。また、$KSUKS$ の場合は 0 点である。

5 回の試行を行ったときに上のようにして得られる文字列は全部で 3^5 通りであるが、そのうち得点が 2 点であるのは 3^4 通りである。また、3 点であるのは$\boxed{\text{ア}}$通り、4 点であるのは$\boxed{\text{イ}}$通りである。各試行でそれぞれのカードが取り出される事象が同様に確からしいとすると、5 回の試行を行ったときの得点の期待値は$\boxed{\text{ウ}}$となる。

一般に $2 \leqq k \leqq n$ として、n 回の試行を行ったときに得られる文字列は全部で 3^n 通りであるが、得点が k 点であるのは$\boxed{\text{エ}}$通りである。n 回の試行を行ったときに得点が k 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{3^n}$ となる。したがって、n 回の試行を行うときの得点の期待値は $E_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k(\boxed{\text{エ}})}{3^n}$ と表すことができるので、これを n の式で表すと $E_n = \boxed{\text{オ}}$ となる。

このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} E_n = \boxed{\text{カ}}$ が得られる。

（04　京都産大・理、工）

$\boxed{\text{EX.}}$ 1 から 6 の目をもつ 1 個のサイコロを多数回投げる。

（1）n を任意の自然数とすると、n 回目に初めて 4 の目が出る確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。

（2）n 回目 $(n \geqq 2)$ に 4 の目が初めて出て、かつ、その時点までに出た目の最大値も 4 である確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。また、これらの条件に加えて、n 回目までに出た目の最小値が 2 である確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。ただし、最小値の 2 は何度出てもよいとする。

（3）$\boxed{\text{ア}}$ の確率が 600 分の 1 以下になる最小の自然数 n は $\boxed{\text{エ}}$ である。なお、計算の際に、必要に応じて次の常用対数の値を用いよ。

[illegible]

（4）「1 個のサイコロを多数回投げ、初めて 4 の目が出るまでに投げた回数 n を記録する」という行為を無限に繰り返した場合の n の平均を m とする。m を平均の定義に従って書き表せば、$m = \boxed{\text{オ}}$ のように $\sum$ 記号を使った級数の和の形で表現できる。$\boxed{\text{オ}}$ を変形すると、$\boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}} m$ という式に書き直せる。この式が m に等しいことにより、$m = \boxed{\text{ク}}$ を得る。（$\boxed{\text{オ}}$ には適当な式、$\boxed{\text{カ}}$、$\boxed{\text{キ}}$、$\boxed{\text{ク}}$ には適当な数を入れよ。）（04　立命館大・理工、情報理工）

$\boxed{\text{EX.}}$ （漸化式と極限（1））

数列 $\{a_n\}$ は、最初の 3 項が $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = \dfrac{11}{2}$ であり、また $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は等比数列になるという。このとき、$\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \boxed{ア}\left(\dfrac{1}{\boxed{イ}}\right)^{n-1}$ となり、$\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{ウ} - \boxed{エ}\left(\dfrac{1}{\boxed{オ}}\right)^{n-1}$ となる。したがって、$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{カ}$ である。(04　東京理科大・理工)

$\boxed{\text{EX.}}$ 定数 k $(0 \leqq k \leqq 2)$ に対し、各項が正の実数である 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定める。

[illegible]

[illegible]

（1）等式 ${a_n}^2 - k{b_n}^2 = (1-k)^n$ を示せ。

（2）不等式 $b_n \geqq n$ を示せ。

（3）極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$ を求めよ。(04　名古屋工大)

$\boxed{\text{EX.}}$ 定数 k と a はそれぞれ $k \geqq 0$ と $a > 0$ を満たすとする。数列 $\{a_n\}$ を

$a_1 = k + \sqrt{a},\ a_n = k + \sqrt{a_{n-1}}\ (n = 2, 3, \cdots)$ で定義する。

（1）$k = 0$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

（2）$k = 2$ で $0 < a < 4$ のとき、不等式

$0 < 4 - a_n < \dfrac{4 - a_{n-1}}{2}\ (n = 2, 3, \cdots)$

が成り立つことを示し、数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

（3）$k = 2$ で $a \geqq 4$ のとき、不等式

$0 \leqq a_n - 4 \leqq \dfrac{a_{n-1} - 4}{4}\ (n = 2, 3, \cdots)$

が成り立つことを示し、数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

（04　高知女子大・生活科学）

$\boxed{\text{EX.}}$ 初項が $a_1 = \sqrt{2}$ で、漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について以下の問に答えよ。

（1）[illegible]

の値を求めよ。

（2）すべての正の整数 n について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$0 < 2 - a_n < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

（3）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n - 1)$ を求めよ。（04　早稲田大・理工）

$\boxed{\text{EX.}}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $a_{n+1} = \sin a_n$ で定める。

（1）$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、$\dfrac{3}{\sqrt{3n}+1} < a_n < \sqrt{\dfrac{3}{n}}$ が成り立つことを示せ。

（2）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}a_n$ を求めよ。

ただし、必要であれば次の不等式を証明せずに用いてもよい。

$\dfrac{3\theta}{\theta + \sqrt{3\theta^2 + (3-\theta)^2}} < \sin\theta$ $(0 < \theta \leqq 1)$,

$\sin\theta < \sqrt{\dfrac{3\theta^2}{3+\theta^2}}$ $(\theta > 0)$（04　大阪府大・農、総合科学）

$\boxed{\text{EX.}}$ （漸化式と極限（２））

曲線 $C : y = x^3$ を考える。点 $A_1(x_1, 0)$ を通り y 軸に平行な直線と C との交点を B_1 とし、B_1 における接線と x 軸との交点を $A_2(x_2, 0)$ とする。以下同様に $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して、$A_n(x_n, 0)$ を通り y 軸に平行な直線と C との交点を B_n とし、B_n における接線と x 軸との交点を $A_{n+1}(x_{n+1}, 0)$ とする。$x_1 = 1$ として、以下の問に答えよ。

（1）x_2 を求めよ。

（2）x_n と x_{n+1} の間に成り立つ漸化式を求めよ。

（3）数列 x_n の一般項を求めよ。

（4）三角形 $A_nB_nA_{n+1}$ の面積を S_n とするとき、、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。（04　龍谷大・理工）

EX. 円 $x^2+y^2=1$ を C、直線 $x=1$ を l とする。$y_1>0$ とし、直線 l 上の点 $P_1(1,y_1)$ から最短距離にある円 C 上の点を Q_1 とする。更に、点 Q_1 から最短距離にある直線 l 上の点を $P_2(1,y_2)$ とする。自然数 $n \geqq 2$ に対して、点 $P_n(1,y_n)$ から最短距離にある円 C 上の点を Q_n とし、更に点 Q_n から最短距離にある直線 l 上の点を $P_{n+1}(1,y_{n+1})$ とする。

（1）点 Q_1 の座標を y_1 を用いて表せ。また、任意の自然数 n に対して、y_{n+1} を y_n を用いて表せ。

（2）任意の自然数 n に対して、$a_n=\dfrac{1}{{y_n}^2}$ とおくとき、a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

（3）数列 $\{y_n\}$ の一般項を y_1 と n を用いて表せ。また、極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ を求めよ。（04　大阪教育大）

EX. xy 平面において、$a_0=1$ とし、y 軸上の点 $P_0(0,a_0)$ から曲線 $C: x^2-\dfrac{1}{12}y^2=1$ の $x>0$ の部分に引いた接線の接点を $T_1(a_1,b_1)$ として、y 軸上に点 $P_1(0,a_1)$ をとる。これを順次繰り返して、一般に n $(n=1,2,3,\cdots)$ に対して、y 軸上の点 $P_n(0,a_n)$ から曲線 C の $x>0$ の部分に引いた接線の接点を $T_{n+1}(a_{n+1},b_{n+1})$ として、y 軸上に点 $P_{n+1}(0,a_{n+1})$ をとる。

（1）a_{n+1} を a_n で表せ。

（2）$\dfrac{1}{{a_n}^2+3}=c_n$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ とおくとき、c_{n+1} を c_n で表し、数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を求めよ。

（3）n が限りなく大きくなるとき、点 T_n は曲線 C 上のどの点に近づくか。（04　東京理科大・理工）

$\boxed{\text{EX.}}$ 座標平面において、点 $(a,0)$ $(a>0)$ を頂点の 1 つとし、原点を中心とする正方形を S とする。ただし、正方形の中心は対角線の交点である。また θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。

（1）原点を通り x 軸と角度 θ で交わる直線と S の辺との交点を頂点の 1 つとし、原点を中心とする正方形を S_1 とする。S_1 の 1 辺の長さ a_1 を求めよ。

（2）原点を通り x 軸と角度 2θ で交わる直線と S_1 の辺との交点を頂点の 1 つとし、原点を中心とする正方形を S_2 とする。以下同様にして、原点を通り、x 軸と角度 $n\theta$ で交わる直線と S_{n-1} の辺との交点を頂点の 1 つとし、原点を中心とする正方形を S_n とする。S_n の 1 辺の長さ a_n を求めよ。

（3）正方形 $S_1,\cdots,S_n$ の面積の和を A_n とするとき、極限値 $A=\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。(04　東京都立大・理)

$\boxed{\text{EX.}}$ （関数の極限と連続）

次の問に答えよ。

（1）$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})$ を求めよ。(04 宮崎大・工)

（2）$\lim_{x\to1}\dfrac{\log x}{(x-1)e^x}$ を求めよ。

（3）$0<a<1$ とする。曲線 $y=x^2$ と $y=a\sin x$ の原点以外の交点の x 座標を $m(a)$ で表すとき、$\lim_{a\to+0}m(a)=0$ であることを示せ。更に、$\lim_{a\to+0}\dfrac{m(a)}{a}$ を求めよ。(04 琉球大・理系)

$\boxed{\text{EX.}}$ 関数 $f(x)$ を $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{7+6x+|x|-2x^{2n}}{1-x^n+x^{2n}}$ とする。ただし、n は自然数である。

（1）$0 \leqq x < 1$ のとき、$f(x)$ を求めよ。

（2）$-1 < x < 0$ のとき、$f(x)$ を求めよ。

（3）$x=1$ のとき、$f(x)$ を求めよ。また $x=-1$ のとき、$f(x)$ を求めよ。

（4）$|x|>1$ のとき、$f(x)$ を求めよ。(04　東京理科大・理工)

$\boxed{\text{EX.}}$ 次の条件 $(A),(B)$ を満たす関数を $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 考える。

(A) $f_n(x)$ は x の n 次式で表される。

(B) 任意の実数 θ に対して次式が成立する。

$f_n(2\cos\theta)\sin\theta=\sin(n+1)\theta$

（1）$f_1(x), f_2(x)$ を求めよ。

（2）$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$ を求めよ。ただし、k は正の定数とする。

（3）$f_n(2)$ を求めよ。

（4）整式 $f_n(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りが $ax-25$ のとき、次数 n および定数 a を求めよ。(04　東京医歯大)

$\boxed{\text{EX.}}$ 関数 $f(x)$ は $\lim_{x\to+0} f(x) = f(0) \neq 0$ を満たし、$x<0$ または $x \neq 1$ のとき $f(x)=0$ とする。

更に、a と b は実数の定数であって、任意の実数 x に対して、$f(x)=af(2x)+bf(2x-1)$ の関係が成り立っているとする。

（1）定数 a と $f(0)$ が満たす関係式を求め、a の値を定めよ。

（2）$0 \leqq x < \dfrac{1}{2}$ のとき、$f(x)$ と $f(2x)$ が満たす関係式を求めよ。

（3）$0 \leqq x < 1$ のとき、自然数 n に対して、$f(x)=f(\dfrac{x}{2^n})$ が成り立つことを示せ。

（4）$0 \leqq x < 1$ のとき、$f(x)=f(0)$ が成り立つことを示せ。また、定数 b の値を定めよ。(04　大阪教育大(後期))

$\boxed{\text{EX.}}$ すべての内角が π より小さい四角形を凸四角形という。

1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC を考え、4 点 A,B,C,P を適当な順に結ぶと凸四角形になるような点 P の存在範囲を R とする。1 辺の長さが x (ただし、$x>1$ とする) の正三角形 DEF を次のようにかき、$\triangle DEF$ の内部を U とする。

$$\begin{cases} AB \text{ と } DE \text{ は平行、} BC \text{ と } EF \text{ は平行、} CA \text{ と } FD \text{ は平行である。} \\ \triangle ABC \text{ と } \triangle DEF \text{ の重心は一致する} \\ 2 \text{ 点 } C,F \text{ は直線 } AB \text{ に関して同じ側にある} \end{cases}$$

また、集合 X についてその面積を $m(X)$ で表すこととする。

（1）$m(R\cap U)$

（2）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{m(R\cap U)}{m(U)}$ を求めよ。

2 直線 AB, AC により、平面は 4 つの部分に分けられる。そのうち、$\triangle ABC$ の内部を含む部分を S とする。$\triangle ABC$ の重心を中心とする半径 y (ただし、$y>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする) の円の内部を V とし、点 A を中心にして V を含む最小の円の内部を T とする。

（3）$\alpha=m(S\cap T), \beta=m(S\cap T), \gamma=\dfrac{1}{6}m(V)$ とおくとき、α,β,γ の大小関係を不等式で示せ。

（4）$m(S\cap T)$ を求めよ。

（5）$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{m(R\cap V)}{m(V)}$ （04　日本医大）

定義に従って、$f(x)=\cos x$ の $x=a$ における微分係数を求めよ。ただし、$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ は使用してよい。

（04　富山医薬大・薬（推薦））

VICTORY-数学 III

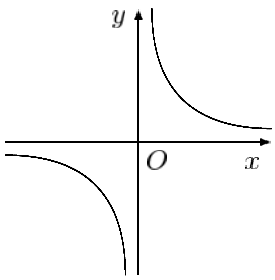
1. 関数

(1) $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフ

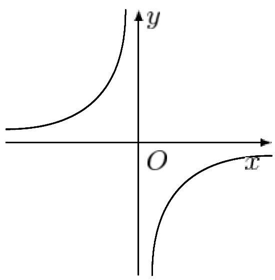
x の分数式で表される関数を $\boxed{\text{分数関数}}$ という。

$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフは下図のような $\boxed{\text{双曲線(直角双曲線)}}$ とよばれる曲線で、原点に関して対称である。漸近線は x 軸と y 軸である。

(i)$k>0$ のとき



(ii)$k<0$ のとき



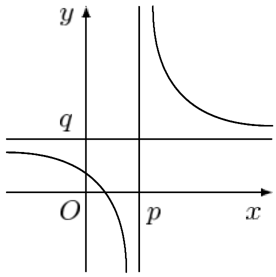
(2) $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ

$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは、$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを

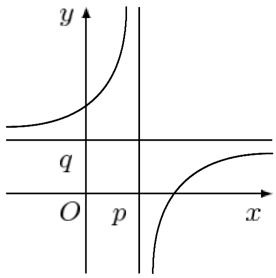
x 軸の方向に p、y 軸の方向に q だけ平行移動した直角双曲線 ($rectangular\ hyperbola$) である。

その漸近線 ($asymptotic\ line$) は 2 直線 $x=p, y=q$ である。

(i)$k>0$ のとき



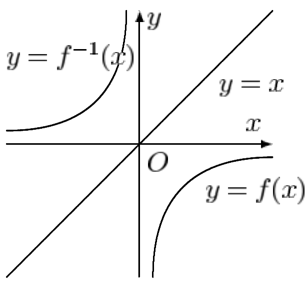
(ii)$k < 0$ のとき



(3) 逆関数 ($inverse\ function$) のグラフ

関数 $y = f(x)$ のグラフとその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、

直線 $y = x$ に関して対称 ($symmetry$) である。



2. 極限 ($limit$)

(1) 数列の収束 ($convergence$)・発散 ($divergence$)

$$
\begin{cases}
\text{収束} \cdots \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha(\text{一定値}\alpha\text{に収束}) \\
\text{発散} \begin{cases}
\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ (\text{正の無限大に発散}) \\
\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \ (\text{負の無限大に発散}) \\
\text{振動}
\end{cases}
\end{cases}
$$

(2) 極限値 ($value\ of\ limit$) と四則

数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ が収束して、$\lim_{n\to\infty}\{a_n\}=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}\{b_n\}=\beta$ のとき

i. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ ただし、k は定数

ii. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta,\ \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

iii. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

iv. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　　ただし、$\beta\neq 0$

(3) 極限値と大小関係

i. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ がそれぞれ α,β に収束するとき

$a_n \leqq b_n (n=1,2,3,\cdots)$ ならば $\alpha\leqq\beta$

ii. 数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ において

$a_n\leqq b_n\leqq c_n(n=1,2,3,\cdots)$

かつ $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$ ならば、$\{b_n\}$ も収束して

$\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$

(4) $\{r^n\}$ の極限（無限等比数列 ($infinite\ geometric\ sequence$)）

(1)$r>1$ のとき $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$
(2)$r=1$ のとき $\lim_{n\to\infty}r^n=1$
(3)$\lvert r\rvert<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}r^n=0$
(4)$r\leqq -1$ のとき $\{r^n\}$ は振動し、$\lim_{n\to\infty}r^n$ は存在しない。
したがって、数列 $\{r^n\}$ が収束する $\Longleftrightarrow -1<r\leqq 1$

（証明）

(1)$r>1$ のとき $r-1=h$ とおくと、$r=1+h,\ h>0$ である。

$r^n=(1+$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $\dfrac{\text{[illegible]})}{2}h^2+\cdots+h^n$

ここで、$h>0$ であるから、不等式 $(1+h)^n>nh$ が成り立ち、

$\lim_{n\to\infty}nh=\infty$ であるから $\lim_{n\to\infty}(1+h)^n=\infty$

よって、$r > 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

例. $r > 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n} = \infty$ であることを示せ。

$r^n = (1+h)^n$

$= {}_nC_0 \cdot 1^n \cdot h^0 + {}_nC_1 \cdot 1^{n-1} \cdot h^1 + {}_nC_2 \cdot 1^{n-2} \cdot h^2 + {}_nC_3 \cdot 1^{n-3} \cdot h^3 + \cdots + {}_nC_n \cdot 1^0 \cdot h^n$

$= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n$

であるから、$h > 0$ より

$r^n = (1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2$

が成り立つ。よって、$\frac{r^n}{n} > \frac{n(n-1)}{2}h^2$

ここで、$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2}h^2 = \infty$ であるから

$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n} = \infty$

(5) 無限等比級数

$a \neq 0$ のとき、

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ は

i. $|r| < 1$ のとき収束して、その和は $\frac{a}{1-r}$

ii. $|r| \geqq 1$ のとき発散する。

(6) 無限等比級数の性質

無限級数 ($infinite\ series$) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束して、その和がそれぞれ S, T であるとき、

i. $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS$　　ただし、k は定数

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要条件

級数 ($series$) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

対偶を考えると、

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しなければ、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

注意　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要条件であるが、十分条件ではない。

例　　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ は

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ であるが、無限級数は発散する。

(8) 極限値と四則

[illegible] ならば、

i. $\displaystyle\lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha$ ただし、k は定数

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\displaystyle\frac{[illegible]}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$　　ただし、$\beta \neq 0$

(9) 関数の極大値と大小関係

i. 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$ が存在し、a の近くで不等式

$f(x) \leqq g(x)$

が成り立つならば

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)$

ii. a の近くで不等式

$f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$

が成り立ち、かつ

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \alpha$

ならば、$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \alpha$

(10) 三角関数と極限

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(11) $x = a$ における連続 $(continuous)$

関数 $f(x)$ は $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ のとき、$x = a$ において連続である。

(12) 中間値の定理 [illegible] I

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ において連続で、$f(a) \neq f(b)$ ならば、

$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の m に対して

$f(c)=m$

となるような実数 c が a と b の間に少なくとも1つ存在する。

（13）中間値の定理II

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続であり、$f(a)\cdot f(b)<0$ となるとき、方程式

$f(x)=0$

は a と b の間に少なくとも1つの実数解をもつ。

EX. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2)$ を求めよ。（04　名古屋市大・芸術工）

参考 $\varepsilon-N$ 論法
$\forall\varepsilon>0,\exists N;n>N\Longrightarrow\lvert a_n-\alpha\rvert<\varepsilon$

参考 $\varepsilon-\delta$ 論法
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0;\lvert x-a\rvert<\delta\Longrightarrow\lvert f(x)-f(a)\rvert<\varepsilon$

3. 微分

（1）微分可能ならば連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能 $(differentiable)$ ならば、

$x=a$ において連続である。

注意　関数 $f(x)$ が $x=a$ において連続であっても、$x=a$ において微分可能であるとは限らない。

（2）積の導関数

$$\boxed{\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

（証明）

$y=f(x)g(x)$ として、

x の増分 $(increment)$ $\Delta x=h$ に対して、y の増分を Δy とすると、

$\Delta y = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$

$= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)$

$= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)$

$= \{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}$

両辺を $\Delta x = h$ で割ると

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

$g(x)$ は連続関数であるから、$\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ となるので、

$y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim\limits_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) 商の導関数

$$\boxed{\begin{array}{l} \{\dfrac{1}{g(x)}\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\ \{\dfrac{f(x)}{g(x)}\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{array}}$$

(証明)

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ として、

x の増分 $\Delta x = h$ に対して、y の増分を Δy とすると、

$\Delta y = \dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$= \dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$= \dfrac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$

$= \dfrac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$

$= \dfrac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x) - f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{g(x+h)g(x)}$

両辺を $\Delta x = h$ で割ると

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x) - f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h \cdot g(x+h)g(x)}$

$$= \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

$g(x)$ は連続関数であるから、$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ となるので、

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$
$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

（4）合成関数 (*composite function*) の微分法

関数 $y = f(u)$ と関数 $u = g(x)$ がともに微分可能ならば、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

が成り立つ

$\frac{dy}{du} = f'(u), \frac{du}{dx} = g'(x)$ であるから、

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

が成り立つ

因数定理の拡張　$f(x)$ が $(x-\alpha)^n$ で割り切れる
$\iff f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$

（5）逆関数の微分法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$ ただし、$\frac{dx}{dy} \neq 0$

（6）三角関数の導関数

(i)$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
(ii)$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
(iii)$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
(iv)$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(i)+(ii) より

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}}$$

(i)−(ii) より

$$\boxed{\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}}$$

(iii)+(iv) より

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}}$$

(iii)−(iv) より

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}}$$

(i) の両辺を 2 倍して右辺、左辺を入れ替える。

$\alpha+\beta = A,\ \alpha-\beta = B$ とすると

$$\alpha = \frac{A+B}{2},\ \beta = \frac{A-B}{2}$$

よって、

$$\boxed{\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

同様に (ii) より

$$\boxed{\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

同様に (iii) より

$$\boxed{\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

同様に (iv) より

$$\boxed{\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\frac{1}{\tan x})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

（証明）

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$\left(\sin A - \sin B = 2cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)$$

$\frac{h}{2} = \theta$ とおくと

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{2\cos(x+\theta)\sin\theta}{2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \cos(x+\theta) \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$= \cos x \cdot 1 = \cos x$$

また、$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ より

$$(\cos x)' = \{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\}'$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)'$$

$$= \sin x \cdot (-1) = -\sin x$$

さらに、

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

また、

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{(\tan x)'}{(\tan^2 x)}$$

$$= -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

（7）$\log|x|$ の導関数

$$\boxed{(\log|x|)' = \frac{1}{x}}$$

（証明）

$$(\log x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$h = \dfrac{\Delta x}{x}$ とすると、$\Delta x \longrightarrow 0$ のとき、$h \longrightarrow 0$ であるから

$= \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{xh} \log(1+h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log(1+h)^{\frac{1}{h}}$

$\displaystyle\lim_{h \to 0} \log(1+h)^{\frac{1}{h}} = \log e = 1$ より

$= \dfrac{1}{x}$

(8) $\log_a x$ の導関数

$\boxed{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}}$

(証明)

$\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ より

$(\log_a x)' = \left(\dfrac{\log x}{\log a}\right)'$

$= \dfrac{1}{x \log a}$

(9) $\log|y|$ の導関数

$y = f(x)$ が微分可能ならば、$f(x) \neq 0$ である x の範囲において

$\boxed{(\log|y|)' = \dfrac{y'}{y}}$

(10) a^x の導関数

$\boxed{(a^x)' = a^x \log a}$

(証明)

$y = a^x$ として、両辺を底が e の対数をとると

$\log y = \log a^x$

$\log y = x \log a$

両辺を x で微分すると

$\dfrac{y'}{y} = \log a$

よって、$y' = y \log a = a^x \log a$

（11）e^x の導関数

$\boxed{(e^x)' = e^x}$

$(a^x)' = a^x \log a$ で $a = e$ とすると

$(e^x)' = e^x \log e = e^x$

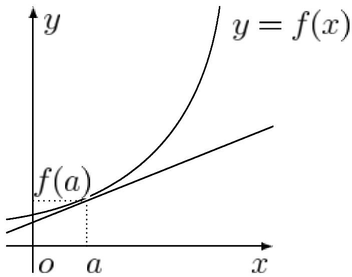
（12）x^α の導関数

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

（13）接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

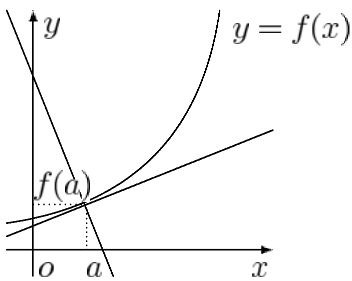
$y - f(a) = f'(a)(x - a)$



（14）法線の方程式

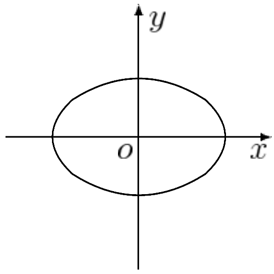
曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における法線の方程式は

$y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$



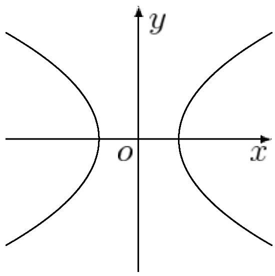
（15）楕円 $(ellipse)$ の方程式

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



(16) 双曲線の方程式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



(17) 平均値の定理 (*mean value theorem*) I

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続、区間 (a, b) で微分可能ならば、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する。

(18) 平均値の定理 II

関数 $f(x)$ が区間 $[a, a+h]$ で連続、区間 $(a, a+h)$ で微分可能ならば、次の条件を満たす実数 θ が存在する。

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h, \qquad 0 < \theta < 1$$

（19）導関数の符号と関数の増減

関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能であるとき、

i. I でつねに $f'(x) > 0$ ならば、$f(x)$ は I で増加する。

ii. I でつねに $f'(x) < 0$ ならば、$f(x)$ は I で減少する。

iii. I でつねに $f'(x) = 0$ ならば、$f(x)$ は I で定数である。

（20）閉区間 $(closed\ interval)$ での増減

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で微分可能であるとき、

i. 区間 (a, b) でつねに $f'(x) > 0$ ならば、$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で増加

ii. 区間 (a, b) でつねに $f'(x) < 0$ ならば、$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で減少

（21）極大・極小と微分係数

関数 $f(x)$ が $x = a$ において極大または極小となり、かつ $x = a$ において微分可能ならば

$$f'(a) = 0$$

（22）曲線の凹凸の判定

i. $f''(x) > 0$ となる区間では、曲線 $y = f(x)$ は下に凸

ii. $f''(x) < 0$ となる区間では、曲線 $y = f(x)$ は上に凸

（23）変曲点 $(inflection\ point)$ $f''(a) = 0$ であるとき、$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変われば、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ は変曲点である。

（24）$f''(a)$ の符号と極値関数 $f(x)$ が連続な第２次導関数をもつとき、

i. $f'(a) = 0, f''(a) > 0$ ならば、$f(a)$ は極小値

ii. $f'(a)=0, f''(a)<0$ ならば、$f(a)$ は極大値

(25) 関数の値の近似値

> **1 次の近似式**
>
> h が 0 に近いとき、$f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h$
>
> x が 0 に近いとき、$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

（証明）

$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ となるので、

h が 0 に近いとき

$\displaystyle\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \fallingdotseq f'(a)$

よって、$f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

とくに $a=0$ とし、h を x に置き換えれば、x が 0 に近いとき

$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

> **2 次の近似式**
>
> h が 0 に近いとき、$f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h+\dfrac{1}{2}f''(a)h^2$

（証明）

$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+Kh^2 \cdots (1)$

となる K の値を求める。以下、$b=a+h$ とおく。

(1) から $f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+K(b-a)^2$ であるから

$F(x)=f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)-K(b-x)^2 \cdots (2)$

とおくと　　$F(a)=0$　　$F(b)=0$

ゆえに、ロルの定理より

$F'(c)=0$　$a<c<b$　または　$b<c<a$

が成り立つような数 c がある。(2) の両辺の関数を微分すると

$$F'(x)=-f'(x)-f''(x)(b-x)+f'(x)+2K(b-x)$$
$$=-f''(x)(b-x)+2K(b-x)$$

$F'(c)=0$ であるから

$-f''(c)(b-c)+2K(b-c)=0$ ゆえに $K=\dfrac{1}{2}f''(c)$

これを (1) に代入すると

$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{1}{2}f''(c)h^2\cdots(3)$

$|h|$ が十分小さいときは、$f''(c)\fallingdotseq f''(a)$ であるから

$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h+\dfrac{1}{2}f''(a)h^2$

$h=x-a$ とおくと

$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$

この右辺の関数を $g(x)$ とすると $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$, $f''(a)=g''(a)$ であり、2 次の近似式は、曲線 $y=f(x)$ を放物線 $y=g(x)$ で近似したものになっている。

参考

○ロル ($Rolle$) の定理

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能なとき、$f(a)=f(b)=0$ ならば $f'(c)=0$ を満たす c $(a<c<b)$ が存在する。

○ロピタル ($De\ L'hospital$) の定理

関数 $f(x),g(x)$ は a を含む区間で連続で、高々 a を除いて微分可能で、$g'(x)\neq 0$ であり、$f(a)=g(a)=0$ のとき、有限な極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば、

