折り紙でひらめく補助線の幾何

加藤　渾一(北海道岩見沢西高等学校)

第56回数学教育実践研究会

2006年 1月 28日

於：ニッセイＭＫビル

はじめに　　（お読みいただければ・・・）

数学セミナー（日本評論社）2006年１月号より

特　集：代数方程式とガロア理論

・　・　・　・　・　・　・　・

・ものさしとコンパスとおりがみ

小特集：折り紙

・折り紙の科学

・折り紙による曲面近似

・ピタゴラスの三角形と折り紙

（一昨年の私のレポートと同テーマですが

証明等がスマートです）

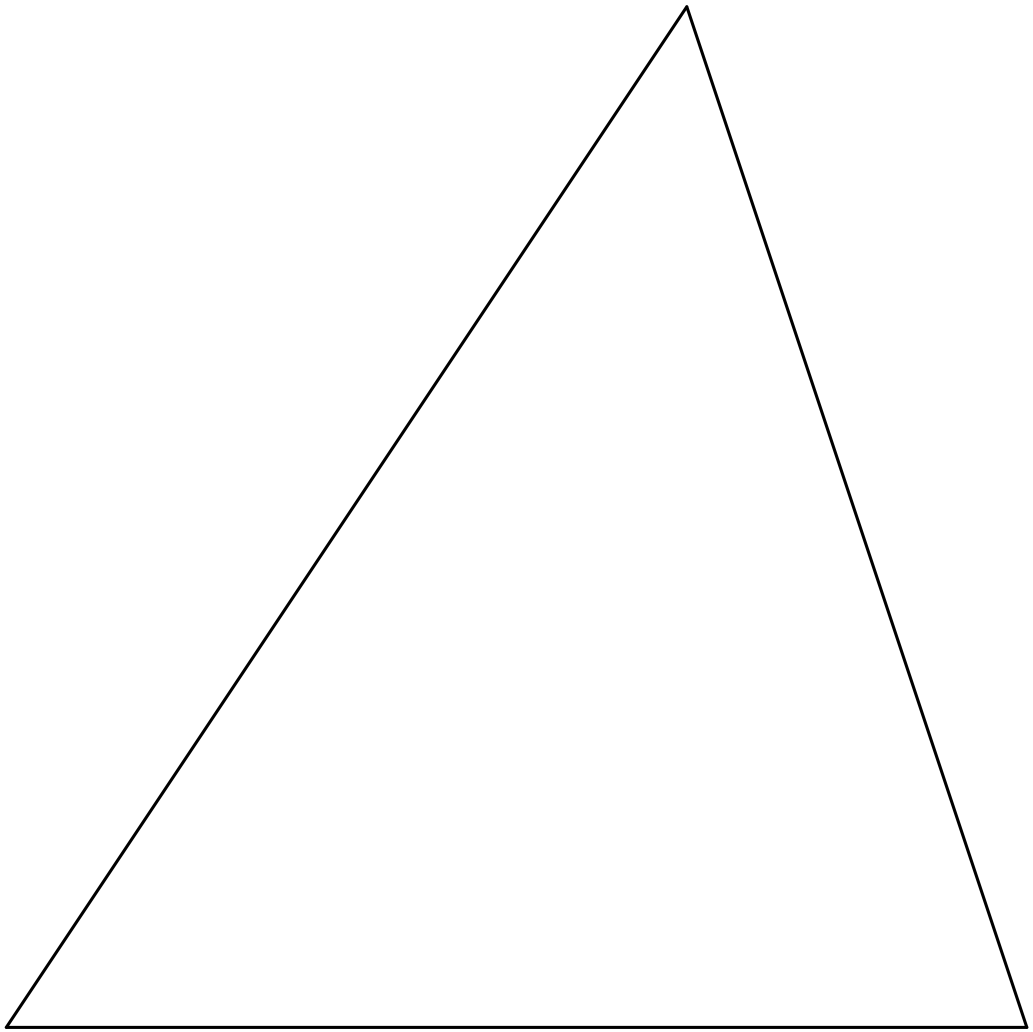
エレガントな解答求む

はじめに

実験：３角形の内角の和＝180°

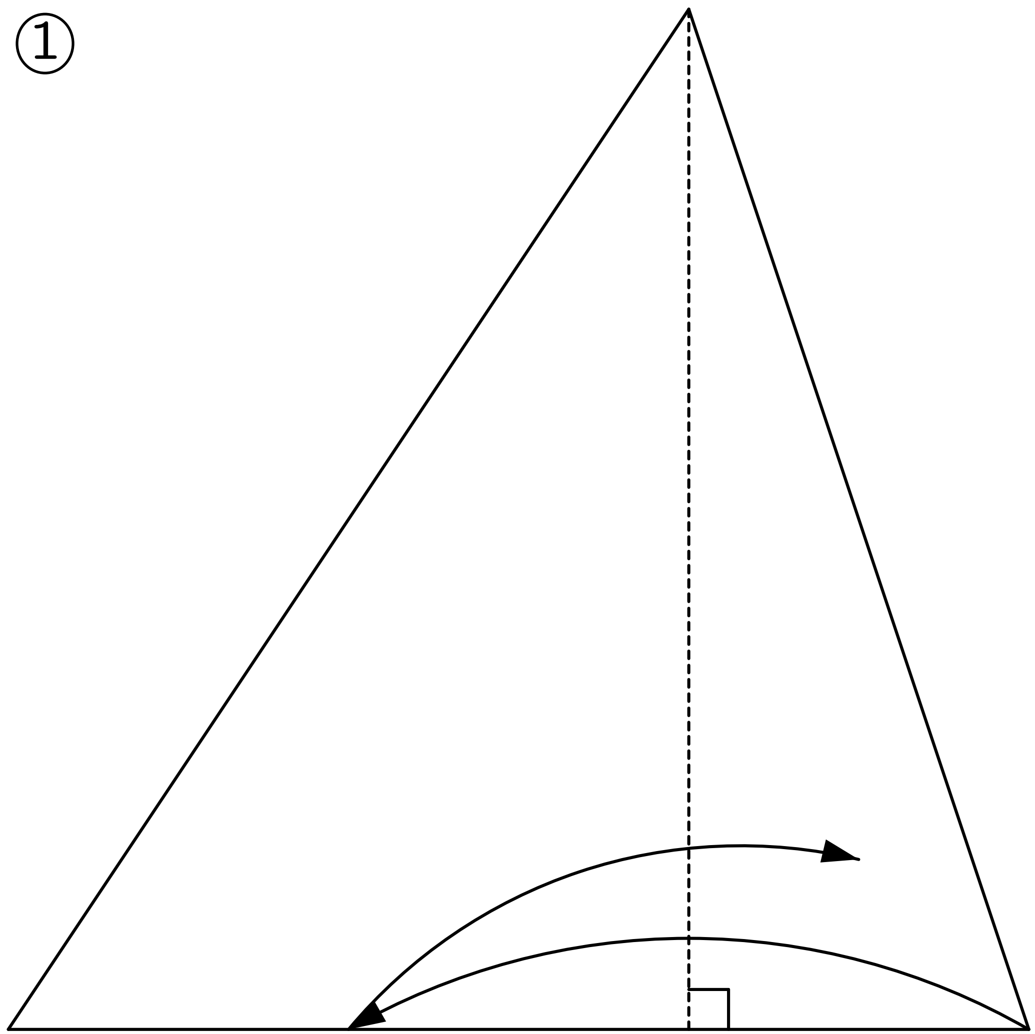
＝以下、資料を参照してご覧ください＝

実験：３角形の内角の和＝180°



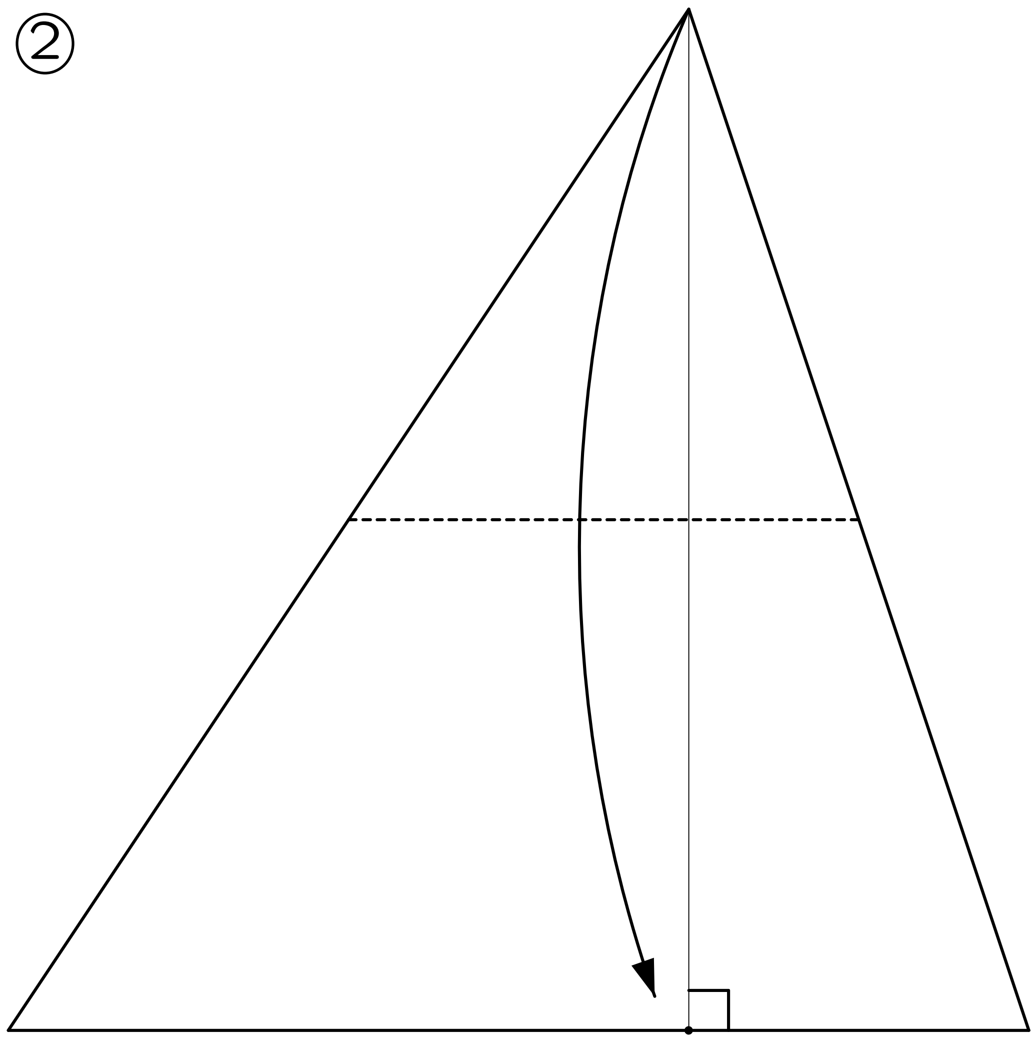
実験：３角形の内角の和＝180°

①



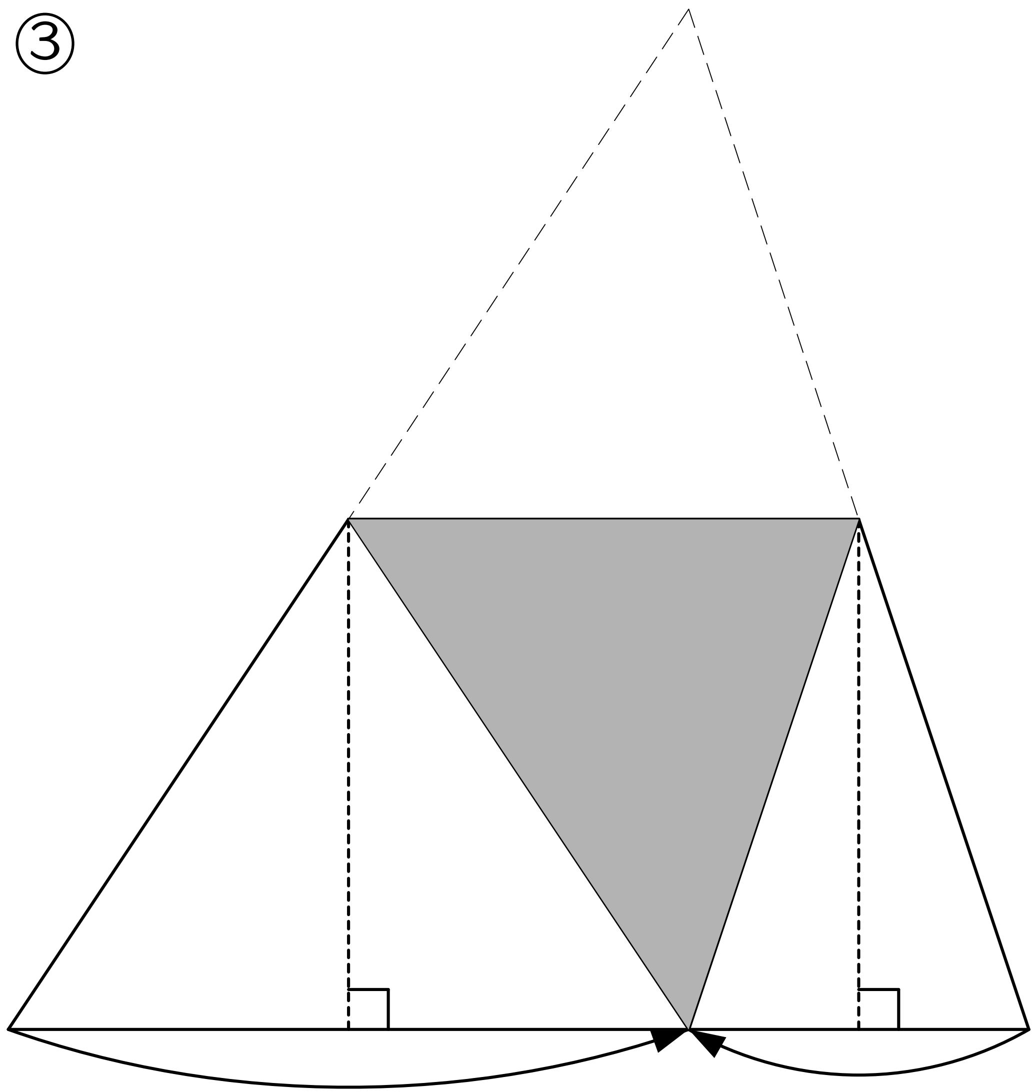
実験：３角形の内角の和＝180°

②



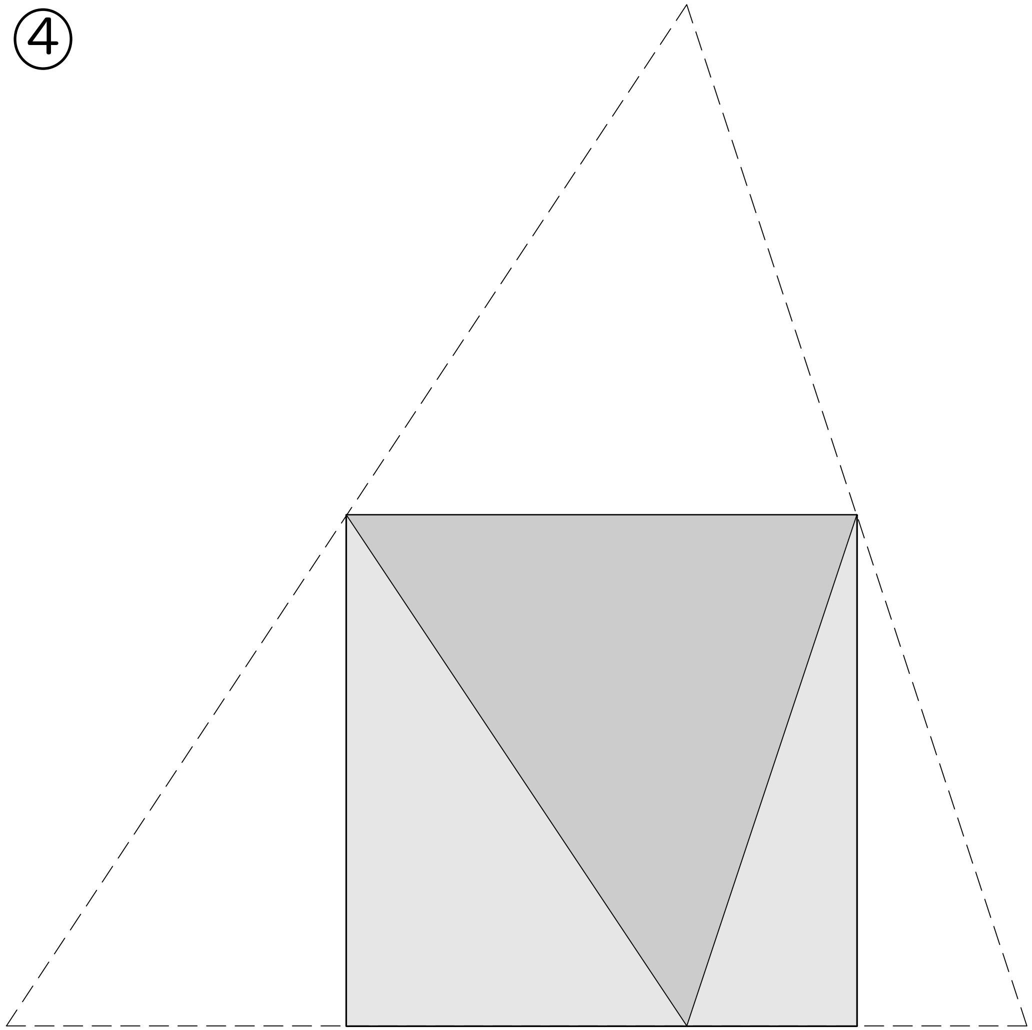
実験：３角形の内角の和＝180°

③



実験：３角形の内角の和＝180°

④

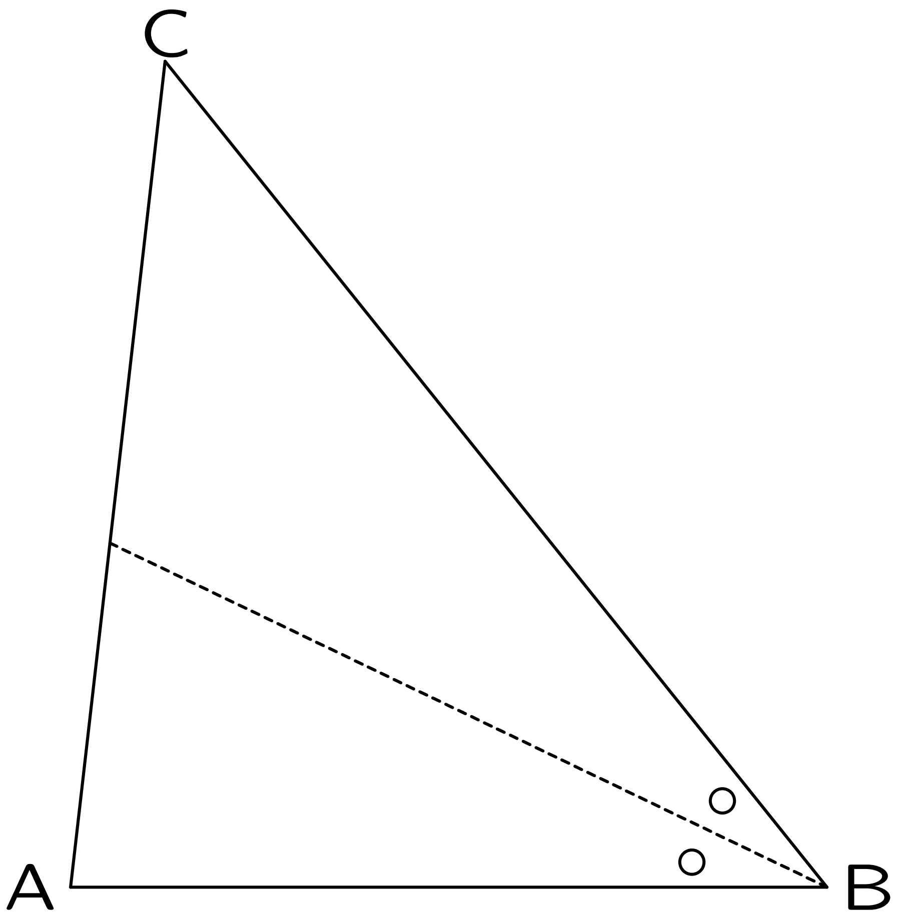


目次　(私の持ちネタ)　★印今回のテーマ

折り線の数理

- 角の二等分線(今回)
- 紙コップの秘密
- 折り線の秘密

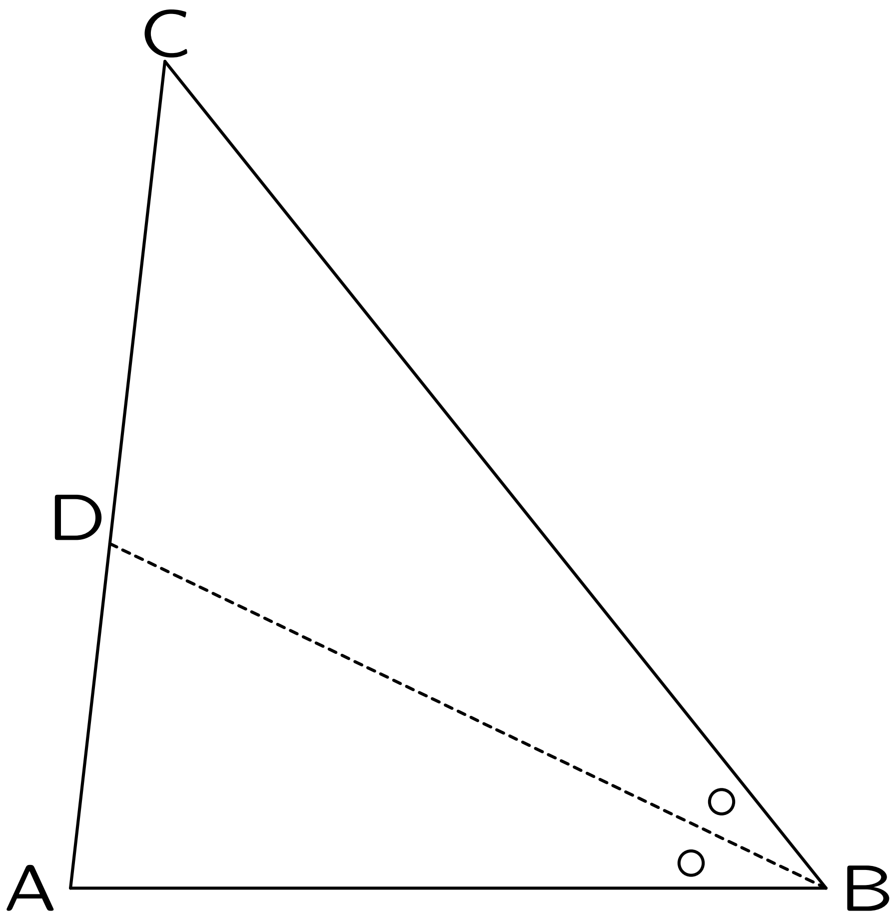
角の二等分線の性質 資料　P18 参照



