ピタゴラス三角形の作図

北海道岩見沢西高等学校
加藤　渾一

2004/1/31

概 要

以前、時岡郁夫先生（現上川高校）の「基礎学力講座 」★★★ピタゴラス数★★★のプリントをそのまま勝手にお借りし生徒にやらせたことがあります。そのとき、「このピタゴラス三角形はどうやって画くのか？」という質問があり、その答えを考えてみました。

プリントの [1] は次のような問題となっています。

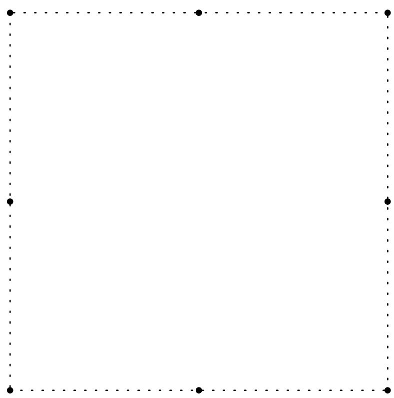
「$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2$ とおくと、$a^2 + b^2 = c^2$ を満たすことが知られています。次の表を完成させましょう。ただし、$m,\ n$ は $m > n$ とし、互いに素で、一方が偶数一方が奇数とします。」（以下 $m,\ n$ の値が与えられ、$a,\ b,\ c$ の値を書き込む表があります）そして、[2] では最大辺の長さが 100 未満である既約なピタゴラス三角形は 16 個しかないことが紹介されています。

ここでは単なる直角三角形の作図では当たり前すぎてつまらないので別な方法で考えることにしましょう。

まず、小手調べです。次の問題を考えて下さい。

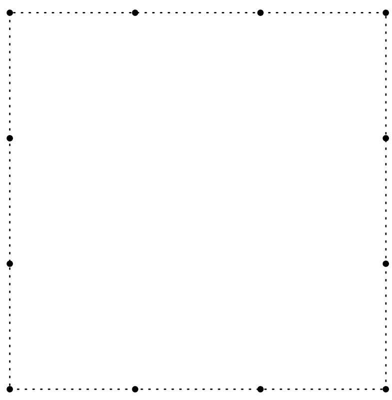
1. **３辺の長さの比が** $3:4:5$ **の三角形**

(1) 右図のように正方形の辺上に点が等間隔に並んでいます。これらの点を利用し定規だけを使用して、３辺の比が $3:4:5$ の三角形を画いて下さい。ただし、三角形が正方形の外にでてはいけません。

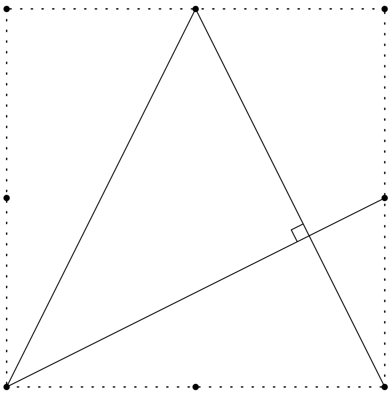


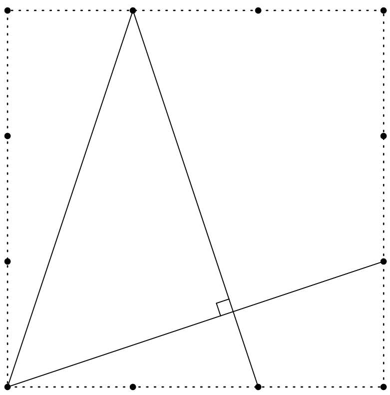
(2) 同様に, 右図で３辺の比が $3:4:5$ の三角形を画いて下さい。

※ヒント：(1),(2) の何れも長さの等しい３本の線分を引きます。

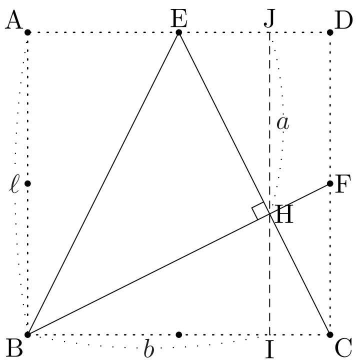


解答例





(1) の簡単な説明



右図で、$AB=\ell,\ JH=a,\ BI=b$ とおくと、△HJE,△BIH, △EAB は相似であるから。$EH:HB:BE=a:b:\ell$

△BHC∽△CHF, $BC:FC=2:1$ より

$BH:HC=2:1,\ HC:HF=2:1$

従って、$BI:IC=BH:HF=4:1$　すなわち $b=\dfrac{4}{5}\ell$

また、△BIH∽△BCF であるから、

$BI:IH=2:1$ より、$IH=\dfrac{1}{2}BI=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}\ell=\dfrac{2}{5}\ell$

