第８３回数学教育実践研究会

「確率について」

北海道札幌東陵高等学校
前田　勝利

平成24年12月1日(土)

アスティ45ビル　10Fセミナールーム

北海道札幌東陵高等学校　２０１２　数学（順列・組み合わせ）

平成２４年１０月２４日

＿＿年＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

○ 順列 (*permutation*)

n 個の異なるものから r 個取りだして並べた順列

$$
\begin{aligned}
{}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}
$$

$n! = {}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

※「！」は階乗 (*factorial*) と読む

Example

$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}$ の４枚のカードから３枚のカードを取り出し、並べる方法を考える。

1−2−3	1−2−4	1−3−4	2−3−4
⇓	⇓	⇓	⇓
1−3−2	1−4−2	1−4−3	2−4−3
⇓	⇓	⇓	⇓
2−1−3	2−1−4	3−1−4	3−2−4
⇓	⇓	⇓	⇓
2−3−1	2−4−1	3−4−1	3−4−2
⇓	⇓	⇓	⇓
3−1−2	4−1−2	4−1−3	4−2−3
⇓	⇓	⇓	⇓
3−2−1	4−2−1	4−3−1	4−3−2

${}_4P_3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$ (通り)

○ 円順列 (*circular permutation*)

n 個の異なるものの円順列の総数は $(n-1)!$

円順列は１個を固定して考えれば、残り $(n-1)$ 個を横１列に並べた順列と考えることができる。

○ 数珠順列 (*circular permutation*)

n 個の異なるものの数珠順列の総数は $\dfrac{(n-1)!}{2}$

○ 重複順列 (*number of repeated permutation*)

n 個の異なるものから r 個とった重複順列の総数は n^r

○ 組み合わせ (*combination*)

n 個の異なるものから r 個取りだして作った組み合わせ

$$
\begin{aligned}
{}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!}
\end{aligned}
$$

Example

$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}$ の４枚のカードから３枚のカードを取り出し、並べる方法を考える。ただし、順は考えない。

1−2−3　1−2−4　1−3−4　2−3−4

順を考えないので、3!（通り）少なくなるので、

${}_4C_3 = \dfrac{{}_4P_3}{3!} = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4$ (通り)

$\boxed{Example}$ 4人の生徒を次のように分ける。

（1）2人ずつA, Bの2組に分ける。

A [a,b]　B [c,d]	A [c,d]　B [a,b]
A [a,c]　B [b,d]	A [b,d]　B [a,c]
A [a,d]　B [b,c]	A [b,c]　B [a,d]

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} \times \frac{{}_2P_2}{2!} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} \times \frac{2\cdot 1}{2\cdot 1} = 6 \text{（通り）}$$

（2）2人ずつ2組に分ける。

[a,b]	[c,d]
[a,c]	[b,d]
[a,d]	[b,c]

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_2C_2}{2!} = \frac{6}{2!} = 3 \text{（通り）}$$

○ 同じものを含む順列（重複組み合わせ *repeated combination*）

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_{n-p-q}C_r = \frac{n!}{p!q!r!}$$

ただし、$p+q+r=n$

$\boxed{Example}$ 7文字 a,a,a,a,b,b,c を1列に並べる。

これは、場所の取り方と考えるとよい。

□□□□□□□

まず、a の4つの場所を選ぶ。次に b の2つの場所を選ぶ。最後に c の1つの場所を選ぶ。

よって、

$${}_7C_4 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = \frac{{}_7P_4}{4!}\cdot\frac{{}_3P_2}{2!}\cdot\frac{{}_1P_1}{1!}$$

$$= \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{1} = 105 \text{（通り）}$$