角を２等分する折り目をつけることは折り紙では煩雑に用いられます。

ＢＡとＢＣを合わせて折る

角の二等分線の性質 資料　P18 参照

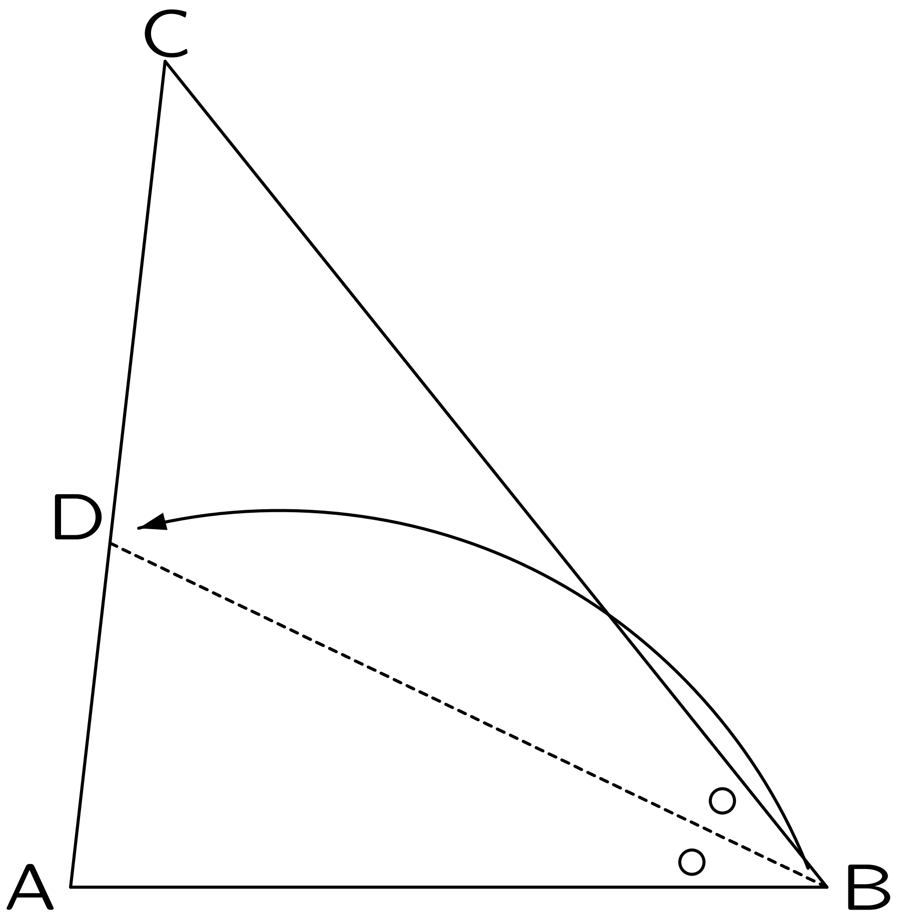


角Ａの２等分とＢＣの交点をＤとすると、

$$AD : DC = BA : BC$$

この性質を折り紙で説明（証明）してみます

角の二等分線の性質 資料　P18 参照

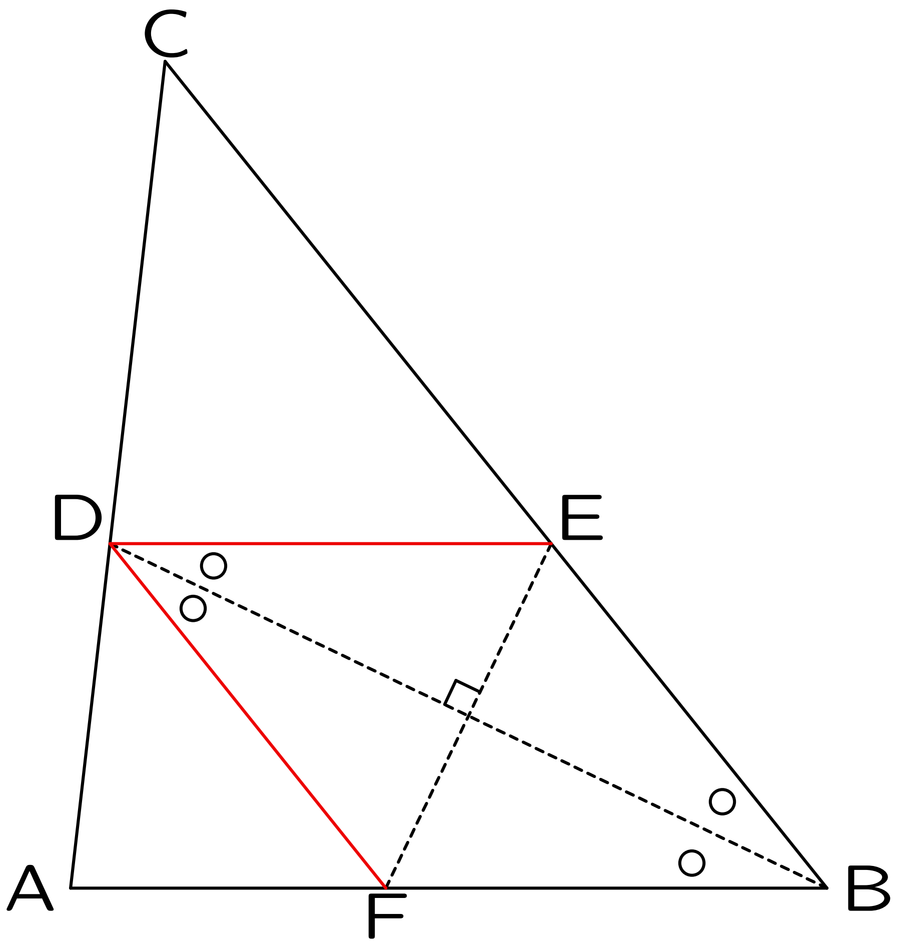


角Ａの２等分とＢＣの交点をＤとすると、

$$AD : DC = BA : BC$$

頂点Ｂが点Ｄに重なるように折る。

角の二等分線の性質 資料　P18 参照



$AD : DC = BA : BC$

頂点Bが点Dに重なるように折る。

四角形DEBFは菱形

$DE \parallel AB,\ FD \parallel BC$

△CDE∽△DAF∽△CAB

$ED = FD$ であるから

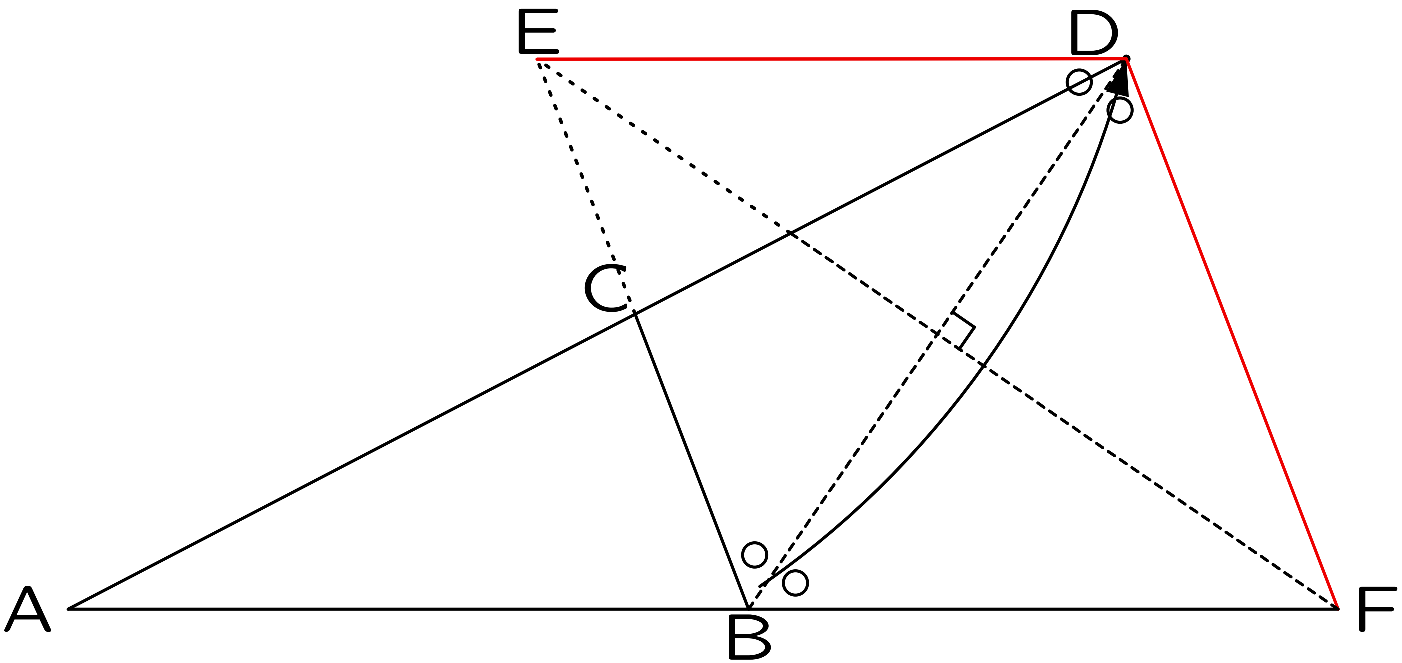
$AD : DC = FA : ED$

$= FA : FD = BA : BC$

外角の二等分線 資料　P18 参照

内角と同様に‥(イメージで折る！)

$$AD : DC = BA : BC$$



三角形の作図

- 三角形の作図（1）（今回）
- 三角形の作図（2）
- ピタゴラス三角形

数学セミナー2005年１月号より

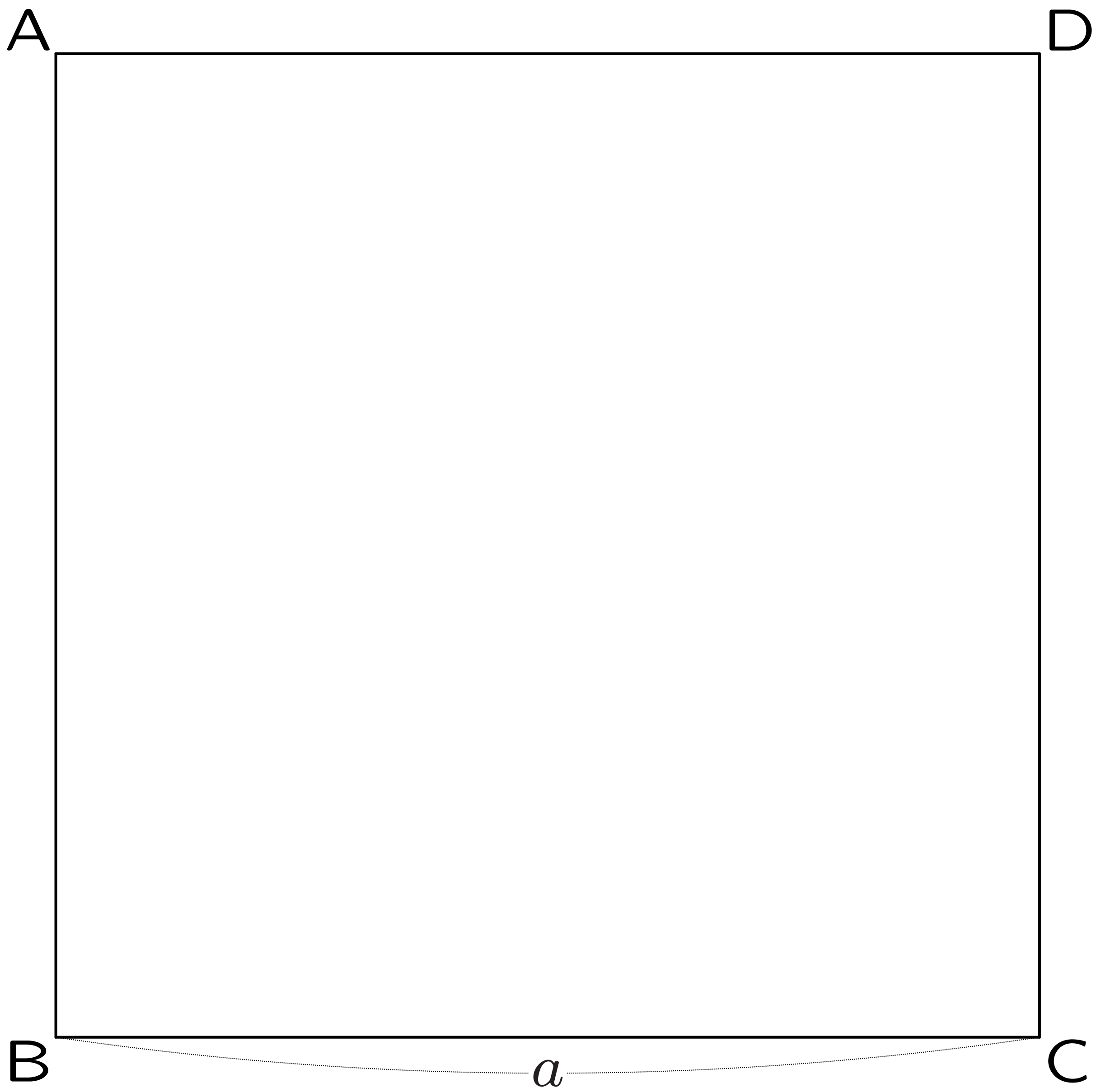
三角形の作図問題

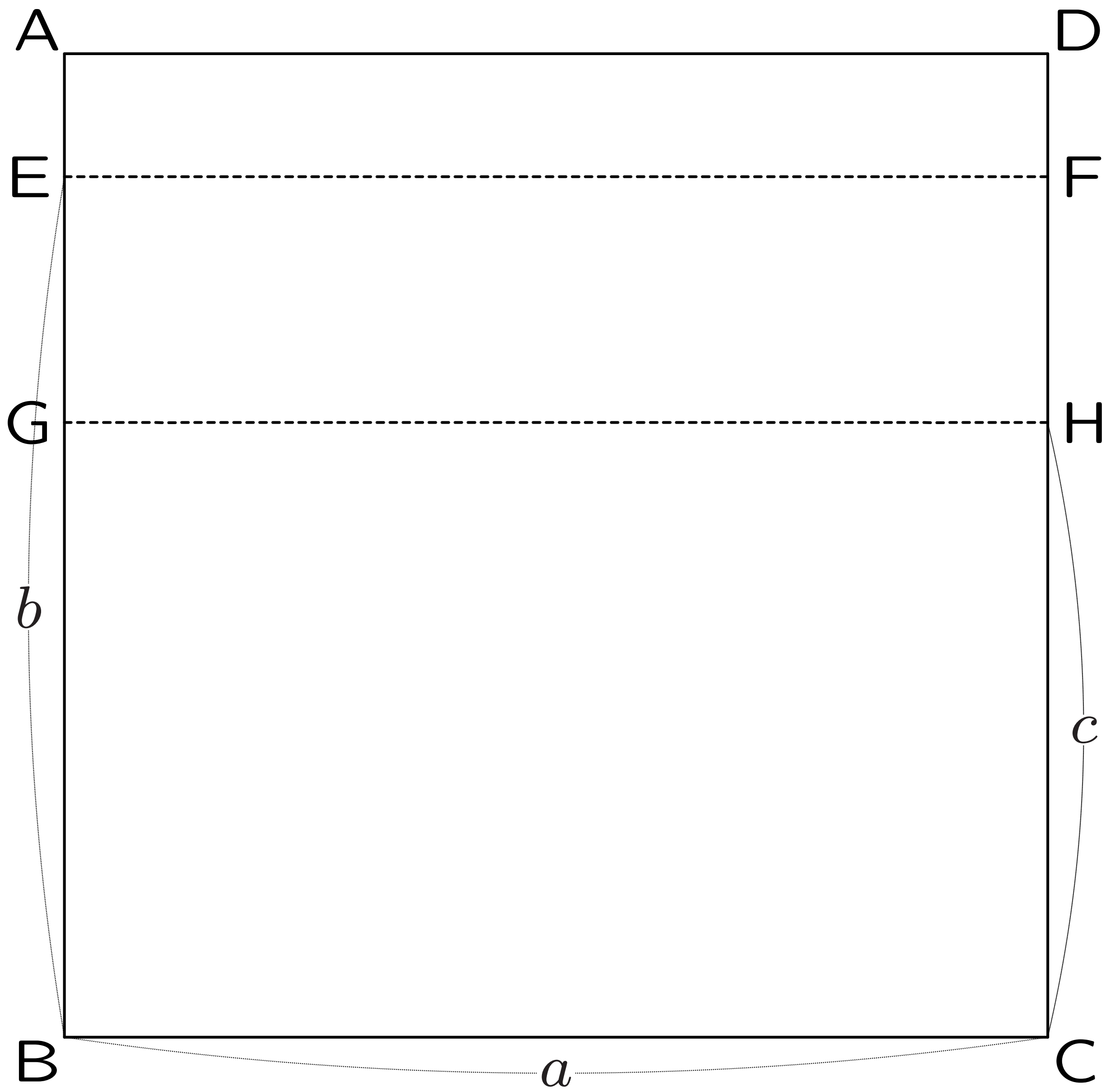
一辺aの正方形用紙で三辺が$a,\ b,\ c(>0)$となる三角形を折って作図して下さい。
ただし、三辺は次の条件を満たします。