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

また、関数 $f(x),g(x)$ は十分大きなすべての x について微分可能で、

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ のとき、有限な極限値

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

また、関数 $f(x),g(x)$ は a を含む区間で、a を除いて微分可能で、$g'(x)\neq 0$ であり、$|f(a)|\longrightarrow\infty, |g(a)|\longrightarrow\infty\ (x\longrightarrow a)$ のとき、有限な極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

参考

○テイラー $(Taylor)$ の定理

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で n 次導関数が連続で、開区間 (a,b) で $n+1$ 回微分可能ならば、

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

を満たす $c(a<c<b)$ が存在する。

また、$b=x$ とすると、

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

と表される。

○マクローリン $(Maclaurin)$ の定理

テイラーの定理で $a=0$ として、得られる式をマクローリンの定理という。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x)^{n+1}$$

参考 オイラーの公式

三角関数のマクローリン展開より

$$\cos\theta+i\sin\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\theta^{2k}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\theta^{2k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^l}{l!}$$

指数関数のマクローリン展開より

$e^{\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\theta)^l}{l!}$
$\theta=i\theta$ とすると
$e^{i\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^l}{l!}$
よって、$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$（オイラーの公式）となる。

$\theta=\pi$ とすると

$e^{i\pi}=-1$ となる。

$e^{i\pi}+1=0$ と表す場合もある。

$\boxed{\text{参考}}$ オイラーの公式の応用

オイラーの公式　　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ より

(1) 実数 α,β に対して

$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ e^{\pm i\beta}=\cos\beta\pm i\sin\beta$

辺々かけて

$e^{i\alpha}\cdot e^{\pm i\beta}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta\pm i\sin\beta)$

(左辺) $=e^{i(\alpha\pm\beta)}=\cos(\alpha\pm\beta)+i\sin(\alpha\pm\beta)$

(右辺) $=(\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\beta)+i(\sin\alpha\sin\beta\pm\cos\alpha\cos\beta)$

よって

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

(2) $\int e^{i\theta}d\theta=\frac{1}{i}e^{i\theta}=-i\cos\theta+\sin\theta$ と
$\int e^{i\theta}d\theta=\int\cos\theta d\theta+i\int\sin\theta d\theta$ より
$\int\cos\theta d\theta=\sin\theta,\ \int\sin\theta d\theta=-\cos\theta$

（26）媒介変数 $(parameter)$ で表された関数の微分

$$x=f(t),y=g(t)\text{ のとき、}\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

例

○円の媒介変数表示 (1)

$$x^2+y^2=a^2 \Longrightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$$

○円の媒介変数表示 (2)

円 $x^2+y^2=1\cdots$(i) と点 $A(-1,0)$ を通る直線 $y=t(x+1)\cdots$(ii)

との点 A と異なる交点を点 $P(x,y)$ とする。

(i)(ii) から y を消去して整理すると

$(x+1)\{(1+t^2)x+t^2-1\}=0$

$x\neq-1$ であるから $(1+t^2)x+t^2-1=0$

これから x を t で表し、さらにそれを (ii) に代入すると

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

これは、円 (i) から点 A を除いた部分の媒介変数表示を示す。

○楕円の媒介変数表示

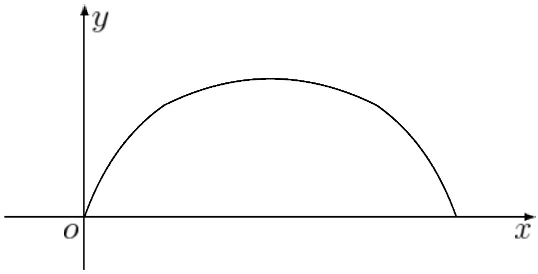
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Longrightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$$

○双曲線の媒介変数表示

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$

○サイクロイド (*cycroid*) の媒介変数表示

[illegible]



（27）速度 $(velocity)$・加速度 $(acceleration)$

座標平面上を運動する点 $P(x,y)$ が

$x=f(t), y=g(t)$

で与えられているとすると、

速度は $\overrightarrow{v}=(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})$

その大きさは、$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$

加速度は $\overrightarrow{\alpha}=(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2})$

その大きさは、$|\overrightarrow{\alpha}|=\sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2+(\frac{d^2y}{dt^2})^2}$

$\boxed{\text{EX.}}$ 関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$ について、次の問に答えよ。ただし、a,b,c は定数で、$a>0$ とする。

（1）$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ を求めよ。（05　関西大・工）

（2）等式 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+5}-\sqrt{x^2-3})=4$ が成り立つような定数 a の値を求めよ。（05　東京電機大・工）

（3）$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2n^3+n^4(1-\cos\frac{2}{n})}}{(2n-1)\tan\frac{3}{n}}$（05　山梨大・教育人間科学）

EX.（１）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ を求めよ。(05　関西大・工)

（２）等式 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+5}-\sqrt{x^2-3})=4$ が成り立つような定数 a の値を求めよ。(05　東京電機大・工)

（３）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2n^3+n^4(1-\cos\frac{2}{n})}}{(2n-1)\tan\frac{3}{n}}$ (05　山梨大・教育人間科学)

EX. １.（１）$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ を求めよ。(05　関西大・工)

（２）等式 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+5}-\sqrt{x^2-3})=4$ が成り立つような定数 a の値を求めよ。(05　東京電機大・工)

（３）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2n^3+n^4}(1-\cos\frac{2}{n})}{(2n-1)\tan\frac{3}{n}}$ を求めよ。(05　山梨大・教育人間科学)

EX. ２. 関数 $\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$ について、次の問に答えなさい。ただし、a,b,c は定数で、$a>0$ とする。

（１）関数 $f(x)$ が x の連続関数となるための定数 a,b,c の条件を求めよ。

（２）定数 a,b,c が（１）で求めた条件を満たすとき、関数 $f(x)$ の最大値とそれを与える x の値を a を用いて表せ。

（３）定数 a,b,c が（１）で求めた条件を満たし、関数 $f(x)$ の最大値が $\frac{4}{5}$ であるとき、定数 a,b,c の値を求めよ。(05　鳥取大・医、工、農)

$\boxed{\text{EX.}}$ 3．平面上に 4 点 K, E, I, O がある。K は動点で、その座標 (x, y) が時刻 t $(t \geqq 0)$ の関数として $x = t, y = at$ で与えられている（a は正の実数）。$E(3,0), I(1,0), O(0,0)$ は定点である。2 点 E, I を通り、直線 $y = ax$ に第 1 象限で接する円の中心の座標は $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ である。円周角の性質から、$\angle EKI$ が最大となるのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ のときである。そのときの線分 OK の長さを l_a, $\angle EKI$ を θ_a とするとき、$l_a = \boxed{\text{エ}}$, $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \theta_a = \boxed{\text{オ}}$ である。（05　慶応大・理工）

$\boxed{\text{EX.}}$ 4．放物線 $C : y = x^2$ を考える。$a \neq 0$ に対して、点 (a, a^2) に C の接線を l_a とする。

（1）l_a と x 軸との交点を通り l_a に直交する直線は定点を通ることを示せ。

（2）y 軸上に中心をもち、(a, a^2) で l_a に接する円の中心の y 座標を y_a とするとき、$\displaystyle\lim_{a \to 0} y_a$ を求めよ。

（3）O を半径 r、中心 $(0, b)$ の円とする。ただし、$b > 0$ とする。

（ア）$\displaystyle b \leqq \lim_{a \to 0} y_a$ とする。

$r < b$ のとき、O と C の共有点はないことを示せ。

$r = b$ のとき、O と C の共有点は 1 個であることを示せ。

$r > b$ のとき、O と C の共有点は 2 個であることを示せ。

（イ）$\displaystyle b > \lim_{a \to 0} y_a$ とする。O が C と共有点をもつとき、その個数は 2 以上であることを示せ。（05　大阪教育大）

$\boxed{\text{EX.}}$ 5．$x(u)=\dfrac{(u-1)^2(u+1)}{2(3u^2+1)}, y(u)=\dfrac{-(u-1)(u+1)^2}{2(3u^2+1)}$ とおく。$x=x(u), y=y(u)$ と媒介変数表示された曲線を考える。

（1）$x(u)^3+y(u)^3-x(u)y(u)$ を計算せよ。

（2）[illegible] を調べよ。

（3）直線 $ax+by+1=0$ $(a, b$ は定数$)$ と点 $(x(u), y(u))$ との距離を $D(u)$ とおく。$\displaystyle\lim_{u\to\infty} D(u)=\lim_{u\to-\infty} D(u)=0$ となるように a, b を定めよ。

（4）点 $(x(u), y(u))$ と点 $(x(v), y(v))$ が直線 $y=x$ に関して対象なとき、u, v の満たす条件を求めよ。(05　大阪医大)

$\boxed{\text{EX.}}$ 6．$a>1$ とする。平面上で点 (a, a) を中心とし点 $M(1, 1)$ を通る円 C と双曲線 $H: xy=1$ が M 以外に 2 つの共有点 P, Q をもつ場合を考える。

（1）このような a の範囲を求め、共有点 P, Q の座標を a を用いて表せ。

（2）円 C の直径 MR に対して $\angle PRQ=\theta$ とする。$\cos\theta$ を a を用いて表せ。

（3）四角形 $MPRQ$ の面積を S とし、円 C の面積を T とするとき、$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S}{T}$ を求めよ。

（4）$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ を求めよ。(05　滋賀医大)

$\boxed{\text{EX.}}$ 7．（1）関数 $f(x)=(1+\cos x)\sin x$ のとき、$f'(0)$ の値を求めよ。(05　湘南工科大)

（2）$x=e^{\theta}\cos\theta, y=e^{\theta}\sin\theta$ のとき、$\dfrac{dy}{dx}$ を θ を用いて表せ。(05　東京電機大・理工)

（3）関数 $y=\log(-x+\sqrt{x^2+1})$ を微分せよ。(05　静岡理工科大)

（4）x と y の関係が $-6x^2+2y^2=1$ で与えられているとき、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。(05　湘南工科大)

$\boxed{\text{EX.}}$ 8．関数 $f(x)$ がすべての実数 s,t に対して $f(s+t)=f(s)+f(t)$ を満たしているとき、

（1）$f(0)$ を求めよ。

（2）$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であれば、$f(x)$ はすべての実数 a に対して $x=a$ で微分可能であることを証明せよ。

（3）$f(x)$ が $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$ のとき、$f(x)$ を求めよ。(05　静岡大・理)

$\boxed{\text{EX.}}$ 9． $f(x), g(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で定義された実数値関数で、$\{f(0)\}^2 + \{g(0)\}^2 > 0$ とする。また、任意の実数 x, y に対して、次の等式①、②を満たしているものとする。

$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y) \cdots$ ①

$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \cdots$ ②

（1） $f(0)$ と $g(0)$ を求めよ。

（2）等式①、②より、$y \neq 0$ に対して

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \boxed{\text{ア}} f(x) - \boxed{\text{イ}} g(x)$$

$$\frac{g(x+y)-g(x)}{y} = \boxed{\text{イ}} f(x) + \boxed{\text{ア}} g(x)$$

である。ただし、$\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}$ は y の関数である。したがって、もし、$f(x), g(x)$ が $x = 0$ で微分可能

4. 積分

(1) x^α の不定積分

$\alpha \neq -1$ のとき、$\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$

$\alpha = -1$ のとき、$\displaystyle\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} = \log|x| + C$

(2) 三角関数の不定積分

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\log|\cos x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

(3) 指数関数の不定積分

$$\int e^x dx = e^x + C, \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

(4) 置換積分 [illegible])

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \text{ ただし、} x = g(t)}$$

（証明）

$F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$ とする。このとき、x が t の関数として、$x = g(t)$ と表されるならば、$F(x) = F(g(t))$ は t の関数である。

これを t について微分すると、合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}F(x) \cdot \frac{dx}{dt} = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

よって、$F(x) = \inf f(g(t))g'(t)dt$

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt \text{ ただし、} g(x) = t}$$

（証明）

$\displaystyle\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$ ただし、$x = g(t)$ で右辺と左辺を交換し、x と t の文字を入れ換える。

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)| + C}$$

（証明）

$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$ ただし、$g(x) = t$ で $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とすると

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|g(x)| + C$$

（5） $f(ax+b)$ の不定積分

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数のとき

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \text{ ただし、} a \neq 0$$

（6） 部分積分法

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

（証明）

$$f(x)g(x)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

これは $f(x)g(x)$ が右辺の原始関数であることを示している。

よって、

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

(7) 定積分

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

a を下端、b を上端という。

(8) 定積分の置換積分法

$x = g(t)$ とおくとき、$a = g(\alpha), b = g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

(証明)

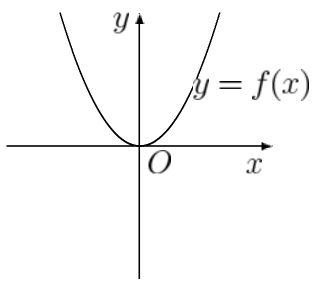
$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = [F(g(t))]_\beta^\alpha = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

(9) 偶関数 $(even\ function)$・奇関数 $(odd\ function)$

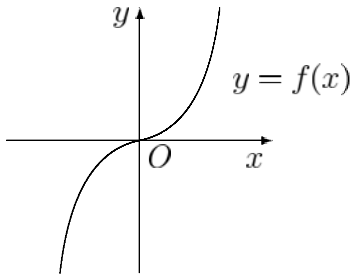
関数 $y = f(x)$ において、

$f(-x) = f(x)$ が成り立つとき、$f(x)$ を偶関数



$f(-x) = -f(x)$ が成り立つとき、$f(x)$ を奇関数

という。



$f(x)$ が偶関数ならば　　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$f(x)$ が奇関数ならば　　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

（10）定積分の部分積分 (*integration by parts*)

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx$$

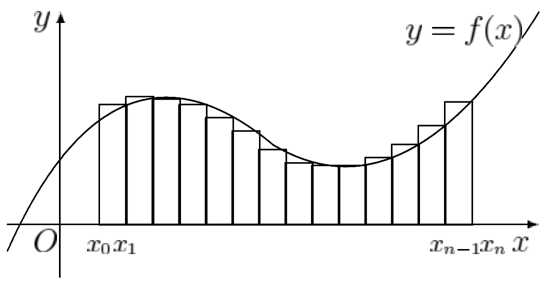
（11）積分と微分の関係

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x) \qquad \text{ただし、}a\text{ は定数}}$$

（証明）

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

（12）定積分と区分求積法 (*quadrature partitions*)



区間 $[a,b]$ を n 等分して、その分点を順に

[illegible]

とおき、分点の間隔 $\dfrac{b-a}{n}$ を Δx とする。

このとき、上の図の各長方形の面積の和の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

が、面積 $S=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を表す。
すなわち

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x}$$

ここで、a を 0、b を a で置き換えると

$$\int_0^a f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}f\left(\frac{ka}{n}\right)$$

例. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ の極限値を求めよ。
(解答例)

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=[\log(1+x)]_0^1=\log 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

ただし、$\Delta x = \dfrac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x$

また

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

ただし、$\Delta x = \dfrac{b-a}{n},\ x_{k-1} \leqq c_k \leqq x_k$

また

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

ただし、$\Delta x = \dfrac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x$

また

$$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$$

$$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$$

（13）定積分と不等式

$f(x)$ が区間 $[a,b]$ でつねに $f(x) \geqq 0$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geqq 0$$

等号が成り立つのは $f(x) = 0$ のときに限る

関数 $f(x), g(x)$ が区間 $[a,b]$ でつねに

$f(x) \geqq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

等号が成り立つのは $f(x) = g(x)$ のときに限る

例．$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} > \log(n+1)$ ただし、n は自然数

（証明）

$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフで

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

よって、$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$

例. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

$n \geqq 2$ のとき

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx$$

$= -\int^{\frac{\pi}{}}$ [illegible]

$=$ [illegible] $\frac{}{2}$ $_0$ $+ \int^{\pi}$ [illegible]

$=$ [illegible] $+ (n-1) \int^{\pi}$ [illegible]

$=$ [illegible] $\int^{\pi}$ [illegible]

$=$ [illegible]

よって、[illegible]

[illegible]

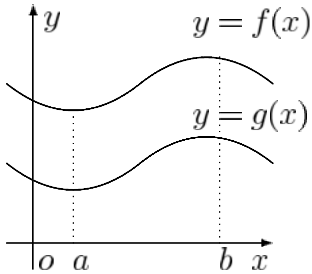
[illegible] $- \frac{[illegible]}{n} I_{n-2}$

（14） 2 曲線間の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ において、$g(x) \leqq f(x)$ であるとき、

2 曲線 $y = f(x), y = g(x)$ と 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$



参考

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

参考

任意の放物線に対して、その上の任意の異なる 2 点を P, Q とし、それらの中点 M を通り放物線の軸に平行な直線と放物線の交点を R としたとき、放物線と直線 PQ で囲まれる図形の面積を S とすると
$S = \dfrac{4}{3}\triangle PQR$
である。

参考

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)^2 dx = -\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$$

参考

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

(15) 立体 ($solid$) の体積

x 軸上の点 x で x 軸に垂直な平面を X とし、ある立体の X による切り口 ($cross\ section$) の面積を $S(x)$ とすれば、この立体の $a \leqq x \leqq b$ の部分の体積 V は

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

(16) x 軸のまわりの回転体の体積 ($volume\ of\ a\ solid\ of\ revolution$)

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx \qquad \text{ただし、} a<b$$

(17) y 軸のまわりの回転体の体積

$$V=\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_a^b\{g(y)\}^2dy \qquad \text{ただし、} a<b$$

$\boxed{\text{参考}}$パップス・ギュルダン ($Pappus\ Guldin$) の定理

（体積）＝（断面積）×（重心の道のり）

$\boxed{\text{参考}}$バームクーヘン分割による体積の求め方

$f(x)$ を $a \leqq x \leqq b$ で連続かつ $f(x) \geqq 0$ を満たす関数とし、$0 \leqq a < b$ とするとき、曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a, x=b$ および x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに一回転したときに通過する部分の体積 V は

$$V=\int_a^b 2\pi xf(x)dx$$

となる。

(18) 曲線の長さ ($length\ of\ a\ curve$)

i. 曲線 $x=f(t), y=g(t)(a \leqq t \leqq b)$ の長さを s とすれば

$$s=\int_a^b\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$$

ii. 曲線 $y=f(x)(a \leqq x \leqq b)$ の長さを s とすれば

$$s=\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dt=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dt$$

$\boxed{\text{EX.}}$ (1) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x-1}dx=\frac{x^2}{\boxed{ア}}+\boxed{イ}x+\boxed{ウ}\log|x-1|+C$

ただし、対数は自然対数、C は積分定数である。(05　湘南工科大)

(2) 次の不定積分を求めよ。

(ア) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2}dx$

(イ) $\displaystyle\int \frac{4x^3-6x+9}{x^4-3x^2+9x+10}dx$ (05　埼玉大・工)

$\boxed{\text{EX.}}$ (1) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)dx$ を求めよ。(05　津田塾大)

(2) 不定積分 $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$ を求めよ。(05　東京電機大・工)

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\log 3}{2}} \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$ を求めよ。(05　横浜国大・工(後期))

(2) 関数 $f(x)=3\cos 2x+7\cos x$ について、$\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|dx$ を求めよ。(05　千葉大・園芸、理、工)

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x|\sin^2 x-\frac{1}{2}|dx$ を求めよ。(05　横浜国大・工(後期))

(4)$f(x)=(\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x})\sin x$ とする。$f(x)$ の不定積分を求めよ。また、$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|f(x)|dx$ を求めよ。(05　慶応大・医)

$\boxed{\text{EX.}}$ m,n を自然数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx dx$ を計算せよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin mx dx$ を計算せよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}(x-a\sin x-b\sin 2x)^2dx$ を最小にする定数 a,b 計算せよ。

(05　大阪医大)

$\boxed{\text{EX.}}$ 次のように定積分で定義された数列を $\{a_n\}$ 考える。

$a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1)a_n を計算せよ。

(2)$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を計算せよ。

(3)$|a_n| < \int_0^1 x^{2n}dx$ であることを示せ。

(4)$a_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ であることを示せ。

(5) 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ の和 S を求めよ。

（05　南山大）

$\boxed{\text{EX.}}$ 座標空間に 3 点 [illegible] をとる。

座標空間の原点を $O(0, 0, 0)$ で表す。線分 OP 上に点 Q を $OP \cdot OQ = 1$ となるようにとり、$s = BQ$ とおくとき

(1)s を θ を用いて表し、線分の長さ AQ を s のみを用いて表せ。

(2)$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、$\frac{ds}{d\theta} = \frac{AQ}{AP}$ であることを示せ。

(3)$f(\theta) = \frac{1}{AP}$ とおくとき、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta)d\theta$ を求めよ。

（05　大阪市大・理、工、医）

$\boxed{\text{EX.}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \text{ または } x > 2 \text{ のとき} \\ |x-1| & 0 \leqq x \leqq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める。

(1)$g(x) = f(f(x))$ とおく。関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ。

(2)n を自然数とする。$\int_0^{n^2} g(\frac{x-n^2+n}{n}) \cos \frac{\pi x}{n}dx$ を求めよ。

（05　神戸大・理系）

VICTORY-数学C

1. 行列 $(matrix)$

（1）行列の加法

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して、

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

$$A + O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

（2）行列の実数倍

[illegible]

[illegible]

[illegible] KB

（3）行列の乗法の性質

i. $A(kB) = (kA)B = K$[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

（4）ハミルトン・ケーリー $(Hamilton\ Carley)$ の定理

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ が成り立つ。

(5) 2次正方行列 ($square\ matrix\ of\ order\ two$) の逆行列 ($inverse\ matrix$)

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$\Delta=ad-bc$ とおく。

i. $\Delta\neq 0$ ならば、$A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

ii. $\Delta=0$ ならば、A の逆行列は存在しない。

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

(6) 行列の基本変形

i. ある行に 0 でない定数をかける

ii. ある行の定数倍を他の行に加える

iii. 2つの行を入れ替える

(7) A^n の計算

i. ハミルトン・ケーリーの定理の利用

ii. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ (対角行列) を見つける

対角行列 ($diagonal\ matrix$) をジョルダンの標準形という

$P^{-1}AP=B^n$ となれば、$PP^{-1}APP^{-1}=PB^nP^{-1}$

iii. 固有値 ($characteristic\ value$) と固有ベクトル ($characteristic\ vector$)

より求める $A\overrightarrow{p}=k\overrightarrow{p}, \overrightarrow{p}\neq\overrightarrow{0}$ を満たす実数 k が存在するとき k を A

の固有値、$\overrightarrow{p}$ を k に対する A の固有ベクトルという。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が異なる2つの固有値 α,β をもつとき、

α,β に対する固有ベクトルを、それぞれ $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ とすると、

$$P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{ に対して } P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

よって、$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$

したがって、$A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}p^{-1}$

(8) 連立方程式の解

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $ad-bc\neq 0$ とするとき

$AX=P$ は, ただ 1 つの解　$X=A^{-1}P$　をもつ.

(9) 変換

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換においては,

1　原点 O は O 自身に移される.

2　点 $(1,0)$ は点 (a,c) に, 点 $(0,1)$ は点 (b,d) に移される.

1 次変換 f による 2 点 $(1,0),(0,1)$ の像が, それぞれ $(a,c),(b,d)$ であるとき,

f を表す行列は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ である.

(10) 合成変換

1 次変換 f,g を表す行列を, それぞれ A,B とすると, 合成変換 $g\circ f$ は, 行列 BA で表される 1 次変換である.

(11) 逆変換

1 次変換 f を表す行列 A が逆行列 A^{-1} をもつとき,f の逆行列 f^{-1} が存在する.f^{-1} は, 行列 A^{-1} で表される 1 次変換である.

(12) 角 θ の回転移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(証明)

座標平面上で, 原点 O を中心として, 点 $P(x, y)$ を一定の角 θ だけ回転した点 $P'(x', y')$ に移す回転移動 f について考える.

$OP = r$ とし, 半直線 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha \cdots (*)$

また,$OP' = r$ であり, 半直線 OP' が x 軸の正の向きとなす角は $\alpha + \theta$ であるから

$x' = r\cos(\alpha+\theta),\ y' = r\sin(\alpha+\theta)$

三角関数の加法定理により

$x' = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta,$

$y' = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta$

この式に $(*)$ を代入すると $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$

したがって, 原点 O を中心とし, 回転角が θ の回転移動は,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換である.

$\boxed{\text{参考}}$ 三角関数の加法定理

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

よって、

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

β を $-\beta$ で置き換えると

[illegible]

[illegible]

$\boxed{\text{参考}}$ クラメール (Cramer) の公式

連立 2 元 1 次方程式 $\begin{cases} \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{cases}$ について

$(1) \times d - (2) \times b$ から [illegible]

[illegible] から $(ad - bc)y = aq - cp \cdots (4)$

この x, y の係数 $ad - bc$ を行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式 ($determinant$) といい、

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ で表す。この記号を用いると、(3),(4) は [illegible]

[illegible] と表される。

よって、$x = \dfrac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\text{[illegible]}}$ [illegible] $= \dfrac{\text{[illegible]}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$\boxed{\text{EX.}}$ $x > 0, y > 0$ とし、行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} \log_2 x & \log_2 y \\ \log_2 x^2 & \log_2 \dfrac{8\sqrt{x}}{y} \end{pmatrix}$$

とする。

(1)$x = 4, y = \dfrac{1}{2}$ のとき、AB を求めよ。

(2)$AB = 10B$ が成り立つとき、x, y の値を求めよ。(06 法政大)

$\boxed{\text{EX.}}$ A,B は 2 行 2 列の行列で、
$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ を満たす。
A,B を求めよ。(06 工学院大・工)

$\boxed{\text{EX.}}$ 行列 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ と、実数 x,y,z,w を成分とする行列 $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ を考える。

(1)X について関係式 $XA=AX$ が成立するための、x,y,z,w の条件を求めよ。

(2)X が $X^2=A$ を満たすとき、$XA=AX$ が成立することを示せ。

(3)$X^2=A$ を満たす行列 X をすべて求めよ。(06 神戸大・理系)

$\boxed{\text{EX.}}$ O を 2 次の零行列とし、A,B を $A^2=A,B^2=B,AB=BA=O$ を満たす 2 次の正方行列とする。また、n は自然数とする。

(1)p,q を実数とする。$(pA+qB)^n=p^nA+q^nB$ が成り立つことを示せ。

(2)$A=\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}$ のとき、B を求めよ。ただし、$B\neq O$ とする。

(3)$C=\begin{pmatrix}5&-2\\4&-1\end{pmatrix}$ とする。このとき、C^n を求めよ。(06 愛媛大・理)

$\boxed{\text{EX.}}$ 3 次正方行列 A, B, O を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とする。

(1)2 以上の自然数 k に対して、$(A+B)^k$ を求めよ。

(2) すべての自然数 m, n に対して、$A^m B^n$ および $B^n A^m$ を求めよ。

(3) 等式 $(A+B)X = X(A+B) = O$ を満たす 3 次正方行列

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$ を求めよ。(06 東北大・理系)

$\boxed{\text{EX.}}$ a を実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} a-20 & 25 \\ -16 & a+20 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$ について

(1)P の逆行列 P^{-1} および Q の逆行列 Q^{-1} をそれぞれ求めよ。

(2)$C = p^{-1}AP,\ D = Q^{-1}BQ$ とおくとき、行列 C, D をそれぞれ求めよ。

(3)C, D を (2) で求めた行列とする。等式 $CX = XD$ を満たす行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ で、零行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と異なるものが存在するとき、a の値を求めよ。ただし、x, y, z, w は実数である。(06 新潟大・理)

$\boxed{\text{EX.}}$ 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^5 = O$ を満たすとする。

ただし、$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(1)A の逆行列が存在しないことを示せ。

(2)$A^2 = (a+d)A$ となることを示せ。

(3)$A^2 = O$ であることを示せ。

(4)$A+E$ が逆行列をもつことを示せ。(06 甲南大・理工)

$\boxed{\text{EX.}}$ 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ に関して、以下の問いに答えよ。ただし、x は 1 でない実数、n は自然数とする。

(1)P の逆行列 P^{-1} を、x を用いて表せ。

(2)$B = P^{-1}AP$ を、x を用いて表せ。

(3)B の $(1, 2)$ 成分が 0 となる x の値を求めよ。また、そのときの B^n を求めよ。

(4)A^n を求めよ。(06 豊橋技科大)

$\boxed{\text{EX.}}$ α, β を $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおく。

(1)α, β が方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 つの解であるとき、係数 a, b の値を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ を満たす 2 次の正方行列 A を求めよ。

(3) 列ベクトル $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と (2) で求めた 2 次の正方行列 A に対して、

$A^n \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+2} - \beta^{n+2} \\ \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{pmatrix}$ であることを示せ。(06 高知大・理)

$\boxed{\text{EX.}}$ 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(b > 0)$ が逆行列 A^{-1} をもち、$A^{-1} = E - A$ を満たす。ただし、E は 2 次の単位行列とする。

(1)$a + d, ad - bc$ の値を求めよ。

(2) 実数 p, q が与えられたとき、x, y に関する連立方程式

$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を解け。

(3) すべての実数 p, q に対して、(2) の解 x, y が常に $x^2+y^2 = p^2+q^2$ を満たすとき、行列 A を求めよ。(06 鹿児島大)

$\boxed{\text{EX.}}$ 2 次の正方行列 X を定めると、それに対応して実数 $f(X)$ がただ 1 つ定まり、次の条件 $(a),(b),(c)$ を満たすとする。

(a) 任意の実数 k と、任意の 2 次の正方行列 A,B に対して

$f(kA)=kf(A),\ f(A+B)=f(A)+f(B)$

(b) 任意の 2 次の正方行列 A,B に対して $f(AB)=f(BA)$

(c) 単位行列 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ に対して、$f(E)=1$ である。

$P=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},R=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},S=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ とするとき

(1) 零行列 $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ に対して、$f(O)=0$ を示せ。

(2)PQ,QP を求めよ。

(3)$f(P),f(Q),f(R),f(S)$ を求めよ。

(4)$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して、$f(A)$ を求めよ。

ただし、a,b,c,d は実数とする。(06 富山大・医)