よって、$a=\ell-IH=\dfrac{3}{5}\ell$

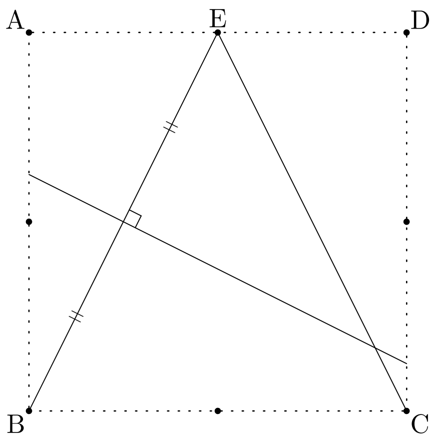
従って、$EH:HB:BE=a:b:\ell=\dfrac{3}{5}\ell:\dfrac{4}{5}\ell:\ell=3:4:5$

(2) についても同様であり、他にも解答はいくつでも考えられる。

後述する一般の作図の証明もこの方法を適用することができる。

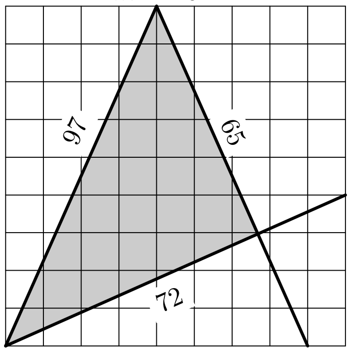
また、コンパスが使用可能とすると、右図のように BE の垂直二等分線を引いても同様の作図が可能である。

これは、正方形の折り紙で頂点 B を中点 E に合わせて折る、いわゆる「芳賀折り」にあたる。

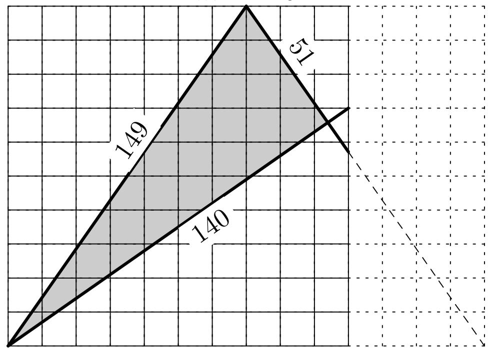


もう少し具体例を画いてみましょう。

$\dfrac{n}{m} = \dfrac{4}{9}$

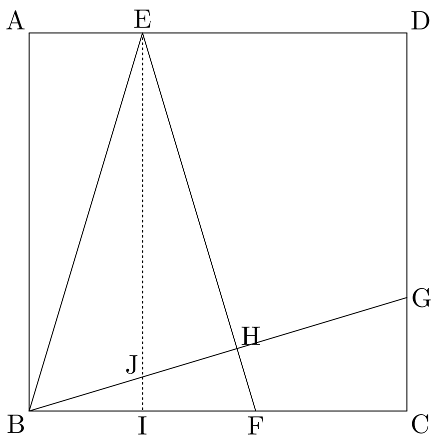


$\dfrac{n}{m} = \dfrac{7}{10}$



2. ピタゴラス三角形の作図

正方形と与えられた有理数 $\dfrac{n}{m}$（ただし、$m,\ n$ は $m > n$ とし、互いに素な正の整数）に対して、３辺の長さの比が $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ である三角形を作る。



「作図」 1 辺の長さが 1 である正方形 ABCD の辺 AD、CD 上に $\dfrac{n}{m}$ に等しく線分 AE、CG をとり、辺 BC 上に $\dfrac{2n}{m}$ に等しく線分 BF をとる。EF と BG の交点を H とすれば、△EHB は求めるもの。