上の式からもわかるように以下のように計算してもよい。

$$\frac{7!}{4!2!1!} = 105 \text{（通り）}$$

$\boxed{Example}$ 方程式の自然数解の個数

（1）8を x, y, z の3つの自然数の和として表すことは、

方程式 $x+y+z=8$ を満たす自然数解 x, y, z を求めることになる。

たとえば、$x=3$, $y=4$, $z=1$ という解を下図のように考える。

○ ○ ○|○ ○ ○ ○|○

x, y, z の値は左から順に | で仕切られた ○ の個数を数えればよい。

それでは | はどのようにして配置すればよいのだろう？

○∧○∧○∧○∧○∧○∧○∧○

2つ | の場所の決め方は7つの ∧ の場所から決めればよいので、

$${}_7C_2 = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21 \text{（通り）}$$

となる。

（2）x, y, z を0以上の整数として

方程式 $x+y+z=8$ を満たす整数解 x, y, z を求めると、

たとえば、$x=3$, $y=5$, $z=0$ という解を下図のように考える。

○ ○ ○|○ ○ ○ ○ ○|

これは2つの | の場所の決め方は8つの ○ と2つの | を合わせて、

10の場所から2つの場所を選ぶと考えればよいので、

$${}_{10}C_2 = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45 \text{（通り）}$$

となる。

北海道札幌東陵高等学校　２０１２　数学（順列・組み合わせ）

平成２４年１１月７日

_____年_____組_____番　氏名____________________

Example ７人の生徒を次のように分ける。

３人，２人，２人の３つの組に分ける。

a,b,c	d,e	f,g	a,b,c	d,f	e,g	a,b,c	d,g	e,f
a,b,d	c,e	f,g	a,b,d	c,f	e,g	a,b,d	c,g	e,f
a,b,e	c,d	f,g	a,b,e	c,f	d,g	a,b,e	c,g	d,f
a,b,f	c,d	e,g	a,b,f	c,e	d,g	a,b,f	c,g	d,e
a,b,g	c,d	e,f	a,b,g	c,e	d,f	a,b,g	c,f	d,e
a,c,d	b,e	f,g	a,c,d	b,f	e,g	a,c,d	b,g	e,f
a,c,e	b,d	f,g	a,c,e	b,f	d,g	a,c,e	b,g	d,f
a,c,f	b,d	e,g	a,c,f	b,e	d,g	a,c,f	b,g	d,e
a,c,g	b,d	f,g	a,c,g	b,f	d,g	a,c,g	b,g	d,f
a,d,e	b,c	f,g	a,d,e	b,f	c,g	a,d,e	b,g	c,f
a,d,f	b,c	e,g	a,d,f	b,e	c,g	a,d,f	b,g	c,e
a,d,g	a,c	e,f	a,d,g	b,e	c,f	a,d,g	b,f	c,e
a,e,f	b,c	d,g	a,e,f	b,d	e,g	a,e,f	b,g	c,d
a,e,g	b,c	d,f	a,e,g	b,d	c,f	a,e,g	b,f	c,d
a,f,g	b,c	d,e	a,f,g	b,d	c,e	a,f,g	b,e	c,e
b,c,d	a,e	f,g	b,c,d	a,f	e,g	b,c,d	a,g	e,f
b,c,e	a,d	f,g	b,c,e	a,f	d,g	b,c,e	a,g	d,f
b,c,f	a,d	e,g	b,c,f	a,e	d,g	b,c,f	a,g	d,e
b,c,g	a,d	e,f	b,c,g	a,e	d,f	b,c,g	a,f	d,e
b,d,e	a,c	f,g	b,d,e	a,f	c,g	b,d,e	a,g	c,f
b,d,f	a,c	e,g	b,d,f	a,e	c,g	b,d,f	a,g	c,e
b,d,g	a,c	e,f	b,d,g	a,e	c,f	b,d,g	a,f	c,e
b,e,f	a,c	d,g	b,e,f	a,d	c,g	b,e,f	a,g	c,d
b,e,g	a,c	d,f	b,e,g	a,d	c,f	b,e,g	a,f	c,d
b,f,g	a,c	d,e	b,f,g	a,d	c,e	b,f,g	a,e	c,d
c,d,e	a,b	f,g	c,d,e	a,f	b,g	c,d,e	a,g	b,f
c,d,f	a,b	e,g	c,d,f	a,e	b,g	c,d,f	a,g	b,e
c,d,g	a,b	e,f	c,d,g	a,e	b,f	c,d,g	a,f	b,e
c,e,f	a,b	d,g	c,e,f	a,d	b,g	c,e,f	a,g	b,d
c,e,g	a,b	d,f	c,e,g	a,d	b,f	c,e,g	a,f	b,d
c,f,g	a,b	d,e	c,f,g	a,d	b,e	c,f,g	a,e	b,d
d,e,f	a,b	c,g	d,e,f	a,c	b,g	d,e,f	a,g	b,c
d,e,g	a,b	c,f	d,e,g	a,c	b,f	d,e,g	a,f	b,c
d,f,g	a,b	c,e	d,f,g	a,c	b,e	d,f,g	a,e	b,c
e,f,g	a,b	c,d	e,f,g	a,c	b,d	e,f,g	a,d	b,c

