2010年2月6日　北数教数学実践研究会研究発表

第２８回　北海道高等学校数学コンテスト中間報告

北海道算数数学教育会高等学校部会
研究部代数解析研究会世話人
前田　勝利（札幌東陵高等学校）

1．第28回北海道高等学校数学コンテストについて

昭和58年に始まった北海道高等学校数学コンテストも今回で第28回となりました．北海道算数数学教育会（北数教）高等学校部会が主催，北海道教育委員会・札幌市教育委員会・北海道高等学校長協会・北海道新聞社の後援，ベネッセコーポレーション・北海道電力・北海道情報大学・予備校クラズユニック・IMS 数学英語ゼミ・現役予備校ＴＡＮＪＩの協賛を得て，道内の高校生の希望者対象に参加無料で毎年1月初旬に行われています．出題範囲は高校1年終了までの数学の内容からですが，学校数学の枠に入りきらない分野や，やや程度の高い問題も含めバラエティに富んだ問題を出題するように心がけています．

今回の数学コンテストも例年と同じく，3時間半(210分)の間に各問40点の問題5問（合計200点満点）を解くという形式です．成績上位20名程度の優秀者及び、各問ごとにユニークな答案を書いた生徒を特別賞として3月初旬に行われる表彰式で表彰しています．

2．コンテスト参加状況と今年の問題について

第28回の数学コンテストは1月8日を中心に道内14会場で実施され，281名の参加申し込みに対し241名が実際に受験しました．受験校は札幌東高，札幌西高，札幌南高，札幌北高，札幌啓成高，札幌東陵高，札幌稲雲高，札幌国際情報高，札幌篠路高，札幌開成高，札幌白石高，有朋高，北嶺高，立命館慶祥中，立命館慶祥高，北海学園札幌高，岩見沢東高，旭川東高，旭川西高，函館中部高，帯広柏葉高，帯広三条高，滝川高，室蘭栄高，釧路湖陵高，根室高，倶知安高，旭川高専の昨年より１校増の28校です．

学校別の実受験者数は以下の通りです

参加高名	女	男	総計
旭川工業高専	1	11	12
旭川西	1	2	3
旭川東	1	19	20
岩見沢東	4	7	11
倶知安		2	2
釧路湖陵	4	12	16
根室		8	8
札幌稲雲	2	8	10
札幌開成		2	2
札幌啓成	2	20	22
札幌国際情報	3	14	17
札幌篠路		2	2
札幌西	4	7	11
札幌東		1	1
札幌東陵	3	15	18
札幌南	3	11	14
札幌白石		1	1
札幌北	4	8	12
室蘭栄		13	13
帯広三条		8	8
帯広柏葉	1	9	10
滝川	3	11	14
函館中部	2	3	5
北海学園札幌		2	2
北嶺		1	1
有朋		1	1
立命館慶祥高		1	1
立命館慶祥中	1	3	4
総計	39	202	241

現時点では，採点の最中ですので今回の受験者の出来具合についてはまだまとまっておりませんが，昨年に続いて平均点が 200 点満点中の 100 点程度になるように考えて出題されています．今年の問題について簡単に紹介します．

問題１は札幌静修高校の杉本先生の出題です。男子と女子がダンスをするという設定で，組み合わせを考えるという問題です。頭の中だけで考えていると，「あれっ，今何考えてたんだっけ？」というのはよくありますよね．このような場合に表を活用し，考え方を整理すると見通しがよくなるのではないでしょうか．杉本先生は以前は「握手をする」という問題を出されたこともあります．次はどのような問題を考えていらっしゃるのか楽しみです．

問題２は札幌開成高校の古川先生の出題です。平面図形についての出題で，(5)は「万有引力の法則」で有名なニュートンが発見したので，「ニュートンの定理」と呼ばれています．平面図形は中学生，高校生の苦手とする分野の一つですね．ましてや証明問題となると・・・．この問題を通して，平面図形の問題などに興味を示し，取り組むきっかけとなればと思います．