「証明」 $\dfrac{n}{m} = x$ とおき、E から BC に垂線をおろしその足を I とすると

$BI = IF = CG = AE = x$ であるから、

△BEF は $EB = EF$ の二等辺三角形であり、

△BEI ≡ △FEI ≡ △GBC ⋯ ①

そこで、$EH = a,\ BH = b,\ EB = EF = BG = c$ とおき、EI と BG の交点を J とおく。

△BFH と △GBC において、

∠FBH = ∠GBC（共通）、∠BFH = ∠BGC（①より）だから △BFH∽△GBC

従って、$b : HF = 1 : x$ より、$HF = bx$、$EF = EH + HF$ より $c = a + bx \cdots$ ② とおける。

また、△GBC∽△JBI∽△JEH であるから、

$c : 1 = BJ : x,\ x : 1 = JH : a$ より $BJ = cx,\ JH = ax$

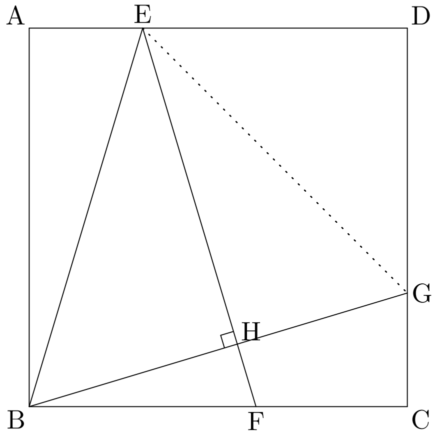
従って、$BH = BJ + JH$ より、$b = cx + ax \cdots$ ③

②, ③より、$a = \dfrac{c(1 - x^2)}{1 + x^2},\ b = \dfrac{2cx}{1 + x^2}$ を得る。

よって、$a : b : c = \dfrac{c(1 - x^2)}{1 + x^2} : \dfrac{2cx}{1 + x^2} : c = 1 - x^2 : 2x : 1 + x^2$ であり、

$x = \dfrac{n}{m}$ とすると、$a : b : c = m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ となる。

「別証明 I」 面積を使う。



$\triangle$BFH$\backsim$$\triangle$GBC より、$\angle$BHF $= 90^\circ$

すなわち $EH \perp BG$

$\triangle$EBG $= 1 - \triangle$BAE $- \triangle$BCG $- \triangle$GDE

$= 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}(1-x)^2 = \dfrac{1-x^2}{2}$

また、$\triangle$EBG $= \dfrac{1}{2}BG \cdot EH = \dfrac{1}{2}ca$ であるから、$ac = 1 - x^2 \cdots$①

さらに、$\triangle$BEF $= \dfrac{1}{2} \times 2x \times 1 = x$、 また

$\triangle$BEF $= \dfrac{1}{2}EF \cdot BH = \dfrac{1}{2}cb$

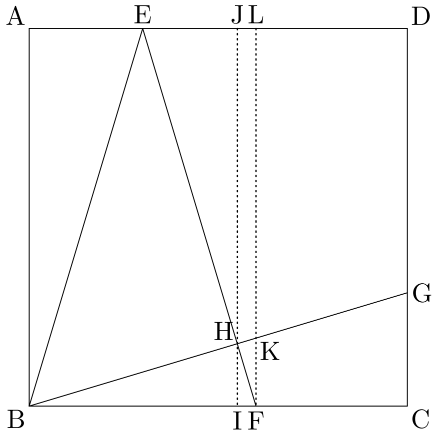
よって、$cb = 2x \cdots$②

$\triangle$BFH$\backsim$$\triangle$GBC より $FH = bx$、$EF = EH + HF$ だから $c = a + bx$

すなわち $c^2 = ac + bcx \cdots$③ ③に①、②を代入して $c^2 = x^2 + 1$

従って、$a : b : c = ac : bc : c^2 = 1 - x^2 : 2x : 1 + x^2 = m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$