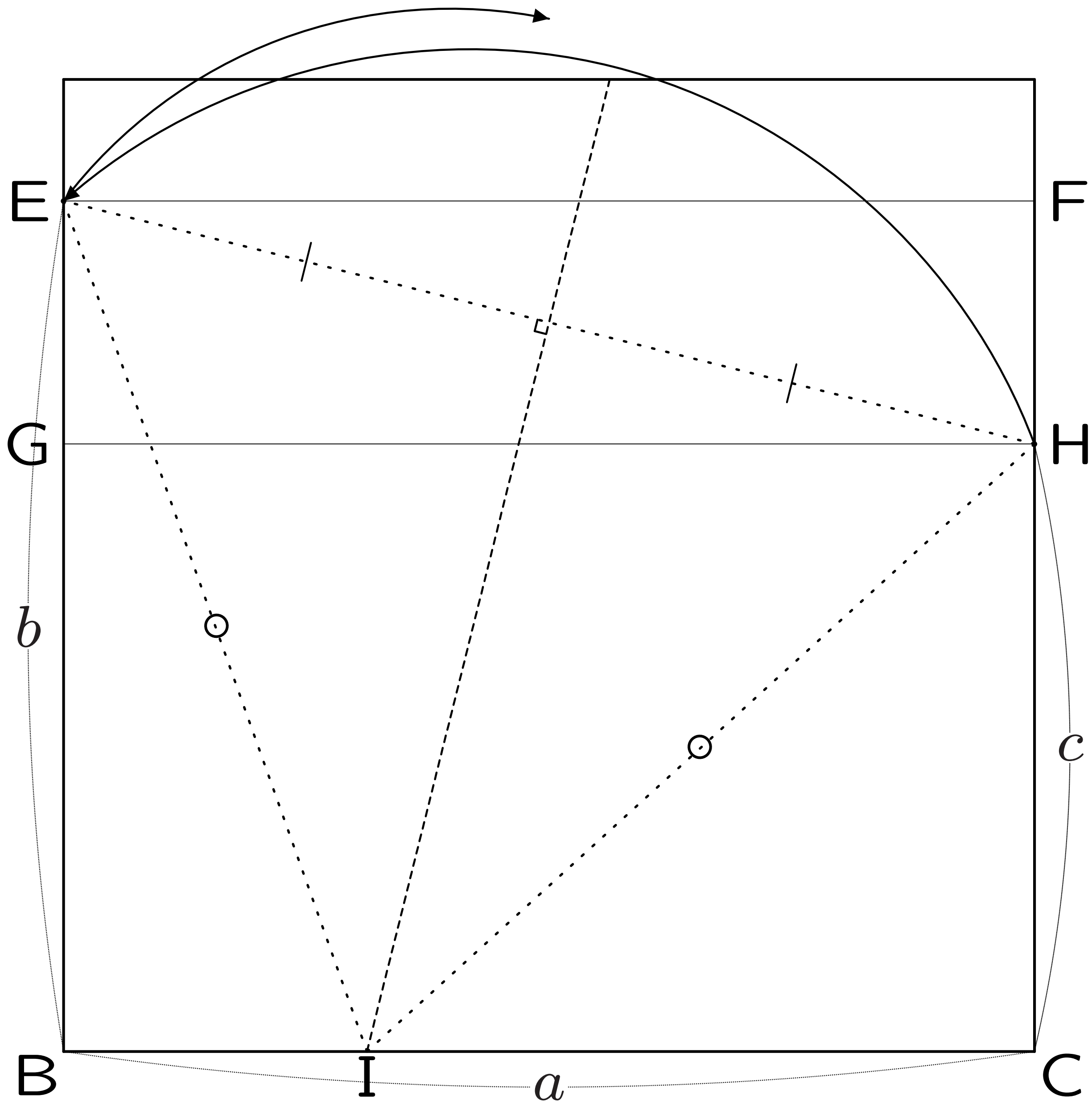
$$a \geqq b \geqq c, \quad a < b + c$$

もちろん証明も添えて下さい。

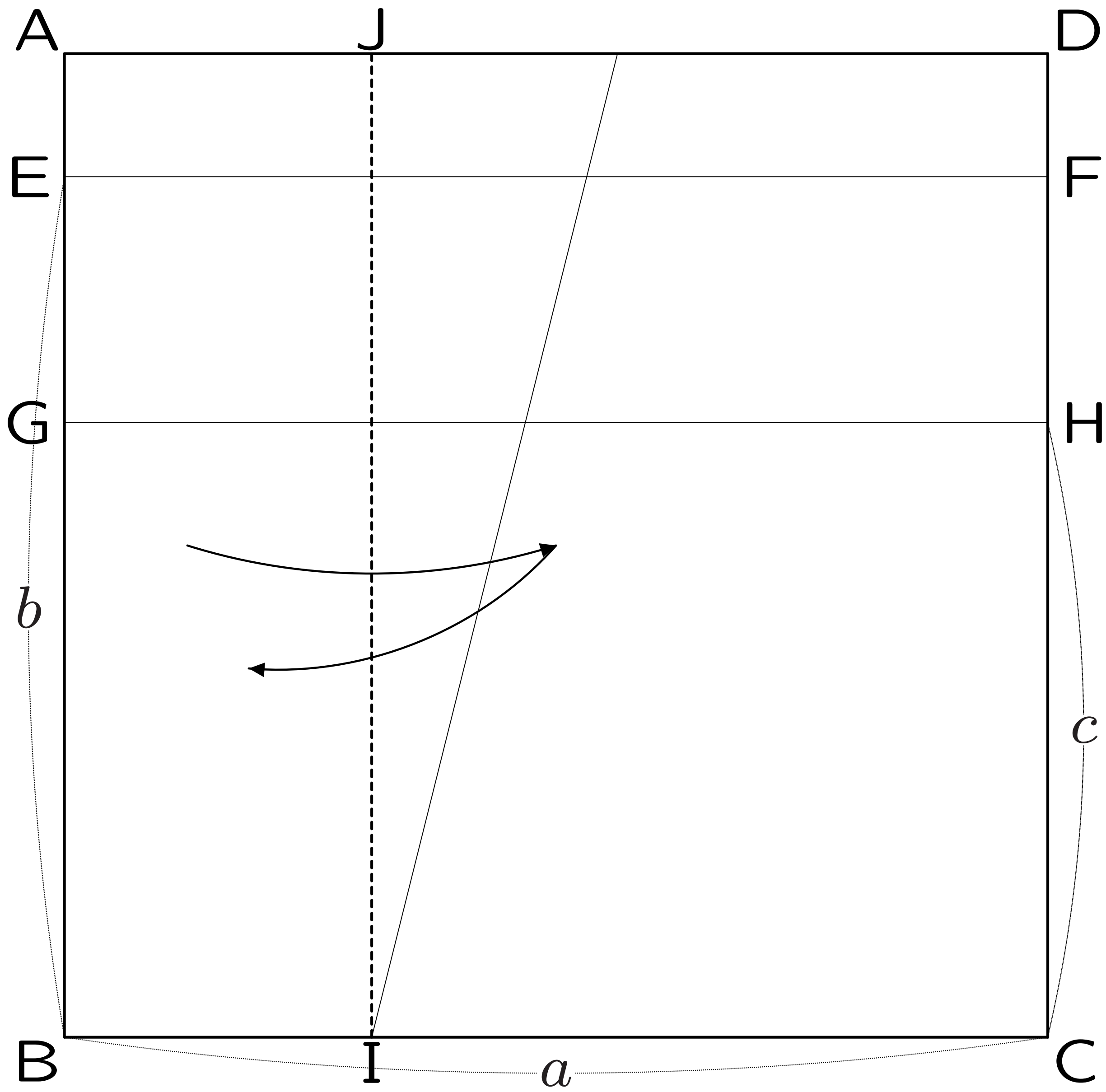
資料　P23 参照

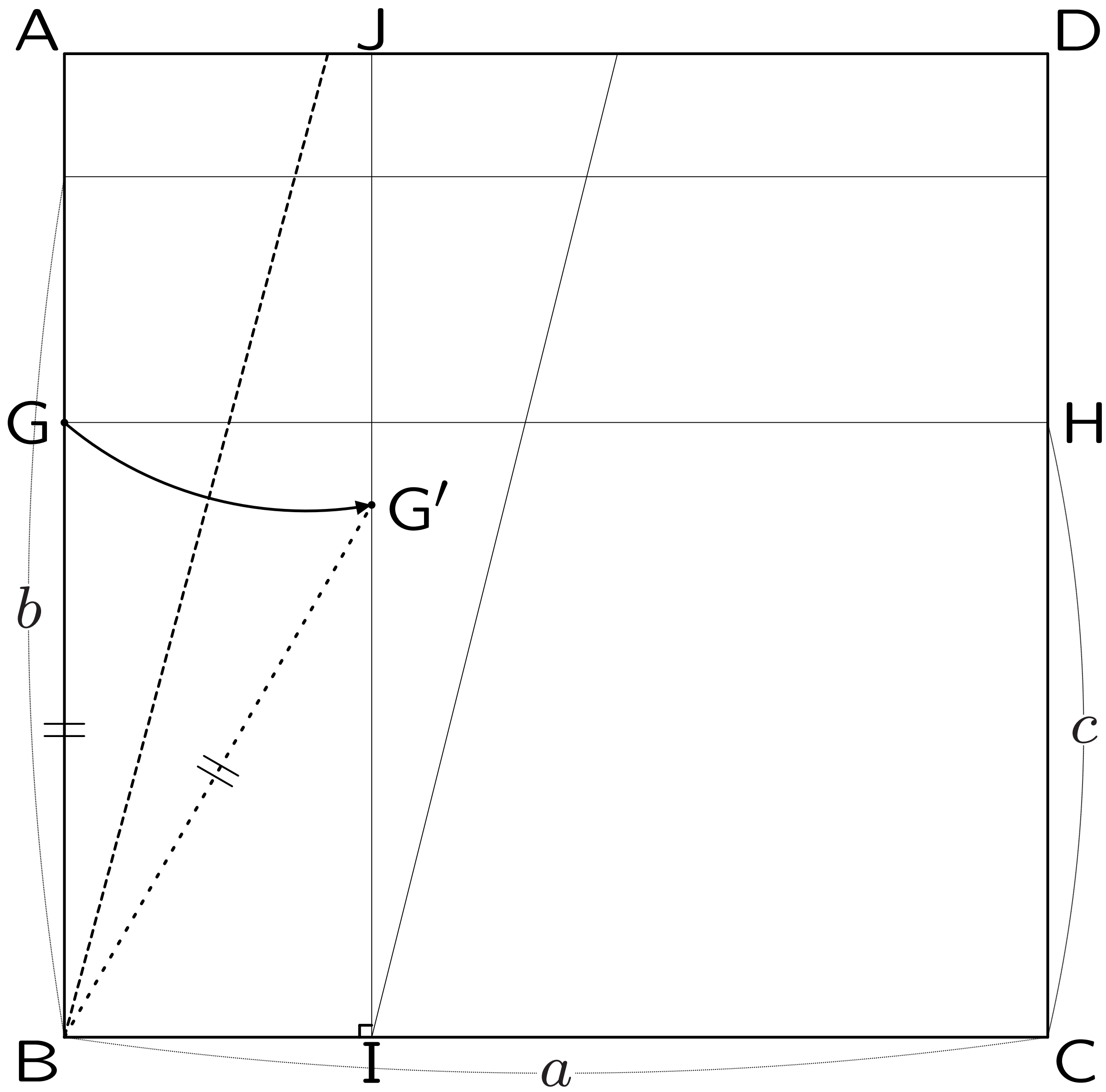

A
D
B
C
a

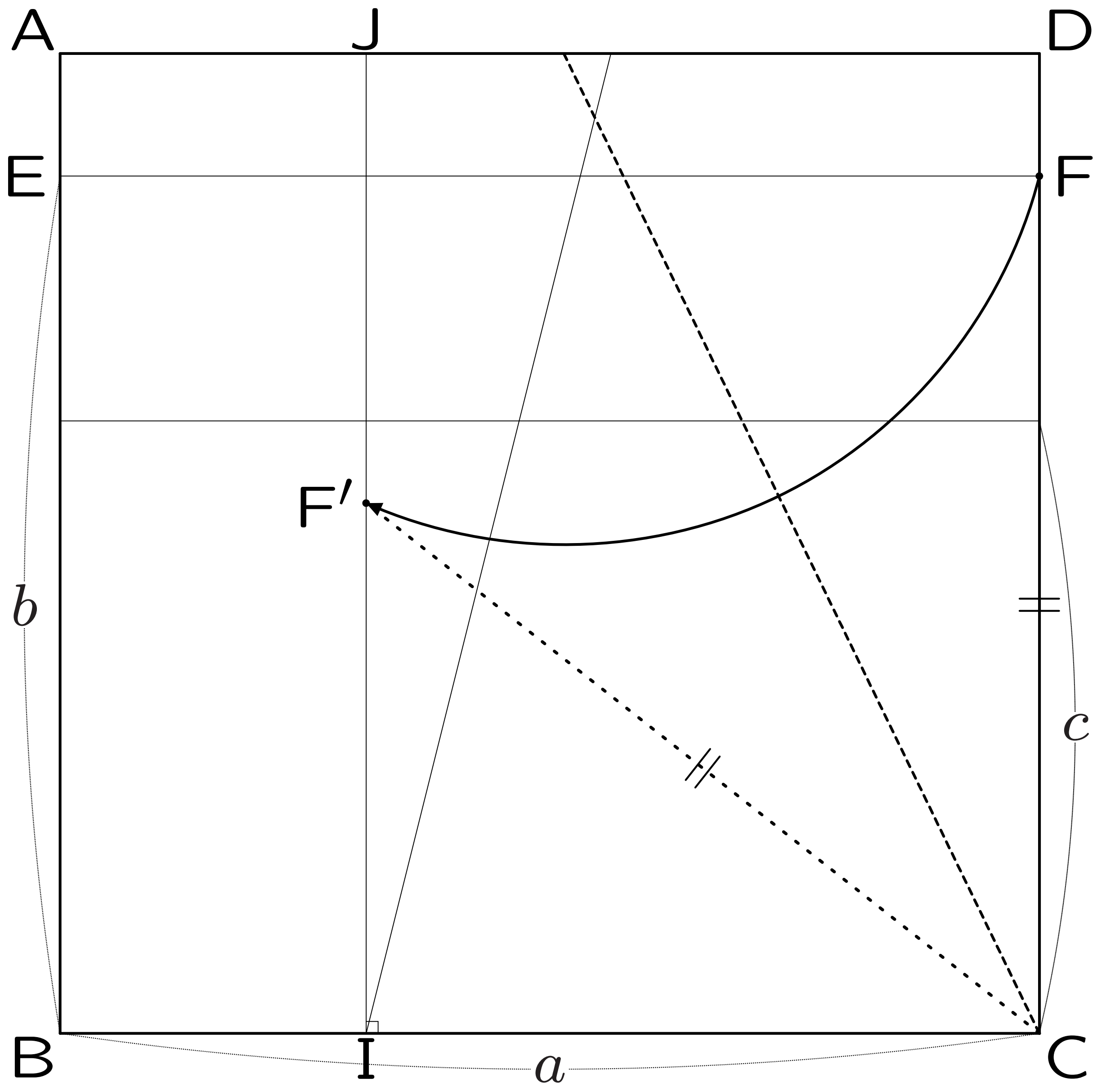

A
D
E
F
G
H
b
c
B
a
C

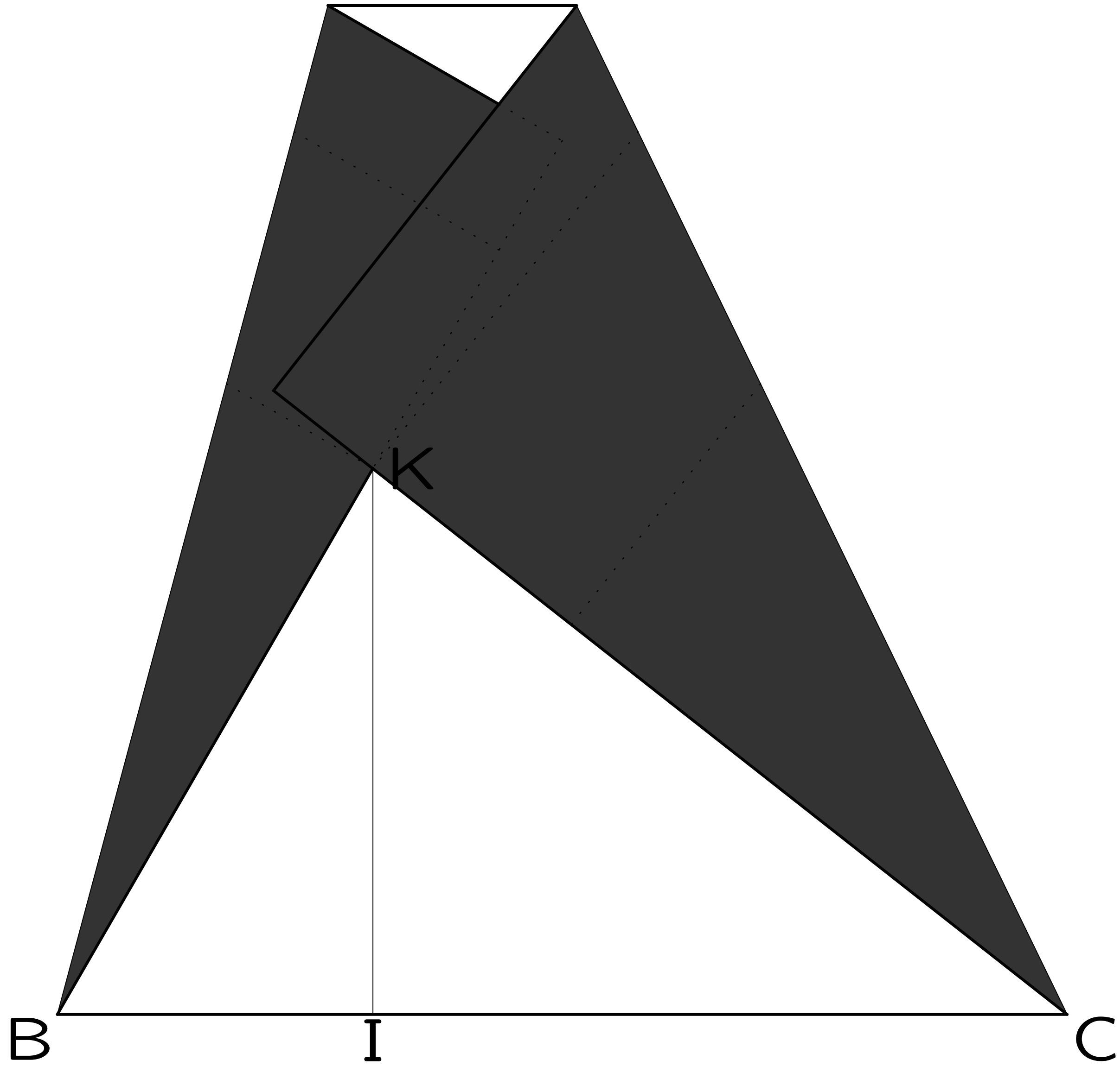


E
F
G
H
b
c
B
I
a
C


A
J
D
E
F
G
H
b
c
B
I
a
C


A
J
D
G
H
G′
b
c
B
I
a
C


A
J
D
E
F
F′
b
c
B
I
a
C


K
B
I
C

折り紙のパズル

折り紙のパズル

折り紙分度器

正方形の分割(今回)