$\boxed{\text{EX.}}$ 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は、漸化式

$a_{n+2} + \alpha a_{n-1} + \beta a_n = 0 \ (n \geqq 1)$,

$b_{n+2} + \alpha b_{n-1} + \beta b_n = 0 \ (n \geqq 1)$

を満たす数列とする。ただし、定数 α, β は実数とする。

自然数 $n \geqq 1$ に対して、2×2 行列 A_n, B_n を

$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+3} & b_{n+3} \end{pmatrix}$

とする。また、任意の 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$\Delta(A)$ を

$\Delta(A) = ad - bc$

と定義する。

(1) 数列 $\{\Delta(A_n)\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 数列 $\{\Delta(A_n)\}$ の一般項を $a_1, a_2, b_1, b_2, \beta, n$ を用いて表せ。

(3) 行列 $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ が逆行列をもつとき、すべての自然数 n について、行列 B_n が逆行列をもつための必要十分条件を α, β を用いて表せ。(06 大阪教育大)

$\boxed{\text{EX.}}$ $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},I=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix},O=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ とおく。
$M=\{xE+yI|x,y$ は実数 $\}$ とするとき

(1)$A=xE+yI,\ B=sE+tI$ とおいて、$A,B\in M$ ならば、$A+B\in M,A-B\in M$ を示せ。

(2)$A,B\in M$ ならば $AB=BA\in M$ を示せ。

(3)$A\in M,A\neq O$ ならば A の逆行列 A^{-1} が存在し、$A^{-1}\in M$ となることを示せ。

(4)$Z\in M,Z^4=E$ を満たす Z をすべて求めよ。

(5)$Z\notin M,Z^4=E$ を満たす 2×2 行列 Z はあるか。あれば例を 1 つあげよ。なければそのことを証明せよ。(06 大阪医大)

$\boxed{\text{EX.}}$ a を実数として、行列 A を $A=\begin{pmatrix}a & 1-a\\1-a & a\end{pmatrix}$ と定める。

$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ とし、数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ を次の式で定める。

$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix},\ n=1,2,\cdots$

このとき、数列 $\{x_n\}$ が収束するための a の必要十分条件を求めよ。

(06 京都大・理系（後期）)

$\boxed{\text{EX.}}$ 行列 A, E, F を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1)A^2 を求めよ。

(2)$A^n = a_nE + b_nF$ とおくとき、a_n, b_n を a, b, a_{n-1}, b_{n-1} $(n \geqq 2)$ で表せ。ただし、$A^1 = A$ とする。

(3)A^n を求めよ。

(4)$a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{3}$ とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(E + A + A^2 + \cdots + A^n)$ を求めよ。ただし、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] \end{pmatrix}$ である。

(06 芝浦工大・工)

$\boxed{\text{EX.}}$ 定数 a, b, c に対し、行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$ が等式 $AX = XD$ を満たしている。

(1)a, b, c の値を求めよ。

(2) 正の整数 n 対し、A^n を求めよ。

(3)(2) の A^n に対し、$A^n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \\ u_n & w_n \end{pmatrix}, x_n = s_n - u_n,\ y_n = t_n - w_n$ とおく。xy 平面上の点 P_n, Q_n を $P_n(x_n, x_n), Q(x_{n+1}, y_{n+1})$ と定める。3 つの直線 OP_n, OQ_n, P_nQ_n で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の面積を V_n とする。

このとき、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ の和を求めよ。(06 金沢大・理)

$\boxed{\text{EX.}}$ a, b は実数で、$b > 0$ とする。
2×1 行列 $A = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が
$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$
を満たす。

(1)$y_2 > 0$ を満たすような a の範囲を b を用いて表せ。

(2)$y_2 > 0$ かつ $y_3 = 0$ となるとき、a を b を用いて表せ。

(3)$y_2 > 0$ かつ $y_3 = 0$ となるとき、$\begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ を満たす a と b の値を求めよ。

(4)O を原点とする座標平面において、座標が (x_n, y_n) である点を P_n とする。(3) で求めた a, b に対して、$\triangle OP_nP_{n+1}$ の面積を S_n とするとき、数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ。(06 九州工大・情報工)

$\boxed{\text{EX.}}$ 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ に対して $B = P^{-1}AP$ とする。

(1)$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となるように $\theta(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ の値を定め、α, β の値を求めよ。

(2)(1) で求めた θ を用いて、方程式 $31x^2 + 21y^2 + 10\sqrt{3}xy - 1 = 0$ の表す曲線を、原点の周りに角 $-\theta$ だけ回転移動して得られる曲線の方程式を求めよ。(06 旭川医大（後期）)

$\boxed{\text{EX.}}$ (1) 行列 $A=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$ に対して、$A^n(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ。

(2)$f_n(x)=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}A^n\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき、

$I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}|f_n(x)|dx$ を求めよ。

(3)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}I_n$ を求めよ。(06 富山大・薬)

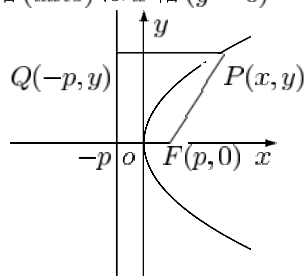
2. いろいろな曲線

(1) 放物線 (*parabola*)・・・定点 F と F を通らない直線 l とから等距離にある点の軌跡

放物線 $y^2=4px$ について、次のようになる。

焦点 (*focus*) は $(p,0)$, 準線 (*directrix*) は $x=-p$

頂点は原点 $(0,0)$, 軸 (*axis*) は x 軸 $(y=0)$

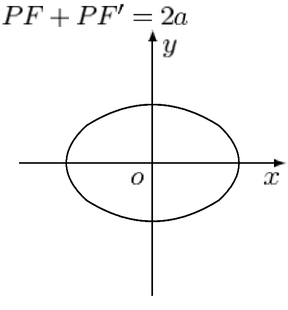


(2) 楕円 (*ellipse*)・・・2 定点 F,F' からの距離の和が一定である点の軌跡

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ については、次のようになる。

焦点 $F(\sqrt{a^2-b^2},0),F'(-\sqrt{a^2-b^2},0)$

楕円状の点 P について、$PF+PF'=2a$

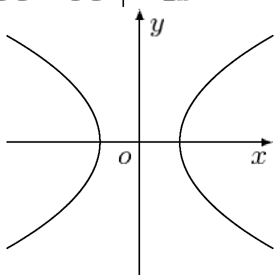


(3) 双曲線 ($hyperbola$)・・・2 定点 F, F' からの距離の差が一定である点の軌跡

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ については、次のようになる。

焦点 $F(\sqrt{a^2+b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$

楕円状の点 P について、$|PF - PF'| = 2a$



(4) 図形の平行移動 ($parallel\ displacement$)

方程式 $f(x, y) = 0$ で表される図形 F を、x 軸方向に m, y 軸方向に n だけ平行移動した図形 G の方程式は次のようになる。

$f(x-m, y-n) = 0$

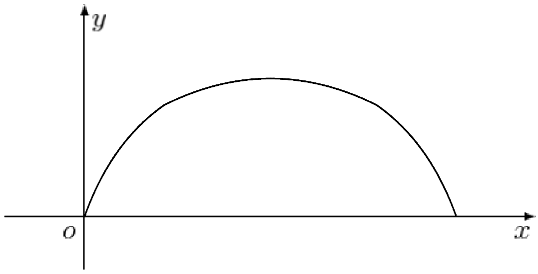
(5) 曲線の平行移動

曲線 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ を x 軸方向へ m, y 軸方向へ n だけ平行移動した曲線は、

$\begin{cases} x = f(t) + m \\ y = g(t) + n \end{cases}$ である。

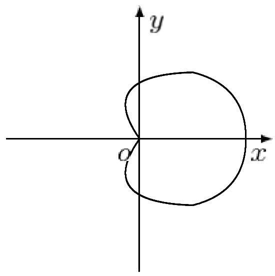
(6) サイクロイド

[illegible]



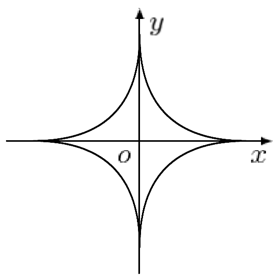
(7) カージオイド ($cardioid$) (心臓形)

$r = a(1 + \cos\theta)$



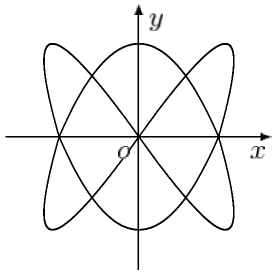
(8) アステロイド ($astroid$) (星芒形)

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases} \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi (a > 0)$$



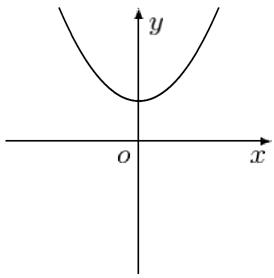
(9) リサージュ曲線 ($Lissajous' curves$)

$$\begin{cases} x = \sin mt \\ y = \sin nt \end{cases}$$



(10) カテナリー ($catenary$) (懸垂曲線)

$y = \dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$



(11) 極座標

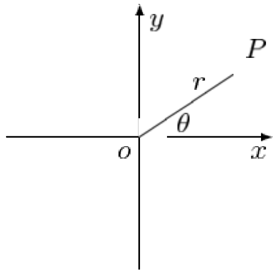
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

このとき、(r, θ) を極座標という。

平面上の曲線が、極座標 (r, θ) を用いて

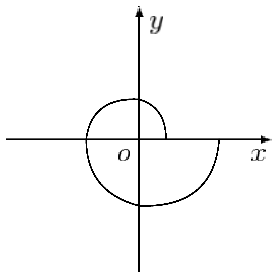
$r = f(\theta)$

と表されるとき、$r = f(\theta)$ を極方程式という。



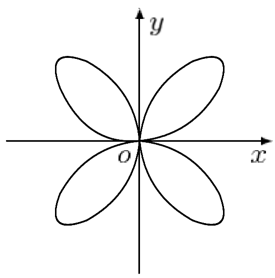
（12）螺線（アルキメデスの渦巻き線 ($Archimedes\ spiral$)）

$r = \theta + \pi$



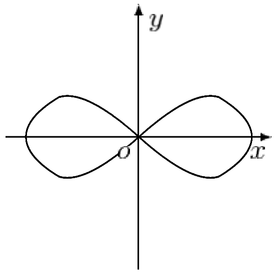
（13）正葉曲線 ($Rose\ curves$)

$r = \sin n\theta$



（14）レムニスケート ($Lemniscate$) (連珠形)・・・2 点からの距離の積が一定である点の軌跡

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$



$\boxed{\text{EX.}}$ (1) 点 $A(2,0)$ を中心とする半径 1 の円と直線 $x=-1$ の両方に接し、点 A を内部に含まない円の中心の軌跡は放物線を描く。この放物線の方程式、焦点の座標、準線の方程式を求めよ。

(2)$a>0$ に対して、$Q(-a,0)$ とする。(1) の放物線上の点 P が、$AP=AQ$ を満たすとき、直線 PQ の方程式を求めよ。

(06 愛知教育大)

$\boxed{\text{EX.}}$ p,q を実数とし、xy 平面上の楕円 $(x-p)^2+4(y-q)=4\cdots$① を考える。楕円①の焦点は ($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$), ($\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$) である。楕円①が直線 $y=x$ と $y=-x$ のどちらにも接するような p,q のうち $p>0$ となるのは $p=\boxed{\text{オ}}$, $q=\boxed{\text{カ}}$ のときである。(06 慶応大・医)

$\boxed{\text{EX.}}$ 座標平面上の円 $C: x^2+y^2=4$ および楕円 $E: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える。正の定数 m に対し、楕円 E の傾きが m である 2 つの接線を l_1, l_2（直線 l_1 は直線 l_2 の上側部分にあるものとする）とし、直線 $y=mx$ と円 C の第 1 象限における交点を P，点 P から x 軸に下ろした垂線が第 1 象限において楕円 E と交わる点を Q とする。

(1) 直線 l_1, l_2 の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) 点 P と点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(3)a を定数とする。直線 l_1, l_2 の両方に接する円で、中心の x 座標が a であるものを求めよ。

(4) 直線 l_1, l_2 の両方に接する円で、点 Q を通り、中心が楕円 E の外部にあるものを求めよ。(06 東京理科大・工)

$\boxed{\text{EX.}}$ 実数 k に対して直線 $L: y=kx+1$ を考える。L は k によらない定点 $P_0(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ を通る。P_0 と双曲線 $H: \dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 上の点 (x,y) との距離が最小になるのは $(x,y)=(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$ または $(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}})$ となるときであり、そのときの距離は $\boxed{\text{キ}}$ である。直線 L が双曲線 H に接するための k に対する条件は $\boxed{\text{ク}}$ であり、直線 L が双曲線 H に接しないが、共有点を 1 個のみもつための条件は $\boxed{\text{ケ}}$ である。また、直線 L と双曲線 H とが相異なる 2 つの共有点をもつための条件は $\boxed{\text{コ}}$ である。$\boxed{\text{コ}}$ が成り立っているとき、これら 2 つの共有点を結ぶ線分の中点の座標は $\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}}$ である。この中点は、k が $\boxed{\text{コ}}$ によって定義される範囲を動くとき、方程式 $\boxed{\text{ス}}$ によって定義される曲線の上を動く。この中点が P_0 と一致するのは $k=\boxed{\text{セ}}$ のときである。(06 立命館大・理工、情報理工)

$\boxed{\text{EX.}}$ $a>0$ とする。

(1) 連立方程式 $\begin{cases} -x^2+y^2=1 \\ y=a(x-1) \end{cases}$ を満たす x,y の組 (x,y) の個数を調べよ。

(2) 条件 $\dfrac{1}{e^2} \leqq x \leqq e^2, \dfrac{1}{e^2} \leqq y \leqq e^2$ のもとで連立方程式 $\begin{cases} (\log\dfrac{y}{x})(\log xy)=1 \\ \log y = a\log\dfrac{x}{e} \end{cases}$ を満たす x,y の組 (x,y) の個数を調べよ。

ただし、e は自然対数の底であり、log は自然対数である。

(06 島根大・総合理工（後期）)

$\boxed{\text{EX.}}$ 直線 $y=x$ を l で、直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l,l' のどちらの上にもない点 $A(a,b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l,l' とそれぞれ点 P,P' で交わるとする。点 Q を

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}$

を満たすようにとる。ただし、O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき、点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。(06 大阪大・理系)

$\boxed{\text{EX.}}$ 平面上で長軸の長さが $2a$，短軸の長さが $2b$ である楕円を C とする。L_1,L_2 を C の中心で直交する 2 直線とする。L_1 と C の 2 つの交点の間の距離を l_1 とし、L_2 と C の 2 つの交点の間の距離を l_2 とするとき、$\dfrac{1}{{l_1}^2}+\dfrac{1}{{l_2}^2}$ は L_1,L_2 の選び方によらずに一定であることを証明せよ。(06 群馬大・教育)

EX. 座標空間において、$O(0,0,0), A(1,0,1), B(x,y,1)$ とする。$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ であるとき

(1)x,y が満たす方程式を求め、点 B が平面 $z=1$ 上のある楕円 C 上にあることを示せ。

(2)(1) の楕円 C の焦点のうち、その x 座標の値が大きい方を F とする。2 点 O,A を通る直線上に中心をもち、点 F で平面 $z=1$ に接する球 S の中心の座標と半径を求めよ。

(3)$D(2+\sqrt{3},0,1)$ とするとき、2 点 O,D を通る直線と (2) の球 S は、ただ 1 つの共有点をもつことを示せ。(06 大阪教育大)

EX. 実数 t をパラメータとして、$x=\tan\dfrac{t}{2},\ y=\dfrac{\cos t}{1+\sin t}$ とする。

(1)x と y の関係式を求めよ。

(2) 点 (x,y) の軌跡を x 軸方向に $+1$, y 軸方向に $+1$ 平行移動したグラフをかけ。(06 職能開発大)

EX. x,y が $2x^2+3y^2=1$ を満たす実数のとき、x^2-y^2+xy の最大値を求めよ。(06 早稲田大・国際教養)

EX. xy 平面において、媒介変数 t を用いて、

$x=2(t+\dfrac{1}{t}+1),\ y=t-\dfrac{1}{t}$

と表される曲線を C とする。

(1) 曲線 C の方程式を求め、その概形をかけ。

(2) 点 $(a,0)$ を通り曲線 C に接する直線があるような a の範囲と、そのときの接線の方程式をすべて求めよ。(06 筑波大)

EX. 極方程式 $r=\left|\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})\right|$ の表す図形を、xy 平面に図示せよ。(06 弘前大・理工)

3. 確率分布

(1) 確率の乗法定理

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P_{A \cap B}(C)$

$\qquad\qquad = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$

※　ただし、$P_A(B)$ は事象 A が起こったときに事象 B の起こる条件つき確率という。

(2) 事象の独立

２つの事象 A と B について

A と B が独立である $\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(3) 独立な試行と事象の独立

２つの試行 T_1 と T_2 が独立な試行であるとき、T_1 で起こる事象と T_2 で起こる事象は独立である。

(4) 確率変数の平均

$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$

(5) 確率変数の１次式の平均

a, b を定数とするとき、$E(aX + b) = aE(X) + b$

(6) 確率変数の分散

$V(X) = E((X - m)^2)$

※　m は平均を表す

(7) 分散の計算

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

(8) 標準偏差

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

※　一般的に使われている偏差値の計算法

$ss(\text{偏差値}) = \dfrac{10(X - m)}{\sigma} + 50$（$X$: 確率変数，m : 平均）

(9) 確率変数の１次式の平均と分散

$$E(aX+b)=aE(X)+b, V(aX+b)=a^2V(X)$$

（10）確率変数の和の平均

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

（11）独立な確率変数の積の平均

独立な確率変数 X, Y に対して、$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

（12）独立な確率変数の和の分散

独立な確率変数 X, Y に対して、$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

※　同様に独立な確率変数 X, Y, Z に対しては、

$E(XYZ)=E(X)\cdot E(Y)\cdot E(Z)$

$V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)$

（13）二項分布 (*binomial distribution*) の平均と分散

ある試行において、$X=r$ となる確率が、

$P(X=r)={}_nC_r p^r q^{n-r} (r=0,1,2,\cdots,n)$

と表されるとき、この確率分布を確率 p に対する次数 n の二項分布といい、$B(n,p)$ で表す。このとき、次のことがいえる。

$E(X)=np$

$V(X)=npq$　　　ただし、$q=1-p$

4. 統計処理

（1）正規分布 (*normal distribution*)

○ $f(x)\geqq 0$ を満たす

○ X が $a\leqq X\leqq b$ の範囲の値をとる確率 $P(a\leqq X\leqq b)$ は、右図の斜線部の面積 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ に等しい。

○曲線 $y=f(x)$ と x 軸の間の面積は 1 である。

以上のようなとき、X を連続型確率変数 [illegible]

といい、関数 $f(x)$ を X の確率密度関数 (*density function*)、

$y=f(x)$ のグラフをその分布曲線という。確率密度関数によって確率分布が定められるとき、その分布を連続分布という。

とくに $X=a$ となる確率は $P(a \leqq X \leqq b)$ と書けるから

$P(X=a)=P(a \leqq X \leqq a)=\int_a^a f(x)dx=0$

である。

○ $E(X)=\int_a^b xf(x)dx$

○ $V(X)=\int_a^b (x-m)^2 f(x)dx$

○ $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

(2) 正規分布の平均と標準偏差

確率変数 X が正規分布 $N(m,\sigma^2)$ に従うとき

平均 $E(X)=m$　標準偏差 $\sigma(X)=\sigma$

○確率変数 X が正規分布 $N(m,\sigma^2)$ に従うとき

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$

とすれば、Z は平均 0, 標準偏差 1 の正規分布 $N(0,1)$ に従うことが知られている。この Z のことを X を標準化した確率変数という。

正規分布 $N(0,1)$ を標準正規分布という。この場合の確率密度関数を $\phi(x)$ と表せば、

$\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

となる。

(3) 二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数を X とすると、n が十分大きいとき、

$Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$

に従うとみなしてよい。ただし、$q=1-p$ とする。

(4) 標本平均 $(sample\ mean)$ の平均と分散

母平均 m, 母分散 σ^2 の母集団から大きさ n の無作為標本を復元抽出するとき、その標本平均 $\overline{X}$ の平均と分散はそれぞれ

$E(\overline{X}) = m, \quad V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

(5) 標本平均の分布

母平均 m, 母分散 σ^2 の母集団から大きさ n の標本平均 $\overline{X}$ の分布は、n が大きければ正規分布 $N(m, \dfrac{\sigma^2}{n})$ としてよい。

(6) 信頼度 $(confidence\,coefficient)$ 95% の信頼区間 $(confidence\,interval)$

母分散 σ^2 がわかっている母集団から大きさ n の標本を抽出して、この標本平均 $\overline{X}$ より母平均 m を推定すれば、m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$\overline{X} - 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

解　　答

解答

第二部　国公立主要大学過去問題

2008

大学入試センター試験数学講評

数学Ｉ Ａ

第１問

〔１〕（2 次不等式）

台形の面積を変数 x を用いて表し、次に $\triangle PQR$ の面積が「24 より小さい」という条件から 2 次不等式を解かせている。2 次不等式の応用などの分野で教科書の例題に出てくるような問題だ。

〔２〕（命題と論証）

$\overline{p}$ と $\overline{r}$ で十分条件、必要条件を考える問題や「p かつ q」、「p または q」などが 1 つの条件となっている場合はよく練習を積んでおかないと難しいであろう。

第２問（２次関数）

式中に a, b の 2 変数が存在するが、点 $(-2, 6)$ を通るので、与式に代入すると $b = -a+2$ となり、頂点の座標に表れる文字は a のみとなる。頂点の y 座標が -2 となることから、$a = 2, \dfrac{2}{9}$ となる。与えられたグラフと x 軸の交点の座標を求めさせているが、解答の順序を問わないのは、珍しい。初めてではないか。

2 次試験が十分な時間とともに自由に記述できる反面、センター試験は出題者の意図に合わせて解答しなければならない部分が多く、融通性がなく、一旦袋小路に入ると、失敗する可能性があることが従来より指摘されてきた。その意味では解答の順序を問わないことは勘違いによる誤答を減少させるという意味で大変歓迎すべきことである。あとは $0 \leqq x \leqq 9$ においての最大値、最小値を求めさせる問題であるが、教科書の例題などでよくある問題である。

第３問（三角比、平面図形）

余弦定理で $\triangle ABC$ の 1 辺 CA の長さを求めさせ、正弦定理で $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めさせる。また円周角と余弦定理を利用して $\triangle ADC$ の辺 AD の長さを求めさせ

ている。問題集などでよく扱われている問題である。

後半は相似条件、方べきの定理から EA を求めさせる。

$EA=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}EC,\ EA^2=ED\cdot EC,\ ED=EC+CD$ から $EC=\dfrac{5\sqrt{10}}{4},\ EA=\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$ となる。また $\triangle ACE$ で余弦定理により計算した場合は、計算上 $EA=\dfrac{15\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{15\sqrt{2}}{4}$ と 2 通りでてくるが、$AD=3\sqrt{5},\ CD=\sqrt{10},\ AC=5$ より $\angle ACD$ は鈍角なので、$\angle ACE$ は鋭角となり、$\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$ は $\angle ACE$ が鈍角となるので、$EA=\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$ が正解となる。

EA が求まれば $\triangle ACE$ の面積は求まる。

第４問 （場合の数、確率）

問題集などでよく見かける典型的な問題である。(2)(3) は場合分けが必要だが、特に難しい問題ではないだろう。

数学Ⅱ B

第１問

〔１〕（指数関数・対数関数）

対数の真数、底についての説明があったのは大変親切であると思うとともにこのような説明を加えないと理解できない生徒も多くなっているのではないかと懸念する。後半は相加平均・相乗平均の基本的な問題となっている。

〔２〕（三角関数）

図を丁寧に描けば、特に難しい問題ではない。(2) で $\theta=\dfrac{3}{6a+2}\pi$ となり、文字が入った複雑な解答に受験生は戸惑ったかも知れない。また、扇形の面積は小学校で学習済みであるが、数学Ⅱで弧度法を紹介するときに扱う。(3) は加法定理と合成を丁寧に計算すればよいが、正答者は少ないだろう。(4) は周期が 2 倍となるときには、角が $\dfrac{1}{2}$ 倍となることがわかっていれば、易しい問題である。

第２問 （微分積分）

(1)(2) は教科書に沿った基本的な問題である。C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を使った方が速い。例年の傾向を見ていると、む

しろこの公式は既知であり、利用するものとの出題と見られる。(3) は C_2 の 2 つの交点 $a, 2a$ で (i)$2a$ が 2 以下の場合つまり $0 < a \leqq 1$、(ii)$2a$ が 2 より大きく、a が 2 以下の場合つまり $1 < a \leqq 2$、(iii)a が 2 より大きい場合つまり $2 < a$ の 3 つの場合に分けられる。(i) は $a = 1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{6}$、(ii) は $a = \dfrac{6}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{25}$、(iii) は $\dfrac{1}{3}$ で一定となる。したがって、$S(a)$ は $a = \dfrac{6}{5}$ は最小値 $\dfrac{3}{25}$ となる。

第３問 （数列）

(1) は等差数列の一般項、和を求めさせる教科書の例題によくある問題である。

(2) ①の右辺は既出のもので、これと左辺から出てくる式とで恒等式を作り、p, q, r を求めさせる。①の右辺が既出のものと気づかず、慌てた受験生も多いのではないか。$\{c_n\}$ の一般項を求めさせるのに丁寧に導入がされている。$\{c_n\}$ の初項から第 n までの和は等比数列の和の公式、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} k^2$ の公式を知っていなければ解けない。後半は問題集などでよく扱われている問題である。

第４問 （空間ベクトル）

(1)$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$ より $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \dfrac{1}{2}$ と求まる。同様にして $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \dfrac{3}{2}$, $\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = 1$ と求まる。$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \dfrac{1}{2}$

(2)$CP \perp OA$ として「$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{a} = 0$」を計算させる問題が多いが、本問は初めから「$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{a} = 0$」と与えている。これも少しでも受験生が取り組み易いように配慮されたものであろうか。この式から $AP : PB = 1 : \dfrac{1}{2}$ とわかるが、$AP : PB = 2 : 1$ とせず、$AP : PB = 1 : \dfrac{1}{2}$ とした意図が読み取れない。わざわざ問題のための問題としている感がある。さらに $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ より $CP \perp OB$ がわかり、$|\overrightarrow{CP}|$、$\triangle OAB$ の面積を求めることによって、四面体 $OABC$ の面積を求めさせている。問題集などでしっかり学習していれば、よく見かける問題である。

第５問 （統計）

(1) 平均値の計算と中央値の計算である。中央値はデータを順に並べ、中央に来る値であるが、データの数が偶数のときは、中央に来る 2 つのデータの平均値となる。

(2) 導入にしたがって、平均値、分散を計算する。

(3) 分散は $\overline{x}$ を平均値とすると $V=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ と表される。よって、

$$V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+n\overline{x}^2)$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=n\overline{x}$ となるので、

$$V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-2n\overline{x}^2+n\overline{x}^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-n\overline{x}^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-\overline{x}^2$$ となる。

したがって、平均値が下がると分散は増加する。

(4) 中央値を求めさせている。

(5) 寒暖の差を計算すると、該当するのは①しかない。

(6) 相関図から該当するのは③である。

基礎的な知識があれば、比較的平易な問題である。(3) については上記のような式変形を練習していなければ、計算が大変になり、解答できなかったのではないだろうか。

第 6 問 （コンピュータ）

平成 18 年度は「n の約数のうち素数を重複なく出力する」というプログラムが出題され、平成 19 年度は「2 次方程式 $x^2-2x-4=0$ の小さい方の解の近似値を求める」というプログラムが出題され、本年は「ユークリッドの互除法によって自然数 x, y の最大公約数を求める」というプログラムが出題された。

本問は「ユークリッドの互除法」を既知のものとしているが、プログラムやアルゴリズムについての知識を問うものであるから「ユークリッドの互除法」の説明をした上で設問に入るべきではないだろうか。

(1)x と y の値を置き換える。

(2) 余りがなくなったところで、最大公約数を表示する。

(3) $\boxed{\text{ウ}}$ は 170 行へ移り、そこから実行する。$\boxed{\text{エ}}$ は 270 行へ移り、終了する。

(4) プログラムを順に読んでいく。170 行は 6 回実行されるが、「実行」というと、180,190,200 行までの条件文を含めて考えるものとした受験生はいなかっただろうか。

(5) 自然数 X, Y に対して $X\div Y$ を計算するとき、商を Q、余りを R とすると

$X=YQ+R,\ 0<R\leqq Y$ となるので

$\dfrac{X}{Y}=Q+\dfrac{R}{Y},\ 0<\dfrac{R}{Y}\leqq 1$ となる。

したがって、

$LET\ Q=INT(X/Y)$

$LET\ R=X-INT(X/Y)*Y$

を実行することにより、商と余りが変数 $Q,\ R$ にそれぞれ代入される。

このような基礎知識があらかじめ必要となる。

(6)(7) 自然数 X,Y に対して、最大公約数を G、最小公倍数を L とすると $XY=LG$ となる。

(8)$X*Y$ を設定する。

(9)$X*Y$ を最大公約数で割ると最小公倍数となる。

プログラム自体は典型的なものであるから、例題をしっかりマスターすることが必要である。

$\boxed{2007}$

$\boxed{\text{道内}}$ 1． 北海道大学

○理系

$\boxed{1}$ 方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1) 点 $A(-\sqrt{2},0)$ と点 $O(0,0)$ を通り、円 C に接する円の中心の座標を求めよ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき、$\cos\angle APO$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ 4 枚のカードがあって、1 から 4 までの整数がひとつずつ書かれている。このカードをよく混ぜて、1 枚引いては数字を記録し、カードを元に戻す。この試行を n 回繰り返し、記録した順に数字を並べて得られる数列を、$a_1,a_2,\cdots,a_n$ とする。

(1) 条件 $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n=j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし、$j=1,2,3,4$ とする。