「別証明 II」 いずれにしても三平方の定理は使わない。



右図において、JI は点 H を LF は 点 F を通る辺 DC に平行な線分である。

$AB = 1,\ JH = a,\ BI = b$ とおく。

$\triangle$HIE$\backsim$$\triangle$BIH$\backsim$$\triangle$EAB であるから

$EH : HB : BE = a : b : 1$

$\triangle$BHF$\backsim$$\triangle$BCG より $EF \perp BG$

$\triangle$BHF$\backsim$$\triangle$FHK$\backsim$$\triangle$BFK だから、

$BF : FK = BC : CG = 1 : \dfrac{n}{m}$

よって、$BH : HF = HF : HK = 1 : \dfrac{n}{m}$ だから $BH : HK = BI : IF = 1 : \dfrac{n^2}{m^2}$

すなわち、$b = BI = \dfrac{1}{1 + \dfrac{n^2}{m^2}}BF = \dfrac{m^2}{m^2 + n^2} \times \dfrac{2n}{m} = \dfrac{2mn}{m^2 + n^2}$

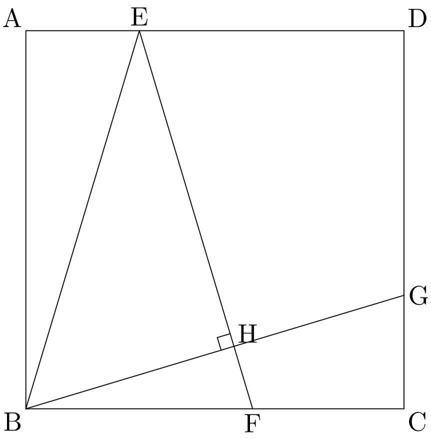
また、$\triangle$BIH$\backsim$$\triangle$BCG であるから、$BI : IH = 1 : \dfrac{n}{m}$ より

$IH = \dfrac{n}{m}BI = \dfrac{n}{m} \times \dfrac{2mn}{m^2 + n^2} = \dfrac{2n^2}{m^2 + n^2}$

よって、$a = JH = 1 - IH = 1 - \dfrac{2n^2}{m^2 + n^2} = \dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$

従って、$EH : HB : BE = a : b : 1 = \dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} : \dfrac{2mn}{m^2 + n^2} : 1 = m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$

「吟味」　3 辺の長さの比が $m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$ となる三角形は有理数 $\dfrac{n}{m}$ に対してのみなのでしょうか。



右図のように、辺 AD 上に任意に点 E をとり、同様の作図を施した結果 3 辺の長さの比が

$EH:HB:BE=m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$

となったとする。

そこで、$EH=t(m^2-n^2),\ HB=t(2mn),$
$BE=EF=t(m^2+n^2)$ とおくと、

$HF=EF-EH$

$\quad=t(m^2+n^2)-t(m^2-n^2)=2n^2t$

である。

ここで、$AE=CG=x,\ BF=2x$ とすると、$\triangle$BAF, $\triangle$BHF は直角三角形であるから

$AB^2+AE^2=BE^2,\ BF^2=HB^2+HF^2$　(ピタゴラスの定理) が成り立つ。

すなわち、$1+x^2=(m^2+n^2)^2t^2\cdots①,\ 4x^2=4m^2n^2t^2+4n^4t^2\cdots②$

①,② より t を消去すると、$x=\dfrac{n}{m}$ が得られる。

ところで、直角を挟む 2 辺を入れ替えて、

$EH:HB:BE=2mn:m^2-n^2:m^2+n^2$ となったとすると、

$EH=t(2mn),\ HB=t(m^2-n^2),\ BE=EF=t(m^2+n^2)$ とおけ、

$HF=EF-EH=t(m^2+n^2)-t(2mn)=t(m-n)^2$ となる。

この場合も同様に、$AB^2+AE^2=BE^2,\ BF^2=HB^2+HF^2$ から

$\quad 1+x^2=(m^2+n^2)^2t^2\cdots①,\ 4x^2=(m^2+n^2)^2t^2+(m-n)^4t^2\cdots③$

①,③ より t を消去すると、$x=\dfrac{m-n}{m+n}$ が得られる。

つまり、3 辺の比が $m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$ となる三角形に対応する有理数は、$\dfrac{n}{m},\ \dfrac{m-n}{m+n}$ の 2 個が存在する。