数学セミナー2006年１月号より

正方形の分割

正方形を６本の直線で分割してください。折り紙の幾何ですから、６回折るということです。このとき以下の条件を満たすには、どのような折り筋をつければよいでしょうか。

1)　できた三角形、四角形の面積が、初めの正方形の面積を１とすると自然数のみで表記できる分数になる。

2)　また、合同なものが、それぞれ４つずつできる（つまり折り筋が点対称になる）。

3)　最小の三角形の面積は$\frac{1}{80}$になるので、切り離してつなぎ直すことで、$\frac{1}{80}$から$\frac{79}{80}$の面積を作ることができる。

以上の条件は答えのヒントにもなっています。

数学セミナー2006年１月号より

正方形の分割

省　　　略

2006年4月号を参照して下さい

平面幾何について

高校での代数的な表現方法に出会う前に

図形そのものの

平行移動、対称移動、回転移動等
にどれだけ生徒はなじんでいるだろうか？

図形を鑑賞する、鑑賞する目を養うことの
重要性

平面幾何について

平面幾何：探偵小説と同じ

「幾何学再発見」瀬山士郎先生

同感！

一見何の関係もなさそうな点・線が

補助線を引くことによって

その関係が浮かび上がる。

まさに、

「点と線」（松本清張）の世界

平面幾何について

小学生：対称性を基本に、
正三角形、二等辺三角形、円等
中・(高校)生：それに、
内心・外心、相似形等を加える

入試で受験生が
自分で補助線を引くことはない(ある予備校講師)
与えられる？
発見する喜び $\Longleftrightarrow$ 与えられた補助線は楽しくない

平面幾何について

補助線感覚を養う(練習)を
折り紙の発想（筋肉作業?）で！

折り紙の数理や発想を通して
幾何を楽しんでみましょう！

図形の移動

「切り取り」と「折り返し」の移動 (今回)

対称移動(今回)

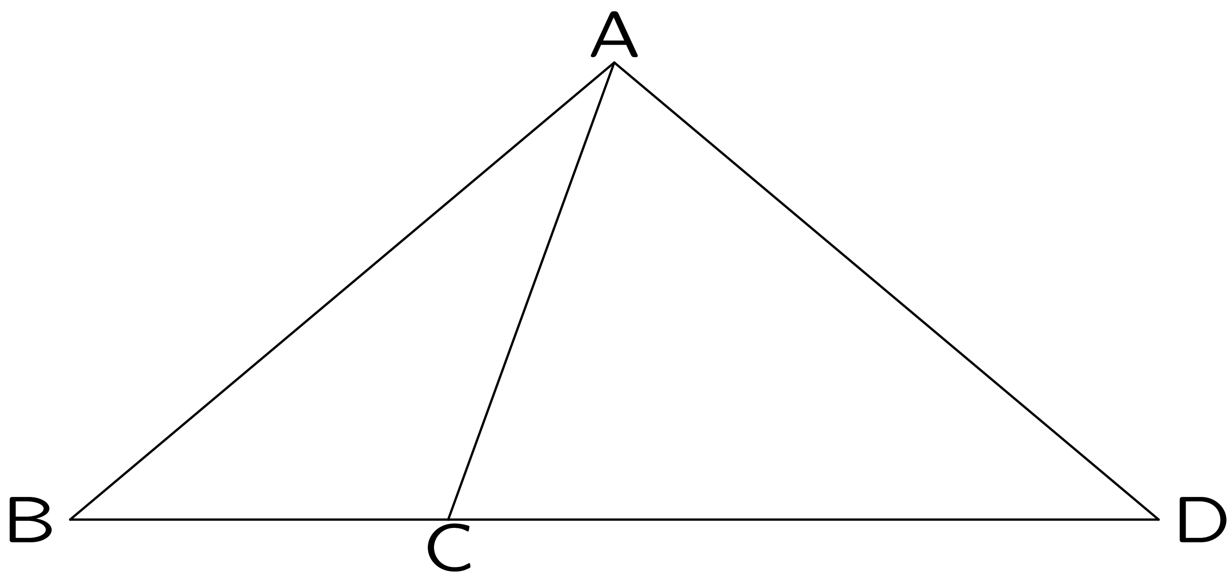
対称移動(折り返し) (今回)

切り取り移動

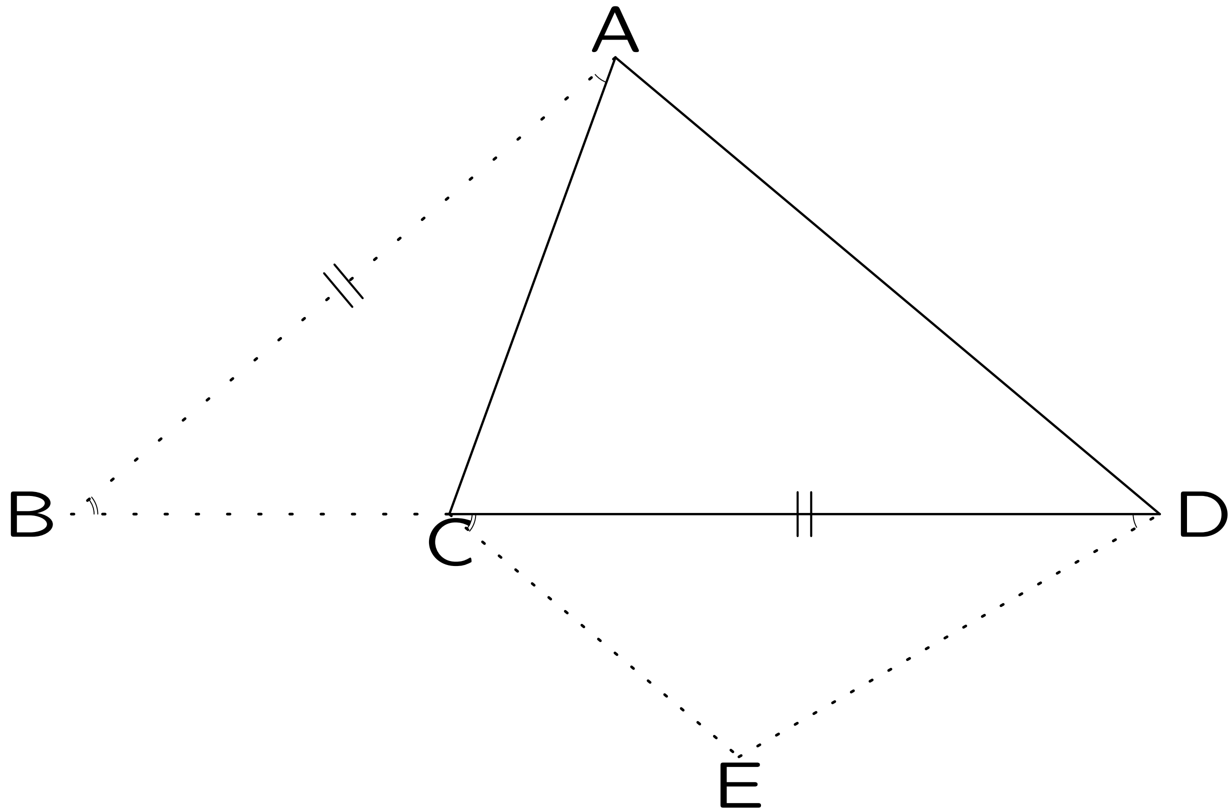
「折り返し」と「切り取り」移動

問　**三角形**ABC**があり、**AB**と**CD**の長さが等しく、**∠CAB**が**30°、∠ABC**が**40°**のとき、**∠CDA**をもとめなさい。（算数オリンピック１９９３年決勝問４**）　資料　P4 参照