$$\frac{{}_7C_3 \cdot {}_4C_2}{2!} = 105\text{（通り）}$$

北海道札幌東陵高等学校　２０１２　数学（確率の計算）

平成２４年１１月９日

＿＿＿年＿＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

日本シリーズは巨人の優勝で終わりました．来年は日本ハムファイターズに優勝してほしいと願うばかりです．田中賢介がいたら，優勝していたかも・・・．その田中はメジャーに行くと言っているし・・・．若手が育てばいいか・・・．でも，これまでファイターズを牽引してきた，福良淳一ヘッドコーチ，吉井理人投手コーチ，清水雅治外野守備走塁コーチが退団するとか・・・．不安だなあ．ファンだけに・・・．愚痴はその辺にしておいて・・・．ファイターズが日本シリーズで優勝するにはどのような場合があるでしょうか．考えてみましょう．

> **日本シリーズで日本ハムが優勝する確率**
>
> 日本ハムと巨人が対戦し，４勝した方が優勝するとする．日本ハムが巨人に勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とする（異論はあるかもしれないが）．日本ハムが優勝する確率を求めなさい．

※　日本ハムの勝ちを ○ で表し，負けを ● で表す．

1　日本ハムが４勝０敗で優勝する場合

日本ハムが４勝するので，

○	○	○	○

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\cdots\text{（答）}$$

2　日本ハムが４勝１敗で優勝する場合

日本ハムが３勝１敗し，５試合目に勝つから，

○	○	○	●	$\boxed{○}$

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\cdots\text{（答）}$$

3　日本ハムが４勝２敗で優勝する場合

日本ハムが３勝２敗し，６試合目に勝つから，

○	●	○	○	●	$\boxed{○}$

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}\cdots\text{（答）}$$

4　日本ハムが４勝３敗で優勝する場合

日本ハムが３勝３敗し，７試合目に勝つから，

○	●	○	●	○	●	$\boxed{○}$

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}\cdots\text{（答）}$$

来年の日本ハム優勝を祈って！

がんばれ！ファイターズ！

北海道札幌東陵高等学校　２０１２　数学（確率の計算）

平成２４年１１月１６日

＿＿＿年＿＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

数学 A　確率の計算　P.62 例題 17

> ある部品の入った箱がある．そのうちの 60 %は工場 X で，40 %は工場 Y で作られたもので，工場 X，工場 Y で作った部品には，それぞれ，2 %，1 %の不良品が含まれたいる．この部品の入った箱から 1 個を取り出すとき，次の確率を求めよ．
>
> (1) それが不良品である確率
>
> (2) 取り出された部品が不良品であったとき，それが工場 X で作られた部品である確率

（解答）

(1) 取り出した 1 個が，工場 X，工場 Y で作られた部品である事象を，それぞれ，A, B, それが不良品である事象を C とすると，与えられた条件から，

$$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\ P(B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$$
$$P_A(C)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50},\ P_B(C)=\frac{1}{100}$$

となる．

(1) 不良品は，工場 X か工場 Y で作られたものであるから，

$$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=P(A)P_A(C)+P(B)P_B(C)$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{50}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{100}=\frac{2}{125}\cdots(\text{答})$$