(i)$A_n(1),A_n(2)$ を求めよ。

(ii)$n\geqq 2$ のとき、$A_n(j)\ (j=3,4)$ を $A_{n-1}(1),A_{n-1}(2),\cdots,A_{n-1}(j)$ で表し、$A_n(3),A_n(4)$ を求めよ。

(2)$n \geqq 2$ のとき、$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$ xy 平面上の曲線 $y = xe^x$ と x 軸および 2 直線 $x = n,\ x = n+1$ で囲まれる図形を D_n とする。ただし、n を自然数とする。

(1) 図形 D_n の面積を S_n として、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n}$ を求めよ。

(2) 図形 D_n を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n として、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2}$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 図のような、半径 a の円を底面とする高さ b の円柱の上に、同じ大きさの円を底面とする高さ c の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。

(1)V をこの建物の体積、S をこの建物の外側の表面積（底面は除く）とする。V と S を a,b,c で表せ。

(2)V を一定に保ちながら a,b,c を動かして、S を最小にしたい。

(i)$b = xa, c = ya$ とおき、V と a を一定としたとき、S の最小値 T を V と a で表せ。

(ii)T が最小となるときの比 $a:b:c$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ と双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば、C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。

（解答例）

$\boxed{1}$ $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ より $x^2 + (y-2)^2 = 2$ となるので、円 C は中心 $(0,2)$，半径 $\sqrt{2}$ となる。

(1) 点 $A(-\sqrt{2},0)$ と点 $O(0,0)$ を通りる円の中心の座標を $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},a)$ とすると半径は $\sqrt{a^2+\dfrac{1}{2}}$ となり、円の方程式は $(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y-a)^2 = (-\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + a^2 = a^2 + \dfrac{1}{2}$ となる。円 C に内接する円を C_1，その半径を r_1，円 C に外接する円を C_2，その半径を r_2 とする。

(i) 内接する場合は（中心間の距離）$= r_1 - \sqrt{2}$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+a^2} - \sqrt{2} = \sqrt{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (a-2)^2}$$

(ii) 外接する場合は（中心間の距離）$= r_2 + \sqrt{2}$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+a^2} + \sqrt{2} = \sqrt{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (a-2)^2}$$

これらより、$a^2 - 2a = 0$

よって、$a = 0, 2$

したがって、求める円の中心の座標は $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0), (-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 2)$

(2)(1) の円で円 C と円 C_2 の接点を点 P とするとき、$\cos\angle APO$ は最小値をとり、$\angle APO = 90^\circ$ なので、$\cos\angle APO = 0$

(1) の円で円 C と円 C_1 の接点を点 P とするとき、$\cos\angle APO$ は最大値をとる。円周角の定理より、線分 OA の垂直二等分線と円 C_1 との交点を点 P' とすると、

$\angle AP'O = \angle APO$ となる。

$$OP' = AP' = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (2 + \frac{3\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{17 + 12\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

余弦定理より

$$\cos\angle APO = \frac{AP'^2 + OP'^2 - OA^2}{2 \cdot AP' \cdot OP'} = \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 - 2}{2(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\boxed{2}$ (1)(i)$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 1$ を満たす数列は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ を満たす 1 通りのみ。よって $A_n(1) = 1$

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 2$ を満たす数列は

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- -

[illegible]

の n 通り。よって $A_n(2) = n$

(ii)$A_n(j)$ を考えるとき、(i) より $A_n(1) = 1,\ A_n(2) = n$ であるが、$A_n(3)$ を考えるときは、$A_{n-1}(1), A_{n-1}(2),\ A_{n-1}(3)$ を考えなければならず、

[illegible] となる。

同様に [illegible] となる。

よって、[illegible] となる。

[illegible] n

これは、$A_n(3)$ が階差数列の和で表されることを示している。

$n \geqq 2$ より [illegible]

これらをすべて辺々たすと、$A_n(3) - A_1(3) = \sum_{k=2}^{n} k$

したがって、$A_n(3) = A_1(3) + \{\frac{1}{2}n(n+1) - 1\} = 1 + \frac{1}{2}n(n+1) - 1 = \frac{1}{2}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{1}{2}(n-1)n$

これは、$A_n(4)$ が階差数列の和で表されることを示している。

$n \geqq 2$ より

$A_n(4) - A_{n-1}(4) = n + \frac{1}{2}$ [illegible]

[illegible] $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2+1)$

これらをすべて辺々たすと、$A_n(4) - A_1(4) = \sum_{k=2}^{n}\{k + \frac{1}{2}(k-1)k\} = \sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k)$

したがって、

$A_n(4) = A_1(4) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(k^2+k) = 1 + \frac{1}{2}\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) - (1^2+1)\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(2)$n \geqq 2$ のとき、$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ を満たすのは

$A_n(1) = 0,\ A_n(2)$ は $A_{n-1}(2) = n-1$ で $a_n = 1,$

$A_n(3)$ は $A_{n-1}(3) = \frac{1}{2}(n-1)n$ で $a_n = 1$ または $2,$

$A_n(4)$ は $A_{n-1}(4) = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$ で $a_n = 1$ または 2 または 3 となる。

したがって、確率は

$\frac{[illegible]}{4^n} = \frac{(n-1)\cdot 1 + \frac{1}{2}(n-1)n \cdot 2 + \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\cdot 3}{4^n}$

$= \frac{(n-1) + (n-1)n + \frac{1}{2}(n-1)n(n+1)}{[illegible]} = \frac{[illegible])}{2\cdot 4^n}$

$= \frac{(n-1)\{2+2n+n(n+1)\}}{2\cdot 4^n} = \frac{(n-1)(n^2+3n+2)}{2\cdot 4^n} = \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2\cdot 4^n}$

$\boxed{3}$ (1)$S_n = \int_n^{n+1} xe^x dx = \int_n^{n+1} x(e^x)' dx = [xe^x]_n^{n+1} - \int$ [illegible]

[illegible]

よって、$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{ne^{n+1} - ne^n + e^n}{ne^n} = \lim_{n\to\infty}(e - 1 + \frac{1}{n}) = e - 1$

$(2)V_n = \pi \int_n^{n+1} (xe^x)^2 dx = \pi \int_n^{n+1} (x^2 e^{2x}) dx$

ここで、$2x = t$ とし、両辺を x で微分すると、$2 = \dfrac{dt}{dx}$ より、$2dx = dt$

また、積分範囲は $n \leqq x \leqq n+1$ より、$2n \leqq t \leqq 2n+2$

よって、$V_n = \pi \int_{2n}^{2n+2} (\dfrac{t}{2})^2 \cdot e^t \cdot \dfrac{dt}{2} = \pi \int_{2n}^{2n+2} \dfrac{t^2}{4} \cdot e^t \cdot \dfrac{dt}{2} = \dfrac{\pi}{8} \int_{2n}^{2n+2} t^2 e^t dt$

$= \dfrac{\pi}{8} \int_{2n}^{2n+2} t^2 (e^t)' dt = \dfrac{\pi}{8} ([t^2 e^t]_{2n}^{2n+2} - \int_{2n}^{2n+2} 2te^t dt)$

$= \dfrac{\pi}{[illegible]}$ [illegible] $-$ [illegible] $- \int_{2n}^{2n+2} e^t dt)\}$

$= \dfrac{\pi}{[illegible]}$ [illegible] $-$ [illegible]

$=$ [illegible]

$= \dfrac{\pi}{[illegible]}$ [illegible]

よって、$\lim_{n \to \infty} \dfrac{V_n}{(S_n)^2} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\dfrac{\pi}{[illegible]} [illegible]}{(ne^{n+1} - ne^n + e^n)^2}$

$= \lim_{n \to \infty} \dfrac{\dfrac{\pi}{[illegible]} [illegible]}{(ne^{n+1} - ne^n + e^n)^2}$

$= \lim_{n \to \infty} \dfrac{\dfrac{\pi}{[illegible]} [illegible]\}}{[illegible]}$

$=$ [illegible]

$=$ [illegible]

$= \lim_{n \to \infty} \dfrac{\pi}{8} \cdot \dfrac{\{(4 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2})e^2 - (4 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2})\}}{e^2 - (2 - \frac{2}{n})e + (1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}$

$= \dfrac{\pi}{8} \cdot \dfrac{4e^2 - 4}{e^2 - 2e + 1} = \dfrac{\pi}{8} \cdot \dfrac{4(e+1)(e-1)}{(e-1)^2} = \dfrac{(e+1)\pi}{2(e-1)}$

$\boxed{4}$ $(1)V = \pi a^2 b + \dfrac{1}{3}\pi a^2 c$

$S = 2\pi ab + \pi(\sqrt{a^2 + c^2})^2 \cdot \dfrac{2\pi a}{2\pi\sqrt{a^2 + c^2}} = 2\pi ab + \pi a\sqrt{a^2 + c^2}$

(2)(i)$b = xa,\ c = ya$ より、$V = \pi a^2 (xa) + \dfrac{1}{3}\pi a^2 (ya) = \dfrac{\pi a^3}{3}(3x + y)$

よって、$x = \dfrac{V}{\pi a^3} - \dfrac{y}{3} \cdots ①$

$S = 2\pi a(xa) + \pi a\sqrt{a^2 + (ya)^2} = 2\pi a^2 (\dfrac{V}{\pi a^3} - \dfrac{y}{3}) + \pi a^2 \sqrt{1 + y^2}$

$= \pi a^2 (\dfrac{2V}{\pi a^3} - \dfrac{2y}{3} + \sqrt{1 + y^2})$

$\dfrac{dS}{dy}=\pi a^2(-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2y}{2\sqrt{1+y^2}})=\pi a^2(-\dfrac{2}{3}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}})$

$\dfrac{dS}{dy}=0$ として、

$\pi a^2(-\dfrac{2}{3}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}})=0$

$\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\dfrac{2}{3}$

両辺を 2 乗して

$\dfrac{y^2}{1+y^2}=\dfrac{4}{9}$

よって、$9y^2=4(1+y^2)$

$5y^2=4$

$y>0$ より $y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$x>0$ と①より $x=\dfrac{V}{\pi a^3}-\dfrac{y}{3}>0$

$\dfrac{V}{\pi a^3}>\dfrac{y}{3}$

したがって、$y<\dfrac{3V}{\pi a^3}$

増減表は次のようになる。

y	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	$\dfrac{3V}{\pi a^3}$
$\dfrac{dS}{dy}$	/	$-$	0	$+$	/
S	/	↘	$\dfrac{2V}{a}+\dfrac{\sqrt{5}\pi a^2}{3}$	↗	/

ゆえに、$y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のとき、$T=\dfrac{2V}{a}+\dfrac{\sqrt{5}\pi a^2}{3}$

(ii)(i) より、$T=\dfrac{2V}{a}+\dfrac{\sqrt{5}\pi a^2}{3}$

$\dfrac{dT}{da}=-\dfrac{2V}{a^2}+\dfrac{2\sqrt{5}\pi a}{3}$

$\dfrac{dT}{da}=0$ として、$-\dfrac{2V}{a^2}+\dfrac{2\sqrt{5}\pi a}{3}=0$

$\dfrac{2\sqrt{5}\pi a}{3}=\dfrac{2V}{a^2}$

$\dfrac{2\sqrt{5}\pi a^3}{3}=2V$

$a^3=\dfrac{3V}{\sqrt{5}\pi}\cdots$②

よって、$a={}^3\sqrt{\dfrac{3V}{\sqrt{5}\pi}}$

増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{5}\pi}}$	$\cdots$
$\frac{dT}{da}$	/	$-$	0	$+$
T	/	$\searrow$	$\frac{2V}{\alpha}+\frac{\sqrt{5}\pi\alpha^2}{3}$	$\nearrow$

ただし、$\alpha = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{5}\pi}}$

②に $V=\frac{\pi a^3}{3}(3x+y)$ を代入して、

$a^3=\frac{3\{\frac{\pi a^3}{3}(3x+y)\}}{\sqrt{5}\pi}$

$1=\frac{3x+y}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{5}=3x+y\cdots$③

(2)(i) より③に $y=\frac{2}{\sqrt{5}}$ を代入して、

$\sqrt{5}=3x+\frac{2}{\sqrt{5}}$

$3x=\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}$

$x=\frac{1}{3}(\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{1}{3}(\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5})=\frac{1}{3}(\frac{3\sqrt{5}}{5})=\frac{\sqrt{5}}{5}$

したがって、$a:b:c=a:xa:ya=1:x:y=1:\frac{\sqrt{5}}{5}:\frac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}:1:2$

$\boxed{5}$ 楕円の焦点と双曲線の焦点が同じなので、$(-c,0),(c,0)$ とすると、

$c^2=\alpha^2-\beta^2=a^2+b^2\cdots$①

楕円と双曲線の交点を点 $P(x_1,y_1)$ とすると、

$\frac{{x_1}^2}{\alpha^2}+\frac{{y_1}^2}{\beta^2}=1\cdots$②

$\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}=1\cdots$③

② $\div a^2$

$\frac{{x_1}^2}{a^2\alpha^2}+\frac{{y_1}^2}{a^2\beta^2}=\frac{1}{a^2}\cdots$④

③ $\div \alpha^2$

$\frac{{x_1}^2}{a^2\alpha^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}\cdots$⑤

④ $-$ ⑤

$\frac{{y_1}^2}{a^2\beta^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2\alpha^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\alpha^2}$

${y_1}^2=\frac{b^2\beta^2(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}$

② $\div b^2$

$$\frac{{x_1}^2}{b^2\alpha^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2\beta^2}=\frac{1}{b^2}\cdots⑥$$

$③\div\beta^2$

$$\frac{{x_1}^2}{a^2\beta^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2\beta^2}=\frac{1}{\beta^2}\cdots⑦$$

$⑥+⑦$

$$\frac{{x_1}^2}{b^2\alpha^2}+\frac{{x_1}^2}{a^2\beta^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\beta^2}$$

$${x_1}^2=\frac{a^2\alpha^2(\beta^2+\beta^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}$$

$C_1:\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ を x で微分すると、

$$\frac{2x}{\alpha^2}+\frac{2yy'}{\beta^2}=0$$

よって、$y'=-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\dfrac{x}{y}$

したがって、点 P における接線の傾きは $-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\dfrac{x_1}{y_1}\cdots⑧$

同様に $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x で微分すると、

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0$$

よって、$y'=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}$

したがって、点 P における接線の傾きは $\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1}{y_1}\cdots⑨$

$⑧\times⑨$に ${x_1}^2=\dfrac{a^2\alpha^2(\beta^2+\beta^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}$ と ${y_1}^2=\dfrac{b^2\beta^2(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}$ を代入する。

$$-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}\times\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{{x_1}^2}{{y_1}^2}=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\dfrac{a^2\alpha^2(\beta^2+\beta^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}}{\dfrac{b^2\beta^2(\alpha^2-a^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}}=-\frac{b^2+\beta^2}{\alpha^2-a^2}\cdots(*)$$

ここで、①より [illegible]

[illegible] $\cdots⑩$

$(*)$ に⑩を代入すると、$(*)=-1$

これは C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線が直交することを示している。

（講評）

$\boxed{1}$ （基本問題）

数学 A（2 つの円の位置関係）、数学 I（余弦定理）、数学 II（円の方程式）についての出題である。図を利用し、丁寧に解いていけば正解できるであろう。

$\boxed{2}$ （やや難問）

数学 A（場合の数と確率）、数学 B（数列）についての出題である。階差数列の和についての問題であることに気付けばうまくいく。(2) の確率は (1) がわかれば解けるのだが。

$\boxed{3}$ （基本問題）

数学 III（極限・微分・積分）についての出題である。部分積分をうまく利用できれば、それほど難しくはない。あとは極限の計算。

$\boxed{4}$ （難問）

数学Ⅲ（微分）についての出題である。文字が多く、計算が複雑なので、かなり難しい。最後に比を出すが、そこまでたどりつくのに一苦労である。

$\boxed{5}$ （基本問題）

数学 II（2 直線の関係）、数学 III（微分）、数学 C（いろいろな曲線）についての出題である。ベクトルで解く方法もある。焦点についての条件と楕円、双曲線の方程式から連立させて、直交条件を導くが、計算はかなり複雑である。

２００７年

（注）採点時には、結果を導く過程を重視するので、必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

$\boxed{1}$ k を実数とし、関数 $f(x)$ を

$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+k(\sqrt{3}\sin x+\cos x)$

とする。

(1)$t=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ とおくとき、$f(x)$ を t の 2 次式で表せ。

(2)$k=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、$0<x<\pi$ の範囲で方程式 $f(x)=0$ の解を求めよ。

(3)$0<x<\pi$ の範囲で、方程式 $f(x)=0$ は任意の実数 k に対して解をもつことを示せ。

(解答例)

(1)$t^2=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2=3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x$

$=2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$

$f(x)=\sqrt{\,}$ [illegible] $-$ [illegible] $-$ [illegible] $\sqrt{3}\sin x+\cos x)$

$=2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1+k(\sqrt{3}\sin x+\cos x)$

[illegible]

[illegible] $-\frac{[illegible]}{\sqrt{3}}t-2=0$ より

$$t=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\sqrt{\frac{1}{3}+8}}{2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{5}{\sqrt{3}}}{2}=-\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3}$$

また $t=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$ より

$2\sin(x+\frac{\pi}{6})=-\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3}$

$\sin(x+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0<x<\pi$ より $\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$

題意より $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

よって、$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$

(3)$f(x)=t^2+kt-2=0$ より

$f(t)=t^2+kt-2$ とする。

$0<x<\pi$ より $-1<t\leqq 2$

ここで、$-1\leqq t\leqq 2,\ k\neq -1$ において、関数 $f(t)$ は連続なので、

[illegible]

[illegible] 0

中間値の定理により

関数 $f(x)=0$ は $0<t<2,\ k\neq -1$ で少なくとも 1 つの実数解をもつ

また $k=-1$ のとき、$f(x)=t^2-t-2=0$ より

$(t-2)(t+1)=0,\ t=-1,2$

$-1<t\leqq 2$ より $t=2$ なので、

このときも実数解が存在する。

したがって、$0<x<\pi$ において、$f(x)=0$ は任意の実数 k に対して解をもつ。

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ を正の値をとる微分可能な関数では $f'(x)>0$ とする。

(1)$h>0$ とする。xy 平面上の 2 点 $P(a,f(a)),Q(a+h,f(a+h))$ を結ぶ線分を x 軸のまわりに 1 回転させる。そうして得られた円錐の一部（下図）の面積 $S(h)$ を求めよ。

※「円錐の一部」は「円錐の側面の一部」と訂正あり

(解答例)

(1) 直線 PQ の傾きは $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ となり、点 $P(a, f(a))$ を通るので、直線 PQ の方程式は $y-f(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a)\cdots(*)$ と表される。

直線 PQ と x 軸の交点の座標を求めると、$(*)$ より

$$0-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a)$$

$$-f(a)\cdot\frac{h}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}\cdot\frac{\text{[illegible]}}{f(a+h)-f(a)}$$

x 軸と直線 PQ との交点を R, 点 P から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を H_P, 点 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を H_Q として、線分 RP と線分 RQ の長さを求めると、

$$RP^2=RH_P^2+RH_P^2$$

$$=\{a-(a-f(a)\cdot\frac{h}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{f(a+h)-f(a)}\}^2+\{f(a)\}^2$$

$$RQ^2=RH_P^2+QH_P^2$$

$$=\{(a+h)-(a-f(a)\cdot\frac{h}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]})}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}Q^2\cdot\frac{2\pi\cdot f(a+h)}{2\pi\cdot RQ}-\pi\cdot RP^2\cdot\frac{2\pi\cdot f(a)}{2\pi\cdot RP}$$

$$=\pi\cdot RQ\cdot f(a+h)-\pi\cdot RP\cdot f(a)$$

$$=\pi\cdot\sqrt{\{\frac{h\cdot f(a+h)}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}}$$

$$\text{[illegible]}\cdot\sqrt{\{\frac{h\cdot f(a)}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}}$$

$$\text{[illegible]}\sqrt{\frac{h^2}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}}$$

$$\text{[illegible]}\sqrt{\frac{h^2}{\{f(a+h)-f(a)\}^2}+1}$$

$$=\pi\cdot\sqrt{\frac{h^2}{\text{[illegible]}}\ \text{[illegible]}}$$

$$\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{h}$$

$= \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{h^2}{\text{[illegible]}}}$ [illegible]

$=$ [illegible] $\cdot \frac{\text{[illegible]}}{h} \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{f(a+h)-f(a)}\right)}$ [illegible]

$=$ [illegible] $\cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)}$ [illegible]

$=$ [illegible] $\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}$

$\boxed{3}$ xyz 空間において連立不等式

$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1$

$x^2+y^2+z^2-2xy-1 \geqq 0$

の表す立体を考える。

(1) この立体を平面 $z=t$ で切ったときの断面を xy 平面に図示し、この断面の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) この立体の体積を求めよ。

(解答例)

(1)$x^2+y^2+t^2-2xy-1 \geqq 0$

$(x-y)^2 \geqq 1-t^2$

$x-y \leqq -\sqrt{1-t^2},\ \sqrt{1-t^2} \leqq x-y$

$$\begin{cases} x-y \leqq -\sqrt{1-t^2} \\ \sqrt{1-t^2} \leqq x-y \end{cases}$$

よって、

$$\begin{cases} y \geqq x+\sqrt{1-t^2} \\ y \leqq x-\sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$S(t) = (1-\sqrt{1-t^2})^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1-2\sqrt{1-t^2}+1-t^2$

$= -t^2-2\sqrt{1-t^2}+2$

(2)$\int_0^1 S(t)dt = \int_0^1 (-t^2-2\sqrt{1-t^2}+2)dt$

$= -\int_0^1 t^2 dt - 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt + \int_0^1 2dt$

ここで、$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$

$t=\sin\theta$ として、t で微分すると、$1=\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

よって、$dt=\cos\theta d\theta$

$t:0\longrightarrow 1$ より $\theta:0\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta+1}{2}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)d\theta$$
$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

したがって、

$$\int_0^1 S(t)dt=-\int_0^1 t^2dt-2\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt+\int_0^1 2dt$$
$$=-[\frac{1}{3}t^3]_0^1-2\cdot\frac{\pi}{4}+2[t]_0^1=-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{2}+2=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{4}$ 実数 a,b,c,d を定数とする。行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の定める座標平面上の点の移動を考える。

(1) 実数 α,β,γ を定数とする。実数 t が動くとき、点 $(\alpha t+\beta,t+\gamma)$ が A による移動で移される点の軌跡は、ある 1 点か、またはある 1 つの直線になることを示せ。

(2) 直線 $x=1$ 上の異なる 2 点が、A による移動で原点を通らない直線上の異なる 2 点に移るならば、A は逆行列をもつことを示せ。

(解答例)

(1) $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha t+\beta\\ t+\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}$

よって、

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}$

$\begin{cases}\text{[illegible]}\\ \text{[illegible]}\end{cases}$

[illegible] より $t=\dfrac{x-(a\beta+b\gamma)}{a\alpha+b}$

(**) より $t=\dfrac{y-(c\beta+d\gamma)}{c\alpha+d}$

したがって、

$$\frac{y-(c\beta+d\gamma)}{c\alpha+d}=\frac{x-(a\beta+b\gamma)}{a\alpha+b}$$

$$y-(c\beta+d\gamma)=\frac{c\alpha+d}{a\alpha+b}\{x-(a\beta+b\gamma)\}$$

ゆえに、

(i)$a\alpha+b=0,\ c\alpha+d=0$ のとき、点 [illegible]

[illegible] のとき、直線 [illegible]

[illegible] のとき、直線 [illegible]

[illegible] のとき、

直線 $y=\frac{c\alpha+d}{[illegible]}$ [illegible]

[illegible] 点を $(1,p),(1,q)$ とする。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+bp \\ c+dp \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+bq \\ c+dq \end{pmatrix}$$

$$y-(c+dp)=\frac{d(p-q)}{b(p-q)}\{x-(a+bp)\}$$

これが原点を通らないので、

$$0-(c+dp)\neq\frac{d(p-q)}{b(p-q)}\{0-(a+bp)\}$$

$p\neq q$ より

$c+dp\neq\frac{d}{[illegible]}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

したがって、行列 A は逆行列をもつ。

○文系

（講評）

$\boxed{1}$（基本問題）

数学Ⅰ（2 次関数)、数学Ⅱ（領域）についての出題である。判別式の条件、軸の条件、定義域の条件をまとめる。図を利用し、丁寧に解けば、特に問題はない。(2) は線形計画法についての問題であるが、教科書程度の基本問題である。

$\boxed{2}$（基本問題）

数学 A（2 つの円の位置関係)、数学Ⅰ（余弦定理)、数学Ⅱ（円の方程式）についての出題である。理系の $\boxed{1}$ を少しやさしくしている。図を利用し、丁寧に解いていけば正解できるであろう。

$\boxed{3}$（基本問題）

数学 A（場合の数と確率)、数学 B（数列）についての出題である。理系の $\boxed{2}$ を少しやさしくしている。階差数列の和についての問題であることに気付けばうまくいく。(2) の確率は (1) がわかれば解ける。

$\boxed{4}$（やや難問）

数学Ⅰ（2 次関数)、数学Ⅱ（微分・積分）についての出題である。計算が複雑であるが、(2) ができれば、(3) はできるであろう。

２．札幌医科大学

$\boxed{1}$（基本問題）

数学 B（空間ベクトル）についての出題である。基本的な計算である。(2) は断面図を利用し、丁寧に解けば、問題はないと思う。

$\boxed{2}$（基本問題）

数学 A（場合の数と確率)、数学Ⅱ（因数定理）についての出題である。条件に基づいて、基礎的な事項を並べていけば解ける。(2)(3) についても場合分けを丁寧に行えば、問題はないと思う。

$\boxed{3}$（やや難問）

数学Ⅱ（不等式の証明、三角関数)、数学Ⅲ（微積)、数学 C（行列）についての出題である。三角関数の和と積の変換公式の練習を充分に行っておく必要がある。(2) については行列式が 0 でないことを言えればよい。(3) についても行列式が 0 でないことを言えば

よいが、行列式が t に関する 2 次式となるので、判別式を利用すると、$D<0$ となるので、行列式は常に正となり、逆行列が存在する。

4 （やや難問）

数学I（2 次関数）、数学II（積分）についての出題である。$a_n \geqq 4$ と $a_n < 4$ で場合分けをしなければならない。あとは積分による面積の計算、回転体の体積の計算である。

２００７年室蘭工業大学

1 a, b, p, q を定数とし、$a>0$ とする。関数 $f(x)=x^2+ax+2$ について、放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標を (p, q) とする。また、関数 $g(x)=x^3+ax^2+bx-2$ は $x=p$ で極値 q をとするとする。

(1)a, b, p, q の値を求めよ。

(2)2 曲線 $y=f(x),\ y=g(x)$ の共有点のうちで、点 (p, q) と異なる点の座標を求めよ。

(解答例)

2 a を正の数とし、曲線 $y=a\log x$ を C とする。曲線 C 上の点 $(a, a\log a)$ における接線を l とする。ただし、対数は自然対数とする。

(1)l の方程式を a を用いて表せ。

(2)l と C、および 2 直線 $x=2,\ x=4$ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3)$S(a)$ が最小となるような a の値を求めよ。

(解答例)

3 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が、次の条件を満たすとする。

[illegible]

[illegible] $\dfrac{[illegible]}{a_n}$ とおくとき、$b_{n+1}-b_n$ を n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(解答例)

4 t を正の数とする。平行四辺形 $ABCD$ において、辺 AB を $t:1$ に内分する点を E、辺 BC を $3:1$ に内分する点を F とする。また、$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{d}$ とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{DE}$および$\overrightarrow{EF}$を$\overrightarrow{t},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{d}$ を用いて表せ。

(2)$\overrightarrow{b}$と$\overrightarrow{d}$のなす各が 45°で、$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{d}|$ であるとする。$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{EF}$ となるような t

の値を求めよ。

(解答例)

$\boxed{5}$ $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ について、

$PX=A+X^{-1}AX$ が成り立つとする。ただし、a,p,q,r,s は実数とする。

(1)p,q,r,s をそれぞれ a を用いて表せ。

(2)$(A+P)(A-P)=A^2-P^2$ が成り立つような a の値を求めよ。

(解答例) $\boxed{\text{２００７年　北見工業大学後期}}$

問題 5 は選択問題である。A または B, いずれかの問題を解答すること。

$\boxed{1}$ 以下の空白をうめよ。なお、(6) については,$(a)\sim(d)$ の中から適切なものを選べ。

(1) 方程式 [illegible] を解くと $x=\boxed{\text{(i)}}$ である。

(2) 次の 3 つの数 $2^{\frac{1}{2}},3^{\frac{1}{3}},4^{\frac{1}{4}}$ のうちで最も大きい数は $\boxed{\text{(ii)}}$ である。

(3) 関数 $f(x)=\sin^3(2x+1)$ の導関数は $f'(x)=\boxed{\text{(iii)}}$ である。

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ の値は $\boxed{\text{(iv)}}$ である。

(5)20 以下の正の整数全体のなす集合 U を全体集合とする。U の要素で 3 で割り切れるもの全体のなす集合 A の補集合 $\overline{A}$ と U の要素で 2 で割り切れるもの全体のなす集合 B との和集合 $\overline{A}\cup B$ の要素の個数は $\boxed{\text{(v)}}$ である。

(6) 実数 x,y に対して、「$x=0$ または $y=0$」は $x^2+y^2=0$ であるための $\boxed{\text{(vi)}}$ である。

(a) 必要十分条件である

(b) 十分条件だが、必要条件ではない

(c) 必要条件だが、十分条件ではない

(d) 必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{2}$

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^2 te^{t^2}dt$ を計算せよ（たとえば置換積分法を使うとよい)。

(2)k を実数, $x\geqq 0$ とする。

$$f(x)=\int_0^{\sqrt{x}}(te^{t^2}-kt)dt$$

を計算せよ。

(3)$k=e$ とする。関数 $f(x)$ の増減を作り、$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(4)(2) の関数 $f(x)$ が増加関数となるような k の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 行列

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$$

が与えられている。

(1) 零でないベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をみたす定数 k がふたつある。これを求めよ。

(2)(1) で求めたふたつの定数を α,β $(\alpha<\beta)$ とする。

等式 $A\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす p,q を求めよ。

(3)(2) で求めた p,q に対し $P=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。このとき $P^{-1}AP$ を求めよ。

(4)$A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき、a_n,b_n,c_n,d_n を n の式で表せ。

$\boxed{4}$ 地球上で, 東経 0 度から 180 度, 北緯 0 度から 90 度の範囲の領域を R とする。R 上の点を $P(x,y)$ と表す。ここで x はこの地点の経度を表し、y は緯度を表す。$0\leqq x\leqq 180,\ 0\leqq y\leqq 90$ である。北極点を N で表すとすると、$0\leqq x\leqq 180$ となるどんな x に対しても、$P(x,90)$ は N を表している。なおここでは、地球は完全な球体であると考える。さて、R 上の 2 つの地点の間の距離は、普通は最短距離として定めるが、ここでは、2 点間の近さを表すような別の数値を定めることを試みよう。R 上の 2 つの点 $P(x_1,y_1)$ と $P(x_2,y_2)$ に対して、以下のように定められる $d[P(x_1,y_1),P(x_2,y_2)]$ という値を考える。

(1)$P(x_1,y_1)$ と $P(x_2,y_2)$ のどちらかが N ならば, すなわち,y_1 と y_2 のどちらかが 90 ならば.