⇛ ⇛



模範解答



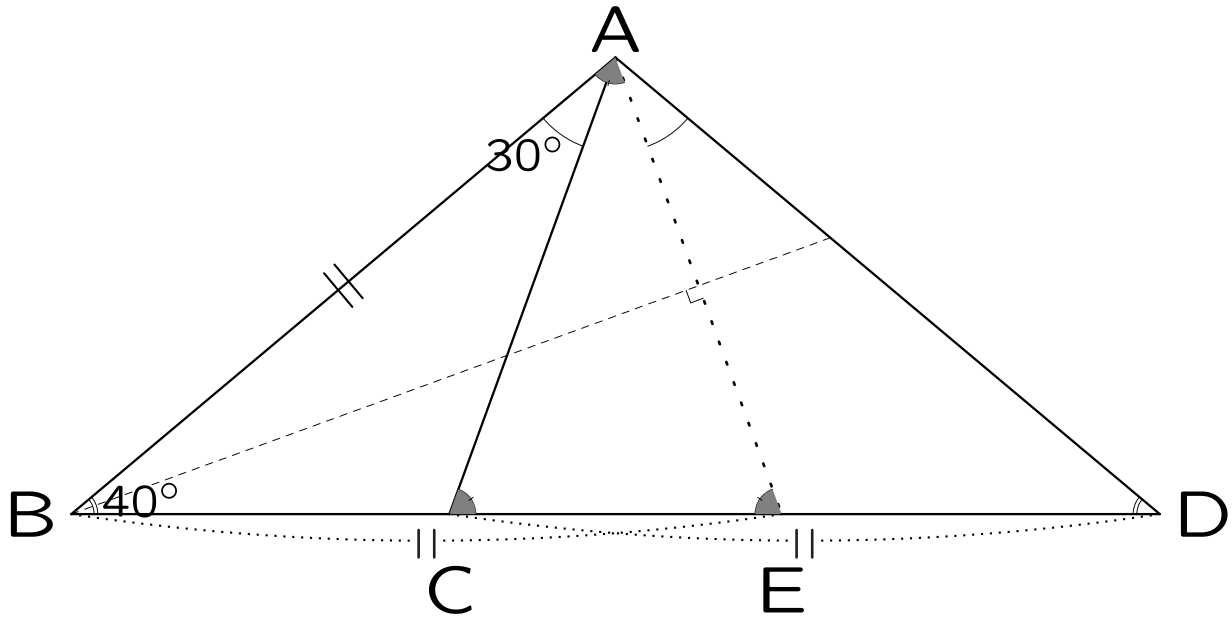
$$AB = CD$$

$$\angle \mathrm{CAB} = 30^\circ$$

$$\angle \mathrm{ABC} = 40^\circ$$

$$\angle \mathrm{CDA} = ?$$

解答２



$$AB = CD$$

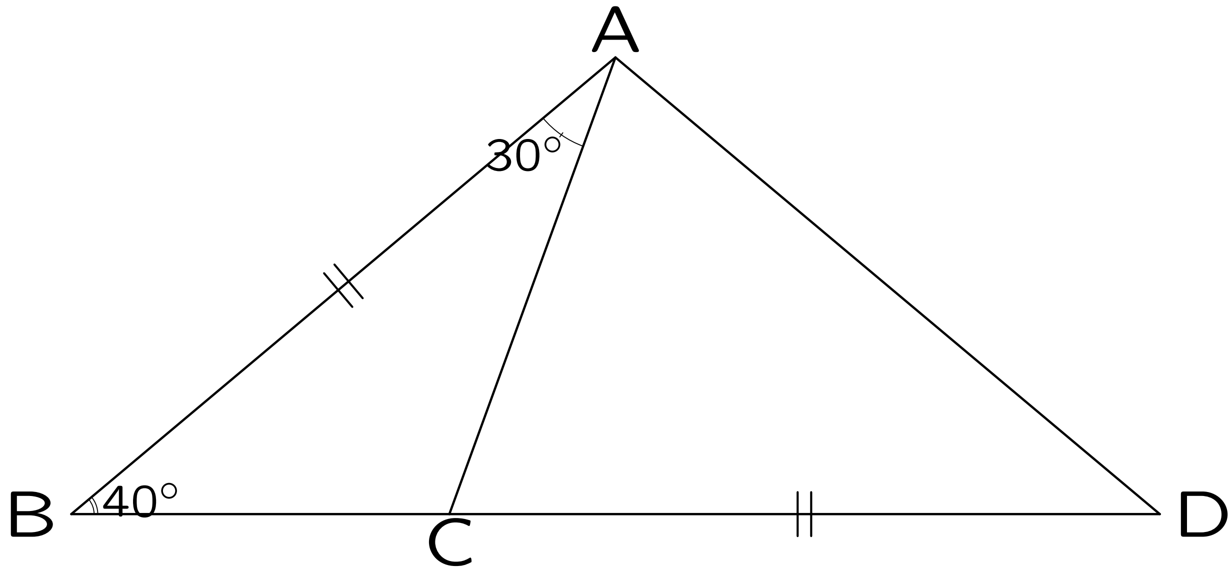
$$\angle \mathrm{CAB} = 30^\circ$$

$$\angle \mathrm{ABC} = 40^\circ$$

$$\angle \mathrm{CDA} = ?$$

⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒

解答３



$$AB = CD$$

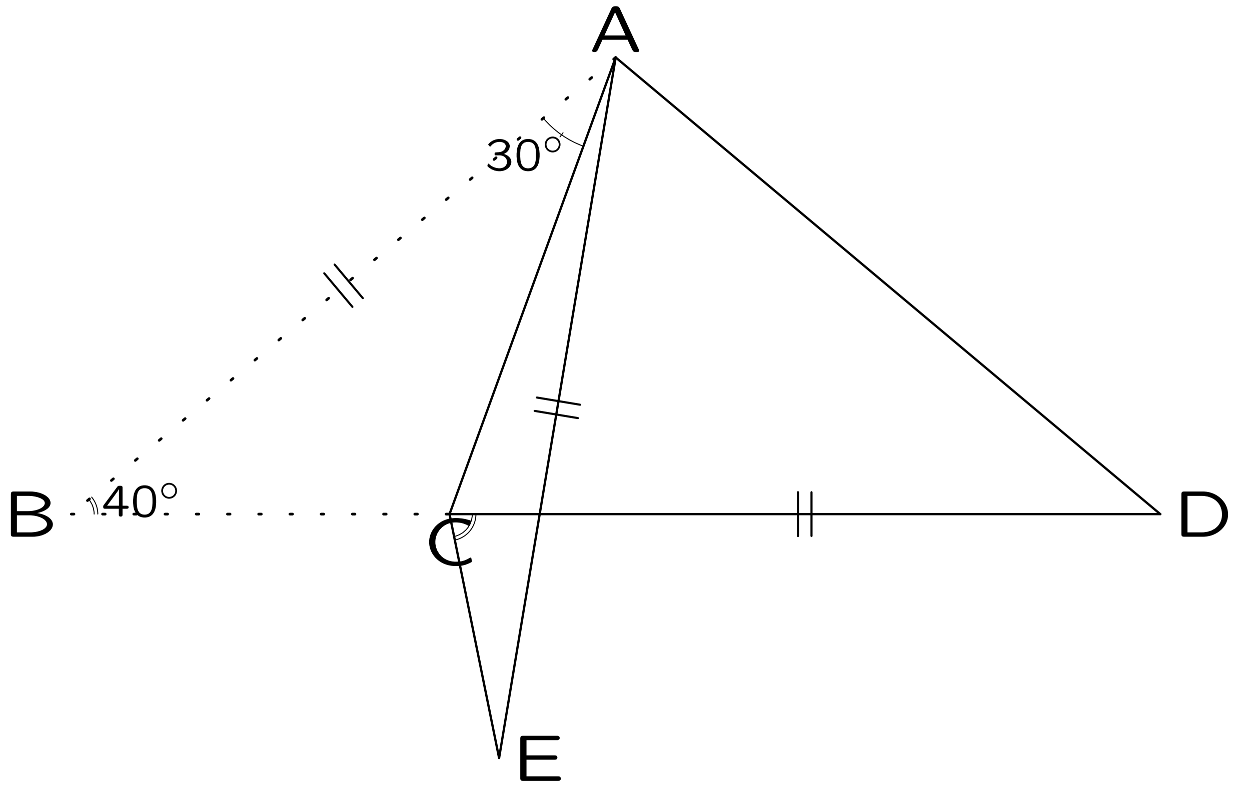
$$\angle\mathrm{CAB} = 30^\circ$$

$$\angle\mathrm{ABC} = 40^\circ$$

$$\angle\mathrm{CDA} = ?$$

⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛

解答３



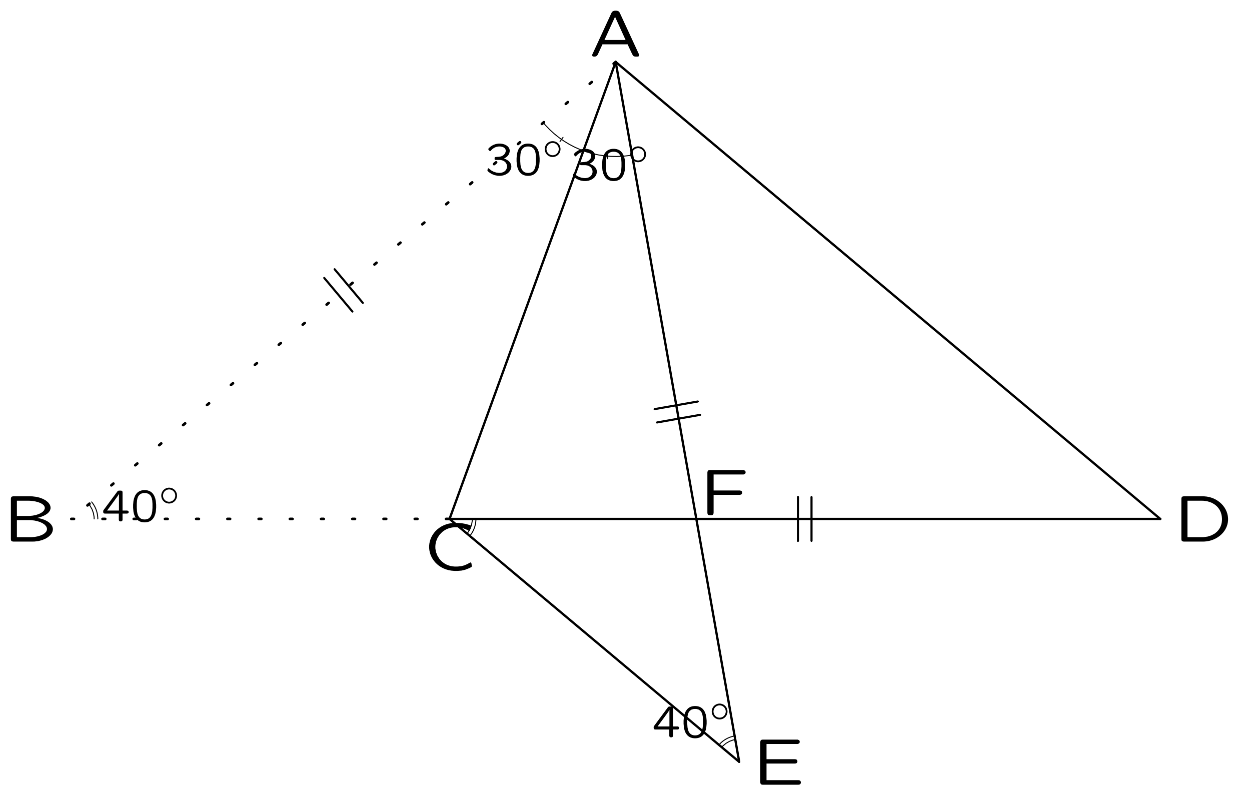
$$AB = CD$$

$$\angle \mathrm{CAB} = 30^\circ$$

$$\angle \mathrm{ABC} = 40^\circ$$

$$\angle \mathrm{CDA} = ?$$

解答３



$$AB = CD$$

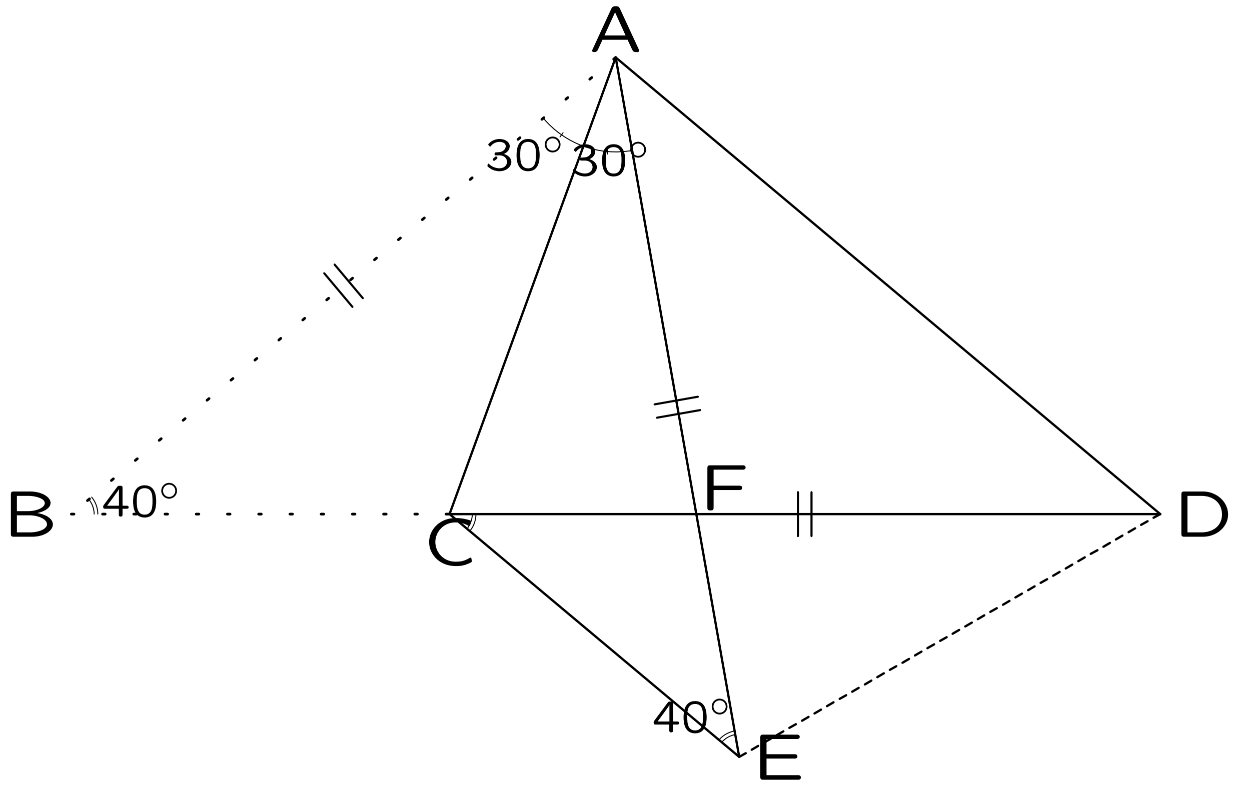
$$\angle \mathrm{CAB} = 30^\circ$$

$$\angle \mathrm{ABC} = 40^\circ$$