(2) 求める確率は，$P_C(A)$ であるから，

乗法公式より，$P(C\cap A)=P(C)P_C(A)$

したがって，

$$P_C(A)=\frac{P(C\cap A)}{P(C)}=\frac{P(A)P_A(C)}{P(C)}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{50}\div\frac{2}{125}=\frac{3}{4}\cdots(\text{答})$$

> 問 50
>
> 例題 17 において，取り出された部品が良品であったとき，それが工場 Y で作られた部品である確率を求めよ．

（解答）良品である事象を $\overline{C}$ とすると，

求める確率は，$P_{\overline{C}}(B)$ であるから，

乗法公式より，$P(\overline{C}\cap B)=P(\overline{C})P_{\overline{C}}(B)$

したがって，

$$P_{\overline{C}}(B)=\frac{P(\overline{C}\cap B)}{P(\overline{C})}=\frac{P(B)P_B(\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(B)\{1-P_B(C)\}}{1-P(C)}$$
$$=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{100}\right)\div\left(1-\frac{2}{125}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{99}{100}\div\frac{123}{125}=\frac{33}{82}\cdots(\text{答})$$

北海道札幌東陵高等学校　２０１２　数学（確率の計算）

平成２４年１１月１６日

______年______組______番　氏名______________________

数学A　確率の計算　P.62 例題 17

ある部品の入った箱がある．そのうちの 60 %は工場 X で，40 %は工場 Y で作られたもので，工場 X，工場 Y で作った部品には，それぞれ，2 %，1 %の不良品が含まれたいる．この部品の入った箱から 1 個を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) それが不良品である確率

(2) 取り出された部品が不良品であったとき，それが工場 X で作られた部品である確率

(解答)

(1) 箱の中の 100 個の部品について考えてみる．

工場 X で作られたのは，60 個．

また，工場 X で作られた部品のうち，100 個につき，2 個は不良品となる．

したがって，工場 X で作られた 60 個のうち，不良品は

$60 \times \frac{2}{100} = \frac{6}{5} = 1.2$

工場 Y で作られたのは，40 個．

また，工場 Y で作られた部品のうち，100 個につき，1 個は不良品となる．

したがって，工場 Y で作られた 40 個のうち，不良品は

$40 \times \frac{1}{100} = \frac{2}{5} = 0.4$

よって，100 のうち，不良品は，$1.2 + 0.4 = 1.6$ 個

したがって，1 個取り出して，不良品である確率は，

$$1.6 \div 100 = \frac{2}{125} \cdots (答)$$

(2) 箱の中の 100 個の部品について考えてみる．

(1) より工場 X で作られた不良品は 1.2 個．

不良品は 1.6 個．

したがって，不良品のうち，工場 X で作られた確率は，

$$\frac{1.2}{1.6} = \frac{3}{4} \cdots (答)$$

問 50

例題 17 において，取り出された部品が良品であったとき，それが工場 Y で作られた部品である確率を求めよ．

(解答)

箱の中の 100 個の部品について考えてみる．

例題 17 より良品は，

$100 - 1.6 = 98.4$ 個

工場 Y で作られた良品は，

$40 - 0.4 = 39.6$ 個

したがって，良品のうち，工場 Y で作られた確率は，

$$\frac{39.6}{98.4} = \frac{33}{82} \cdots (答)$$

北海道札幌東陵高等学校　２０１２　数学（条件つき確率の計算）

平成２４年１１月１６日

_____年_____組_____番　氏名____________________

例題 ある病原菌の検査試薬は，病原菌がいるのに誤って陰性と判断する確率が１％，病原菌がいないのに誤って陽性と判断する確率が２％である．全体の１％がこの病原菌に感染している集団から１つの個体を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 検査結果が陽性になる確率

(2) 陽性だったときに，実際には病原菌に感染していない確率

（解答）

取り出した個体が感染しているという事象を A，検査結果が陽性であるという事象を E とする．このとき，感染していないという事象は $\overline{A}$ で表され，

$$P(A)=\frac{1}{100},\ P(\overline{A})=\frac{99}{100},\ P_A(E)=\frac{99}{100},\ P_{\overline{A}}(E)=\frac{2}{100}$$