[illegible]

と決める。

(2)$P(x_1,y_1)$ と $P(x_2,y_2)$ のどちらも N ではないならば,

$$d[P(x_1,y_1),P(x_2,y_2)] = mini\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, (90 - y_1) + (90 - y_2)\}$$

と決める。

注意１：ここで「A と B のどちらかが C である」と書いた場合, それは「A と B の少なくともどちらか一方は C である」という意味である。すなわち, 「A と B の両方が C である」という場合も含まれている。

注意２：$mini\{a,b\}$ は,a と b のうち大きくない方を表す。

このようにして決められた値 $d[P(x_1,y_1),P(x_2,y_2)]$ が R 上の 2 点 $P(x_1,y_1)$ と $P(x_2,y_2)$ との間の近さを表す数値として適切な性質を持っているのかどうか, という問題を考える。例えば、同じ点の間の近さを表す数値は 0 でなければならないだろう。

ここで R 上の 2 点が同じ点であるとは, 共に N であるか, または, 共に N ではないある同じ点であるか, の 2 つの場合がある。

●R 上の 2 点 $P(x_1,y_1)$ と $P(x_2,y_2)$ が共に N であるということは,$y_1 = y_2 = 90$ ということである。

●R 上の 2 点 $P(x_1,y_1)$ と $P(x_2,y_2)$ が共に N ではない場合, これらが同じ点であるということは, 緯度と経度が同じということなので,$x_1 = x_2$ でありかつ $y_1 = y_2$ であるということである。

問１：$P(x_1,y_1)$ と $P(x_2,y_2)$ が同じ点のとき, $d[P(x_1,y_1),P(x_2,y_2)] = 0$ であることを証明せよ。

さて逆に, 上のようにして定められた値 $d[P(x_1,y_1),P(x_2,y_2)]$ が,R 上の 2 点 $P(x_1,y_1)$ と $P(x_2,y_2)$ との間の近さを表す数値であると言えるためには, その値が 0 ならば, これらの 2 点は同じ点である, ということが言えなければならないだろう。

問２：以下は, そのことを主張する命題とその証明である。空白部分を埋めて, 証明を完成させよ。

命題：$d[P(x_1,y_1),P(x_2,y_2)] = 0$ ならば,$P(x_1,y_1)$ と $P(x_2,y_2)$ は同じ点である。

証明：$d[P(x_1,y_1),P(x_2,y_2)]=0$ であるとする。

この 2 つの点については,「どちらかが N である」かまたは「どちらも N ではない」の 2 つの場合がある。

どちらの場合であっても,$P(x_1,y_1)$ と $P(x_2,y_2)$ が同じ点であることを示せばよい。

どちらかが N である場合：

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

どちらも N ではない場合：

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

［証明終り］

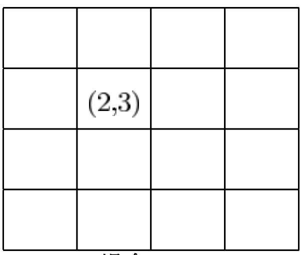
$\boxed{5}$

選択 A　縦横それぞれ n マスの方眼紙を考え、左から i 番目, 下から j 番目にある正方形（マス目）を (i,j) と呼ぶことにする。以下, 方眼紙のマス目が 1 個以上集まってできた長方形について考える。ただし, 正方形は長方形の一種であることに注意すること。

(1)$n=4$ のとき, 正方形 $(2,3)$ を含む長方形の個数を求めよ。

(2)$n=9$ のとき, 正方形 $(3,4)$ を含む長方形の個数を求めよ。

(3)$n=9$ のとき, 正方形 $(3,4)$ を含まない長方形の個数を求めよ。



$n=4$ の場合。

選択 B　空間内に点 $P(\cos t,\sin t,0)$ と $Q(-\cos t\sin t,\cos^2 t,\sin t)$ がある。O を原点とするとき、次の問に答えよ。ただし $0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)$\overrightarrow{OQ}$ の長さを求めよ。また $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を求めよ。

(2)$\overrightarrow{OR}$ は $\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{OQ}$ と直交し, $|\overrightarrow{OR}|=1$ であり、z 座標が正であるという。このような点 R の座標を求めよ。

(3)T を $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$ を満たす点とする。T の z 座標が最大となる t の値を求めよ。

（解答例）

$\boxed{1}$

(1) 与式より

$\log_{2007} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$

$2007^1 = \dfrac{x+1}{[illegible]}$

[illegible]

[illegible]

$x = \dfrac{[illegible]}{1003}$

(2)$2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{12}}$

$3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}}$

$4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{3}{12}}$

それぞれを 12 乗しても大小関係はかわらないので、

$2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{12}} \xrightarrow{12\text{乗}} 2^6 = 64$

$3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}} \xrightarrow{12\text{乗}} 3^4 = 81$

$4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{3}{12}} \xrightarrow{12\text{乗}} 4^3 = 64$

よって、最も大きい数は $3^{\frac{1}{[illegible]}}$

[illegible]

[illegible] 部分積分より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{[illegible]} - [illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]}

したがて、$n(\overline{A} \cup B) = 17$

(6)$x^2+y^2=0$ から $x=y=0$

よって、「$x=0$ または $y=0$」$\Longrightarrow$「$x^2+y^2=0$」

となり、(c)

$\boxed{2}$

(1)$t^2=s$ として、

両辺を t で微分すると、

$2t=\dfrac{ds}{dt}$

よって、$2t\cdot dt=ds$

また、

t	$0\longrightarrow 2$
s	$0\longrightarrow 4$

(与式) $=\displaystyle\int_0^4 e^s\cdot\frac{ds}{2}=\frac{1}{2}\int_0^4 e^s ds=\frac{1}{2}[e^s]_0^4=\frac{1}{2}(e^s-1)$

(2)$f(x)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}(te^{t^2}-kt)dt=\int_0^{\sqrt{x}}te^{t^2}dt-\int_0^{\sqrt{x}}kt\ dt\cdots(*)$

ここで、$t^2=s$ とする

両辺を t で微分すると、

$2t=\dfrac{ds}{dt}$

よって、$2t\cdot dt=ds$

また、

t	$0\longrightarrow\sqrt{x}$
s	$0\longrightarrow x$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}te^{t^2}dt=\int_0^x e^s\cdot\frac{ds}{2}=\frac{1}{2}(e^s-1)$

$\int_0^{\sqrt{x}}kt\ dt=k[\frac{1}{2}t^2]_0^{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}kx$

したがって、$(*)=\dfrac{1}{2}(e^s-1)-\dfrac{1}{2}kx=\dfrac{1}{2}(e^x-kx-1)$

(3)$k=e$ より、$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-ex-1)$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e)$

$f'(x)=0$ とすると、$x=1$

増減表をかくと

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$

(4)$f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - kx - 1)$ より

$f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e)$

$f(x)$ が増加関数であるためには $f'(x) > 0$ となればよい

$\dfrac{1}{2}(e^x - k) > 0$

$e^x > k$

ここで、$x \geqq 0$ より $k < 1$

$\boxed{3}$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$(A - kE)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\left\{\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 8-k & 3 \\ -18 & -7-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (8-k)x + 3y \\ -18x - (7+k)y \end{pmatrix}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] より

$k = -1,\ 2$

$k = -1$ のとき

$A\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ より

$(A + E)\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -18 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

よって、$p = -\dfrac{1}{3}$

$A\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ より

$$(A-2E)\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -18 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

よって、$q = -\dfrac{1}{2}$

(3)$P = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{1 \times (-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{2}) \times 1} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} \\ -1 & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[illegible]

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = P(P^{-1}A^nP)P^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] \end{pmatrix}$$

したがって、[illegible]

$\boxed{5}$

問 1

○共に N である場合

$y_1 = y_2 = 90$ より

[illegible]

○共に N でない場合

$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ より

[illegible]

問 2

○どちらかが N である場合

[illegible] となるので、$y1 = 90$ または $y_2 = 90$ なので、

$y_1 = y_2 = 90$ となり、$P(x_1, y_1)$ と $P(x_2, y_2)$ は同じ点である。

○どちらも N ではない場合

[illegible] となるので、

$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$

したがって、$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ となり、$P(x_1, y_1)$ と $P(x_2, y_2)$ は同じ点である。

$\boxed{5}$

選択 A

選択 B

２００７年　小樽商科大学

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ の中を適当に補って、それを答案用紙に書け。証明や説明は必要としない。(60 点)

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - 2|x|)|1 - 2x| dx = \boxed{\text{（a）}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2007} \sin \frac{k\pi}{3} = \boxed{\text{(b)}}$

(3) 方程式 $2^{x^2} 3^x = 144$ は 2 つの解をもち、1 つの解は $x = 2$ である。もう 1 つの解は $x = \boxed{\text{(c)}}$

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。(40 点)

(1)$P(x)=64x^3-48x+9$ とする。$P(\frac{3}{4})=0$ であることを用いて $P(x)$ を因数分解せよ。

(2)$0<3\theta<\frac{\pi}{2}$, $\sin 3\theta=\frac{9}{16}$ であるという。このとき $\sin\theta$ を求めよ。

$\boxed{3}$次の$\boxed{}$の中を適当に補って、それを答案用紙に書け。証明や説明は必要としない。(60 点)

(1)$\log_3 x+\log_3 y=5$ であるとき、$2x+3y$ の最小値は$\boxed{（ア）}$

(2)$a_n=\cos\frac{\pi}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$ のとき、a_4 の値を求めると、$a_4=\boxed{（イ）}$

(3) 三角形 ABC があり、$\angle BAC=60°$, $\angle ABC=75°$ であるとする。この三角形の外接円の中心を O とするとき、$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表すと $\overrightarrow{OC}=\boxed{（ウ）}$

$\boxed{4}$3 次関数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax+a$ が $x>2$ の範囲で常に増加するための定数 a に関する必要十分条件を求めよ。(40 点)

$\boxed{5}$$a$ を定数とする。曲線 $y=ax^2$ と曲線 $y=\log x$ が、ある点を共有し、かつその点で共通な接線をもつという。このとき次の問いに答えよ。(40 点)

(1)a を求めよ。

(2) 上記の 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(解答例)

$\boxed{1}$

(1)(i) $x\geqq 0$, $1-2x\geqq 0$ のとき

$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ となる。

(ii) $x\geqq 0$, $1-2x<0$ のとき

$x>\frac{1}{2}$ となる。

(iii) $x<0$, $1-2x\geqq 0$ のとき

$0<x$ となる。

(iv) $x<0$, $1-2x<0$ のとき

該当する領域はない。

(i)(ii)(iii) より

$$\int_{-1}^{0}(1+2x)(1-2x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-2x)(1-2x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2x)(2x-1)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(1-4x^2)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-4x+4x^2)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1+4x-4x^2)dx$$

$$=[x-\frac{4}{3}x^3]_{-1}^{0}+[x-2x^2+\frac{4}{3}x^3]_{0}^{\frac{1}{2}}-[x-2x^2+\frac{4}{3}x^3]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=-(-1+\frac{4}{3})+(1-2+\frac{4}{3})-(1-2+\frac{4}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{8})=-\frac{1}{6}$$

(2)$\sin\dfrac{1\cdot\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\dfrac{2\cdot\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\dfrac{3\cdot\pi}{3}=0,\ \sin\dfrac{4\cdot\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$\sin\dfrac{5\cdot\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\dfrac{6\cdot\pi}{3}=0$

となるので、(与式)$=\sin\dfrac{2005\cdot\pi}{3}+\sin\dfrac{2006\cdot\pi}{3}+\sin\dfrac{2007\cdot\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0=\sqrt{3}$

(3) 両辺を底を 2 とする対数をとって

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 3

よって、もう 1 つの解は $x=-2-\log_2 3$

$\boxed{2}$

(1)$P\left(\dfrac{3}{4}\right)=0$ より $P(x)$ は $4x-3$ を因数にもつ

$$\begin{array}{r}
16x^2+12x-3 \\
4x-3\ \overline{)\ 64x^3\qquad\quad -48x+9} \\
\underline{64x^3-48x^2\qquad\qquad} \\
48x^2-48x\qquad \\
\underline{48x^2-36x\qquad} \\
-12x+9 \\
\underline{-12x+9}
\end{array}$$

0

したがって、[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{[illegible]}{16}$ より

$\boxed{5}$

(1)

東京書籍のニュースコープ数学 IIIC の 150 番の問題と同じ。

(2)

$\boxed{\text{2．道外}}$

２００７年　東北大学理系前期

$\boxed{1}$ n を 2 以上の自然数とし, 整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする。

(1)$a_2,\ b_2$ を求めよ。

(2)$a_{n+1},\ b_{n+1}$ を a_n と b_n を用いて表せ。

(3) 各 n に対して,a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

$\boxed{2}$ $\angle C$ を直角とする直角三角形 ABC に対して,$\angle A$ の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また, 線分 $AD,\ DC,\ CA$ の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。$\angle A=\theta$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1)$\sin\theta$ を求めよ。

(2)$\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし,$\sqrt{2}=1.414\cdots,\ \sqrt{3}=1.732\cdots$ を用いてもよい。

$\boxed{3}$ 自然数 n に対し, 方程式

$$\frac{1}{x^n}-\log x-\frac{1}{e}=0$$

を考える。ただし, 対数は自然対数であり,e はその底とする。

(1) 上の方程式は $x \geqq 1$ にただ一つの解をもつことを示せ。

(2)(1) の解を x_n とする。このとき,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ を示せ。

$\boxed{4}$ xy 平面上に 4 点 $(0,0),(4,0),(4,4),(0,4)$ を頂点とする正方形 K を考える。点 $(1,2)$ を通る各直線に対して, その K に含まれる部分を l とおく。

(1)l の長さの最大値と, それを与える直線の方程式を求めよ。

(2)l の長さの最小値を求めよ。

次の $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ は理学部・医学部医学科・工学部の受験者のみ解答すること。

$\boxed{5}$ xyz 空間において, 点 $(1,0,1)$ と点 $(1,0,2)$ を結ぶ線分を l とし,l を z 軸のまわりに一回転してできる図形を A とする。A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{6}$ $a>0$ に対し

$$I_0(a)=\int_0^a \sqrt{1+x}dx, \qquad I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}dx\ (n=1,2,\cdots)$$

とおく。

(1) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式

$$I_n(a)=\frac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)\ (n=1,2,\cdots)$$

を示せ。

(3) 自然数 n に対して, $\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a)$ を求めよ。

２００７年　東北大学理系後期

$\boxed{1}$ $0\leqq x<2\pi$ の範囲で次の方程式の解を求めよ。

[illegible]

[illegible] $= 2$

$\boxed{2}$ 図のような平行四辺形 $ABCD$ において $\angle ADB$ は直角とする。D から線分 AC に下ろした垂線と AC との交点を E とする。$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$ とおき, $|\overrightarrow{a}|=1$, $|\overrightarrow{b}|=\sqrt{13}$ とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を求めよ。

(2)$\overrightarrow{DE}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で表せ。

(3) 内積 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}$ と $\angle EDB$ を求めよ。

$\boxed{3}$あるグループの各人が独立に一問のクイズに答え, グループの人数の半数以上が正解すればグループは合格とする。ただし, 一人一人の正解する確率は $p(0 \leqq p \leqq 1)$ とする。グループの人数が $2n$ であるときグループが合格する確率を $a_n(p)$ とする。

(1)2 以上の自然数 n に対して,$a_n(p)$ は文字 p についての多項式として p^n で割り切れ, $a_n(p) - a_{n-1}(p)$ は文字 p についての多項式として $(1-p)^n$ で割り切れることを示せ。

(2)$a_3(p) \geqq a_2(p)$ となる p の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$$a, b$ を $a \geqq 0,\ b \leqq -2a^3 + 3a - 2$ を満たす定数とする。このとき,xy 平面において, 直線 $y = 2x$ と放物線 $y = x^2 + 2ax + b$ で交わることを示せ。

次の$\boxed{5}$,$\boxed{6}$は理学部の受験者のみ解答すること。

$\boxed{5}$不等式 $x^2 > 2^x$ を満たす正の実数 x の範囲を求めよ。

$\boxed{6}$楕円 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 上に点 $P_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ を $\angle P_kOA = \dfrac{k}{n}\pi$ を満たすようにとする。ただし,$O = (0, 0),\ A = (2, 0)$ とする。このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{{OP_1}^2} + \frac{1}{{OP_2}^2} + \cdots + \frac{1}{{OP_n}^2}\right)$$

を求めよ。

２００７年　東京大学理科前期

$\boxed{1}$

n と k を正の整数とし,$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+k)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば,$P(x)$ の n 次以下の項の係数は, すべて整数であることを示せ。ただし, 定数項については, 項それ自身を係数とみなす。

$\boxed{2}$

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 $O, P_0, P_1, \cdots, P_n$ があり, 次の 2 つの条件をみたしている。

(1)$\angle P_{k-1}OP_k = \dfrac{\pi}{n}\ (1 \leqq k \leqq n),\ \angle OP_{k-1}P_k = \angle OP_0P_1\ (2 \leqq k \leqq n)$

(2) 線分 OP_0 の長さは 1, 線分 OP_1 の長さは $1 + \dfrac{1}{n}$ である。

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし,$s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{3}$

座標平面上の 2 点 P, Q が, 曲線 $y = x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき, 線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし,$P = Q$ のときは $R = P$ とする。

(1)a を $-1 \leqq a \leqq 1$ をみたす実数とするとき, 点 (a, b) が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2)D を図示せよ。

$\boxed{4}$

以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a に対し,2 次の正方行列 A, P, Q が,5 つの条件 $A = aP + (a+1)Q, P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = O, QP = O$ をみたすとする。ただし $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき, $(P + Q)A = A$ が成り立つことを示せ。

(2)a は正の数として, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ を考える。この A に対し、(1) の 5 つの条件をすべてみたす行列 P, Q を求めよ。

(3)n を 2 以上の整数とし,$2 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対して $A_k = \begin{pmatrix} k & o \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$ とおく。行列の積 $A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2$ を求めよ。

$\boxed{5}$

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし,$0 < p < 1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール (R) の下で, ブロック積みゲームを行う。

(R)$\begin{cases} \text{(i) ブロックの高さは,最初は 0 とする。} \\ \text{(ii) 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ,裏が出ればブロックをすべ} \end{cases}$

n を正の整数,m を $0 \leqq m \leqq n$ をみたす整数とする。

(1)n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2)(1) で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール (R) の下で,n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

$\boxed{6}$

以下の問いに答えよ。

(1)$0 < x < a$ をみたす実数 x, a に対し, 次を示せ。
$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$
(2)(1) を利用して, 次を示せ。

$0.68 < \log 2 < 0.71$

ただし,$\log 2$ は 2 の自然対数を表す。

２００７年　東京大学理科後期

$\boxed{1}$

xy 平面の曲線 $C : xy^2 = 4$ 上に 1 点 $P_0(x_0, y_0)$ $(y_0 > 0)$ をとる。P_0 における C の接線と C との共有点のうち,P_0 と異なるものを $P_1(x_1, y_1)$ とする。また P_1 における C の接線と C との共有点のうち,P_1 と異なるものを $P_2(x_2, y_2)$ とする。

次の問に答えよ。

(1)P_1, P_2 の座標を y_0 を用いて表せ。

(2)$\triangle P_0P_1P_2$ の面積を T とし, 線分 P_0P_1, P_1P_2 および曲線 C で囲まれた領域の面積を S とする。$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ。

(3)$\triangle P_0P_1P_2$ が直角となるような y_0 の値を求めよ。

(4) 前問 (3) で求めた y_0 に対し,$\triangle P_0P_1P_2$ の外接円の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

次の問に答えよ。

(1) 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ に対し,
$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$
とおく。行列 B は
$$B = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$
の形であることを示し,$r + t, rt - s^2$ を a, b, c を用いて表せ。

(2) 前問 (1) において $r^2+s^2 \geqq a^2+b^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 実数 a_n, b_n, c_n $(n=0,1,2,\cdots)$ を次のように定める。

$n=0$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

（ア） $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ を示せ。

（イ） $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

$\boxed{3}$

N を 2 以上の自然数とする。$x_1 \leqq \cdots \leqq x_N$ をみたす実数 $x_1, \cdots, x_N$ に対し, 実数 k_n, p_n, q_n $(n=0,1,2,\cdots)$ を次の手続きで定める。

(A)$k_0=1, p_0=x_1, q_0=x_N$

(B)n が奇数のとき

k_n は $x_i \leqq \dfrac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2}$ をみたす x_i の個数,

$p_n=p_{n-1}$, $q_n=q_{n-1}$

(C)n が偶数 $(n \geqq 2)$ のとき

$k_n=k_{n-1}$

$$p_n=\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} x_i,\ q_n=\frac{1}{N-k_n}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i$$

ただし $k_n=0$ または $k_n=N$ となったら, その時点で手続きを終了する。

$x_1 < x_n$ であるとき, 次の問に答えよ。

(1) すべての自然数 n について

$1 \leqq k_n \leqq N-1$ かつ $x_1 \leqq p_n < q_n \leqq x_N$

が成り立つことを示せ。

(2) 実数 J_n $(n=0,1,2,\cdots)$ を

$$J_n=\sum_{i=1}^{k_n}(x_i-p_n)^2+\sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i-q_n)^2$$

と定めると, すべての自然数 n に対して $J_n \leqq J_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3)n が十分大きいとき[illegible]が成り立つことを示せ。

２００７年　名古屋大学理系前期

補足説明

> 4 ページ
>
> 問題 $\boxed{3}$
>
> 問題文の上から 3 行目
>
> $y = 1/\sqrt{x}$
>
> は
>
> $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
>
> を意味します。

$\boxed{1}$ 2 行 2 列の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。a, b, d が実数で $c = 0$ である行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ を上三角行列という。また、$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

(1)$A^2 = E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ。

(2)$A^3 = E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ。

(3) 上三角行列 A が $A^4 = E$ をみたすとき,$A^2 = E$ となることを示せ。

$\boxed{2}$

(1) 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ のグラフをかけ。

(2) 方程式 $f(x) = a$ (a は実数) が相異なる 3 つの実数解 $\alpha < \beta < \gamma$ を持つとする。$l = \gamma - \alpha$ を β のみを用いて表せ。

(3)a が (2) の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ $(a_n > 0)$ を次の規則によって定める :

$$a_1 = 1; \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

曲線 $y = 1/\sqrt{x}$ と,x 軸および 2 直線 $x = a_n,\ x = a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。このとき $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} V_n$ を求めよ。

問題$\boxed{4}$は選択問題である。つぎの$\boxed{4}$(a) または別紙の$\boxed{4}$(b) のいずれか一方を選んで解答せよ。

$\boxed{4}$(a) 原点 $O(0,0)$ を中心とする半径 1 の円に, 円外の点 $P(x_0,y_0)$ から 2 本の接線を引く。

(1)2 つの接点の中点を Q とするとき, 点 Q の座標 (x_1,y_1) を点 P の座標 (x_0,y_0) を用いて表せ。また $OP \cdot OQ = 1$ であることを示せ。

(2) 点 P が直線 $x+y=2$ 上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ。

問題$\boxed{4}$は選択問題である。つぎの$\boxed{4}$(b) または別紙の$\boxed{4}$(a) のいずれか一方を選んで解答せよ。

$\boxed{4}$(b) 袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し, 出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後, 赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $P_N(m)$ とする。

(1) 連比 $P_3(1):P_3(2):P_3(3):P_3(4)$ を求めよ。

(2) 一般の N に対し $P_N(m)$ $(1 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。

２００７年　京都大学理系甲前期

$\boxed{1}$

次の各問にそれぞれ答えよ。

問１． $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき,
$A^6 + 2A^4 + 2A^3 + 2A^2 + 2A + 3E$ を求めよ。

問２． 得点 $1, 2, \cdots, n$ が等しい確率で得られるゲームを独立に 3 回くり返す。このとき,2 回目の得点が 1 回目の得点以上であり, さらに 3 回目の得点が 2 回目の得点以上となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

x, y を相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

[illegible]

によって定めるとき, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ が有限個の値に収束するような座標平面上の点 (x,y) の

範囲を図示せよ。

3

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$a+b+c+d=0,\ ad-bc+p=0,\ a \geqq b \geqq c \geqq d$

を満たすとき,a, b, c, d を p を用いて表せ。

4

$\triangle ABC$ において,$\angle A$ の二等分線とこの三角形の外接円との交点で A と異なる点を A' とする。同様に $\angle B,\ \angle C$ の二等分線とこの外接円との交点をそれぞれ B', C' とする。このとき 3 直線 AA', BB', CC' は 1 点 H で交わり, この点 H は三角形 $A'B'C'$ の垂心と一致することを証明せよ。

5

$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする。座標平面上で原点の周りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転する 1 次変換を f とし, 直線 $y=(\tan\alpha)x$ について対称移動する 1 次変換を g とする。合成変換 $f \circ g$ が x 軸について対称移動する 1 次変換と一致するとき,α の値を求めよ。

6

$y = xe^{1-x}$ と $y = x$ のグラフで囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

２００７年　京都大学理系乙前期

1

次の各問にそれぞれ答えよ。

問 1．定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}$ を求めよ。

問 2．1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき,1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。

2

x, y を相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

[illegible]

によって定めるとき,$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限個の値に収束するような座標平面上の点 (x, y) の

範囲を図示せよ。

3

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a,b,c,d が次の 3 条件

$a+b+c+d=0,\ ad-bc+p=0,\ a \geqq b \geqq c \geqq d$

を満たすとき,a,b,c,d を p を用いて表せ。

4

点 O を中心とする円に内接する $\triangle ABC$ の 3 辺 AB,BC,CA をそれぞれ $2:3$ に内分する点を P,Q,R とする。$\triangle PQR$ の外心が点 O と一致するとき,$\triangle ABC$ はどのような三角形か。

5

A を 2 次の正方行列とする。列ベクトル $\overrightarrow{x_0}$ に対し, 列ベクトル $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots$ を

[illegible]

によって定める。ある零ベクトルではない $\overrightarrow{x_0}$ について,3 以上の自然数 m で初めて $\overrightarrow{x_m}$ が $\overrightarrow{x_0}$ と一致するとき, 行列 A^m は単位行列であることを示せ。

6

すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0,\ f'(0)=1$ を満たし, さらに任意の実数 a,b に対して $1+f(a)f(b) \neq 0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1) 任意の実数 a に対して,$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2)$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。

２００７年　大阪大学理系前期

1 n を自然数とする。関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを C とし、C 上の 2 点 $(n,\sqrt{n})$ と $(n+1,\sqrt{n+1})$ を通る直線を l とする。C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^aV=b$ を満たす正の数 a,b を求めよ。

(解答例)

$l : y-\sqrt{n}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n}(x-n)$ より

$y=0$ として、x 軸と l との交点を求めると

$x=-\sqrt{n}\sqrt{n+1}$

l を x 軸のまわに回転してできる円錐を $x=n$ から $x=n+1$ までで切り取った円錐台の体積を W とすると

$$W=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{n+1})^2\cdot\{(n+1)-(-\sqrt{n}\sqrt{n+1})\}$$
$$-\frac{1}{3}\pi(\sqrt{n})^2\cdot\{n-(-\sqrt{n}\sqrt{n+1})\}$$
$$=\frac{1}{3}\pi(2n+1+\sqrt{n}\sqrt{n+1})\}$$
$$V=\pi\int_n^{n+1}(\sqrt{x})^2dx-\frac{1}{3}\pi(2n+1+\sqrt{n}\sqrt{n+1})\}$$
$$=\pi\int_n^{n+1}xdx-\frac{1}{3}\pi(2n+1+\sqrt{n}\sqrt{n+1})\}$$
$$=\pi[\frac{1}{2}x^2]_n^{n+1}-\frac{1}{3}\pi(2n+1+\sqrt{n}\sqrt{n+1})\}$$
$$=\frac{\pi}{2}(2n+1)-\frac{1}{3}\pi(2n+1+\sqrt{n}\sqrt{n+1})\}$$
$$=\frac{\pi}{6}\{(2n+1)-2\sqrt{\text{[illegible]}}$$
[illegible] $-$ [illegible] $\cdot\ \frac{\pi}{6}\{(2n+1)-2\sqrt{\text{[illegible]}}$

$=$ [illegible] $\cdot\ \dfrac{\text{[illegible]}-\text{[illegible]}\sqrt{n^2+n}\}\{(2n+1)+2\sqrt{n^2+n}\}}{6\{(2n+1)+2\sqrt{\text{[illegible]}}}$

$=$ [illegible] $\cdot\ \dfrac{\text{[illegible]}}{6\{(2n+1)+2\sqrt{n^2+n}\}}$

$$=\lim_{n\to\infty}n^a\cdot\frac{\pi}{6\{(2n+1)+2\sqrt{n^2+n}\}}\cdots(*)$$

$a=1$ とすると

$$(*)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{6\{(2+\frac{1}{n})+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\}}=\frac{\pi}{24}$$