$$\angle \mathrm{CDA} = ?$$

$\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$

解答3



$$AB = CD$$

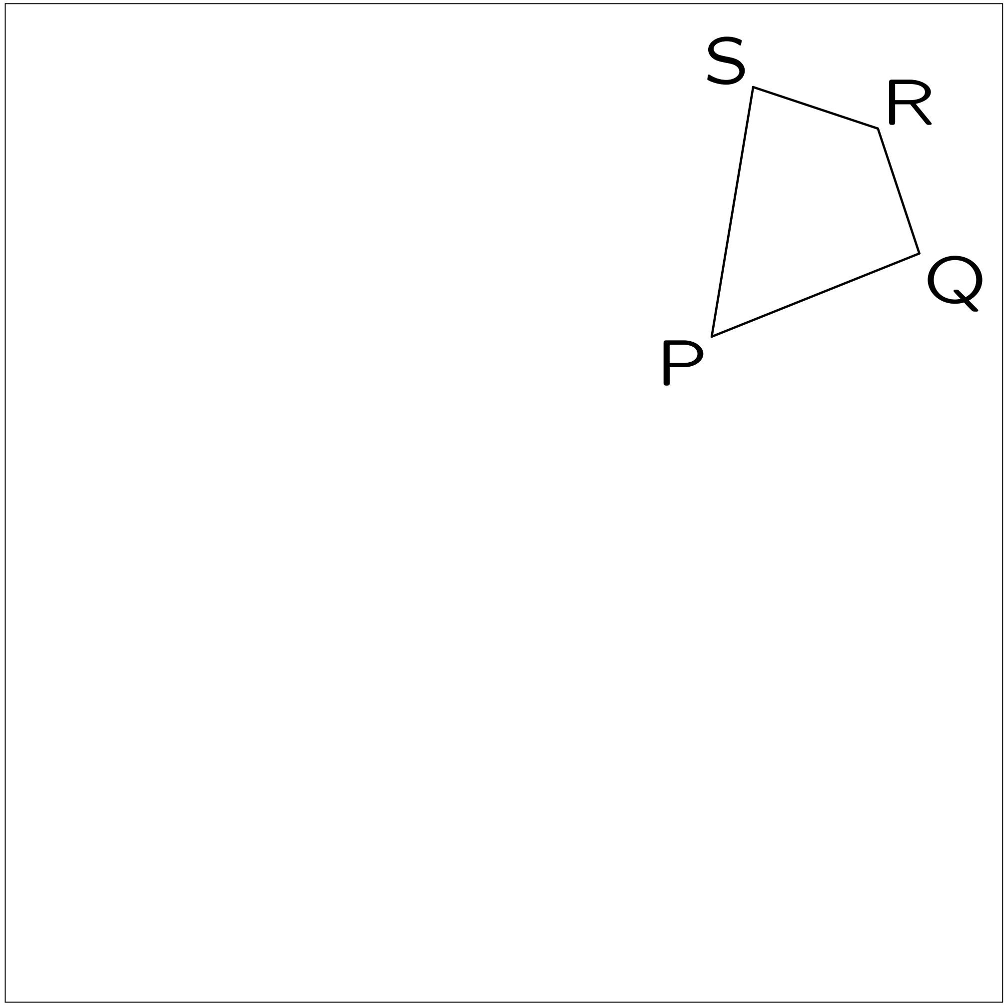
$$\angle \mathrm{CAB} = 30^\circ$$

$$\angle \mathrm{ABC} = 40^\circ$$

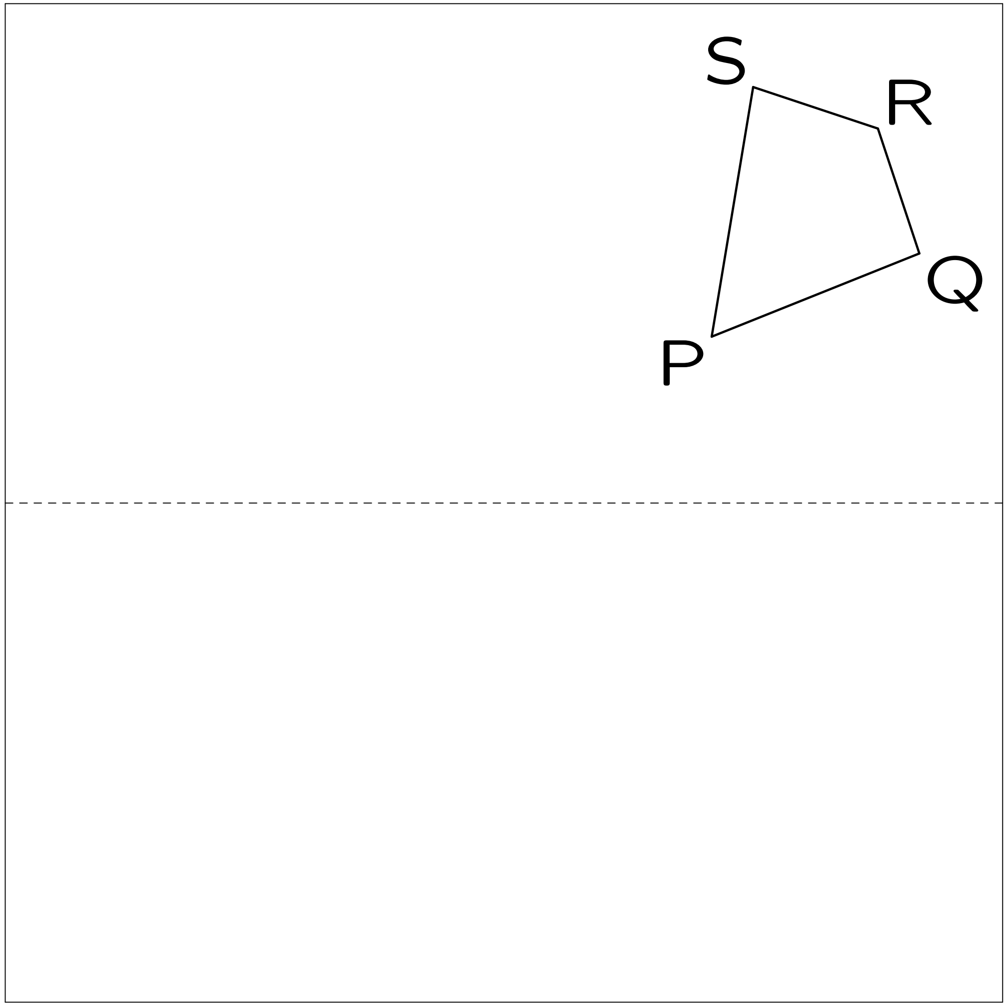
$$\angle \mathrm{CDA} = ?$$

⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒

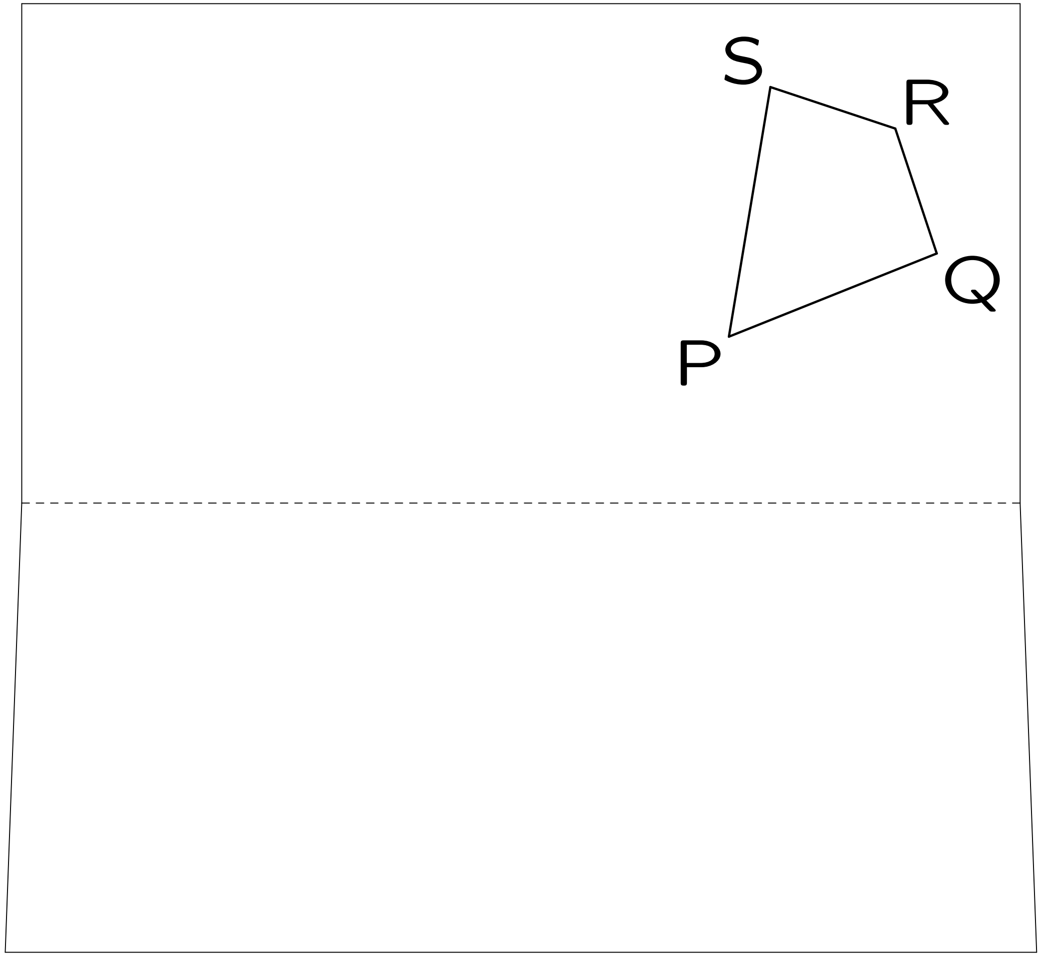
対称移動



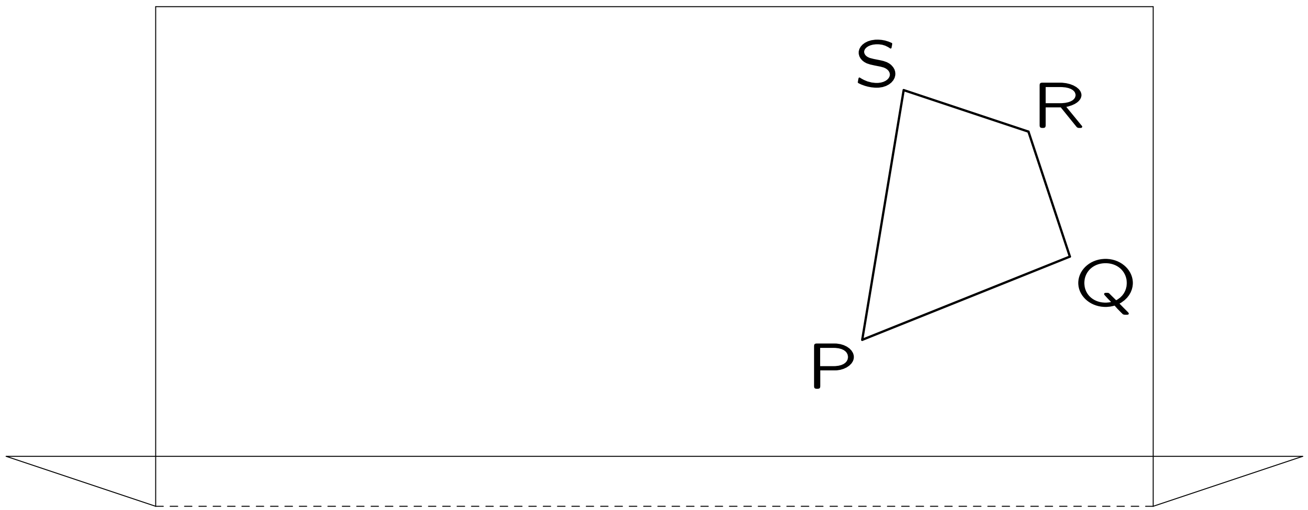
対称移動



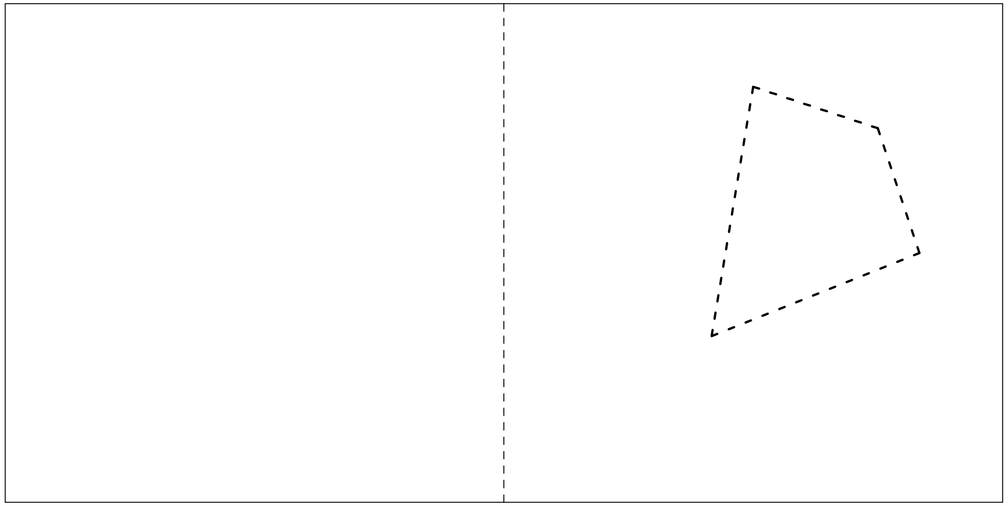
対称移動



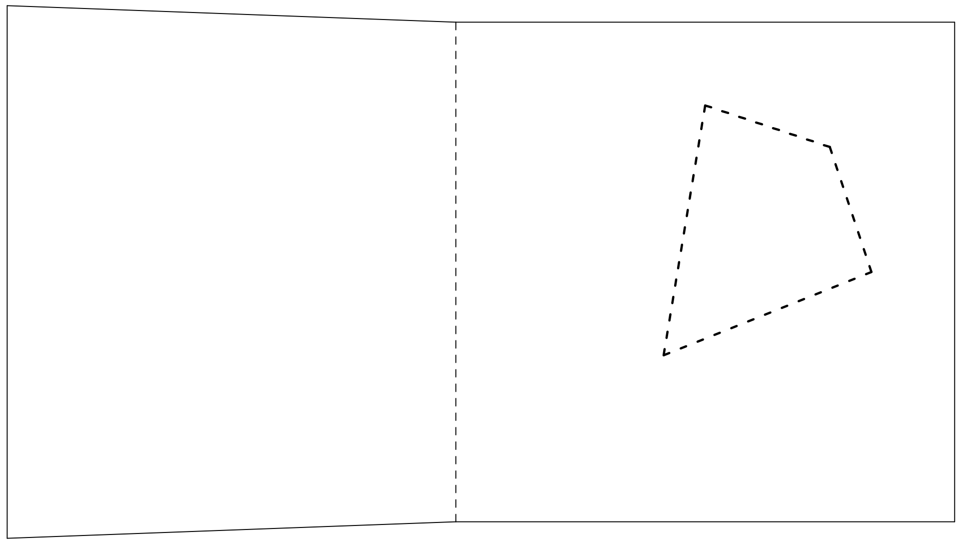
対称移動



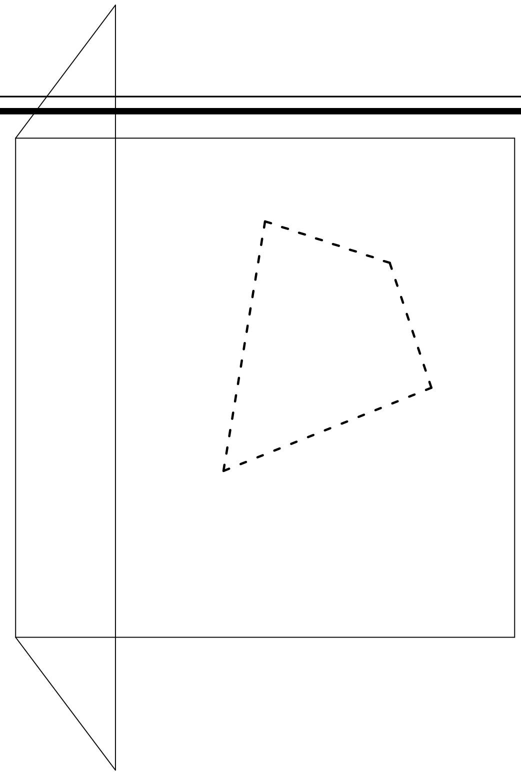
対称移動



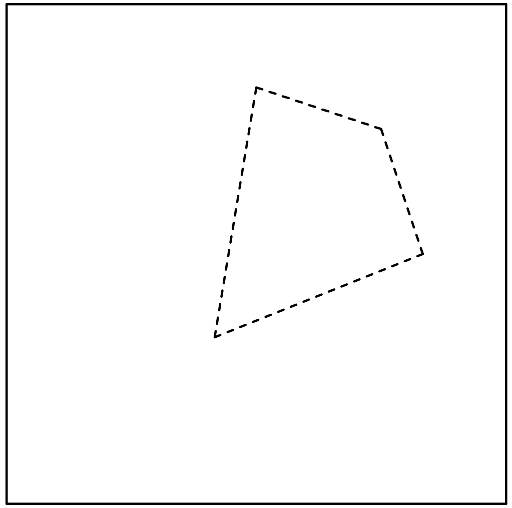
対称移動



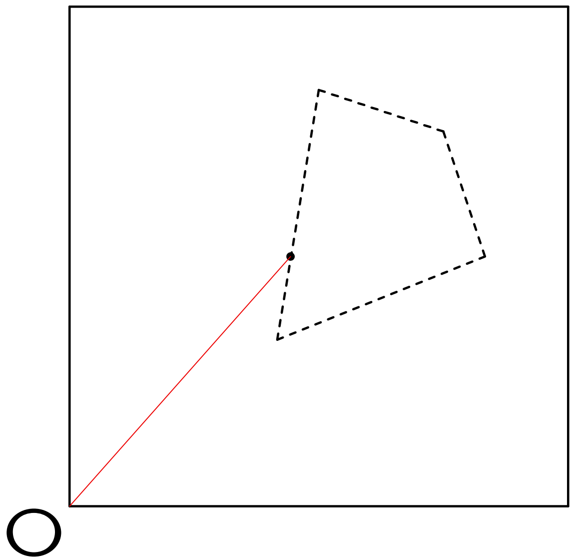
対称移動



対称移動

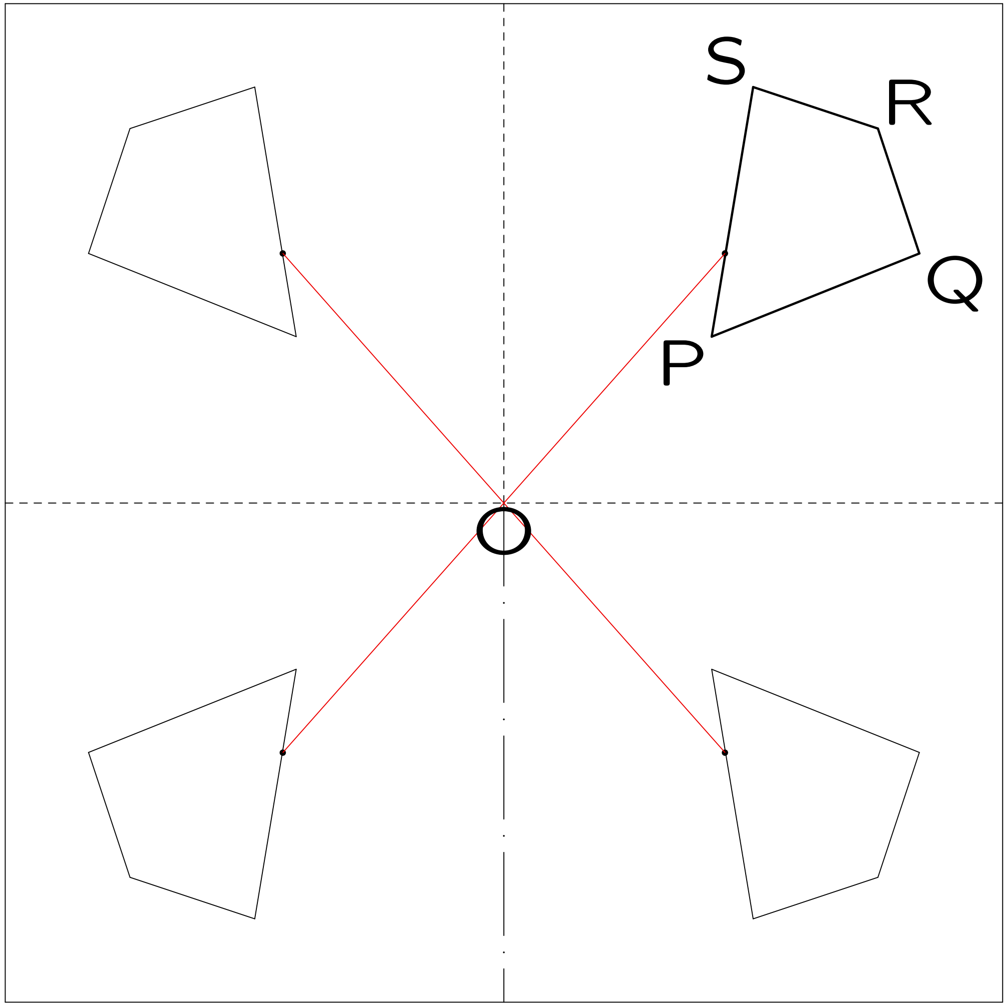


対称移動

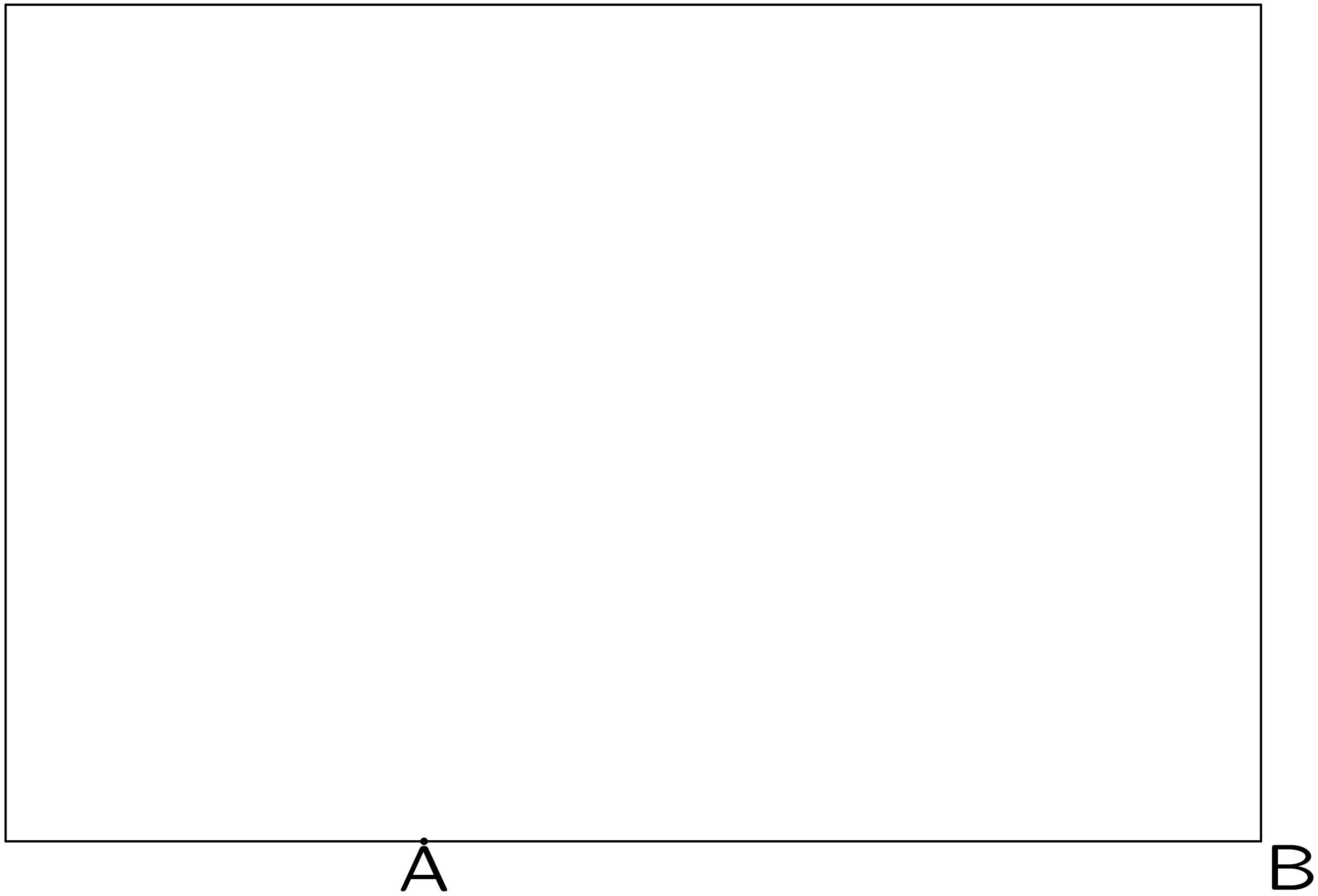


四角形ＰＱＲＳを写しとって開きます

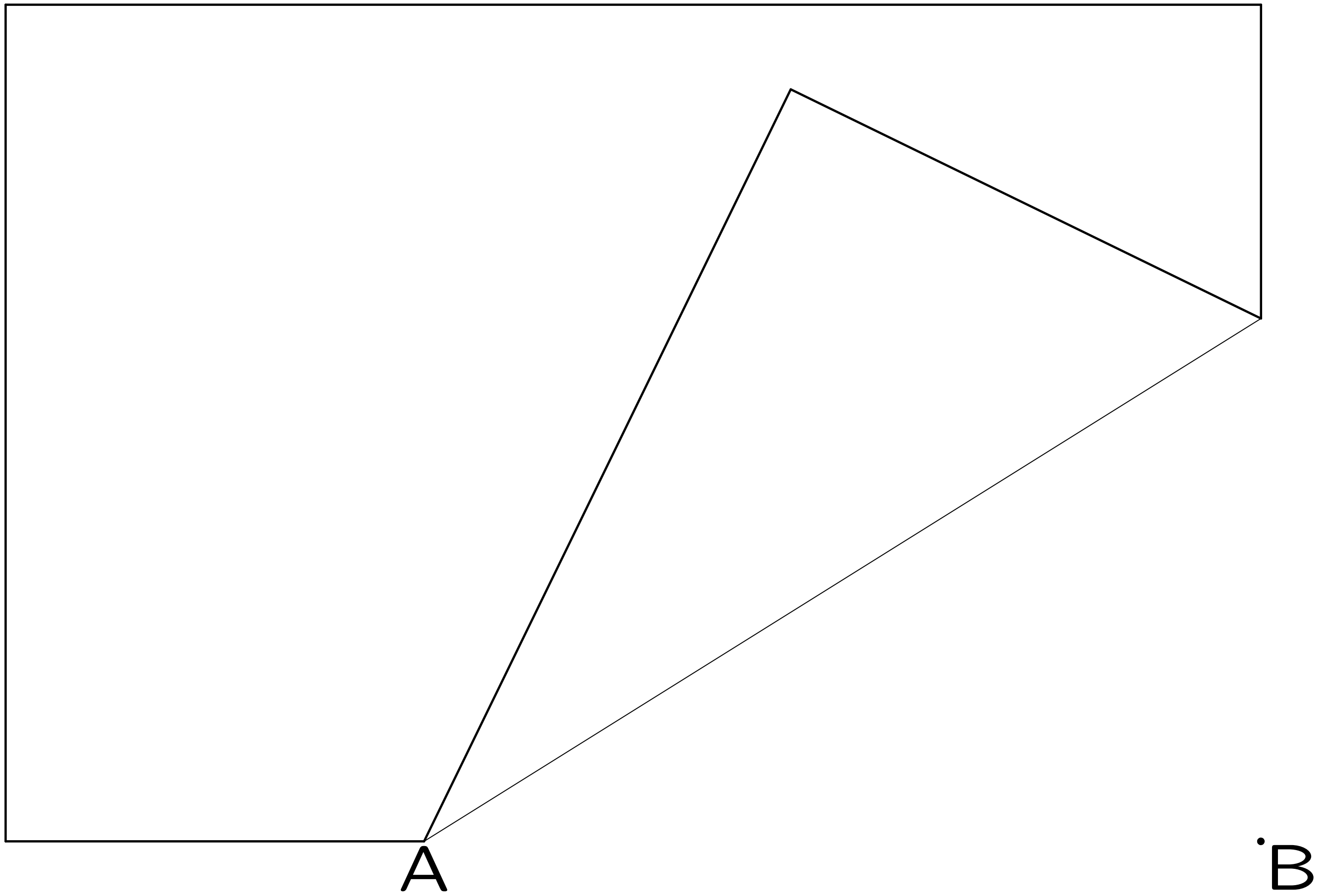
対称移動



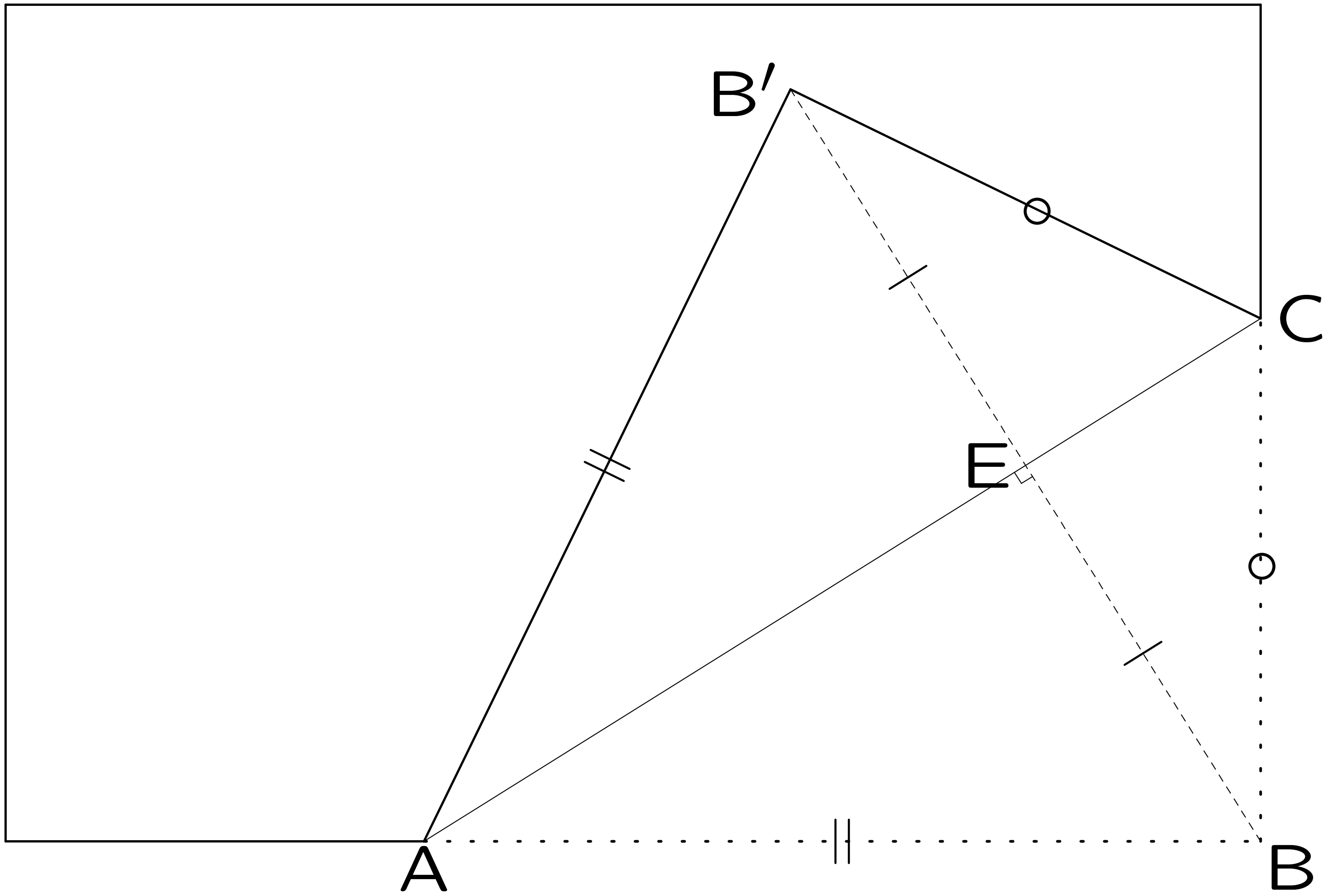
折り返し(1)