(1) その個体が感染している場合と感染していない場合のそれぞれに，検査結果が陽性の場合があるから，

$$P(E)=P(A\cap E)+P(\overline{A}\cap E)=P(A)P_A(E)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(E)$$
$$=\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}+\frac{99}{100}\times\frac{2}{100}$$
$$=\frac{99}{10000}+\frac{198}{10000}=\frac{297}{10000}$$

(2) 求める確率は条件つき確率 $P_E(\overline{A})$ であるから，

$$P_E(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap E)}{P(E)}=\frac{198}{10000}\times\frac{10000}{297}=\frac{198}{297}=\frac{2}{3}$$

練習 全体の 50 ％が病原菌に感染している集団のある個体について，例題と同じ検査試薬による検査結果が陽性だったときに，実際には病原菌に感染していない確率を求めよ．

（解答）

取り出した個体が感染しているという事象を A，検査結果が陽性であるという事象を E とする．このとき，感染していないという事象は $\overline{A}$ で表され，

$$P(A)=\frac{50}{100},\ P(\overline{A})=\frac{50}{100},\ P_A(E)=\frac{99}{100},\ P_{\overline{A}}(E)=\frac{2}{100}$$

検査結果が陽性になる確率は，その個体が感染している場合と感染していない場合のそれぞれに，検査結果が陽性の場合があるから，

$$P(E)=P(A\cap E)+P(\overline{A}\cap E)=P(A)P_A(E)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(E)$$
$$=\frac{50}{100}\times\frac{99}{100}+\frac{50}{100}\times\frac{2}{100}$$
$$=\frac{4950}{10000}+\frac{100}{10000}=\frac{5050}{10000}=\frac{101}{200}$$

○陽性だったときに，実際には病原菌に感染していない確率求める確率は条件つき確率 $P_E(\overline{A})$ であるから，

$$P_E(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap E)}{P(E)}=\frac{P(\overline{A})P_{\overline{A}}(E)}{P(E)}=\frac{100}{10000}\times\frac{10000}{5050}=\frac{2}{101}$$

北海道札幌東陵高等学校　２０１２　数学（条件つき確率の計算）

平成２４年１１月１６日

＿＿年＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

例題 ある病原菌の検査試薬は，病原菌がいるのに誤って陰性と判断する確率が 1 %，病原菌がいないのに誤って陽性と判断する確率が 2 %である．全体の 1 %がこの病原菌に感染している集団から 1 つの個体を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 検査結果が陽性になる確率

(2) 陽性だったときに，実際には病原菌に感染していない確率

（解答）

(1) 100 人について考えてみる．

病原菌に感染しているのは，1 人．

感染しているのに，誤って陰性と判断されるのは 1 %であるから，

病原菌に感染していて，陽性と判断されるのは，$1 \times \frac{99}{100} = 0.99$ 人．

病原菌に感染していないのは，99 人．

感染していないのに，誤って陽性と判断されるのは 2 %であるから，

病原菌に感染していないのに，陽性と判断されるのは，$99 \times \frac{2}{100} = 1.98$ 人．

よって，100 人のうち陽性と判断されるのは，

$0.99 + 1.98 = 2.97$ 人

したがって，1 人を抽出して，陽性である確率は，

$$2.97 \div 100 = \frac{2.97}{100} = \frac{297}{10000} \cdots (\text{答})$$

(2) 100 人について考えてみる．

陽性と判断されるのは，2.97 人．

病原菌に感染していないのに，陽性と判断されるのは，$99 \times \frac{2}{100} = 1.98$ 人．

したがって，

陽性だったときに，実際に病原菌に感染していない確率は，

$$\frac{1.98}{2.97} = \frac{2}{3} \cdots (\text{答})$$

練習 全体の 50 %が病原菌に感染している集団のある個体について，例題と同じ検査試薬による検査結果が陽性だったときに，実際には病原菌に感染していない確率を求めよ．