問題３は岩見沢東高校の大和先生の出題です。有理数，無理数についての出題です．数の分類というと「よくわからない」というのが高校生の実態ではないでしょうか．また背理法での証明も最も嫌がられる分野の一つではないでしょうか．有理数と無理数の加法，減法を思い浮かべながら，式の変形がうまくできるかどうかですね．受験生はどこまでできたでしょう．

問題４は札幌国際情報高校の和田先生の出題です。面白い問題ですね．東京の某国立大で出題されそうな雰囲気があります．順に解いていくうち，システムに気づき，最後には感動する．素晴らしいでは問題ではないでしょうか．

問題５は小生、札幌東陵高校の前田の出題です．空間図形、正四面体に関しての出題ですが，難関大の入試などで出題されそうな問題ではないでしょうか．昨年．某国立大で立体図形の展開図が出題され，「体積を求めよ」とありました．正答率は大変低かったようです．ところが，某予備校の講師の話によると，「本州の私立中高一貫校のよくトレーニングを積んだ受験生なら秒殺ですよ」ということでした．本道の受験生にも新たな視点が芽生えればと思い，出題しました．受験生はどう感じたでしょうか．

３．表彰式にむけて

今年は数学コンテストの表彰式･懇談会は 3 月 6 日（土）14：00 から札幌南高校・記念館において行われる予定です．例年，表彰式は大学，北数教や協賛関係の来賓をお招きし，出題者，数学コンテストの上位入賞者（20 名程度）及び特別賞（部門賞）入賞者が参加して行われます．表彰式の後の上位入賞者との懇談会は大変意義深いものとなります．表彰式の厳粛な雰囲気とは少し違い，入賞者，出題者，入賞者の保護者や引率の先生方がケーキや飲み物を楽しみながら歓談します．初めに入賞者からコンテスト受験時の感想や特に苦労したところ，あるいは数学で興味のある分野などを話していただき，次に出題者・採点者の先生から出題の背景や採点時に気になったところを話していただきます．また来賓の先生からの数学学習上のアドバイスなどがいただける場合もあります．過去には数学コンテストの名誉顧問である東海大学の秋山仁先生からご講演をいただいたこともあります。全道から集った上位入賞者全員からコンテストに対する感想や，将来の夢，今後の数学との付き合い方など意見を話していただくのですが，さすがに上位に入賞するような受験生は，単に数学が好きであるというだけでなく高校数学を超えて数学全体に興味を持っている生徒が多いなと驚嘆します．理系の入賞者ならある程度，解法の目処がたっていたという受験生もいますが，文系の入賞者の中には「自分はそんなに数学が好きなわけでもなく，時間をもてあましていたくらいなのにどうして選ばれたのかわからない」と告白（！）していた受験生もいます．

いずれにしても，是非表彰式にご参加いただき，上位入賞者への激励，応援をお願いしたいのと，エピソードなどを楽しんでください．

4．広がる数学コンテストの輪

北海道の他にも群馬県では群馬県教育委員会主催で 1998 年から群馬県高校生数学コンテストが行われており，もう１０年以上の歴史をもっています．また京都府でも 2007 年から京都府教育委員会主催で京都府高校生数学コンテストが行われ昨年第３回を迎えました．

京都府教委が主催する中学，高校生が対象の「京都数学グランプリ」が１２日，京都市左京区の京都大などであり，約５３０人の子どもたちが数学の難問に取り組んだ．

グランプリは本年度から京都大大学院理学研究科が全面協力し，従来の数学コンテストを拡大して開催．本年度から参加対象になった中学生も４９人が参加し，昨年度より参加者が約２００人増えた．

試験は亀岡市，福知山市，舞鶴市など府内計４カ所で開き，京都会場では約２００人が挑んだ．制限時間は３時間．参加者は図形や計算式などの問題を前に頭を悩ませながらもコンパスなどを使って問題を解いていった．

解答は解いた過程も含めて採点し，９月に成績上位者を表彰する．１０～１２月には希望する子どもを対象に作問に協力した京都大の河野明教授，森脇淳教授らによる特別講義も実施する．』