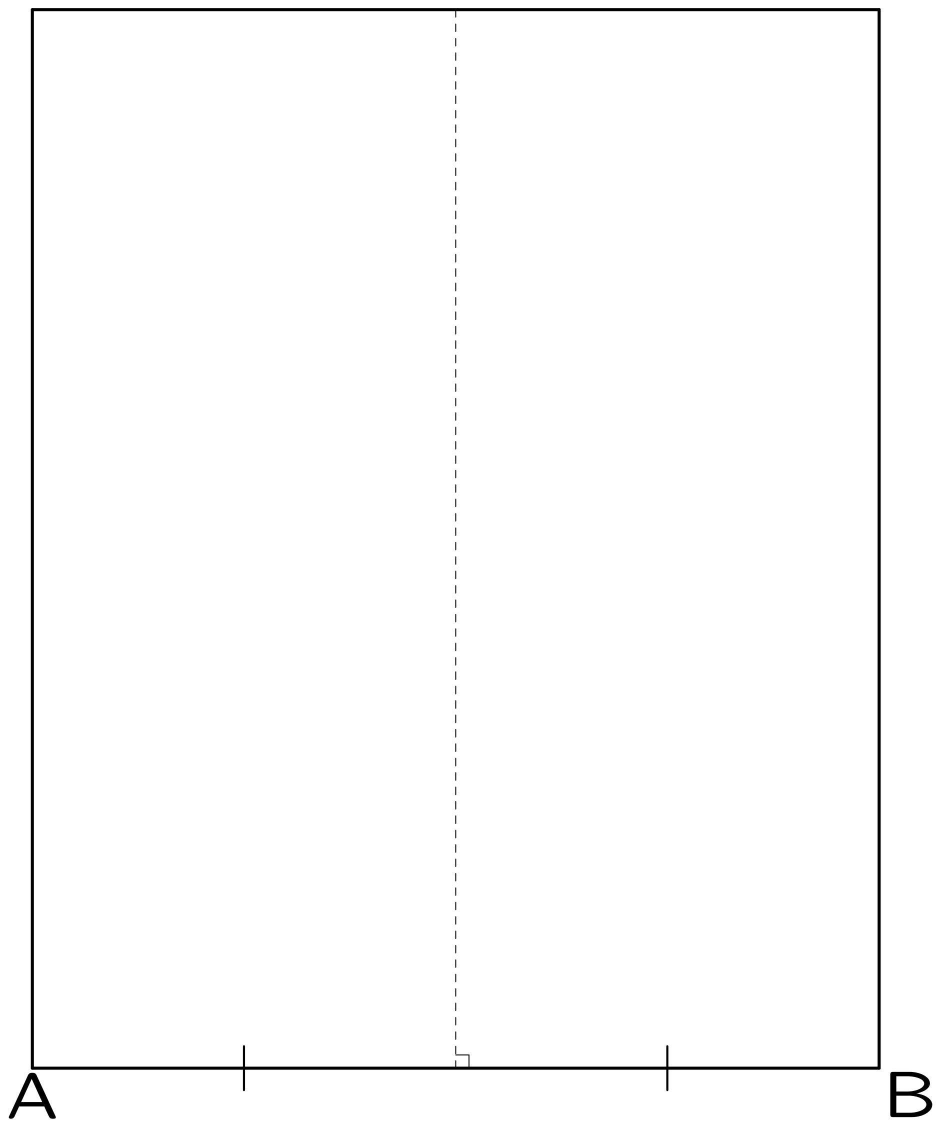
折り返し(1)



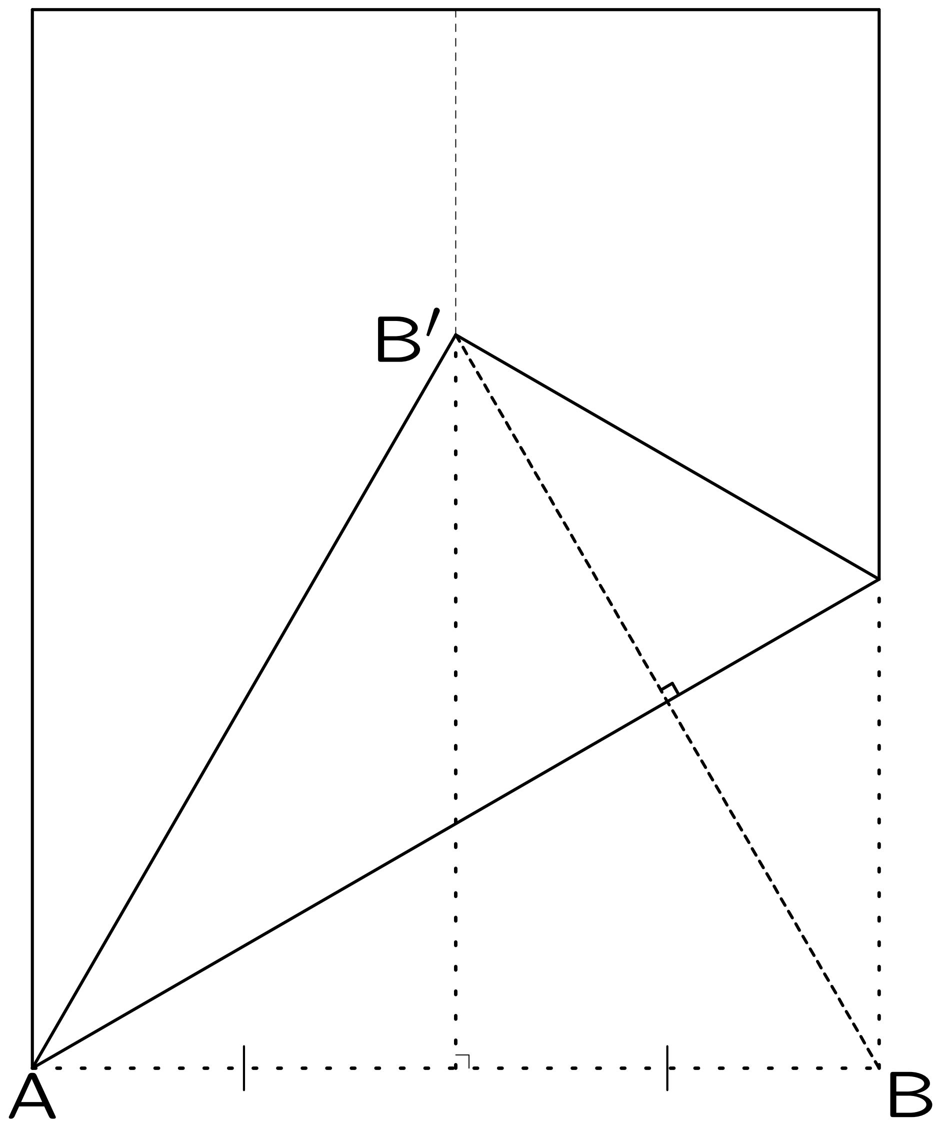
折り返し(1)



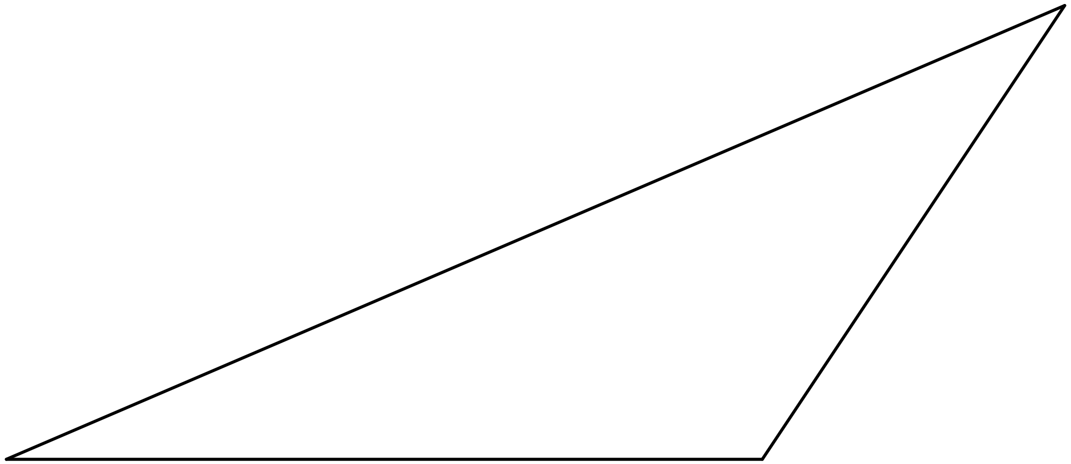
例えばＡＢの垂直２等分線に対して・・



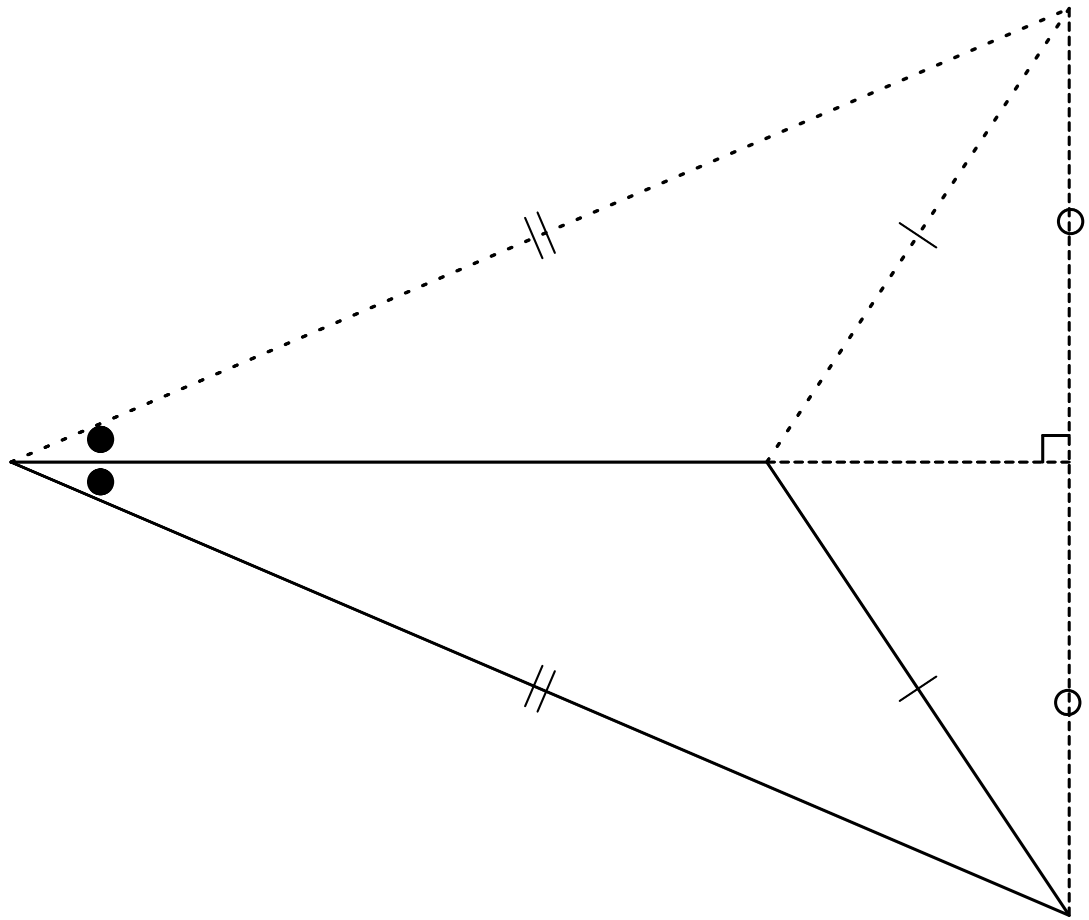
例えばＡＢの垂直２等分線に対して‥



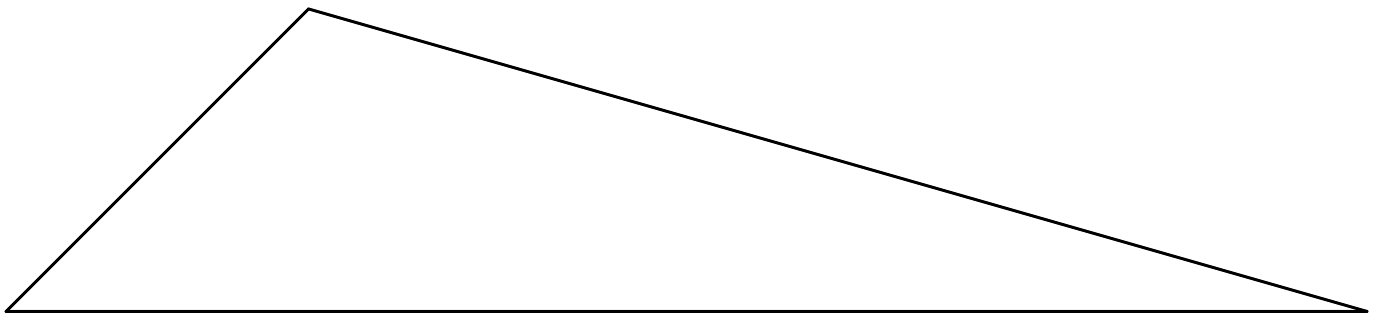
折り返し(2)



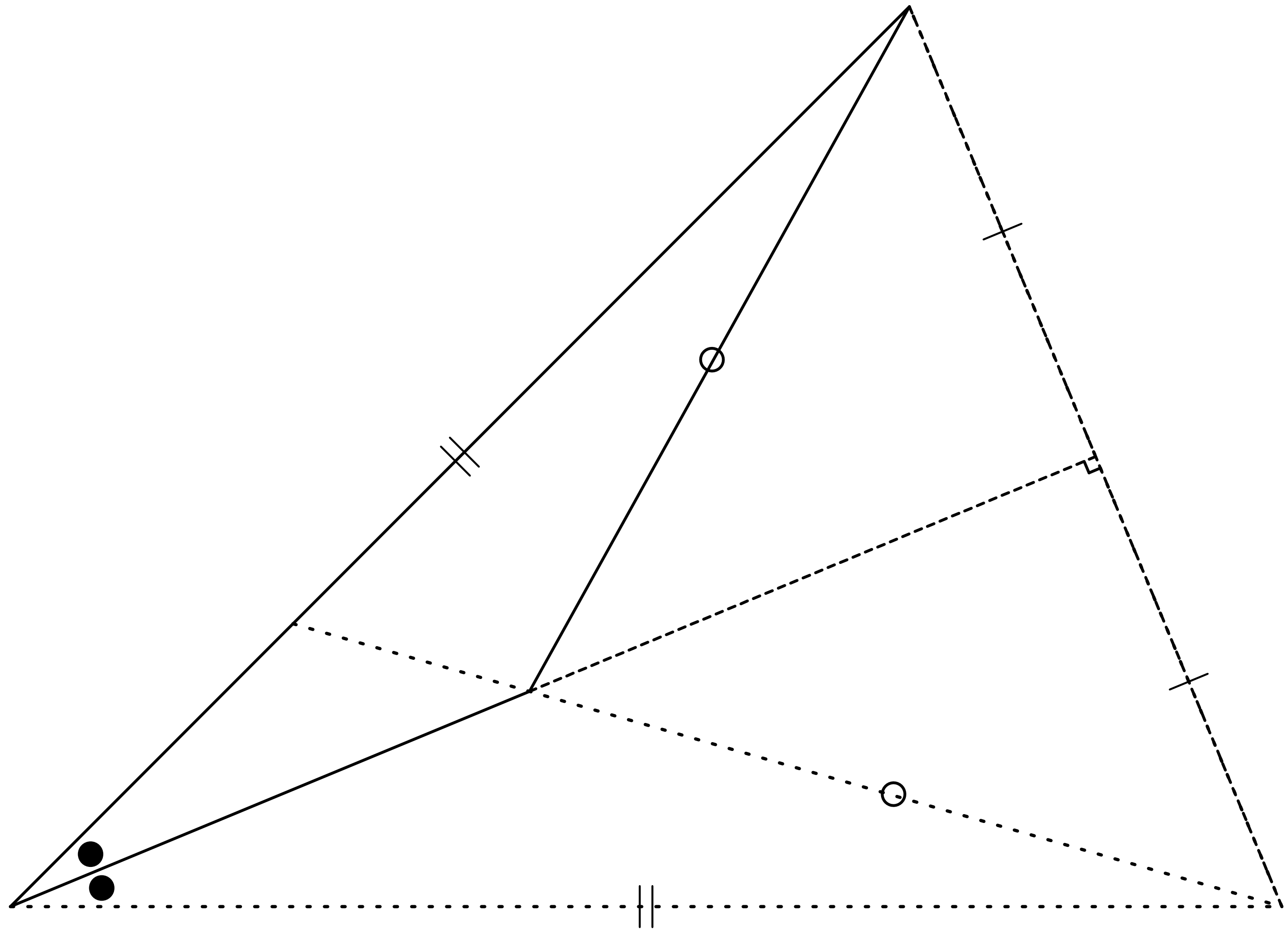
折り返し(2)