（解答）

○検査結果が陽性になる確率を 100 人について考えてみる．

病原菌に感染しているのは，50 人．

感染しているのに，誤って陰性と判断されるのは 1 %であるから，

病原菌に感染していて，陽性と判断されるのは，$50 \times \frac{99}{100} = 49.5$ 人．

病原菌に感染していないのは，50 人．

感染していないのに，誤って陽性と判断されるのは 2 %であるから，

病原菌に感染していないのに，陽性と判断されるのは，$50 \times \frac{2}{100} = 1$ 人．

よって，100 のうち陽性と判断されるのは，

$49.5 + 1 = 50.5$ 人

したがって，1 人を抽出して，陽性である確率は，

$$50.5 \div 100 = \frac{50.5}{100} = \frac{505}{1000} = \frac{101}{200}$$

○陽性だったときに，実際には病原菌に感染していない確率を，

100 人について考えてみる．

陽性と判断されるのは，50.5 人．

病原菌に感染していないのに，陽性と判断されるのは，$99 \times \frac{2}{100} = 1$ 人．

したがって，

陽性だったときに，実際に病原菌に感染していない確率は，

$$\frac{1}{50.5} = \frac{2}{101} \cdots (\text{答})$$

第４問　A，B２つの袋があり，Aの袋には赤球３個，白球３個の計６個，Bの袋には赤球３個，白球５個の計８個が入っている．いま，次の試行の順で実行する．

試行１：Aの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出し，Bの袋の中に入れる．

試行２：Bの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出し，Aの袋の中に入れる．

試行３：Aの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出す．

以下の問いに答えよ．

(1)　試行１において，取り出された２個の球が赤球１個，白球１個となる確率を求めよ．

(2)　試行１のあと，試行２において取り出された２個の球が，赤球１個，白球１個となる確率を求めよ．

(3)　試行１および試行２のあと，試行３において取り出された２個の球が，赤球１個，白球１個となる確率を求めよ．

(4)　試行１および試行２のあと，試行３において取り出された２個の球における赤球の個数の期待値を求めよ．

解答例

(1)　$\dfrac{{}_{3}C_{1}\cdot{}_{3}C_{1}}{{}_{6}C_{2}}=\dfrac{3\cdot3}{15}=\dfrac{3}{5}$

(2)　試行１において，赤球２個となる確率は，$\dfrac{{}_{3}C_{2}}{{}_{6}C_{2}}=\dfrac{1}{5}$

試行１において，白球２個となる確率は，$\dfrac{{}_{3}C_{2}}{{}_{6}C_{2}}=\dfrac{1}{5}$

まとめると，試行１において，取り出す２個の球の色は次のとおり．

試行１：

色	赤2	赤1白1	白2
確率	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

試行１の結果に応じて，Bの袋の中の赤球，白球の個数は，

試行1	Bの(赤，白)
赤2	(5，5)
赤1白1	(4，6)
白2	(3，7)

となるから，試行２において取り出された２個の球の色が赤球１個，白球１個となる確率は，

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{{}_{5}C_{1}\cdot{}_{5}C_{1}}{{}_{10}C_{2}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{{}_{4}C_{1}\cdot{}_{6}C_{1}}{{}_{10}C_{2}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{{}_{3}C_{1}\cdot{}_{7}C_{1}}{{}_{10}C_{2}}$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{45}+\frac{3}{5}\cdot\frac{24}{45}+\frac{1}{5}\cdot\frac{21}{45}=\frac{118}{225}$$

(3)　試行１を実行したあとのBの袋の中と，さらに試行２を実行したあとのAの袋の中の赤球，白球の個数は，

試行1	Bの(赤，白)	試行2	Aの(赤，白)
赤2	(5，5)	赤2	(3，3)
赤2	(5，5)	赤1白1	(2，4)
赤2	(5，5)	白2	(1，5)
赤1白1	(4，6)	赤2	(4，2)
赤1白1	(4，6)	赤1白1	(3，3)
赤1白1	(4，6)	白2	(2，4)
白2	(3，7)	赤2	(5，1)
白2	(3，7)	赤1白1	(4，2)
白2	(3，7)	白2	(3，3)