3. 芳賀の定理との関連について

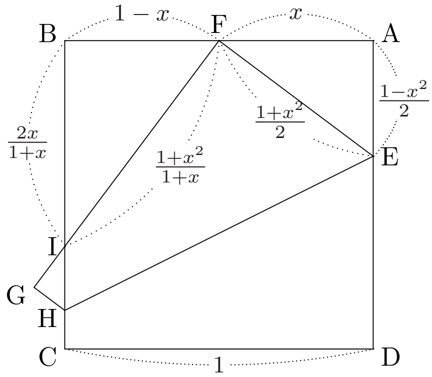
さて、有理数 $\dfrac{m-n}{m+n}$ についても、前項でみたように同様な結果を得ることができ、$\dfrac{n}{m}$ に対して相似な三角形となる (直角を挟む 2 辺が入れ替わっているだけ)。このことがパリティが同じ $m,\ n$ を除外する理由である。

大雑把に言うと、$m,\ n$ が共に奇数の場合、$m=2m'+1,\ n=2n'+1$ とおけるから、

$$\frac{m-n}{m+n}=\frac{2(m'-n')}{2(m'+n'+1)}=\frac{m'-n'}{m'+n'+1}$$

となり、分子、分母の一方が偶数、一方が奇数となる。つまり、偶奇の異なる $m,\ n$ についてのみ考えればよいことになる。

折り紙でも簡単な操作でピタゴラス三角形を作ることができる。その一つがもともとは辺の奇数分割を可能にする定理である「芳賀の定理」である。その詳細は省略するが、右図のように正方形の 1 つの頂点をその頂点を含まない辺に合わせて折る。このとき、x を有理数 $\frac{n}{m}$ とすると、△FBI∽△EAF∽△HGI であり、かつこれらの三角形は 3 辺の長さの比が $m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$ であるピタゴラス 3 角形となる。



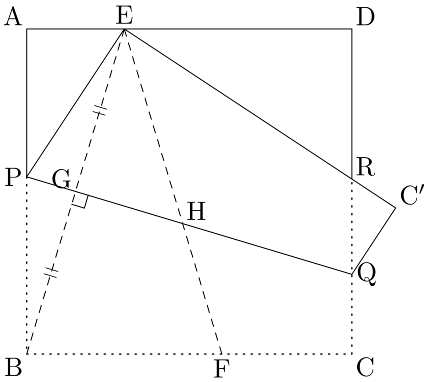
また、 $IC=\frac{m-n}{m+n}$ となることから、ここに頂点を合わせて折っても合同な三角形をつくることができ、上述（パリティが同じ $m,\ n$ を除外する理由）のことが確められる。

ピタゴラス数の図的イメージとしては最適だと思われる。ただ残念なことは「芳賀折り」の場合、紙を開いてしまうとピタゴラス三角形が消えてしまうことである。

ここまでのまとめの意味で、**問題を作ってみました**

正方形 ABCD において、点 E は辺 AD 上に点 F は BC 上あり、三角形 BEF は $EB=EF$ の二等辺三角形とする。右図のように点 B を点 E に重ねて折る。折り目となる直線が辺 AB と交わる点を P、辺 CD と交わる点を Q、線分 EB、EF と交わる点を G、H とする。このとき点 C が点 C' に移るとする。また、辺 EC′ が CD と交わる点を R とする。

(1)△EGH∽△PAE∽△EDR であることを示せ。



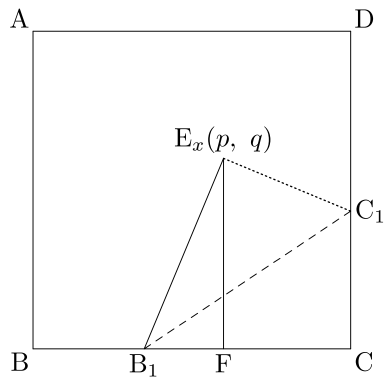
(2) 辺 AE の長さが有理数で表されるとき、(1) の三角形はピタゴラス三角形であることを示せ。