（京都新聞 HP）

京都のコンテストは表題にもあるように数学コンテストを通じて日本数学オリンピックに通用する生徒を育てたいという目的があるようです．また群馬のコンテストも同じようにコンテストで上位に入った生徒にはオリンピックでの活躍を期待している部分はあると聞きました．北海道でも第８回の北海道数学コンテストで最優秀賞となった伊山修君が，日本がチームとして初めて参加した北京の国際数学オリンピックで日本選手団の一員として銅メダルを取ったことを考えると負けてはいられません．一昨年私と札幌開成高校佐々木先生とで福島県郡山市における日数教大会で数学コンテストについての発表を行ったのですが、コンテストについての関心はけっこう高いように感じました．我々の場合、群馬県や京都府と違って民間の協賛をもらってやっている部分，苦労もあるのですがせっかくここまで続いてきたコンテストを今後も続けていくべく今後も頑張っていきたいと思っています．

5．最後に HP「数学のいずみ」にて「北海道高等学校数学コンテスト」を掲載していただき，全国に数学コンテストの名前が広がり，誰でもすぐに数学コンテストの問題を閲覧できるようになりました．数学教育実践研究会代表，岡部一良先生，事務局長，河村真一郎先生，HP 管理者，吉田奏介先生その他お名前を挙げるときりがありませんが，この場をかりて厚くお礼申し上げます．

第1問　あるパーティーで，男の子と女の子1人ずつでお互いダンスをした。

いま，次のような表を作る。参加した男の子を縦に，参加した女の子を横にとり，お互いにダンスをしたとき，表の交差したところに○をつける。例えば

男の子b_1は女の子g_1，g_2とダンスをした

男の子b_2は女の子g_1とダンスをした

という。このことは右のように表すことができる。

	g_1	g_2
b_1	○	○
b_2	○	

[1]　第1回目のパーティーでは2人の男の子b_1，b_2と3人の女の子g_1，g_2，g_3が参加した。

男の子b_1は女の子g_1，g_3とダンスをした

男の子b_2は女の子g_2，g_3とダンスをした

という。

(1)　このことを表にする。解答用紙の表に○を書き入れ，表を完成させなさい。

[2]　第2回目のパーティーでは6人の男の子b_1～b_6と6人の女の子g_1～g_6が参加した。

男の子b_1は女の子g_1，g_2，g_5，g_6とダンスをした

男の子b_2は女の子g_1，g_4とダンスをした

男の子b_3は女の子g_3，g_5，g_6とダンスをした

男の子b_4は女の子g_4とダンスをした

男の子b_5は女の子g_1とダンスをした

男の子b_6は女の子g_4，g_5とダンスをした

という。

(2)　このことを表にする。解答用紙の表に○を書き入れ，表を完成させなさい。

いま，参加した男の子と女の子のうちダンスをした者同士1人ずつで何組かのペアを作る。

(3)　参加した男女6人の中で同時に5組のペアを作る。そのペアの例を1つ挙げなさい。

(4)　参加した男女6人の中で同時に6組のペアはできない。この理由を説明しなさい。

[3]　第3回目のパーティーでは多くの男の子と多くの女の子が参加した（男女の数は同じとは限らない）。このパーティーでは

①女の子全員とダンスをした男の子はいなかった

②女の子は全員，少なくとも1人の男の子とダンスをした

という。参加した男の子と女の子のうちダンスをした者同士1人ずつで何組かのペアを作る。

(5)　参加した男女の中に，ある2組のペア(b, g)と(b', g')で次のようなものがあることを示しなさい。

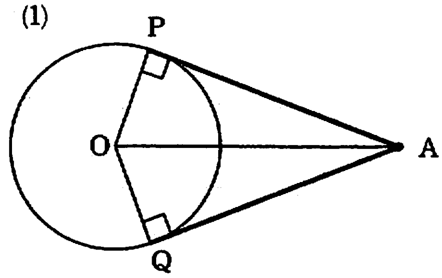
bとgおよびb'とg'はダンスをした

bとg'およびb'とgはダンスをしなかった

第２問

(1)　円Ｏとこの円の外にある点Ａについて，
Ａから円Ｏに引いた２本の接線を AP，AQ とする。
Ｏが円の中心，接点が P, Q である。このとき，線分の長さ AP, AQ が等しいことを証明せよ。