となるから，試行３において，取り出された２個の球が赤球１個，白球１個となる確率は，

$$\frac{1}{5}\left(\frac{{}_{5}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{3}C_{1}\cdot{}_{3}C_{1}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{5}C_{1}\cdot{}_{5}C_{1}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{2}C_{1}\cdot{}_{4}C_{1}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{5}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{1}C_{1}\cdot{}_{5}C_{1}}{{}_{6}C_{2}}\right)$$
$$+\frac{3}{5}\left(\frac{{}_{4}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{4}C_{1}\cdot{}_{2}C_{1}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{4}C_{1}\cdot{}_{6}C_{1}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{3}C_{1}\cdot{}_{3}C_{1}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{6}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{2}C_{1}\cdot{}_{4}C_{1}}{{}_{6}C_{2}}\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{{}_{3}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{5}C_{1}\cdot{}_{1}C_{1}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{3}C_{1}\cdot{}_{7}C_{1}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{4}C_{1}\cdot{}_{2}C_{1}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{7}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{3}C_{1}\cdot{}_{3}C_{1}}{{}_{6}C_{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{10}{45}\cdot\frac{9}{15}+\frac{25}{45}\cdot\frac{8}{15}+\frac{10}{45}\cdot\frac{5}{15}\right)+\frac{3}{5}\left(\frac{6}{45}\cdot\frac{8}{15}+\frac{24}{45}\cdot\frac{9}{15}+\frac{15}{45}\cdot\frac{8}{15}\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{45}\cdot\frac{5}{15}+\frac{21}{45}\cdot\frac{8}{15}+\frac{21}{45}\cdot\frac{9}{15}\right)$$
$$=\frac{1864}{3375}$$

(4)　(3)と同様に，試行１および試行２のあと，試行３において，取り出された２個の球が，赤球２個となる確率は

$$\frac{1}{5}\left(\frac{{}_{5}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{3}C_{2}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{5}C_{1}\cdot{}_{5}C_{1}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{2}C_{2}}{{}_{6}C_{2}}\right)$$
$$+\frac{3}{5}\left(\frac{{}_{4}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{4}C_{2}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{4}C_{1}\cdot{}_{6}C_{1}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{3}C_{2}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{6}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{2}C_{2}}{{}_{6}C_{2}}\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{{}_{3}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{5}C_{2}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{3}C_{1}\cdot{}_{7}C_{1}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{4}C_{2}}{{}_{6}C_{2}}+\frac{{}_{7}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}\cdot\frac{{}_{3}C_{2}}{{}_{6}C_{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{10}{45}\cdot\frac{3}{15}+\frac{25}{45}\cdot\frac{1}{15}\right)+\frac{3}{5}\left(\frac{6}{45}\cdot\frac{6}{15}+\frac{24}{45}\cdot\frac{3}{15}+\frac{15}{45}\cdot\frac{1}{15}\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{45}\cdot\frac{10}{15}+\frac{21}{45}\cdot\frac{6}{15}+\frac{21}{45}\cdot\frac{3}{15}\right)$$
$$=\frac{643}{3375}$$

このことから，試行１および試行２のあと，試行３において取り出された２個の球が白球２個となる確率は

$$1-\left(\frac{1864}{3375}+\frac{643}{3375}\right)=1-\frac{2507}{3375}=\frac{868}{3375}$$

よって，試行３において取り出される赤球の個数の期待値は

$$2\cdot\frac{643}{3375}+1\cdot\frac{1864}{3375}+0\cdot\frac{868}{3375}=\frac{3150}{3375}=\frac{14}{15}$$