$a=2$ とすると極限値が存在しない。

したがって、$a=1,\ b=\dfrac{\pi}{24}$

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ。

(1)x が正の数のとき $|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ。

(2)p,q,r が $p+q+r=1$ を満たす正の数のとき

$p^2+q^2+r^2 \geqq \dfrac{1}{3}$

を示せ。

(3)a, b, c が相異なる正の数で、$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \frac{1}{3}$$

を示せ。

(解答例)

(1)(i)$0<x<1$ のとき $-\log x \leqq \dfrac{-x+1}{\sqrt{x}} \cdots (*)$ を示す。

$f(x)=\dfrac{-x+1}{\sqrt{x}}+\log x \geqq 0$ を示す。

$$f'(x)=\frac{-\sqrt{x}-(1-x)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{x}+\frac{1}{x}=\frac{-2x-(1-x)}{2x\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-x-1+2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}<0\ (0<x<1)$$

単調減少で $f(1)=0$ より

$0<x<1$ で $f(x)>0$

よって、$(*)$ がいえる。

(ii)$x>1$ のとき $\log x \leqq \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} \cdots (**)$ を示す。

$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}-\log x \geqq 0$ を示す。

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-(x-1)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2x-(x-1)}{2x\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}>0\ (x>1)$$

単調増加で $f(1)=0$ より

$x>1$ で $f(x)>0$

よって、$(**)$ がいえる。

(iii)$x=1$ のとき与式は成り立つ

(i)(ii)(iii) より与式は成り立つ

[illegible]) とする。

[illegible]

また $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta$ より

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \leqq |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|$

$|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}\times\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\sqrt{p^2+q^2+r^2}$

したがって、$1 \leqq \sqrt{3}\sqrt{p^2+q^2+r^2}$

よって、$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq \sqrt{p^2+q^2+r^2}$

両辺とも正の値であるから、２乗したものの大小関係もかわらないので

$\dfrac{1}{3} \leqq p^2+q^2+r^2$

ゆえに、$p^2+q^2+r^2 \geqq \dfrac{1}{3}$

(3)$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}+\dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b}+\dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c}$

$\leqq \dfrac{ab}{b-a}\cdot\dfrac{\frac{b}{a}-1}{\sqrt{\frac{b}{a}}}+\dfrac{bc}{c-b}\cdot\dfrac{\frac{c}{b}-1}{\sqrt{\frac{c}{b}}}+\dfrac{ca}{a-c}\cdot\dfrac{\frac{a}{c}-1}{\sqrt{\frac{a}{c}}}$

$=\dfrac{ab}{b-a}\cdot\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}+\dfrac{bc}{c-b}\cdot\dfrac{c-b}{\sqrt{bc}}+\dfrac{ca}{a-c}\cdot\dfrac{a-c}{\sqrt{ca}}$

$=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\cdots(*)$

ここで、$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}=1$ より

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\dfrac{1-(a+b+c)}{2}\cdots(**)$

また (2) と $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ より

$a+b+c \geqq \dfrac{1}{3}$

よって、$(**) \leqq \dfrac{1}{3}$ となり、

$(*) \leqq \dfrac{1}{3}$ となる。

したがって、$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}+\dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b}+\dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c} \leqq \dfrac{1}{3}$

$\boxed{3}$ xy 平面において、原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし、その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し、次の 2 つの条件 $(a),(b)$ で定まる点 Q を考える。

(a) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の向きが同じ

(b) $|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が O を除く C 上を動くとき、点 Q は $\overrightarrow{OA}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)(1) の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき、r のとりうる値の範囲を求めよ。

(解答例)

(1) 直線 OA と円の交点で点 O と反対側の点を P_1 として、点 P_1 に対して、条件 $(a),(b)$

を満たす点を Q_1 とする。また、円 C 上に点 P_1 以外の点 P_2 を考え、点 P_2 に対して、条件 $(a),(b)$ を満たす点を Q_2 とする。

(b) より $|\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OQ_1}| = |\overrightarrow{OP_2}||\overrightarrow{OQ_2}| = 1$

よって、$|\overrightarrow{OP_1}| : |\overrightarrow{OQ_2}| = |\overrightarrow{OP_2}| : |\overrightarrow{OQ_1}|$

したがって、$\triangle OP_1P_2 \backsim \triangle OQ_2Q_1$

また、$\angle OP_2P_1 = 90^\circ$ なので、点 Q は $\overrightarrow{OA}$ に直交する直線上を動く。

(2)(1) 題意より $|\overrightarrow{OQ}| < 2r$

また、$|\overrightarrow{OQ}| = \dfrac{1}{|\overrightarrow{OP}|}$ より

$\dfrac{1}{|\overrightarrow{OP}|} < 2r$

よって、$|\overrightarrow{OP}| > \dfrac{1}{2r}$

また、$0 < |\overrightarrow{OP}| < 2r$ なので

$2r < \dfrac{1}{[illegible]}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$-\dfrac{[illegible]}{2} < r < \dfrac{1}{2}$

$r > 0$ より $0 < r < \dfrac{1}{2}$

$\boxed{4}$ $f(x) = x^3 - x$ とし、t を実数とする。xy 平面において、曲線 $y = f(x)$ を C_1 とし、直線 $x = t$ に関して C_1 と対称な曲線

$y = f(2t - x)$

を C_2 とする。

(1)C_1と C_2 が 3 点で交わるとき、t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)t が (1) で求めた範囲を動くとき、C_1と C_2 で囲まれた部分の面積 S の最大値を求めよ。

(解答例)

(1)$f(x) = f(2t - x)$ より

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\sqrt{1-3t^2}$

C_1と C_2 が 3 点で交わるためには

$1-3t^2>0$ でなければならない。

$3t^2-1<0$

$(\sqrt{3}t+1)(\sqrt{3}t+1)<0$

$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2)(1) より

$S=\int_{t-\sqrt{\cdots}}^{t}$ [illegible]

$+\int^{t+\sqrt{\cdots}}$ [illegible]

$=-\int_{t-\sqrt{\cdots}}^{t}$ [illegible]

$-\dfrac{[illegible]}{12}\{t-(t-\sqrt{1-3t^2})\}^3\{2(t+\sqrt{1-3t^2})-(t-\sqrt{1-3t^2})-t\}$

$=(1-3t^2)^2$

$0 \leqq t^2<\dfrac{1}{3}$ なので、

$t=0$ のとき面積は最大値 1 となる。

$\boxed{5}$ n を 2 以上の自然数とする。4 個の行列

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

を重複を許して n 個並べたものを

$M_1, M_2, \cdots, M_n$

とする。

(1) 積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できる場合は何通りあるか。その数を n の式で表せ。

(2) 積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて、その積が零行列でない 2×3 行列となる場合は何

通りあるか。その数を n の式で表せ。

(3) 積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて、その積が零行列とならない場合は何通りあるか。その数を n の式で表せ。

(解答例)

(1)A の右には A,B、B の右には C,D、C の右には A,B、D の右には C,D とそれぞれ 2 通りずつかけることができるので、$4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$ 通り。

(2) 積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて、その積が零行列でない 2×3 行列となる場合は

$M_1M_2\cdots M_n=A\cdots ABD\cdots D=B$

となる場合のみで、n 通り。

(3)$\dfrac{1}{2}n(n-1)+2n+2=\dfrac{1}{2}(n^2+3n+4)$ 通り。

２００７年　大阪大学理系後期

$\boxed{1}$ 自然数 r と負でない整数 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ が次の 4 つの条件を満たすとする.

(i) $r\geqq 3$

(ii) $\displaystyle\sum_{[illegible]}^{r}$ [illegible]

[illegible] $\geqq$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $\leqq 4$ を示せ.

(2)$r\leqq 5$ を示せ.

(3) 条件を満たす r とそのときの $a_1,a_2,\cdots,a_r$ の組をすべて求めよ.

$\boxed{2}$ 関数 $y=\log x$ と $y=\dfrac{a}{x^2}$ を考える。ただし, 対数は自然対数とし,$a>0$ とする.

(1)2 つの曲線 $y=\log x$ と $y=\dfrac{a}{x^2}$ の交点の x 座標を p で表すとき,a を p を用いて表せ.

(2)$y=\log x,\ y=\dfrac{a}{x^2},\ x=1,\ x=2$ で囲まれる部分の面積 S を p を用いて表せ.

(3)a を動かすとき,S の最小値を求めよ.

$\boxed{3}$ 空間に 8 個の点

[illegible]

[illegible] $H(0,1,1)$

をとる。

(1) 四面体 $ACFH$ を平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で切断したとき, 切断面の面積を t で表せ.

(2) 四面体 $ACFH$ と四面体 $BDEG$ の重なり合う部分の体積を求めよ.

$\boxed{4}$ 媒介変数 t $(t>0)$ を用いて,$x=f(t),\ y=g(t)$ と表される曲線を C とする. ここで,

$$f(t)=a\frac{t-t^{-1}}{2},\ g(t)=b\frac{t+t^{-1}}{2}$$

ただし,a,b は正の定数である.

(1) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{b^2}{a^2}\frac{f(t)}{g(t)}$$

(2) 点 $P(u,v)$ を通る C の接線が 2 本引ける $P(u,v)$ の領域を図示せよ.

(3) 点 $P(u,v)$ を通る 2 本の接線が直交する場合を考える. このような $P(u,v)$ が存在するための a,b の条件, およびそのときの $P(u,v)$ の軌跡を図示せよ.

２００７年　九州大学前期

医（保健（看護学）を除く）・歯・薬・工・理・農・経済（経済工）・芸術工学部　（150 分）

$\boxed{1}$ $f(x)=xe^x$ とおく．また p を $p \geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $P(p, f(p))$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とおく．ただし，e は自然対数の底である．このとき，次の問いに答えよ．（配点 50 点）

(1) $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) L を正の数とする．曲線 $y=f(x)$，接線 $y=g(x)$，および 2 直線 $x=0,\ x=L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p \geqq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

$\boxed{2}$ p を $0<p<1$ を満たす数とし，行列 A,B,C をそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1-p & 0\end{pmatrix}$$

とおく．さらに，行列 A_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を

[illegible]

で定める．このとき，次の問いに答えよ．（配点 50 点）

(1) A_2，A_3 を求めよ．

(2) $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$，$\Delta_n a_n d_n - b_n c_n$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} \Delta_n$ を求めよ．

$\boxed{3}$ a, b を正の数とし，空間内の 3 点 [illegible] を考える．A, B, C を通る平面を α，原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく．このとき，次の問いに答えよ．（配点 50 点）

(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB}$ であることを示せ．また $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{DC}$ と $\overrightarrow{DO}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ．また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ．

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ．ただし，P は平面 α 上にはないものとする．

$\boxed{4}$ さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に a, b, c とする．これらの数 a, b, c に対して 2 次方程式

$$(*) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

を考える．ただし，さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする．このとき，次の問いに答えよ．（配点 50 点）

(1) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの実数の解をもつとき，積 ac の取りうる値を求め，積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 (a, c) がそれぞれ何通りあるかを求めよ．

(2) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの有理数の解をもつ確率を求めよ．ただし，一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい．

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して，つねに $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい，p を周期という．正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という．たとえば，関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である．このとき，次の問いにこたえよ．

(1) $y = |\sin x|$ のグラフをかき，関数 $|\sin x|$ の基本週を求めよ．

(2) 自然数 m, n に対して関数 $f(x)$ を $f(x) = |\sin mx| \sin nx$ とおく．p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$ が成り立つことを示せ．また，このとき mp は π の

整数倍であり，np は 2π の整数倍であることを示せ.

(3) m, n は 1 以外の公約数をもたない自然数とする．(2) の結果を用いて関数 $|\sin mx|\sin nx$ の基本周期を求めよ.

２００７年　九州大学前期

文・教育・法・経済（経済・経営）・医（保健（看護学））　（120 分）

$\boxed{1}$ $f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ.（配点 50 点）

(1) 方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ.

(2) 不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ.

(3) 不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ.

$\boxed{2}$ t を $0\leqq t\leqq 1$ を満たす数とし, 空間内の 4 点 [illegible] $\frac{4}{9}t, \frac{4}{9}t, \frac{4}{9}t)$ を考える．このとき，次の問いに答えよ.（配点 50 点）

(1) $\triangle ABC$ は正三角形であることを示し，その面積 $S(t)$ を求めよ.

(2) $\triangle ABC$ の重心を G とする．$\overrightarrow{PG}$ は $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直であることを示せ.

(3) 四面体 $PABC$ の体積 $V(t)$ を求めよ．また $V(t)$ の最小値とその最小値を与える t の値を求めよ.

$\boxed{3}$ 図のような一辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ がある．この正方形の辺上の点 Q を，コインを投げて表が出れば反時計まわりに 1，裏が出れば時計まわりに 1 動かす試行を考える．点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 表の出る確率が $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，各頂点 A, B, C, D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ．同様に上記の試行を 3 回および 4 回繰り返すとき，各頂点 A, B, C, D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ.

(2) 表の出る確率 p が $\dfrac{1}{2}$ より大きいコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，頂点 A, B, C, D のうち点 Q が頂点 C にある確率が最大となることを示せ．同様に 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となることを示せ.

$\boxed{4}$ 3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$, $4-x$, 2 で表される三角形がある．長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より長さが短くないとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ．

(2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ．

(3) x が (1) で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ．

２００７年　九州大学後期

工（建築を除く）　（120 分）

$\boxed{1}$ 4 点 [illegible] を頂点とする四面体において，頂点 O から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を Q，頂点 A から三角形 OBC を含む面に下ろした垂線とその面との交点を R とする．このとき以下の問いに答えよ．（配点 30 点）

(1) 線分 OQ の長さを求めよ．

(2) 三角形 OBC の面積を求めよ．

(3) 点 R の座標を求めよ．

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ．

$\boxed{2}$ 平面上の点の移動（1 次変換）に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直線 $y=-x$ に関する対称移動を表す行列 A を求めよ．

(2) 点 P を原点を中心として正の向き（反時計回り）に 60 度回転し，さらに直線 $y=-x$ に関して対称移動したときの点を P' とする．点 P を P' に移す移動を表す行列 B を求めよ．

(3) 点 $Q(1,0)$ に対して B で表される移動を 3 回行った点を R とする．点 R の座標を求めよ．

(4) B で表される移動により点 S が点 $(1,1)$ に移動したとする．点 S の座標を求めよ．

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=$ [illegible]

について，以下の問いに答えよ．（配点 30 点）

(1) $t \geqq 0$ のとき，不等式 $e^t \geqq 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ と $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を証明せよ．

(3) a を実数の定数とするとき，x についての方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(4) $\displaystyle S = \lim_{c\to+0}\int_c^1 |f(x)|dx$ の値を求めよ．

$\boxed{4}$ 1 つのさいころを振り偶数の目が出たら持ち点を 2 倍にし，奇数の目が出たら持ち点を 0.5 倍して小数点以下を切り捨てるとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 初めの持ち点を 10 点とする．さいころを 7 回投げた後に持ち点が 50 点以上である確率 P を求めよ．

(2) 初めの持ち点を 3 点とする．さいころを 5 回投げた後に持ち点が 5 点以上である確率 Q を求めよ．

$\boxed{5}$ 三角形 ABC において，辺 AB の長さを x，辺 BC の長さを y，辺 AC の長さを z とする．このとき以下の問いに答えよ．（配点 30 点）

(1) $y = 4, z = 4$ とする．x が 4 から 7 までの値をとるとき，三角形 ABC の面積の最大値と最小値を求めよ．

(2) x, y, z がいずれも 4 から 7 までの値をとるとき，三角形 ABC の面積の最大値と最小値を求めよ．

２００７年　九州大学後期

理　（150 分）

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x+1}$ $(x \geqq 0)$ とするとき，次の問いに答えよ．（配点 50 点）

(1) 自然数 n に対して不等式

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

が成り立つことを示せ．

(2) k を 0 以上の整数とするとき

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+1+k\pi}dx$$

を示せ．

(3) k を 0 以上の整数とするとき

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|dx > \frac{2}{(k+1)\pi+1}dx$$

を示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} |f(x)|dx$ が正の無限大に発散することを示せ．

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．ただし，E を 2 次の単位行列，O を E と同じ型の零行列とし，行列及びベクトルの成分はすべて実数であるとする．（配点 50 点）

(1) A を 2 次の正方行列とする．どのような列ベクトル $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ についても $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つならば，$A = O$ であることを示せ．

(2) 2 次の正方行列 B が $B^2 + B + E = O$ を満たすとする．このとき列ベクトル $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対し $BY = bY$ となるような実数 b があるならば，$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ．

(3)(i) 与えられた 2 次の正方行列 C に対して，$C + \alpha E$ が逆行列をもつような実数 α があることを示せ．

(ii) 2 次の正方行列 D で，どのような実数 β についても $D + \beta E$ が逆行列をもつようなものの例をあげよ．

$\boxed{3}$ $\triangle ABC$ において，$\angle A$ は直角，$|\overrightarrow{AB}| = 8, |\overrightarrow{AC}| = 1$ とする．$|\overrightarrow{AD}| = 2$ となるように辺 AB 上に点 D をとり，さらに辺 AB 上に点 P を，$\angle CPA + \angle B + \angle CDA = 45°$ となるようにとる．次の問いに答えよ．（配点 50 点）

(1) $\dfrac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{PC}$ と $\overrightarrow{BC}$ の内積を求めよ．

$\boxed{4}$ 座標平面に点 $A(a, 0)$ と点 $B(0, b)$ を結ぶ線分 AB をとる．a, b が

$a + b = 1,\ a \geqq 0,\ b \geqq 0$

を満たしながら動くとき，線分 AB が通る領域を D とする．次の問いに答えよ．（配点 50 点）

(1) 直線 $x = p$ $(0 < p < 1)$ と領域 D との共通部分において，y 座標が最大値をとる点

を $P(p, g(p))$ とする．このとき $g(p)$ を求めよ．

(2) 上で求めた点 P の軌跡を C とする．曲線 C 上の点 Q での接線が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ R, S とするとき，線分 OR と線分 OS の長さの和は点 Q のとり方によらず一定であることを示せ．ただし O は原点とする．

(3) 曲線 C と x 軸，および 2 直線 $x=\dfrac{1}{9}$, $x=\dfrac{1}{4}$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

大学入試センター試験

○数学Ｉ A

第１問 （数と式、集合と論理）

〔１〕絶対値の場合分け。文系生徒では絶対値の場合分けを弱点としている者が多く、今後しっかり学習していく必要がある。（２）の後半は $m \leqq \alpha < m+1$ として α が根号を含んだ値のときに整数 m を答えさせる問題であるが、平方根のところで根号を含んだ式の値がある程度わかるように日頃から練習しておかないといけない。教科書や模試などで見かける問題である。

〔２〕問題の意図がつかみにくい。（２）で「全体集合」を「自然数全体」としているのなら、初めに全体集合を $U=\{x|x$ は自然数 $\}$ とした方がよいのではないだろうか。さらに、教科書では

$A=\{x|x$ は 10 で割り切れる数, $x \in U\}$, $B=\{x|x$ は 4 で割り切れる数, $x \in U\}$

と書かれるのが、一般的である。問題文のように $A=\{n|n$ は 10 で割り切れる自然数 $\}$ という表現だと、$natural\ number$（自然数）の頭文字と混同しやすく、混乱を招く。

さらに（1）で

「自然数 n が A に属することは、n が 2 で割り切れるための $\boxed{\text{カ}}$。」・・・$(*)$ とあるが、

「集合 A に属する要素であることは、2 で割り切れる数であるための $\boxed{\text{カ}}$。」とした方が問題の意図を汲みやすかったのではないだろうか。$(*)$ のすぐ下の記述についても同様のことがいえる。センター試験は学習してきた成果をみるというスタンスが正しく、うっかりミスを誘うのが目的ではないはずである。とまどった受験生がいたのではないかと心配するのは私だけだろうか。

第２問 （２次関数）

（1）は基本問題。（2）は模擬試験などでよく見かける問題である。ある程度学習していないと難しかったかもしれない。座標平面などで図を確認しながら学習する習慣をつけなければならない。

第３問（三角比、平面図形）

よく練られた良問であると思う。正弦定理、余弦定理、面積の計算など三角比の領域からまんべんなく出題されている。（2）の後半は相似比から面積比をだして考えさせている。

第４問（場合の数、確率）

本年１月１２日実施の第２５回北海道数学コンテストの第４問に類似の問題があった。気がつけば、それほど難しい問題ではないのだが、受験生はとまどったのではないか。（2）のスセソタは余事象を考えた方がよい。

○数学ⅡB

第１問（三角関数、対数関数、領域）

〔1〕加法定理と倍角公式を利用させる問題であるが、加法定理がわかっていれば、変形ができる。あとは簡単な不等式の問題であるが、領域の問題として解くことができる。

〔2〕対数の底の変換ができれば、特に難しいことはない。教科書などでは底の場合分けによって問題を解く場合が多いが、本問は真数の場合分けによって、不等式を解かせている。最後は対数不等式の問題と絡めて、領域の問題を解かせている。新しい傾向だ。

第２問（判別式、微分積分、2 直線のなす角）

（1）関数 $g(x)$ は 3 次関数 $f(x)$ を x 軸方向 a、y 軸方向 $2a$ 平行移動したものである。2 つの関数を合成させて、2 次関数の振る舞いを観る問題である。特に問題はない。

（2）（1）で３次関数を作らせ、微分によりその振る舞いを観る。基本問題。

（3）2 つの 3 次関数で囲まれた部分の面積を求めさせる問題。

$\displaystyle\int_{\beta}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ を利用するとよい。

最後に接線を $y=f(x)$, $y=g(x)$ の接線の方程式を求めさせ、そのなす角を θ とした

ときの $\tan\theta$ を求めさせる。標準的な問題。

第３問 （数列）

（１）以前に漸化式は出ているが、漸化式そのものが問題となったのは初めてではないか。漸化式から一般項を求め、初項から第 n 項までの和 S_n を求めさせている。$S_n > 0$ となる最小の n の値を求めさせる問題は問題集などで頻出。

（２）数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ から作られている等差数列、等比数列から数列 $\{b_n + c_n\}$ の一般項を求めさせている。$\{a_n\}$ は $\{b_n + c_n\}$ の階差数列であるから $\{a_n\}$ の一般項も求めさせてもよいが、a_n は（３）で与えている。a_n を求めさせることにすると、さらに難しくなっただろう。

（３）a_1, a_2, a_3 を具体的に出し、連立させると２つの式がでてくる。これを辺々割ると、$r = 3$ と求まり、さらに a_1, a_2, a_3 の式から連立させて、x, d を求める。最後に b_n, c_n を求める。

一般的な数列の問題になれている生徒には第３問はかなり苦戦を強いる問題だったのではないか。

第４問 （空間ベクトル、内分点、外分点）

（１）２点からベクトルを作り、もう一つのベクトルと垂直であることから a を求める。

（２）（１）で求めた a を利用して、位置ベクトルを考えさせる。

（３）誘導にそって、未知数を求める。

空間ベクトルは生徒にとって苦手分野であるが、本問は平面ベクトルとして図を描き、形式的に空間ベクトルの計算をすれば、比較的やさしい問題であると思う。

第５問 （統計）

（１）平均との引き算より求まる。20 倍すれば、合計も求まる。

（２）表をみるだけ。

（３）$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ の平均が負となるので、

$(z$ の分散$) < (x$ の分散$) + (y$ の分散$)$ となる。（右辺の $2(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ がなくなるので）

（４）$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ の平均が負となるので３番だが、２番と迷うのではないか。

（５）中央値がわかっていれば解ける。

（６）階級値で Q 高校の合計を計算すると、1370 となる。合計の最小値は

$1370-25\times2=1320$、合計の最大値は $1370+25\times2=1420$。これらをそれぞれ 25 でわればよい。

（７）度数分布表から２番は読み取れない。

（３）はよく学習していないと難しいと思うが、それ以外は平易な問題である。

第６問（コンピュータ）

（１）（２）（３）についてはループを地道に計算していけば求まる。

（４）（５）についてもループを地道に計算していくのだが、プログラミングになれていないと難しい。

当然のことだが、以前に数学 A にあったプログラミング問題よりは難しい。ある程度習熟が必要。

2006

道内

２００６　北海道大学理系前期

1 実数 x,y,z は $x\leqq y\leqq z\leqq 1$ かつ $4x+3y+2Z=1$ をみたすとする.

(1) x の最大値と y の最小値を求めよ.

(2) $3x-y+z$ の値の範囲を求めよ.

2 空間内に，3 点 [illegible] を通る平面 α と，3 点 $B_0(2,0,0),B_1(2,1,0),B_2(\frac{5}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ を通る平面 β を考える.

(1) 空間の基本ベクトルを [illegible] とおくとき，ベクトル [illegible] を $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ で表せ．ただし，O は空間の原点を表す.

(2) 原点 O と α 上の点 P を通る直線が β 上の点 P' も通っているとする.

[illegible]

とおくとき，a,b を p,q で表せ.

(3) 点 P が α 上の点 A_0 を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき，点 P' が動いてできる図形 C' の方程式を (2) の p,q で表し，C' が楕円であることを示せ.

$\boxed{3}$ y 軸上の 2 点 $A(0,1), B(0,2)$ と x 軸上の正の部分を動く点 $P(a,0)$ を考える．$\theta = \angle APB$ とおく．

(1) $\cos\theta$ を a で表せ．

(2) θ が最大となる a を求めよ．

$\boxed{4}$

(1) 整数 m, n に対して積分 $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ．

(2) 自然数 n に対して積分 $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \cos kx)^2$

$\boxed{5}$ 1 つのさいころを投げ続けて，同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする．

(1) 4 回目以内（4 回目も含む）に終了する確率を求めよ．

(2) r 回目以内（r 回目も含む）に終了する確率を求めよ．ただし $r \geqq 2$ とする．

２００６　北海道大学文系前期

$\boxed{1}$ b は実数とし，c は 0 でない実数とする．2 次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とおく．

(1) α, β はともに 0 でないことを示せ．

(2) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ または $\dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数 r に等しいとき，b^2 を c と r を用いて表せ．

$\boxed{2}$ 空間の 2 点 P, Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが [illegible] $\overrightarrow{OQ} = (-\sin 3t, \cos 3t, -1)$ によって与えられている．ただし，$-180^\circ \leqq t \leqq 180^\circ$ とする．

(1) 点 P と点 Q の距離が最小となる t と，そのときの点 P の座標を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 0° 以上 90° 以下となる t の範囲を求めよ．

$\boxed{3}$ 実数 p に対して 3 次方程式 $4x^3 - 12x^2 + 9x - p = 0 \cdots (*)$ を考える．

(1) 関数 $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ の極値を求めて，$y = f(x)$ のグラフをかけ．

(2) 方程式 $(*)$ の実数解のなかで $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にあるものがただひとつあるための p の条件を求めよ．

$\boxed{4}$ 1 つのさいころを投げ続けて，同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする．

(1) ちょうど 3 回目に終了する確率を求めよ．

(2) 3 回目以内（3 回目も含む）に終了する確率を求めよ．

(3) ちょうど r 回目に終了する確率を求めよ．ただし $r \geqq 2$ とする．

２００６　北海道大学理系後期

$\boxed{1}$ a を実数とし，関数 $f(x)$ を

[illegible]

によって定義する．ただし，x は実数全体を動くとする．

(1) $t = \sin x + \cos x$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ の最大値が 3 となるときの a の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 実数 a, b, n は $0 < b < 1 < a$ かつ $n \geqq 2$ をみたすとし

$$f(a) = \int_1^a x^{-n}dx,\ g(b) = \int_b^1 x^{-n}dx$$

とおく．

(1) $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \frac{f(a)}{g(b)} < 1$ となる n の範囲を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to -\infty} \frac{f\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{g\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．このとき，関数

$$f(x) = \int_0^x e^t \cos t dt$$

の最大値をとる x とその最大値を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

$\boxed{4}$ 一辺の長さが 1 の正三角形 ABC を底面とする四面体 $OABC$ を考える．ただし，$OA = OB = OC = a$ であり，$a \geqq 1$ とする．頂点 O から三角形 ABC におろした垂線の足を H とする．

(1) 線分 AH の長さを求めよ．

(2) a を用いて線分 OH の長さを表せ．

(3) 四面体 $OABC$ が球 S に内接しているとする．この球 S の半径 r を a を用いて表せ．

２００６　旭川医科大学後期

$\boxed{1}$ x, y, z は負の数で，$x + y + z < -3$ および $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

問 1　$(x+1)(y+1)(z+1) \geqq 0$ であることを示せ.

問 2　x, y, z がすべて無理数である x, y, z の例を 1 組あげよ.

$\boxed{2}$ 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ に対して，$B = P^{-1}AP$ とするとき，次の問いに答えよ.

問 1　$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となるように θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を定め，α, β の値を求めよ.

問 2　問 1 で求めた θ を用いて，方程式 $31x^2 + 21y^2 + 10\sqrt{3}xy - 1 = 0$ の表す曲線を原点の回りに角 $-\theta$ だけ回転移動して得られる曲線の方程式を求めよ.

問 3　2 つの実数 a, b のうち大きい方を $max\{a, b\}$，小さい方を $min\{a, b\}$ で表す．ただし，$a = b$ のときは，$max\{a, b\} = min\{a, b\} = a$ とする.

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = min\left\{\frac{1}{\sin x, \dfrac{1}{\cos x}}\right\}$$

$$g(x) = max\left\{\tan x, \frac{1}{\tan x}\right\}$$

とするとき，次の問いに答えよ.

問 1　2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ はそれぞれ直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$ に関して対称であることを示せ.

問 2　2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とするとき，e^s の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底である.

$\boxed{4}$ 2 以上の自然数 n に対し，$f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$ $(x \geqq 0)$ とおくとき，次の問いに答えよ.

問 1　$f_n(x)$ の増減，グラフの凹凸を調べ，$y = f_n(x)$ のグラフの概形を描け.

問 2　$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を n を用いて表せ.

問 3　$0 \leqq x \leqq 1$ で $f_n(x) \leqq f_n(1)$ であることと問 2 の結果とを用いて，無限級数 $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots$ の和を求めよ.