4. 終わりに

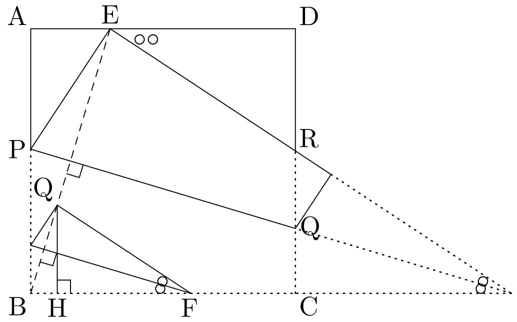
以上の他に、「折る紙の数学」（渡部勝著　講談社　ブルーバックス）の中で示されている作図法を紹介する。（これも開くと消えてしまいますし折ってもそのままでは見えてきません。）

『正方形 ABCD 内に任意の点 $E_x(p,\ q)$ をとり、この点頂点 C を重ね折りし、開きます。このときできる折り目と辺 BC との交点を B_1 します。さらに点 E_x から辺 BC に垂線を下ろし、その足を F とします。$p,\ q$ を有理数とすると、三角形 E_xB_1F はピタゴラス三角形である。

[例]:$p=\frac{2}{13},\ q=\frac{4}{7}$ のとき、3225 : 8008 : 8633』



証明等は省略するが、右図のように「芳賀折り」との関係図を示しておきます。



$Q(p,\ q)$ とすると、$AE=\dfrac{p}{q}$ となり、△QHF∽△RDE であることが分かる。

従って、$Q(p,\ q)$ は線分 BE 上にあれば、全て同じ結果となる。すなわち、$p,\ q$ は必ずしも有理数である必要はなく $\dfrac{p}{q}$ が有理数であればよい。

ピタゴラス数のおさらい

$a^2+b^2=c^2$ を満たす整数組 $(a,\ b,\ c)$ のことをピタゴラス数という。これについて次が成り立つ。

> $(a,\ b,\ c)$ を互いに素なピタゴラス数とする。このとき、整数 $m,\ n$ を用いて
> $$a=m^2-n^2,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2$$
> と表され、そのとき $m,\ n$ は互いに素で一方が奇数で他方が偶数となる。

証明

まず、$a,\ b$ の一方は偶数で、他方は奇数であることを示す。

$a,\ b$ は互いに素であるから両方と偶数であることはない。両方が奇数とすると、$a=2m+1,\ b=2n+1$ とおけ $c^2=a^2+b^2=4(m^2+n^2+m+n)+2$ となり、c^2 は 4 で割ると 2 余ることになる。このような整数 c は存在しない。（c が偶数であれば c^2 は 4 で割り切れ、奇数であれば 1 余る。）よって、$a,\ b$ の一方は偶数で、他方は奇数である。

ここでは a を奇数、b を偶数とし（c は奇数となる）、$a^2+b^2=c^2$ より、$a^2=(c+b)(c-b)$ と変形する。

このとき、$c+b,\ c-b$ も奇数であり、かつ互いに素である。（もし共通因数 k を持てば、その和 $2c$、差 $2b$ も k を共通因数を持つことになり、a は 2 を因数に持たないから k を因数に持つことになり仮定に反する）

しかもこれらの積が平方数 a^2 であるから、どちらも平方数でなければなりません。

そこで、$c+b=p^2,\ c-b=q^2$ とおく。すると $a=pq,\ b=\dfrac{p^2-q^2}{2},\ c=\dfrac{p^2+q^2}{2}$

$p,\ q$ は奇数であるから、$m=\dfrac{p+q}{2},\ n=\dfrac{p-q}{2}$ とおくと

$p=m+n,\ q=m-n$ より、$m,\ n$ の一方は奇数で他方は偶数であり、互いに素である。

よって、$a=pq=(m+n)(m-n)=m^2-n^2,\ b=\dfrac{p^2-q^2}{2}=2mn, c=c=\dfrac{p^2+q^2}{2}=m^2+n^2$ と表される。

逆に、このような $m,\ n$ に対して、明らかに $a^2+b^2=c^2$ が成り立つが、$(a,\ b,\ c)$ に共通因数 k があるとすると $c-a=2n^2,\ c+a=2m^2$ より、k は $2n^2,\ 2m^2$ の共通因数である。$m,\ n$ は互いに素であるから $k=2$ である。

ところが、$a=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ は 2 を因数に持つので偶数となり、$(m+n)(m-n)$ が奇数であることに反する。

1.(2) の解答例