配点　(1)　6点　(2)　8点　(3)　12点　(4)　14点

講評

確率論の歴史はフランスの数学者パスカルとフェルマーの往復書簡に始まります．またそのきっかけは，シュヴァリエ・ド・メレという賭け事の好きな人が，友人のパスカルに質問をしたことでした．「さいころを４回投げたとき，少なくとも１回６の目が出る確率」という問題や「実力が同等で，勝ち負けの可能性が半々の２人Ａ，Ｂが３番勝負（どちらか２回勝ったほうが勝ち）をした．１回戦でＡが勝ったときに，ある事情で賭けを中止するならば，掛け金をどう配分したらよいだろうか」という問題をフェルマーとパスカルが往復書簡を通し，確率論が築かれていったと言われています．

本問については，(2)以降は計算が多く大変だったと思いますが，表にまとめたり，わかりやすく書いている答案が多かったように思います．満点は12名でした．

(1)の正答率は70%でした．教科書によくある問題です．

(2)の正答率は47%でした．試行１の結果を無視して，試行２を単独で考えている答案がいくつかありました．全部の場合を含めて計算しているのなら，それでいいのですが，結果的にはもれていたりします．

(3)の正答率は12%でした．(3)についても(2)と同様のことが言え，中には計算結果として１を越えているものもありました．確率を P とすると，$0\leqq P\leqq 1$ です．

(4)の正答率は4%でした．試行３において赤２個となる場合の確率を求めれば，赤０個となる場合の確率は求める必要はありません．

確率の問題では全事象を速く，正確に，もれなく表現することが求められます．一般に私たちは，目の前のことは時間をかけて論議するけれども，見えない部分は知らん顔という状況に陥りがちです．数学はそのような隠された部分を解き明かすという面白味があるように思います．今回うまく解けなかった諸君も決して落胆することなく，学習を続け，力をつけていくことを願っています．

北海道札幌東陵高等学校　前田勝利

北海道札幌東陵高等学校　２０１２　数学（確率・期待値）

平成２４年１１月１６日

_____ 年 _____ 組 _____ 番　氏名 ____________________

次の表のような 100 本のくじがある．

賞	A 賞	B 賞	C 賞
賞金（円）	1000	500	100
本数（本）	10	30	60

このくじを引くとき，くじ 1 本について平均していくらの賞金が期待できるかを考えよう．

このくじの賞金は全体で，

$1000 \times 10 + 500 \times 30 + 100 \times 60 = 31000$（円）

であるから，くじ 1 本あたりの賞金の平均額は，次のようになる．

$$31000 \div 100 = 310 \text{（円）}$$

一方，この 310 円は，次のようにも計算できる．

$$\frac{1000 \times 10 + 500 \times 30 + 100 \times 60}{100}$$
$$= \left(1000 \times \frac{10}{100}\right) + \left(500 \times \frac{30}{100}\right) + \left(100 \times \frac{60}{100}\right)$$

ここで，$\frac{10}{100}$，$\frac{30}{100}$，$\frac{60}{100}$ は，それぞれ，A 賞，B 賞，C 賞の当たる確率である．

つまり，（各賞の賞金）×（各賞の当たる確率）の和になっている．

この賞金の平均額 310 円は，1 本のくじを引くとき，もらえると期待できる賞金の額と考えられる．

このような値を $\boxed{\text{期待値}}$ または $\boxed{\text{平均値}}$ という．

別解

X（変数）	1000	500	100	確率の合計
P（確率）	$\frac{10}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{60}{100}$	1

$$\text{（期待値）} = \left(1000 \times \frac{10}{100}\right) + \left(500 \times \frac{30}{100}\right) + \left(100 \times \frac{60}{100}\right) = 310 \text{（円）}$$

期待値

一般に，変数 X と確率 P が次の表のようになるとき，

期待値 $E(X)$ は，

$$\boxed{E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n}$$

となる．

X（変数）	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	確率の合計
P（確率）	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

問 10 本のうち，1000 円が 2 本，500 円が 3 本，残りは，はずれであるくじから 1 本引くとき，いくらの賞金が期待できるか．

X（変数）	1000	500	0	確率の合計
P（確率）	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	1

$$\text{（期待値）} = \left(1000 \times \frac{2}{10}\right) + \left(500 \times \frac{3}{10}\right) + \left(0 \times \frac{5}{10}\right) = 350 \text{（円）}$$