２００６　帯広畜産大学前期

$\boxed{1}$ 実数 s, t, x, y, z, w に対して

$$W=\begin{pmatrix}1 & s\\ 3 & t\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$$

とする．W が逆行列をもたないとき，次の問に答えなさい．

(1) t を s で表しなさい．

(2) 行列 X が条件

$WXW=W\cdots(A)$

を満たすとき，x を s,y,z,w を用いて表しなさい．

(3) 実数 a,b,c,d に対して

[illegible] $\geqq (ax+by+cz+dw)^2$

が成り立つことを示しなさい．

(4) $s=2$ のとき，(A) 式を満たす行列 X の中で，$x^2+y^2+z^2+w^2$ が最小となるものを求めなさい．

$\boxed{2}$ 点 $P(0,2a-1)$ から曲線 $C_1: y=a-ax^2$ に引いた 2 本の接線の各接点を A,B とし，曲線 C_1 に点 A,B で接する円を C_2 とする．ただし，$a>1$ とする．

(1) 点 A,B の座標を求めなさい．

(2) 円 C_2 の中心を E とする．点 E の座標と円 C_2 の半径を求めなさい．

(3) $a=\dfrac{3}{2}$ のとき，扇形 AEB における弧 AB と曲線 C_1 とで囲まれる部分の面積を求めなさい．

道外

２００６　東北大学理系前期

$\boxed{1}$

連立不等式

$x^2-6x+y^2+5\leqq 0,\ x+y\leqq 5$

の表す領域 D を図示せよ。また, 曲線

$x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$

が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

図-1 のような $AB=BC=CD=DA=AC=1$ である四角形 $ABCD$ を考える。この四角形 $ABCD$ を AC で折り, 図-2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図-2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α, $\alpha=\angle BCD$, とし $0^\circ<\alpha<120^\circ$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 図-2 において,A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$ と α とで表せ。

(2)$\overrightarrow{AH}$ の長さを α を用いて表せ。

(3)H が図-2 における $\triangle BCD$ の重心となるときの角度 α を求めよ。

$\boxed{3}$

ある商店街が次のようなくじを計画した。商店街の各商店は 1000 円の買い物ごとに 1 枚の抽選券を客に配布し, また, 配布した抽選券 1 枚につき手数料 35 円をくじを管理する組合に拠出する。客は抽選券の枚数と同じ回数のくじを引くことができる。くじは 500 個の球の入った袋をよくかきまぜて 1 個を取り出す方法で行われ,500 個の球のうち 1 個だけが当たりとし, 取り出された球はそのつど袋に戻すことにする。そして, 当たり球が出たならば 1 万円相当の景品がもらえ, 外れたならば景品は無いことにする。以下の問に答えよ。

(1)10 枚の抽選券を使ってくじを引く人がもらえる景品の相当額の期待値を求めよ。

(2) それぞれが 4 枚の抽選券を使ってくじを引く客が 2 人いるとする。各人が 4 回のくじを引いたとき, 当たり外れの順序が完全に一致する確率を求めよ。ただし, 小数点第 3 位は四捨五入せよ。

(3) くじに要する経費は, 抽選券の配布枚数に関係のない管理運営費 30 万円と景品代との合計であるとする。くじ管理組合に拠出されたお金でくじに要する経費の期待値がまかなえるためには, 商店街全体としての商品売り上げ目標をいくら以上にすればよいか。

$\boxed{4}$ $x>0$ において, 関数

$f(x)-x\sin\dfrac{\pi}{x}$

を考える。関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と書くことにし, 以下の問に答えよ。

(1)$f'(2)$ を求め,$x>2$ のとき $f'(x)<1$ であるとこを示せ。

(2)k が自然数のとき,$f'(\frac{1}{k})$ を求めよ。

(3)$f'(x)=1$ となる x を値の大きいものから順に $x_1, x_2, x_3, \cdots$ とおく。

$n \geqq 2$ である自然数 n に対して,$\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n-1}$ を示せ。

(4) $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ を求めよ。

次の $\boxed{5}$,$\boxed{6}$ は理学部・工学部の受験者のみ解答すること。

$\boxed{5}$ 3 次正方行列 A, B, O を

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

とする。以下の問に答えよ。

(1)2 以上の自然数 k に対して,$(A+B)^k$ を求めよ。

(2) すべての自然数 m, n に対して,A^mB^m および B^mA^m を求めよ。

(3) 等式 $(A+B)X = X(A+B) = O$ を満たす 3 次正方行列

$X=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}$ を求めよ。

$\boxed{6}$ 連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2,\ y \leqq 0$ が表す xy 平面無いの領域を D とする。また,a を定数とし, 不等式 $y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問に答えよ。

(1)D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)(1) の範囲の a に対して,D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3)(2) で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。

２００６　東北大学理系後期

$\boxed{1}$ 多項式 $F(x)$ を零でない多項式 $G(x)$ で割った余りを $R(x)$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 方程式 $F(x)=0$ と $G(x)=0$ の共通解は方程式 $R(x)=0$ の解であることを示せ。

(2)a は実数の定数として

[illegible]

[illegible]

とする。$G(x)$ を $R(x)$ で割った余り $S(x)$ を求めよ。さらに, 方程式 $F(x)=0$ と $G(x)=0$ の共通の実数解を求めよ。

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ に対して初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする。p は定数とし, $n-1,2,3,\cdots$ に対し

$$S_n=\frac{n}{3}(2p+a_n)$$

が満たされているものとし,$b_n=a_{n+2}-a_{n+1}$ とおく。$a_3=q$ として以下の問に答えよ。

(1)$b1,b_2,b_3$ を p,q を用いて表せ。

(2) 一般項 b_n を p,q,n を用いて表せ。

(3) 一般項 a_n を p,q,n を用いて表せ。

$\boxed{3}$ 1 個のサイコロを振り, 出た目が 1 から 5 ならば出た目の数を総得点に加算し, 出た目が 6 ならば総得点を 0 にするというゲームを考える。ゲーム開始時の総得点は 0 とする。たとえば,3 回サイコロを振ったときに出た目が順に 1,2,3 ならば総得点は 6, 出た目が順に 4,6,5 ならば総得点は 5 である。以下の問に答えよ。

(1) ゲーム開始後サイコロを 2 回振った後の総得点の期待値を求めよ。

(2) ゲームを開始してサイコロを 3 回振った後の総得点が 7 以上となる確率を求めよ。

(3) 現在の総得点が S のとき, 次に 1 回サイコロを振った後の総得点の期待値が S 以下となるための S についての条件を求めよ。

$\boxed{4}$ a は正の定数とし,$-1<x<1$ において定義される関数

[illegible])

に関して以下の問に答えよ。ただし, 対数は自然対数とする。

(1)$-1<x<1$ において第 2 次導関数 $f''(x)$ は $f''(x)<0$ であることを示せ。

(2)$-1<x<1$ において $f(x)$ の最大値を与える x の値 x_0 を a を用いて表せ。

(3)$a=1$ の場合,$0<x_1<1$ であって $f(x_1)=0$ となる x_1 が存在することを示せ。なお, 必要ならば $\lim_{t\to+0} t\log t=0$ は既知としてよい。

(4)$a=1$ の場合の,$-1<x<1$ におけるグラフ $y=f(x)$ の概形をかけ。

次の $\boxed{5}$,$\boxed{6}$ は理学部・工学部の受験者のみ解答すること。

$\boxed{5}$ xyz 空間において半径が 1 で x 軸を中心軸として原点から両側に無限に伸びている円柱 C_1 と, 半径が 1 で y 軸を中心軸として原点から両側に無限に伸びている円柱 C_2 がある。C_1 と C_2 の共通部分のうち $y \leqq \dfrac{1}{2}$ である部分を K とおく。

以下の問に答えよ。

(1)u を $-1 \leqq u \leqq 1$ を満たす実数とするとき, 平面 $z=u$ による K の切断面の面積を求めよ。

(2)K の体積を求めよ。

$\boxed{6}$ $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ とし, 実数を成分とする 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。

(1)$x=a+d$ として,$A^2=xA+yE$ を満たす実数 y を求めよ。

(2)A が $A^3=E$ かつ $A \neq E$ を満たすことは,A が $A^2+A+E=O$ を満たすことと同値であることを示せ。

(3)$A^6=E$ かつ $A^2 \neq E$ ならば,$A^3=E$ または $A^3=-E$ が成り立つことを示せ。

２００６　東京大学理科前期

$\boxed{1}$

O を原点とする座標平面上の 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 で, 条件

$\overrightarrow{OP_{n-1}}+\overrightarrow{OP_{n+1}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_n}\ (n=2,3)$

を満たすものを考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)P_1, P_2 が曲線 $xy=1$ 上にあるとき,P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。

(2)P_1, P_2, P_3 が演習 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき,P_4 もこの円周上にあることを示せ。

$\boxed{2}$

コンピュータの画面に, 記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき, 各操作で, 直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は, それまでの経過に関係なく,p であるとする。

最初に, コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い, 記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に, 記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし, 記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)P_2 を p で表せ。

(2)$n \geqq 3$ のとき,P_n を p と n で表せ。

$\boxed{3}$

O を原点とする座標平面上に,y 軸上の点 $P(0,p)$ と, 直線 $m : y = (\tan\theta)x$ が与えられている。ここで,$p > 1,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

いま, 傾きが α の直線 l を対称軸とする対称移動を行うと, 原点 O は直線 $y = 1$ 上の, 第 1 象限の点 Q に移り,y 軸上の点 P は直線 m 上の, 第 1 象限の点 R に移った。

(1) このとき,$\tan\theta$ を α と p で表せ。

(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し, そのときの p の値を求めよ。

条件 : どのような θ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ に対しても, 原点を通り直線 l に垂直な直線は $y = \left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。

$\boxed{4}$

次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える。

条件 (A) : x, y, z は正の整数で,$x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) で,$y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組 (a, b, c) が条件 (A) を満たすとする。このとき, 組 (b, c, z) が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は, 無数に存在することを示せ。

$\boxed{5}$

$a_1 = \dfrac{1}{2}$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(1 + a_n)^2}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

によって定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n - 1, 2, 3, \cdots$ に対し $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおく。

$n>1$ のとき,$b_n>2n$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

$\boxed{6}$

$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^x)}{e2x-1}$ について, 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は, 実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ。すなわち, 任意の実数 a に対して,$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問 (1) で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。このとき, 定積分 $\displaystyle\int_8^{27} g(d)dx$ を求めよ。

２００６　東京大学理科後期

$\boxed{1}$

xy 平面上で t を変数とする媒介変数表示

$$\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=t+2t^2 \end{cases}$$

で表される曲線を C とする。

次の問に答えよ。

(1)$t\neq-1$ のとき,$\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ。

(2) 曲線 C 上で

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$$

を満たす点 A の座標を求めよ。

(3) 曲線 C 上の点 (x,y) を点 (X,Y) に移す移動が

$$\begin{cases} X=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x-y) \\ Y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x+2y) \end{cases}$$

で表されているとする。このとき Y を X を用いて表せ。

(4) 曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

$\boxed{2}$

a を正の整数,θ を $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。xyz 空間において, 点 $(a,0,0)$ と点

$(a+\cos\theta, 0, \sin\theta)$ を結ぶ線分を,x 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を S とする。さらに,S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。

次の問いに答えよ。

(1)V を a と θ を用いて表せ。

(2)$a=4$ とする。V を θ の関数と考えて,V の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$

数列の和の公式
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$$
などについて, 次のような一般的な考察をしてみよう。

p, n を自然数とする。

(1)$p+1$ 次多項式 $S_p(x)$ があって, 数列の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ が

$S_p(n)$ と表されることを示せ。

(2)q を自然数とする。(1) の多項式 $S_1(x), S_3(x), \cdots, S_{2p-1}(x)$ に対して,
$$\sum_{j=1}^{q} a_j S_{2j-1}(x) = x^q(x+1)^q$$
が恒等式となるような定数 $a_1, \cdots, a_q$ を q を用いて表せ。

(3)q を 2 以上の自然数とする。(1) の多項式 $S_2(x), S_4(x), \cdots, S_{2q-2}(x)$ に対して,
$$\sum^{q-1} \text{[illegible]})$$
が恒等式となるような定数 c と $b_1, \cdots, b_{q-1}$ を q を用いて表せ。

(4)p を 3 以上の奇数とする。このとき,
$$\frac{d}{dx}S_p(x) = pS_{p-1}(x)$$
を示せ。

２００６　名古屋大学理系前期

$\boxed{1}$ xy 平面上に曲線 $C: y=\log x\ (x>0)$ を考える。

(1) 曲線 C の接線で点 $(0, b)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2) 平面上に 2 組の点列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ を次のように定める。A_1 を (1,0) とする。A_n が

定まったとき,A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし,B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする。このとき,2 つの線分 A_nB_n と B_nA_{n+1} および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}$ の和を求めよ。ここで,$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい。

$\boxed{2}$ s を実数とする。$(u_1, v_1) = (s, 1)$ とし,(u_n, v_n) $(n \geqq 2)$ を次の漸化式で定める。

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

s が実数全体を動くとき,(u_n, v_n) が描く xy 平面上の図形を l_n とする。

(1) 図形 l_n $(n \geqq 1)$ の方程式を求めよ。

(2)l_{2k-1} (k は正の整数) と y 軸との交点を中心とし,l_{2k} に接する円の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上に 3 点 $(0,0), A(4,2), B(6,0)$ を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき, 直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点 $P(p,q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし,l に関して A と対称な点を $A'(t,0)$ $(0 \leqq t \leqq 6)$ とするとき,p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $P(p,q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3) 点 $P(p,q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $P(p,q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ。

$\boxed{4}$ 正六面体の各面に 1 つずつ, サイコロのように,1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて, 向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて, 次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする。」ただし, これらの 4 個の数字が a_1, a_2, a_3, a_4 のとき, それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後, 底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n \geqq 1)$ で表す。

(1)$n \geqq 1$ のとき [illegible]) を求めよ。

(2)$p_n(m)$ $(n \geqq 1,\ m=1,2,3,4,5,6)$ を求めよ。

２００６　京都大学理系前期

問題訂正

$\boxed{3}$ の 3 行目 (1 ページ)

（誤）関数の接線

↓

（正）関数のグラフの接線

$\boxed{1}$ (30 点)

$Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが,$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという. このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解を持つことを示せ。

$\boxed{2}$ (35 点)

点 O を原点とする座標空間の 3 点を [illegible] とする. 線分 OP と線分 AB が交点を持つような実数 t が存在することを示せ。またそのとき, 交点の座標を求めよ。

$\boxed{3}$ (30 点)

関数 $y=f(x)$ のグラフは, 座標平面で原点に関して点対称である. さらにこのグラフの $x \leqq 0$ の部分は, 軸が y 軸に平行で, 点 $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4})$ を頂点とし, 原点を通る放物線と一致している. このとき $x=-1$ におけるこの関数の接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ (35 点)

2 以上の自然数 n に対し,n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。

$\boxed{5}$ (35 点)

$\triangle ABC$ に対し, 辺 AB 上に点 P を, 辺 BC 上に点 Q を, 辺 CA 上に点 R を, 頂点とは異なるようにとる. この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき, この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ.

$\boxed{6}$ (35 点)

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ として, 関数 F を
$F(\theta)=\displaystyle\int_0^{\theta} x\cos(x+\alpha)dx$
で定める.θ が $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ の範囲を動くとき,F の最大値を求めよ.

２００６　京都大学理系後期

$\boxed{1}$(30 点)

1 次式 $A(x),B(x),C(x)$ に対して $\{A(x)\}^2+\{B(x)\}^2=\{C(x)\}^2$ が成り立つとする. このとき $A(x)$ と $B(x)$ はともに $C(x)$ の定数倍であることを示せ.

$\boxed{2}$(35 点)

a を実数として, 行列 A を $A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ と定める. $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし, 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次の式で定める.
$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, $n=1,2,\cdots$
このとき数列 $\{x_n\}$ が収束するための a の必要十分条件を求めよ。

$\boxed{3}$(35 点)

さいころを n 個同時に投げるとき, 出た目の数の和が $n+3$ になる確率を求めよ.

$\boxed{4}$(35 点)

平面上の点 O を中心とし半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A,B,C がある. $\triangle ABC$ の内接円の半径 r は $\dfrac{1}{2}$ 以下であることを示せ.

$\boxed{5}$(35 点)

$H>0,\ R>0$ とする. 空間内において, 原点 O と点 $P(R,0,H)$ を結ぶ線分を,z 軸のまわりに回転させてできる容器がある. この容器に水を満たし, 原点から水面まで高さが h のとき単位時間あたりの排水量が, $\sqrt{h}$ となるように, 水を排出する. すなわち, 時刻 t までに排出された水の総量を $V(t)$ とおくとき, $\dfrac{dV}{dt}=\sqrt{h}$ が成り立つ. このときすべての水を排出するのに要する時間を求めよ.

$\boxed{6}$(30 点)

$\tan 1^\circ$ は有理数か.

２００６　九州大学理系前期

$\boxed{1}$(配点 50 点)

この問題の解答は, 解答紙$\boxed{13}$の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

次の問いに答えよ。ただし,$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ であること, また,e は自然対数の底で,$e<3$ であることを用いてよい。

(1) 自然対数 n に対して, 方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2)(1) の 2 つの実数解を $\alpha_n,\ \beta_n\ (\alpha_n<\beta_n)$ とするとき,

$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\ ne,\beta_n$

が成り立つことを示せ。また,$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$(配点 50 点)

この問題の解答は, 解答紙$\boxed{14}$の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

$\triangle OAB$ において, 辺 OB の中点を M, 辺 AB を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点を P とする。ただし,$0<\alpha<1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし,Q を通り, 線分 AM に垂直な直線が, 辺 OA またはその延長と交わる点を R とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として, 次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a},\vec{b}$ および α を用いて表せ。

[illegible] で $\cos\theta=\dfrac{1}{6}$ とする。このとき, ベクトル $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$ と α を用いて表せ。

(3)(2) の条件のもとで, 点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。

$\boxed{3}$(配点 50 点)

この問題の解答は, 解答紙$\boxed{15}$の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

2 つの数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ は,$a_1=b_1=1$ および, 関係式

$a_{n+1}=2a_nb_n$

$b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$

をみたすものとする。

(1)$n \geqq 3$ のとき,a_n は 3 で割り切れるが,b_n は 3 で割り切れないことを示せ。

(2)$n \geqq 2$ のとき,a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

$\boxed{4}$(配点 50 点)

この問題の解答は, 解答紙$\boxed{16}$の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

関数

$f(x)=||\sin x-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}|$

を考える。ただし,$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。さらに,$0 \leqq a \leqq \frac{\pi}{2}$ に対して,

$F(a)=\int_0^a f(x)f(x-\frac{\pi}{2})dx$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)$f(x)=0$ となるとき x を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)$F(a)$ を求めよ。

$\boxed{5}$(配点 50 点)

この問題の解答は, 解答紙$\boxed{17}$の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

区間 $[a,b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは,

$a \leqq x \leqq b$ ならば,$a \leqq f(x) \leqq b$

が成り立つこととする。$f(x)=4x(1-x)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) 区間 $[0,1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。

(2)$0<a<b<1$ とする。このとき, 区間 $[a,b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。

２００６　九州大学理系後期

$\boxed{1}$

2 つの曲線 $C_1: y=ax^2,\ C_2: x^2+(y-p)^2=r^2$ が異なる 2 点で接するとする。ただ

し,a,p,r を正の定数とする。

1．p を a と r の式で表せ。また, 曲線 C_1 と C_2 の接点の x 座標 q を a と r の式で表せ。ただし $q>0$ とする。

2．$a\cdot r=1$ のとき, 曲線 C_1 と C_2 によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(配点 30 点) (解答紙は,5 枚のうち 1 枚目,$\boxed{53}$を使用せよ。)

$\boxed{2}$

A と B の 2 つの袋があり,A の袋には赤玉が 2 個, 白玉が 5 個,B の袋には赤玉が m 個, 白玉が n 個入っている。ただし,m と n は 0 以上の整数で $m+n=4$ とする。

1．A の袋から 3 個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉が 2 個, 白玉が 1 個である確率 P_1 を求めよ。

2．A の袋から 3 個の玉を取り出し, それらを B の袋に入れる。その後 B の袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉が 1 個, 白玉が 1 個である確率 P_2 を求めよ。

3．確率 P_2 が最大となる m と n の値を求めよ。

(配点 30 点) (解答紙は,5 枚のうち 2 枚目,$\boxed{54}$を使用せよ。)

$\boxed{3}$

数列 $\{a_n\}$ を

$a_1,\ a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{5a_n+c}\ (n=1,2,\cdots)$

と定める。ただし,c は $0\leqq c\leqq 2$ を満たす定数とする。

1．$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくとき,

$b_{n+1}-pb_n=q\ (n=1,2,\cdots)$

となる定数 p,q を c の式で表せ。

2．a_n を n と c の式で表せ。

3．$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を c の式で表せ。

(配点 30 点) (解答紙は,5 枚のうち 3 枚目,$\boxed{55}$を使用せよ。)

$\boxed{4}$

平面上に異なる n 個の点 [illegible] を考える。ただし,$x_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$ とする。また, 次の関数 $f(a)$ の最小値を与える a を a_0 とする。

$$f(a) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k - y_k)^2$$

1．a_0 を求めよ。

2．n 個の点のいずれも, 直線 $y = a_0 x$ 上にはないものとする。このとき,n 個の点のうち少なくとも 1 点は直線 $y = a_0 x$ の上側にあることを示せ。

3．$x_k = bk,\ y_k = c\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ とする。ここで,b, c は正の定数である。このとき,n 個の点のうちの 1 点が直線 $y = a_0 x$ 上にあるための条件は,b, c によらない条件であることを示せ。

(配点 30 点) (解答紙は,5 枚のうち 4 枚目, $\boxed{56}$ を使用せよ。)

$\boxed{5}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ。

1．方程式

$$\begin{cases} 15x + 6y = \lambda x \\ 6x + 10y = \lambda y \end{cases}$$

が $x = y = 0$ 以外の解をもつときの λ の値を 2 つ求めよ。

2．1．で求めた λ の 2 つの値を $\alpha, \beta\ (\alpha > \beta)$ とするとき,

$$AT = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を満たし, 逆行列をもつ行列 T を 1 つ求め, その逆行列 T^{-1} を求めよ。

3．A^n を求めよ。

4．$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を 0 でない列ベクトルとし,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\ (n = 1, 2, \cdots)$$ とする。このとき,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n}$$

を求めよ。ただし,$x_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ と仮定する。

(配点 30 点) (解答紙は,5 枚のうち 5 枚目, $\boxed{57}$ を使用せよ。)

第三部　数学史

１．数学史

①ギリシア時代

現在我々が数学というのは一般にヨーロッパで形成されたものであり、その形態がギリシアに始まるとされている。ギリシアといっても地域的には広範囲に渡る。タレス（624?～547?BC）は今のトルコ、ピタゴラス（572?～492?BC）やゼノン（495?～435?BC）はイタリア半島、ユークリッド（300?BC）はエジプト、アポロニウス（262～170?BC）はトルコ、アルキメデス（287?～212?BC）はシチリアにいた。数学の基礎はプラトンの学園「アカデメイア」、アリストテレスの学園「リュケイオン」で形成されていった。プラトンはイタリア系の数学を重要視した。また、ギリシア数学にはバビロニア起源といわれる「数論」とエジプト起源といわれる「幾何」の２つの流れがあった。小石を置いて離散的に考えられる「数」と、砂に図を描いて連続的に作られる「形」とは、両立しにくかったのもを調和させたのが、ユードクソス（408?～355?BC）の「比の理論」で、それによってピタゴラスの比がユークリッドの幾何に収束したといわれている。中世に流布していた比は、その俗流化した形にすぎないが、ギリシアの影を強く残していることはたしかである。

数学者ヤコビの言葉を借りると、「ギリシア数学の終焉は、キリスト教の普及と時を同じゅうした。しかも、キリスト教は、科学にはあまり好意的でなく、その布教にとって、知的活動への配慮や共感は害になった。そして人間性は失墜し、やがて科学が人びとの念頭にもどるまで、退潮の一途をたどった。」

キリスト教の正統争いのみならず、異教の弾圧があったのはもちろんで、ギリシア数学は処女の数学者ヒュパティアの処刑をもって終焉する。

②中世

「ギリシア文化」が解体した後、それを継承したのは「アラビアの文化」であった。しかし「アラビア数字」といわれるものは実は「インド数字」であって、インドから取り入れられた。インドでは２世紀より以前に「０」の元となる「空」の概念が形成されていた

といわれているが、それはナーガールジュナ（竜樹）が当時組織した大乗仏教中観派で形成された英知であるといわれている。中観派は「法華経」を宣揚していた。その後「０」はアラビアを通じてヨーロッパに伝わり、現在のような様式になるが、ヨーロッパに伝わった当時、長く「不吉な数字」として、忌み嫌われたといわれている。現在では「０」はなくてはならないものとなっているが、１つの発見や哲学が浸透するには相等の星霜を重ねなければならないということの証左である。「０」の発見は東洋の英知が果たした大きな財産である。「ギリシアの幾何」に対し、「アラビアの代数学」といわれる。アルゴリズム（プログラムの流れ)、アルジェブラ（代数）などは数学者アル・ファリズミ（780?〜850）の名にちなんだものだといわれているが、彼がいたのは、ウズベク共和国であり、方程式の詩人ハイヤム（1038〜1124）のいたのはバクダッドだが、そのころ支配していたのは、トルコ族であった。商業に根ざしたイスラムの代数は「ギリシアの聖」に対し、「イスラムの俗」というとらえ方をされている。11 世紀から 13 世紀にかけては中国数学の最盛期なのだが、ヨーロッパ中心の学問の世界ではあまり語られない。しかし、活字と紙、火薬、羅針盤などヨーロッパが世界支配の道具として活用したものは中国起源であった。13 世紀から 14 世紀にかけて、スコラ哲学が形成される。これはアリストテレスに代表されるギリシア哲学の影響のもとにトマス・アクイナスによって形成された。中国では仏教の影響のもと朱子が儒学を形成した。また儒学の祖、孔子の教えに反発して老荘思想がおこったといわれている。ピタゴラス派以来の問題、分割できない「点」と、連続的な等分可能な「線」との矛盾はスコラ哲学の大きな論点だった。

③近代

16 世紀を代表する数学者は、カルダノ（1501〜1576）だが、彼は数学者である以上に占星術と医術で名をなし、しかも一流のギャンブラーであることによって、確立論の祖となった。この当時は、アラビア渡りの方程式の術が魔術師たちの技を競う舞台であり、3 次方程式や 4 次方程式が研究された。そのなかから負数がだんだんと正統権を持つようになり、虚数が産声をあげる。数についてはイタリアのボンベリ（1530〜?）から、オランダのステヴィン（1548〜1620)、イギリスのネピア（1550〜1617）という源流がある。そこで法則が文字で表現され、数が小数で表示され、近代の数学が準備される。17 世紀は

微積分に代表されるように「解析学」の時代である。またケプラーやガリレオからニュートンやライプニッツにいたる力学の流れがある。自然の法則性としての「物理」と、その表現形式としての「数学」とは、表裏一体であった。18 世紀の数学職人たちを芸人として抱えたのは、パリやペテルブルグの啓蒙絶対君主で、宮廷サロン「アカデミー」がその住処となる。代表的な数学者はパリのダランベール、ベルリンのラグランジュ、ペテルブルグのオイラーである。19 世紀はアカデミズムの形成と公教育制度の確立とは、「数学像」の個別的固定化をもたらした。それは日常レベルの数学と学問レベルの数学の乖離を促し、専門分化体制の時代となった。代表的な数学者としては５次方程式の理論を考えながら、２０歳の生涯を恋と革命と数学に散らしたガロア（1811～1832)、非ユークリッド幾何を考えながらも世に認められず、数学についで革命にも挫折したボヤイ（1802～1860)。リーマンやカントール（1845～1918）は背景に三角関数の級数問題があり、振動や拡散の問題に発している。それは 19 世紀の物理学の主題は電気や熱の問題に基礎をおいていたからだ。１９世紀数学史はドイツ中心にかかれるが、アイルランドのハミルトン（1805～1865）やイギリスのケイリー（1821～1891）のような、線型代数学派の位置もだんだん認められるようになった。線型性の認識は 18 世紀の振動の微分方程式に発しており、幾何学と物理学に関連が深い。またカントールやデデキント（1831～1916）の集合論や実数論も 19 世紀の大きな成果といえる。20 世紀はヒルベルトとともに語られ、公理主義の時代といわれる。また一般には抽象数学の時代にはいる。40 年代以後には、フランスに数学者集団ブルバギが活躍する。彼らの旗印は「数学的構造」であった。ここで、法則性自体が定式化された。「演算のあり方」は代数的構造であり、「極限と近似のあり方」は位相的構造である。20 世紀を代表する解析学者にはノイマン（1903～1957)、ウィナー（1894～1964)、コルモゴロフ（1903～）があげられるが、３人とも「情報と確率」に関心を持っていた。

２．数学教育史

（１）ギリシアの数学教育

14 歳までは第１次教育で文学（朗読、習字、書取り、文書の勉強)、音楽、体操、度量衡を含む実用算術を学んだ。幾何学、天文学が 14 歳から 18 歳までの第２次教育で導入さ

れたのは、イソクラテス（紀元前 436～338）のころ。イソクラテス自身は「たとえなんの役に立たなくとも、若気のあやまちを防ぐものであり、さらにその他のどんな科目も、これら以上に有効適切に案出され得るものはない。しかしこれらの科目は、生徒が大人になるころまでには、捨て去られてしまうだろう。」しかしこれらの科目を適当に勉強することは、少年に集中力を与え、その精神を訓練し、その知力を鋭くする。その結果、他のもっと大切なことがらも、彼はすぐにすらすらと学習するだろう。

円積線として知られた曲線の発明者エリスのヒッピアスはスパルタで講義したときには報酬をとらなかった。スパルタ人は天文学、幾何学、計算術の講義には辛抱できなかったといわれている。すらすらと計算できたのはごく少数だけで、かれらの好んだのは、歴史と考古学とであった。