(1)

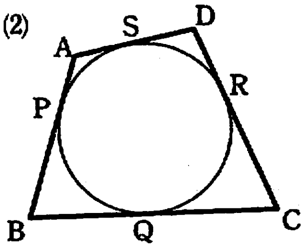


(2)　円に外接する四角形 ABCD がある。
辺の長さ AB, BC, CD, DA について、

$$AB+CD=BC+DA$$

が成り立つことを証明せよ。

(2)

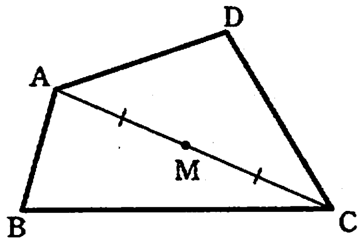


(3)　凸四角形 ABCD がある。
対角線 AC の中点を M とおき，四角形 ABCD の面積を S とおく。そのとき

$$\triangle MAB+\triangle MCD=\frac{1}{2}S$$

が成り立つことを証明せよ。
ただし，凸とは，へこんでいないことを意味し，
また，△PQR で，三角形 PQR の面積を表すものとする。

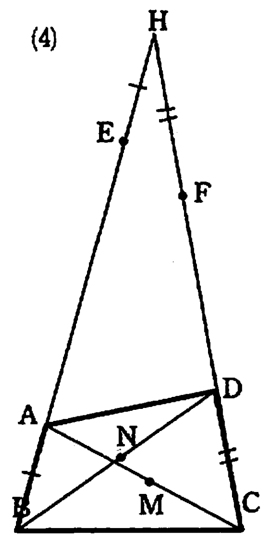
(3)



(4)　凸四角形 ABCD があり，辺 AB と辺 CD の延長は点 H で交わるものとする。HE＝AB，HF＝CD となるように，２点 E, F をとることによって，以下を証明せよ。

> 対角線 AC, BD の中点を，それぞれ M，N とする。
> いま，四角形 ABCD の面積を S とする。
> 四角形 ABCD の内部に点 T をとり，
>
> $$\triangle TAB+\triangle TCD=\frac{1}{2}S$$
>
> を満たすものとする。このとき，点 T は直線 MN 上にある。

(4)



(5)　(2) において，内接円の中心を O とする。
また，対角線 AC, BD の中点をそれぞれ M，N とする。
そのとき，中心 O は直線 MN 上にあることを証明せよ。
ただし，辺 AB，CD は平行でないとする。

第３問

x を有理数として，次の問いに答えよ。ただし，

有理数×有理数＝有理数

無理数×有理数（０でない有理数）＝無理数

有理数＋有理数＝有理数

無理数＋有理数＝無理数

となることは用いてよい。

(1) ２次関数 $f(x)=\sqrt{2}x^2-3\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+2$ について

① $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$ の値を求めよ。

② 1，2 以外の有理数 s に対して，$f(s)$ の値は無理数であることを示せ。（$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい）

(2) ２次関数 $g(x)=\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}x-3\sqrt{3}+1$ の値は x がどのような値に対して有理数になるのか述べよ。（$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてよい）

(3) ２次関数 $h(x)=ax^2+bx+c$（a は０以外の実数。b，c はすべての実数）について，３つの互いに異なる有理数 p，q，r に対して，$h(p)$，$h(q)$ の値がともに有理数であり，$h(r)$ の値が無理数である。このとき，t が p，q 以外の有理数であるとき，$h(t)$ の値は無理数となることを示せ。

第4問

nを4以上の整数とする。1枚の硬貨をn回投げ，表が出たら1を，裏が出たら0を左から順に記入する。そのn個の数について，隣り合う数の差を$(n-1)$個つくり順にならべる。さらに，その$(n-1)$個の数について，隣り合う数の差を$(n-2)$個つくり順に並べる。この$(n-2)$個の数の中にある1の個数をXとする。