ピタゴラスは、エジプトで行われていた教育法、ことに数学研究を故国に移植しようと切望したが、サモスでは誰一人傾聴者がいなかった。

ユークリッドのもとで幾何学を学び始めた弟子の話で、「こんなことを勉強して、いったいどんな利益があるのでしょうか。」と聞いた者がいたが、ユークリッドは奴隷に「あの男に 3 ペンスおやり。あの男は、勉強したからにはどうしてもお金がほしいのだから。」といった、という逸話がある。ギリシア時代と現在とで数学に対する評価はあまり変わっていない。

（２）日本の数学教育（江戸時代）

江戸時代は一般庶民を含めて、日本人全体の文化水準は高かったといってよい。江戸幕府は国として教育制度を定めかなったから、必要を感じた藩が独自に学校を設けていた。民間でも塾ができて、士農工商の区別なく人々の教育を担っていた。中世のころに出現した「寺子屋」も江戸時代では庶民教育には重要な役目を果たしていた。幕末では日本全土で２万軒以上の寺子屋が存在し、この数は日本全土の村の数を上回っていたことを考えると、国民のほぼ全員が寺子屋に通うことが可能であったことを意味する。寺子屋では「読み・書き・そろばん」で代表される内容が教育されていた。この場合「そろばん」とは、そろばんを使って行う生活上の計算処理全体である。『塵劫記』はその意味で当時日本人が必要としていた数処理をほとんど網羅する内容を含んでいた。したがって『塵劫記』を

教科書として使うことが最適であった。吉田光由は『塵劫記』を庶民の寺子屋の教科書としてではなく、江戸時代初期、そろばんを使うことが多かった商人をはじめとする豊かな生活者に対する”算法の道しるべ”として著した。『塵劫記』が世にでると多くの人々に歓迎され、偽版が多く出まわり、そろばん塾がいくつも現れて、『塵劫記』は一般庶民にまで広がっていった。庶民は『塵劫記』のすべてを知る必要もないので、『塵劫記』そのものではなく、その一部を抜き出して教科書とするものも多くなってきた。吉田光由が出版をやめてから版木屋によって刊行された『塵劫記』は、版木屋の西村又左衛門が寛永 20 年（1643）に刊行した版が元になっている。西村の版は、吉田光由の刊行した寛永 18 年版よりも寛永 8 年の版や寛永 11 年の版に近い内容である。これは 3 巻からできているが、そのうちの第 1 巻は特に基本的な生活数学になっているため、利用頻度が高かったからである。現存する算書でもこの部分の痛みがひどい。何代にも渡って使われたためであろう。

江戸時代を通して教科書として使われたと思える『塵劫記』およびその類書では、小川愛道の編集した『新編塵劫記　算法指南車』が一番普及したであろう。この書は『塵劫記』をすべて載せており、しかも編者の名を記している。それまでの『塵劫記』には版木屋の名はあっても編者の名を伏せていた。刊行された塵劫記の名の付いた算書が非常に多い。いずれも足し算と引き算の説明はない。これらは「地算」といって教育以前の計算法であったようである。すなわち、6 歳以前における家庭内教育の範囲内のことである。したがって、寺子屋や塾での数学教科書としては掛け算が最初であった。寺子屋は 1 つの部屋に 40 人も 50 人も入り、自宅から持参した机を置いて学習する。現存する寺子屋の絵や絵馬などから判断すると、規則ある並び方はなかったようだ。師匠から与えられた学習をこなすと、師匠の座っている所に持って行き、みてもらう。ここで 1 対 1 の指導になるが理解できたと師匠が判断しない限り先に進むことはなかった。寺子により内容も教科書も異なっていたし、そろばんについても皆が同じ教科書である必要はなかったはずである。

（3）日本の数学教育（現代）

数学の学習には「定義」といって、覚える事柄や約束はあるが、「解き方」はそれらを利用して、自分で考えるべきで、現在の数学教育は解き方を教えて、その通り解けるかどうかを試すものになっている。元来数学教育はギリシア時代に始まり、物事を筋道だって

考える訓練をするものであった。この点については京都大学名誉教授の森毅氏は次のように述べている。「『解き方』を教えて、それができたかどうかテストをする、といった『高校数学』風のテストはやめるべきだ。また『解き方』を教えていないところをテストするぐらいのほうがよい。入試本番では、『解き方』のわからない問題が出る、と思った方がよい。『解き方』を知っていて解く、なんて癖は、受験本番にはむしろ有害だ。」

（４）学習指導要領の流れ

○１９５１年（昭和２６年）試案

－数学科の一般目標－

①数学の有用性と美しさを知って、心理を愛し、これを求めていく態度を養う。

②明るく正しい生活をするために、数学の果たしている役割の大きいことを知り、正義に基いて自分の行為を律していく態度を養う。

③労力や時間などを節約したり活用したりする上に、数学が果たしている役割の大　きいことを知り、これを勤労に生かしていく態度を養う。

④自主的に考えたり行ったりする上に、数学が果たしている役割の大きいことを知り、数学を用いて自主的に考えたり行ったりする態度を養う。

⑤数学がどのようにして生まれてきたかを理解し、その意義を知る。

⑥数学についての基礎となる概念や原則を理解する。

⑦数量的な処理によって、自分の行為や思考をいっそう正確に、的確に、しかも能　率を上げるようにする能力を養う。

⑧自分の行為や思考をいっそう正確に、的確に、しかも能率を上げるようにするこ　とが、どんなに重要なものであるかを知り、これを日常生活に生かしていく習慣を　養う。

⑨社会で有為な人間となるための資質として、数学についてのいろいろな能力が重　要なものであることを知り、数学を生かして社会に貢献していく習慣と能力とを養　う。

⑩職業生活をしていくための資質として、数学についてのいろいろな力が重要なも　のであることを知り、いろいろな職業の分野で、数学を生かして用いていく習慣と　能力を養う。

原則　「具体から抽象へ」「経験中心」

〇１９５６年（昭和３１年）試案

・高等学校の目的、目標と教育課程の性格

高等学校教育の目的と目標は、教育基本法及び学校教育法に定められたところによらなければならない。

〇教育基本法第１条（教育の目的）

教育は、人格の完成をめざし、平和的な国家及び社会の形成者として、真理と正義を愛し、個人の価値をたっとび、勤労と責任を重んじ、自主的精神に充ちた心身ともに健康な国民の育成を期して行われなければならない。

〇学校教育法第４１条

高等学校は、中学校における教育の基礎の上に、心身の発達に応じて、高等普通教育及び専門教育を施すことを目的とする。

〇同法第４２条

高等学校における教育については、前条の目的を実現するために、左の各号に掲げる目標の達成に努めなければならない。

一　中学校における教育の成果をさらに発展拡充させて、国家及び社会の有為な形成者として必要な資質を養うこと。

二　社会において果たさなければならない使命の自覚に基き、個性に応じて将来の進路を決定させ、一般的な教養を高め、専門的な技能に習熟させること。

三　社会について、広く深い理解と健全な批判力を養い、個性の確立に努めること。

高等学校の教育課程は、この目的の実現と目標の達成を目ざし、中学校教育の基礎の上に、この段階における完成教育を施すという立場を基本とするものである。このため、高等学校の教育課程は、進んだ程度の一般教養をすべての生徒に共通に得させるようにするとともに、課程の別により、様々な変化と弾力性をもつようにして、生徒の個性や進路に応じ、それぞれに分化した学習をさせるように配慮して、編成され展開されなければならない。

〇１９６９年（昭和４４年）

－一般方針－

学校においては、法令及びこの章以下に示すところに従い、生徒の人間として調和のとれた育成を目ざし地域や学校の実態および生徒の能力・適正・進路等をじゅうぶん考慮し、課程や学科の特色を生かした教育ができるように配慮して、適切な教育課程を編成するものとする。

〇道徳教育

学校における道徳教育は、学校の教育活動全体を通じて行うことを基本とする。したがって、各教科・科目および各教科以外の教育活動においてそれぞれの特質に応ずる適切な指導を行わなければならない。

道徳教育の目的は、教育基本法および学校教育法に定められた教育の根本精神に基づく。すなわち、道徳教育は、人間尊重の精神を家庭、学校、その他社会における具体的な生活の中で生かし、個性豊かな文化の創造と民主的な社会および国家の発展に努め、進んで平和的な国際社会に貢献できる日本人を育成するため、その基盤としての道徳性を養うことを目標とする。

その際、生徒の心身の発達に即応して、特に、自立の精神や社会連帯の精神および責任を重んずる態度や差別のないよりよい社会を実現しようとする態度を養うための指導が適切に行われるようにしなければならない。

・数学科の目標

事象を数学的にとらえ、論理的に考え、統合的、発展的に考察し、処理する能力と態度を育成し、また、社会において数学の果たす役割について認識させる。このため、

1　数学における基本的な概念、原理・法則などを理解させ、より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力と態度を養う。

2　数学における基本的な知識の習得と基本的な技能の習熟を図り、それらを的確かつ能率的に活用する能力を伸ばす。

3　数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め、それらによって数学的な性質や関係を簡潔、明確に表現し、思考を進める能力と態度を養う。

4　事象の考察に関して、適切な見通しを持ち、抽象化し、論理的に思考する能力を伸ばすとともに、目的に応じて結果を検討し、処理する態度を養う。

５　体系的に組み立てていく数学の考え方を理解させ、その意義と方法について知らせる。

〇１９７７年（昭和５２年）

－教育課程の基準の改善の基本方針－

①人間性豊かな児童生徒を育てること

②ゆとりのあるしかも充実した学校生活が送れるようにすること

③国民として必要とされる基礎的・基本的な内容を重視するとともに児童生徒の個性や能力に応じた教育が行われるようにすること

〇数学科の目標

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、体系的に組み立てていく数学の考え方を通して、事象を数学的に考察し処理する能力を高めるとともに、それを活用する態度を育てる。

〇１９８８年（平成元年）高等学校学習指導要領

－教育課程編成の一般方針－

生徒の人間としての調和のとれた育成を目指し、地域や学校の実態及び生徒の心身の発達段階や特性等を十分考慮して、適切な教育課程を編成するものとする。

学校の教育活動を進めるに当たっては、自ら学ぶ意欲と社会の変化に主体的に対応できる能力の育成をはかるとともに、基礎的・基本的な内容の指導を徹底し、個性を生かす教育の充実に努めなければならない。

〇１９９８年（平成１１年）

－教育課程編成の一般方針－

各学校においては、法令及びこの章以下に示すところに従い、生徒の人間として調和のとれた育成を目指し、地域や学校の実態、課程や学科の特色、生徒の心身の発達段階及び特性等を十分考慮して、適切な教育課程を編成するものとする。

学校の教育活動を進めるに当たっては、各学校において、生徒に生きる力をはぐくむことを目指し、創意工夫を生かし特色ある教育活動を展開する中で、自ら学び自ら考える力の育成を図るとともに、基礎的・基本的な内容の確実な定着を図り、個性を生かす教育の

充実に努めなければならない。

〇高等学校数学科の目標

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高め、数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方の良さを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる。

３．数学の受難

１．数学史でみてきたように、19 世紀の数学は専門に分化してきたため、抽象化し、たびたび哲学者などの誤解をうけるようになった。

〇哲学者　サー・ウィリアム・ハミルトン（１８３６年）

「(数学は) 人間を改善する学問ではない。われわれが、理性、経験、および古代や近代の普通の証拠から考えてみると、人間の理知的研究の中で、数学のように、ただ偏狭な小数の能力の養成を除いて、ほかになんらの効果もないようなものは、どこにもないのである。数学による教養は極端に一面的であり、偏狭である。数学は人心を氷結させ、乾燥させる。この学問は人間の内面的教養としては、絶対的に有害である。」

〇哲学者　ショーペンハウエル（１８４４年）

「われわれは矛盾の原理によって、ユークリッドの証明することが真理であると認めないわけにはゆかない。けれども、なぜそうすべきであるかは、われわれに理解できない。だからわれわれは、手品を見せられたのとほとんど同様な不快感をいだく。そして実際、ユークリッドの証明法は、たいていこのような手品と非常によく似ている。その真理は、いつでも裏口からはいってくる。なぜというに、何か偶然の事情で、突如として真理が表れてくるから。しばしば用いられる背理法では、すべての戸口を一つ一つ順々に閉じて、ただ一つの最後の戸口のみ開いておくから、どうしてもその戸口からはいるよりほかにしかたがないのである。」

〇博物学者　トマス・ハックスレー（１８６９年）

「数学は、観察についても、実験についても、また因果法についても、何も知らない学問である。数学的訓練は、ほとんどまったく演繹的である。数学者は、少数の命題から出発するが、その少数の命題は、彼らが自明の真理と呼ぶほど、証明の明らかなものである。

そしてその後の彼らの仕事たるや、そこから細々しい演繹をおこなうにすぎない。」

〇視学官　アブラハム・フレックス

「現代の教育は、ただ伝統が推奨するからという理由だけで、なにものをも採用しないだろう。近代の教育は、今日肯定しえないなにものをもふくませないだろう。すでに示唆したように、このような仕方で、その歩みを進めれば、たぶん数学科に割り当てられた時間数を大いに減少し、しかもいままで保持されてきた数学の形式を確実にかえるようになるだろう。いま１例を算術にとるならば、今日、算術は一般民衆が現在望む以上にあまり過分に教えられているから、それは適当な割合で除き去られてゆくだろう。それと同様な方針は代数と幾何の上にも、適用されねばならない。何を教えるか、いつ教えるか、どんなふうに教えるかということは、結局、何が必要であるか、いつ必要であるか、どんな形式が必要であるかということに、関係している。」

〇ヒューム

「焼き棄てた方がまし」というのが、彼の持論だが、数学と自然科学の書物は例外とした。しかし、彼でさえ、数学的知識の位置づけに潜む問題には気づかなかった。

現在も数学教育それ自体が、数学の教員によって誤解を受け、指導されているのかもしれない。

「敗れる者を安んじ、傲ぶる者を挫き、平和の道を立つることーこれぞ汝が業」（マンチュアの詩人、ヴェルギリウス）（武士道「岩波文庫」）

第四部　雑感

１．教員のタイプ

教員には様々なタイプがある。とりあえず型タイプ、不満型タイプ、自己中心型タイプ・・・。

正規教員であれば、満足がいくかどうかは別として身分は保障されている。ところが生徒にはその保障はない。未来が広がっているというのは聞こえはよいが、何も決まっていないということである。そこで我々教員がすべきことは将来の方向性への手助けということではないだろうか？もちろん押しつけであってはならないが、様々な活動を通し、進路決定の方策を探っていかなければならない。

学校教育法第 42 条には次の条項がある。「1. 中学校における教育の成果をさらに発展拡充させて、国家及び社会の有為な形成者として必要な資質を養うこと。2. 社会において果たさなければならない使命の自覚に基き、個性に応じて将来の進路を決定させ、一般的な教養を高め、専門的な技能に習熟させること。3. 社会について、広く深い理解と健全な批判力を養い、個性の確立に努めること。」

進路の決定というのは単に「大学にいけばよい」ということだけではない。ある学校では職業観を育成し、将来の仕事を選択していく中で、大学の学部などの選択も含め、進路指導をするという。

詰まるところ教師の理想像は、生徒の成長を我が子以上に願い、その手助けをしていくということではないだろうか。

「うちの生徒にはそこまで教えても無理だ。必要がない。」という。これはあまりにも高度なことを教えようとしているのなら話はわかるが、教科書のことはしっかり教えないといけない。「無理だ。必要がない。」というのは誰が決めるのだろうか。我々にはそんなことを決定する大それた資格ははない。生徒の可能性は無限大である。当然努力する生徒について言えることだが・・・。どこまでも生徒を信じ抜く心を持ちたい。

２．生徒のタイプ

生徒にも様々なタイプがある。素直で真面目なタイプ。やる気のないタイプ。自信のな

いタイプ。必要以上に目立ちたいタイプ。家庭での不満を学校で発散させるタイプ・・・。

どんな指導でも言えることだが、真面目に物事に取り組む生徒でなければ、成長しない。これは「イエスマンであれ！」ということを意味しているのではない。「こうだ！」と決めたら、すべきことはきちんとする。そういうことでないと、次に進まない。いつまでも悩んで立ち止まっていても時間は過ぎるばかりである。現代は学ぶ者がいろいろな注文をつけて、「ここまで勉強する必要はない。」などという。ではどこまでやればいいのだろう。裏を返せば、「できるだけ楽をしたい。」ということなのだ。「艱難に勝る教育なし」という。

かつての医療現場では疲れた人や術後の患者など、「栄養をとって、ゆっくり休んでください。」と言っていた。ところが、最近の医療現場は疲れた人や術後の患者など、「体調がよくなったら、歩いたり、軽い運動をしてください。」といって、体力の弱っている方には結構ハードなトレーニングを課すという。

このように人間はその状況に応じて適応する能力を備えていると言えよう。それならば、できる限り苦労をさせてあげた方が生徒の将来によいのではないだろうか。といって無用の苦労はさせるべきではないが・・・。

体はある程度、大人のように見えるが、心はまだ子どもである。子どもたちが社会に出て、幸多からんことを祈る。

〇高校小唄と教員小唄は軍隊小唄のメロディーです。

高校小唄

１．いやじゃありませんか学校は

茶髪禁止だ　生徒指導

管理管理でうんざりだ

それがなければ天国だ

２．定期テストはめんどうだ

わかっちゃいるけどおいつかない

誰が決めたかしらないが

１００点とりたや期末試験

教員小唄

１．いやじゃありませんか教員は

指導通りにいきません

疲れて帰れば、どなられて

どこでやすめばいいのやら

２．生徒指導はかなめです

髪の指導に制服だ

よかれと思えど、なじられて

なぜかなくなる一升瓶

大阪で生まれた教師

１．怒鳴り疲れた授業の帰り

これで教頭に叱られると思ったら、笑ってて

教頭の笑顔を眺めながら、「お疲れかな。」と思ったら、泣けてきた

大阪で生まれた教師やさかい　たこ焼きにはちょっとうるさい

大阪で生まれた教師やさかい　お好み焼きにもうるさい

振り返るとそこには居眠りの生徒

ぶち切れた教師の声がとどろく教室

２．遊び疲れた授業の帰り

これで校長に叱られると思ったら、語ってて

校長の眼差しを眺めながら、「お元気ですね。」と思ったら、笑えてきた

大阪で生まれた教師やさかい　笑いにはちょっと厳しい

大阪で生まれた教師やさかい　大物になるかもしれない

振り返るとそこには笑顔の生徒

青春の息吹を感じる教室

青春の息吹を感じる教室

漫才　東陵生

作　前田勝利

「どうもー、イリュージョンでーす。」

Ｋ「ぼくらもいよいよ、受験生やね。勉強してますか。」

Ｓ「してますよ。受験生やから、夜も寝ずに勉強してますよ。」

Ｋ「夜も寝ずに！」

Ｓ「昼寝してるけど。」

Ｋ「こらっ！あかんやんか。先生すみません。昼間も真剣に勉強しろよ。」

Ｓ「そやね。それと受験生って、忙しいね。一つの授業で、いくつもの勉強をしないといけない。こないだも数学の授業で、国語のノートをまとめるのに忙しかった。」

Ｋ「それって、内職ってことじゃないの。それはだめですよ。」

Ｓ「やっぱりだめですか。」

Ｋ「あたりまえですよ。私は理科のノートまとめてました。」

Ｓ「やっとるんやんけ。」

Ｋ「先生すみません。それはそれと、学校祭もいよいよ最終日ですね。学校祭の中にも人間模様がありますよね。みんなで話し合いの時、聞いてないやつ、文句言うやつ、寝てるやつ、頭かくやつ、背中かくやつ、けつかくやつ、しかくいやつ」

Ｓ「しかくいやつってなんやねん。」

Ｋ「いよいよ話がまとまったら、また人間模様がありますよね。まじめに作業に取り組むやつ、いわれたことはやるやつ、いわれてもしないやつ、おやつ。」

Ｓ「おやつってなんやねん。」

Ｋ「まあ、それぞれ思い出ができたことと思います。パフォーマンスも毎年楽しみですよね。本番目指して、みんな協力して団結が生まれるんですよ。踊りなんかもみんなそろってるのなんか見たら、感動しますよね。」

Ｓ「ほんとですよね。ぼくはおとといのミニスカートの３人組の女の子いましたよね。あれなんか、あこがれるなあ。かわいいですよね。」

Ｋ「あれ、おとこやで。」

Ｓ「えっ、うそー。今自分に目覚めました。」

Ｋ「おいおい。めざめるなよ。それにしても、クラスの展示なんかもお化け屋敷とか定番ですよね。」

Ｓ「お化け屋敷なんかするといろいろな現象が起こるみたいですよ。教室がお化け屋敷になるとか。クラスのみんながお化けの役になるとか。」

Ｋ「ふつうですよ。」

Ｓ「あと、きた人が笑って帰るとか。」

Ｋ「笑ってどうするんですか。怖がって帰らせよ。」

Ｓ「あと、ぞくぞくしてきたりね。」

Ｋ「怖いってことだからいいんじゃないですか。」

Ｓ「咳が止まらなかったり。」

Ｋ「それ、かぜひいとんねや。医者いけよ。話変わりますけど、先生方にもお世話になりましたね。」

Ｓ「お世話になりましたね。いろいろな先生いますよね。口くさい先生。」

Ｋ「こんなこといったら、なんですけど。いますね。」

Ｓ「足くさい先生」

Ｋ「こんなこといったら、なんですけど。いますね。」

Ｓ「けつくさい先生」

Ｋ「どこにおとんねん。」

Ｓ「いつもおこってる先生」

Ｋ「こんなこといったら、なんですけど。いますね。」

Ｓ「よく泣く先生」

Ｋ「いますね」

Ｓ「話の長い先生」

K「いますね」

S「話の短い先生」

K「いますね」

S「話のない先生」

K「おらんやろ、そんな先生。もうええわ。」

童話　虹の彼方に　作　前田　勝利

「いってきまーす。」ともひろくんは、小学校６年生でちょっと太ってて、目がくりっとしたみんなの人気者です。またともひろくんは児童会会長です。先生といろいろな話をしながら、学校を何とかよくしたいとこれまで取り組んできました。振り返れば長い道のりでした。ともひろくんのお父さんは、いわゆる転勤族で、転勤で全国をまわっています。ともひろくんが大阪からこの緑美しい町に引っ越してきたのは、１年前の４月、５年生になったばかりでした。はじめはなかなかなじめずにいましたが、もともと人なつっこい性格なので、だんだん友達もでき、楽しい学校生活が送れるようになりました。ところがそんなともひろくんをうらやましく思い、ねたんでいた子がいたのです。ガキ大将のしげおくんです。しげおくんは、勉強ができ、また腕力もあるのでみんな一目置いていました。でも本当はみんな好きではなかったのです。というのは、しげおくんは好きな子はひいきするけれど、一度自分と合わなくなって嫌いになった子には、徹底的に意地悪をするのです。みんなはそのことを知っているので、しげおくんに逆らう子はいません。ところが、宿敵がでてきたのです。ともひろくんは、しげおくんのそんなところが大嫌いで、その日も、るみ子ちゃんがいじめれれているのを見て、しげおくんに注意しました。「なんだおまえ、変な服きてるなあ。こじきみたいだ。」それは仕事でいつも留守にしているけれど、るみ子ちゃんの大好きなおとうさんが誕生日に買ってくれた大事な大事なお洋服だったのです。るみ子ちゃんは泣き出しました。自分がばかにされるのは我慢できるけれど、大好きなおとうさんのことを悪く言われたことは、許せなかったのです。それでも言い返す言葉が見つからず、とうとう泣き出してしまいました。それを見ていたともひろくんは、るみ子ちゃんの気持ちをよく理解していて、しげおくんに言いました。「おい、いいかげん

にしろ。そんなこというんだったら、おまえがいい服を買ってあげればいいじゃないか。」しげおくんは本当は服はそれほど変だとは思っていなかったのです。るみ子ちゃんに話しかけたいのだけれど、話す方法もその内容もよくわからなかったので、なにか話しかけたかっただけなのです。それでも日頃から意地悪な少年のいうことですから、みんなはそれ以上にいやな思いをしました。

しげおくんはともひろくんが自分に意見をしたことに腹を立て、「自分に逆らう者はいないはずなのになんだこいつは」と思いました。「おまえ放課後帰らずに待っていろ。」しげおくんはいいました。そしてその日の放課後、ともひろくんは待っていたのですが、しげおくんはさっさと帰ってしまったのです。ともひろくんはいやな気持ちで帰ろうとしてかばんをみると、靴の跡がありました。もしやと思い、しげおくんの上靴と照らし合わせてみると、ぴたっとあうではありませんか。かばんの中をみてみると、筆箱がつぶれ、えんぴつやペンなどが粉々にくだけていました。相当強くふまれたものです。周囲にいた友達に聞くと、あまりかかわりたくないといった顔つきで、しげおくんがやったものだと教えてくれました。ともひろくんは悲しくなりました。「どうしてそんなことをするのだろう。」いつも人にいやがらせをし、腹がたったら、大声でどなる。しげおくんはみんなの嫌われ者です。ともひろくんは担任の先生に相談しました。　次の日しげおくんはそしらぬふりで、過ごしていましたので、ともひろくんがしげおくんに筆箱やペンなどの破損のことを話すと「ふーん」と他人事のようです。ともひろくんが「弁償してもらいたいんだけど。」というと、「あっそう」といって、また普段通りに過ごしていました。それらのことを担任の先生に話すと、担任の先生は昨日しげおくんの自宅に電話をかけ、おかあさんに事情を説明しておいてくれたそうですが、もう一度しげおくんに話をしてくれ、次の日ようやく弁償してくれました。でも本当に反省しているのかどうかは疑問です。　しげおくんは家に帰るとかばんをおいて、すぐ外にでました。うしろからは「しげお、どこいくの。まったく～」としげおくんのおかあさんの怒鳴り声がきこえました。しげおくんにはおとうさんはいません。事情があって、ご両親が離婚したのです。おかあさんは内職で生活費をかせいでいました。忙しいのでしげおくんの話をあまりきいてあげられません。それにしげおくんが帰ると手伝いをするようにいわれます。それに学校でしかられたりする

と、何日もその話で繰り返し怒鳴られます。昨日はおしりを何度もぶたれ、何日かはその話が続くことでしょう。しげおくんはそのことがいやでかばんを置いてすぐにでていったのです。近頃はその繰り返しで、しげおくんはだんだんおかあさんのいうことをきかなくなっていました。おかあさんもこれからどのように育てていったらいいか考えあぐねていました。　ある日、ともひろくんは長く学校をやすんでいるけいすけくんのところにいきました。けいすけくんは体が弱く、体調がすぐれないので学校を休んでいたのです。ともひろくんはいつも学校のこと、勉強のことなどをけいすけくんに話し、けいすけくんが学校にもどってきたとき、とまどわないようにと心を配っていました。その日はけいすけくんがいつになく、自分の思いを語り始めたのです。けいすけくんが学校にいけなくなった理由は本当は他にあったのです。その原因はしげおくんだというのです。しげおくんはいつも愛想良く話を聞く、けいすけくんに人の悪口やありもしないことを話していました。けいすけくんも初めは面白い話だなと思って聞いていたのですが、だんだん同じ内容のことばかりだし、人をけなして、自分はいい人間だと言わんばかりの話にうんざりするようになったのです。毎日毎日その繰り返し。けいすけくんはいい加減いやになってきました。といって、話をきかないわけにはいきません。そんなことをしたら、しげおくんは怒って、なにをするかわからないし、こわかったのです。そのうち学校にいくのがいやになり、もう一年が過ぎようとしていました。ともひろくんは「大丈夫だよ。」といって、不安を取り除いてあげました。「いやなことはいやだといえばいいんだよ。けいすけくんは優しいから人の話をよく聞いてあげているよね。でも間違ったことに気を遣う必要はないよ。しげおくんは寂しがりやだね。けいすけくんに話をきいてもらいたかったんだね。」けいすけくんは初めて自分の胸のうちを話したらしく、泣いていましたが、表情は明るく、元気をとりもどしたようでした。次の日から学校に元気なけいすけくんの姿がありました。　その年も明け、いよいよ学年も終わりに近づき、クラスの会計の決算の日が近づきました。この学校ではクラス会計は担任の先生と会計の児童１人で協力してやることになっていました。ところがともひろくんが何度計算してもうまくあいません。何日かたったある日こそこそとみんなが何か話していることに気づきました。それはどうもクラスの会計があわないのはともひろくんがいくらか使ったからだというのです。ともひろく

んは学校にいくのがいやになりました。そのうわさをながしたのはふとしくんでした。ふとしくんは思いついたことをすぐに口にすることが癖で、本当かどうかよくわからなくても、すぐ思いこんでしまいます。そのため、ともひろくんはしばらくみんなから口をきいてもらえませんでした。そんなある日担任の先生が以前みんなの本を買って教室の棚にいれたことを思いだし、あまり読まれていない本のページをめくってみると、領収書がでてきました。先生はみんなにあやまり、ともひろくんはまじめで何事にも一生懸命がんばっていることをみんなに紹介しました。みんなともひろくんにあやまりました。でも悪口をいっていたふとしくんはあやまりません。それどころか他のクラスの人にもあらぬうわさをながしていたのです。先生は怒りました。ふとしくんはともひろくんが何事にもまじめに一生懸命取り組む姿勢がうらやましく、みんながともひろくんに好感をもっていることがねたましかったのです。　いよいよ６年生、いろいろなことがあったけれど、ともひろくんはみんなから推薦され、今は児童会会長となりました。さっきまで降っていた雨はあがり、ともひろくんの目の前には大きな虹がひろがっていました。

”無名無冠に誇りあり”

”いざや前進、恐れなく！”

第１版　平成１５年　１月２４日

第２版　平成１５年　１月３１日

第３版　平成１５年　７月３１日

第４版　平成１５年１０月１３日

第５版　平成１７年１０月２１日

第６版　平成１９年　３月１６日

第７版　平成１９年　７月　３日

北海道札幌東陵高等学校

〒007-8585

北海道札幌市東区東苗穂 10-1-2-21

TEL 011-791-5055

FAX [illegible]

[illegible]@gmail.com