例えば，$n=6$のとき，硬貨が「表表裏表表裏」の順に出たら，6個の数を

1 1 0 1 1 0

と並べ，次に6個の数について隣り合う数の差をとる操作を2回行うと

1 1 0 1 1 0

↓（隣り合う数の差をとる）

0 1 1 0 1

↓（隣り合う数の差をとる）

1 0 1 1

となり，この4個の数「1 0 1 1」の中に数1は3個あるので，$X=3$となる。

(1) $n=4$のとき，$X=1$となる確率を求めよ。

(2) $k=0,1,2,3,\cdots,n-2$について，$X=k$となる確率を求めよ。

(3) mを2以上の整数とする。$k=1,2,3,\cdots,m$について，

$$k\,{}_mC_k = m\,{}_{m-1}C_{k-1}$$

が成り立つことを示せ。

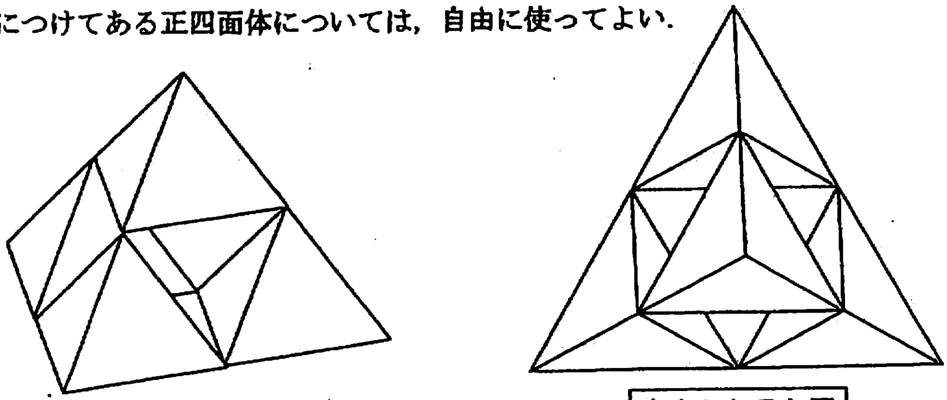
(4) Xの期待値Eを求めよ。

第５問

旧正月を控え、中国料理店「ベイスーチャオ（北数教）」では店の飾り付けなどディスプレイに余念がない.（旧正月とは中国その他の地域で旧暦により正月を祝うことであり，本年は２月１４日である.）

お店では飾り付けとして，テーブルに１辺 4cm の透明な正四面体を図のように重ね，それを載せるのにぴったりの円卓をこしらえることにした．次の問いに答えよ．

最後につけてある正四面体については，自由に使ってよい．



真上から見た図

(1) 正四面体 A − BCD の頂点 A から △BCD に下ろした垂線の足を H とする．垂線 AH の長さを求めよ．

(2) 正四面体 A − BCD の体積を求めよ．

(3) 三段目まで積み上げるのに必要な正四面体の個数を求めよ．

(4) 二十段目まで積み上げるのに必要な正四面体の個数を求めよ．またそのとき，最下段の正四面体の個数を求めよ．

(5) (4) のとき，円卓は最下段にできる正三角形の外接円と同じ大きさとしたい．円卓の半径を求めよ．

飾り付けも終わろうとした頃，店長が「正四面体に内接する赤い球を入れたら，すごくきれいになるよ．それと，二十段目まで積み上げたとき，飾り物全体を覆う（外接する）透明の球も作っておいて.」と指示したので，もう一度初めからやり直すことになった．次の問いに答えよ．

(6) (4) のとき，飾り物全体を覆う（外接する）球の半径を求めよ．

(7) 正四面体 A − BCD に内接する球の半径を求めよ．また，その球を赤いスプレー塗料で一つひとつ丁寧に色づけし，(4) のときの一つひとつの正四面体の中に入れる．赤いスプレー塗料はどのくらい必要か求めよ．ただし，スプレー塗料を吹き付けるには 50cm^2 あたり 1ml 必要と考える．