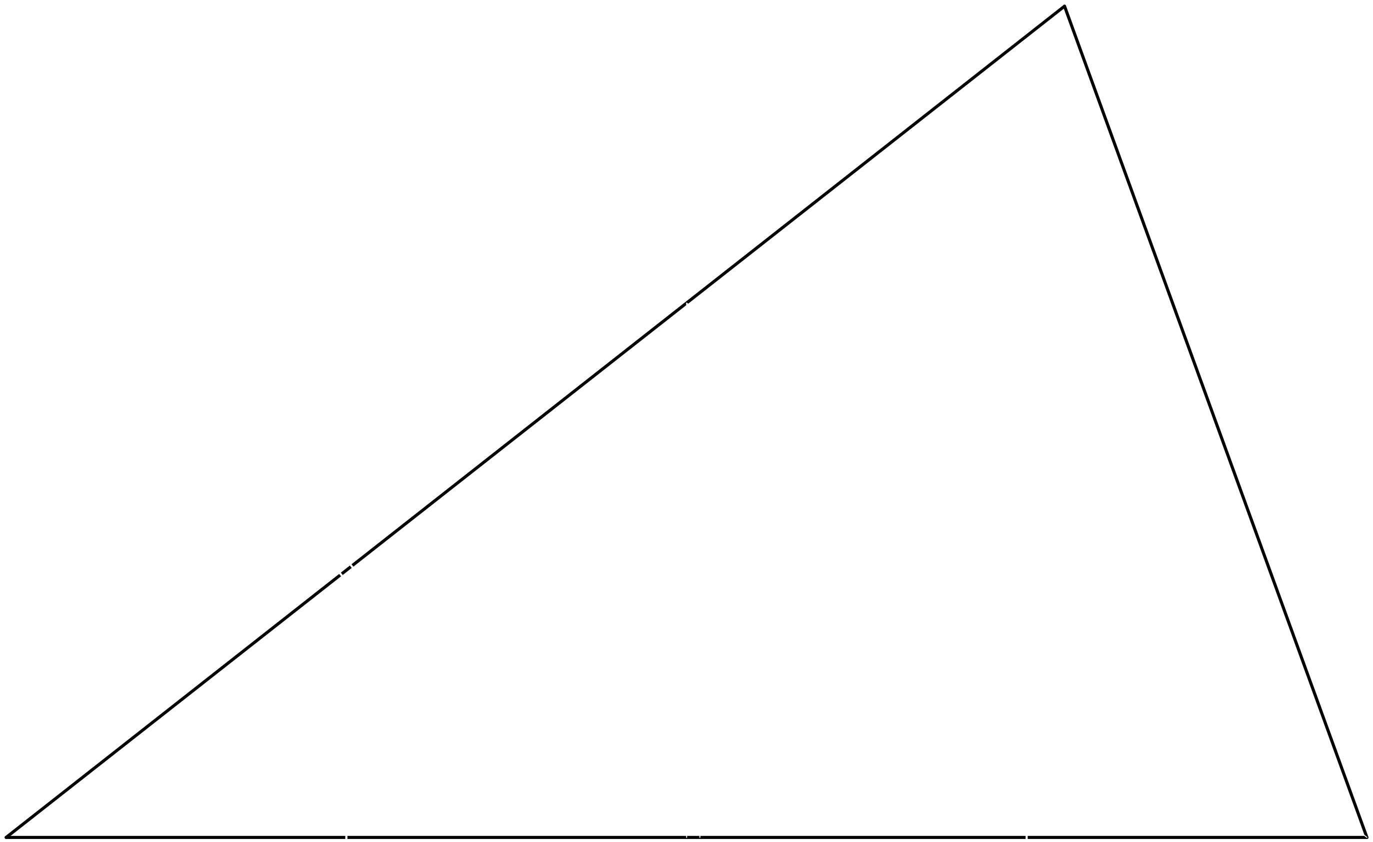
折り返し(3)



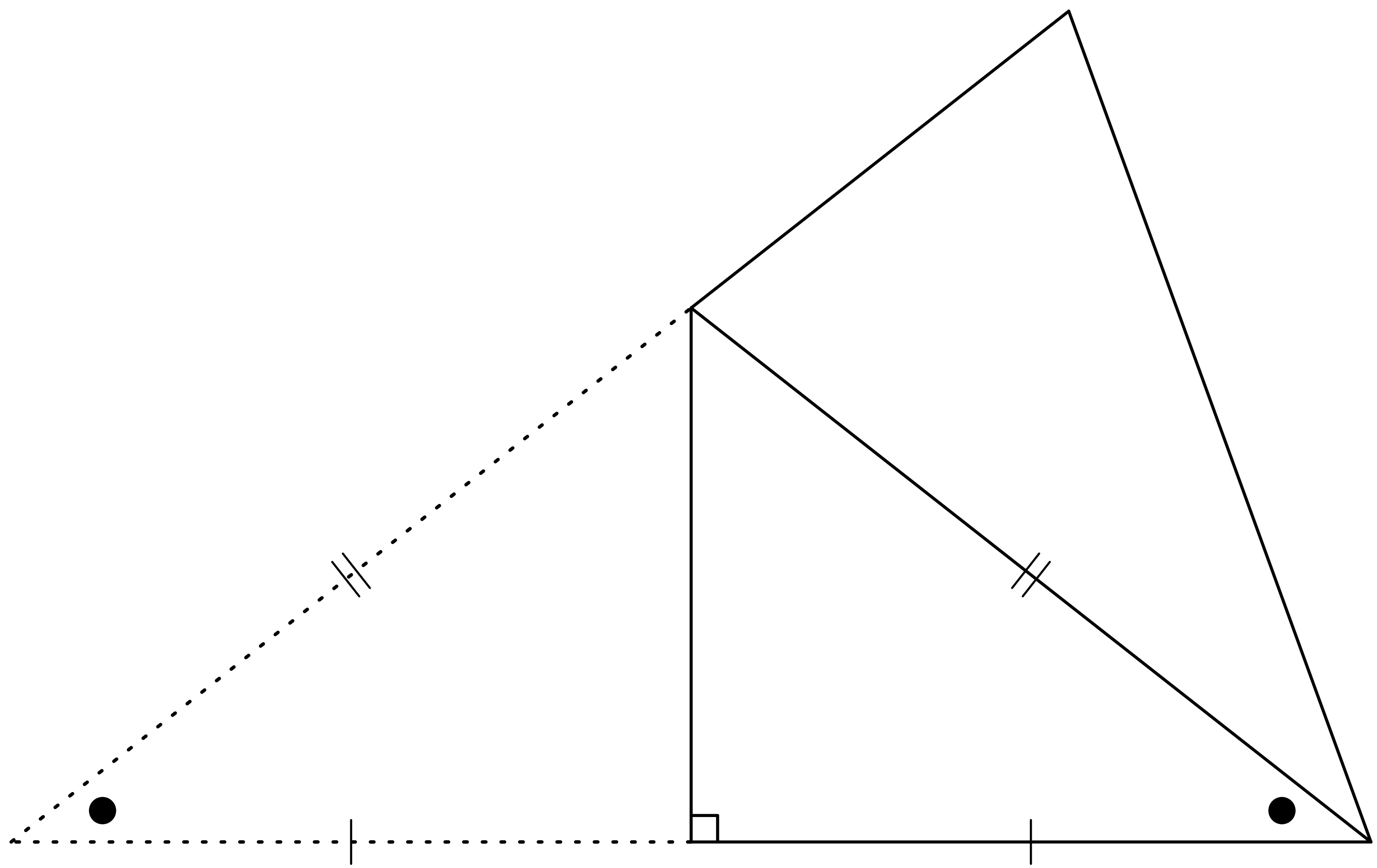
折り返し(3)



折り返し(4)



折り返し(4)



整角四角形問題

- 整角四角形問題(清宮氏)
- 整角四角形問題(池野氏)
- 角度の問題
- 既知の問題を利用して
- ラングレイの問題
- いろいろな解法（資料P14-16 参照）

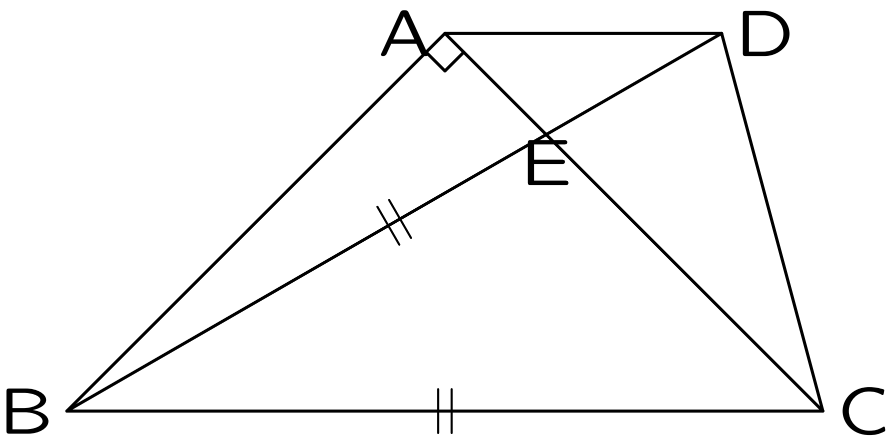
例１：整角四角形　直角２等辺三角形ABCについて

$$AB = AC,$$

$$BD = BC,$$

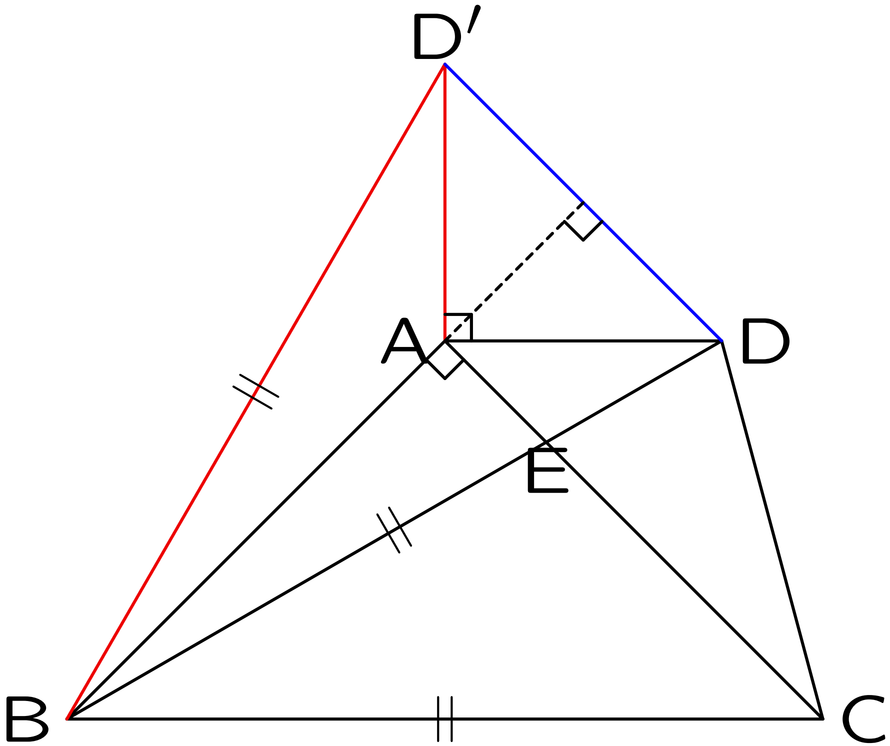
$AD \parallel BC$ のとき、

$CD = CE$を示せ



資料　P19 参照

例１：整角四角形　直角２等辺三角形ABCについて



$$AB = AC,$$

$$BD = BC,$$

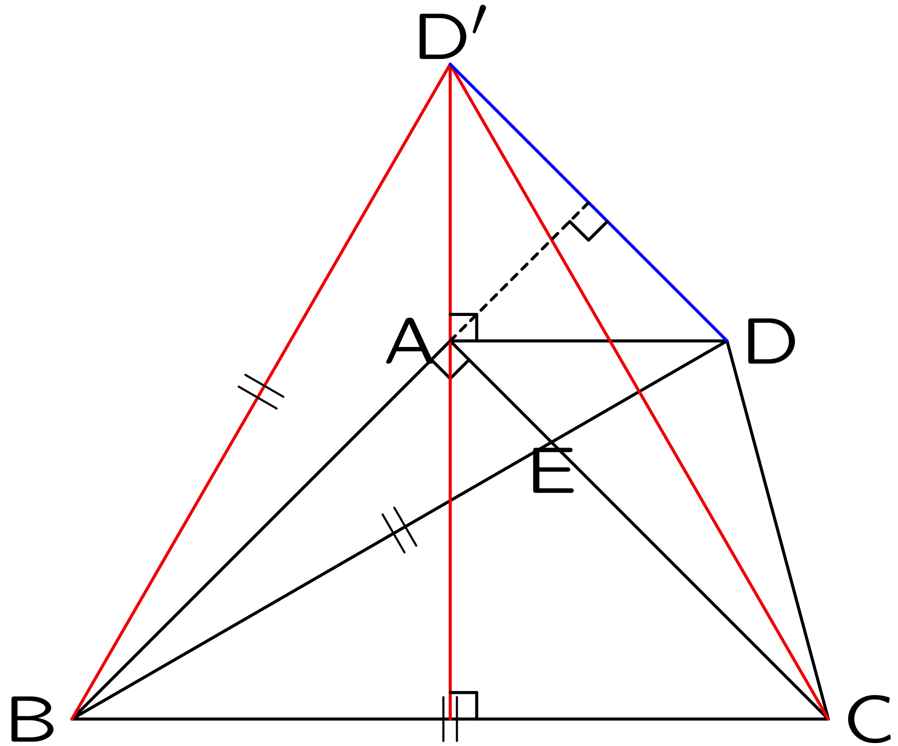
$AD \parallel BC$ のとき、

$CD = CE$を示せ

△ABDをABで折り返す。

資料　P19 参照

例１：整角四角形　直角２等辺三角形ABCについて



$$AB = AC,$$
$$BD = BC,$$
$AD \parallel BC$ のとき、

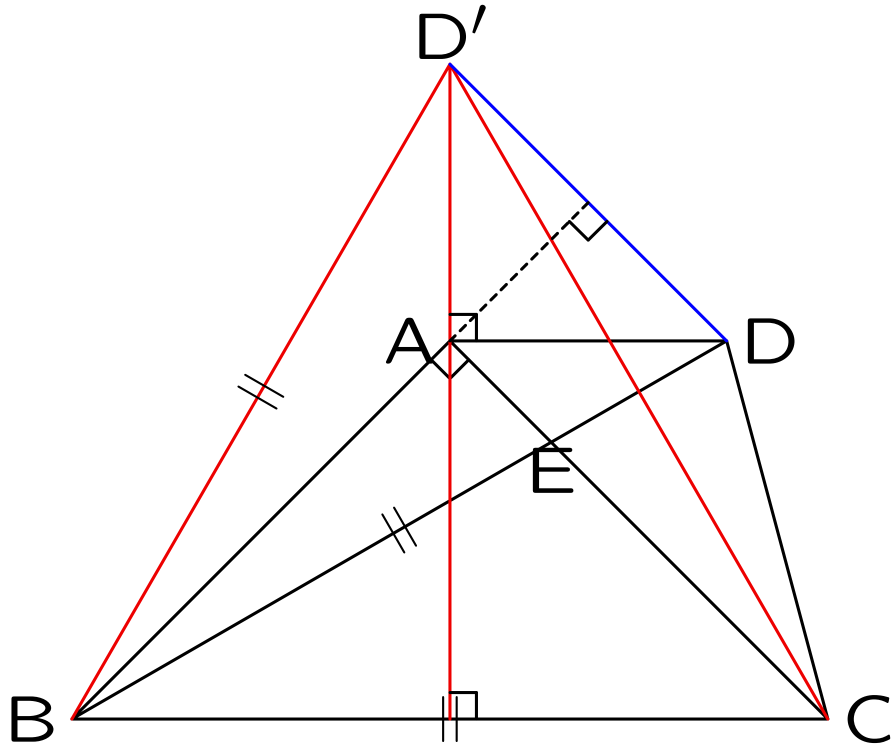
$CD = CE$を示せ

△ABDをABで折り返す。

△BD′Cは正三角形

資料　P19 参照

例１：整角四角形　直角２等辺三角形ABCについて



$$AB = AC,$$
$$BD = BC,$$
$AD \parallel BC$ のとき、

$CD = CE$を示せ

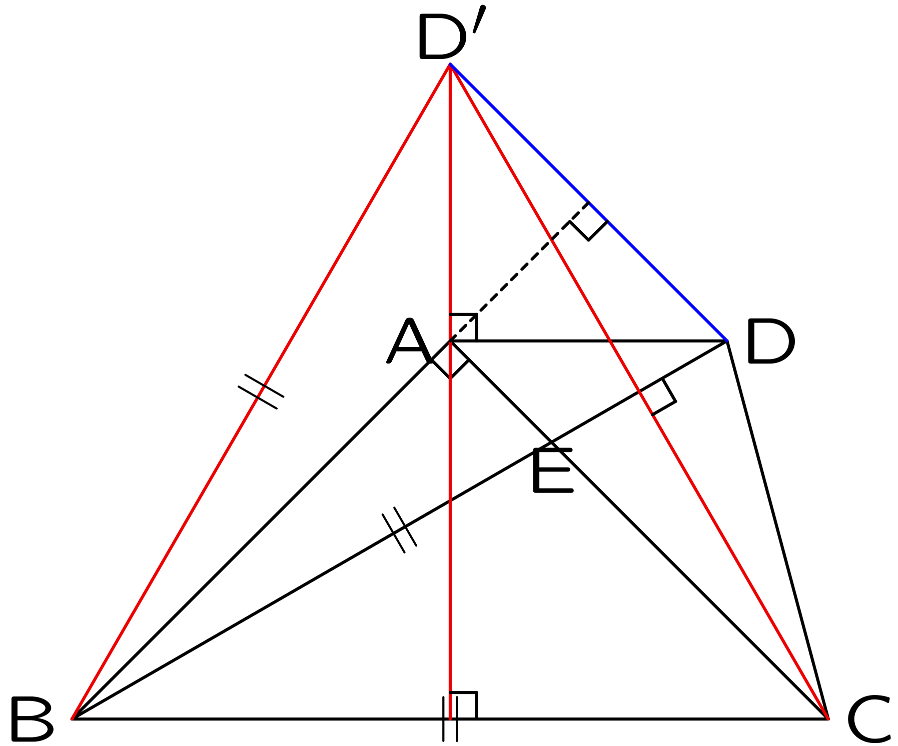
△ABDをABで折り返す。

△BD′Cは正三角形

Bは△CDD′の外心

資料　P19 参照

例１：整角四角形　直角２等辺三角形ABCについて



$$AB = AC,$$

$$BD = BC,$$

$AD \parallel BC$ **のとき、**

$CD = CE$**を示せ**

△ABDをABで折り返す。

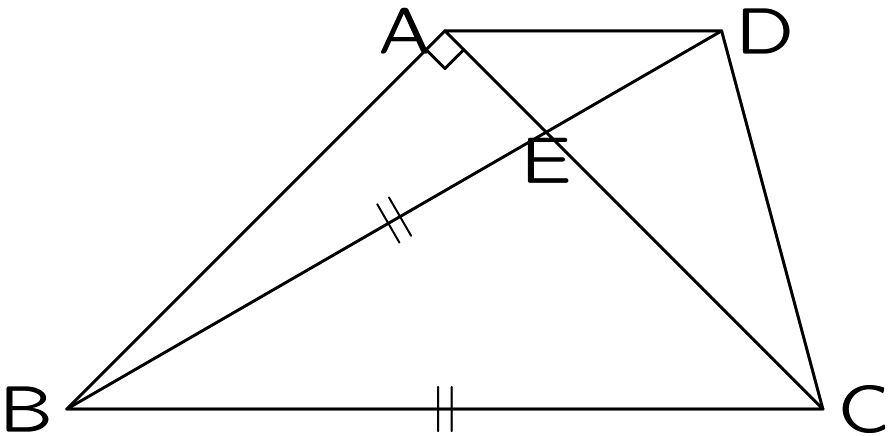
△BD′Cは正三角形

Bは△CDD′の外心

ED⊥ CD′

$$CD = CE$$

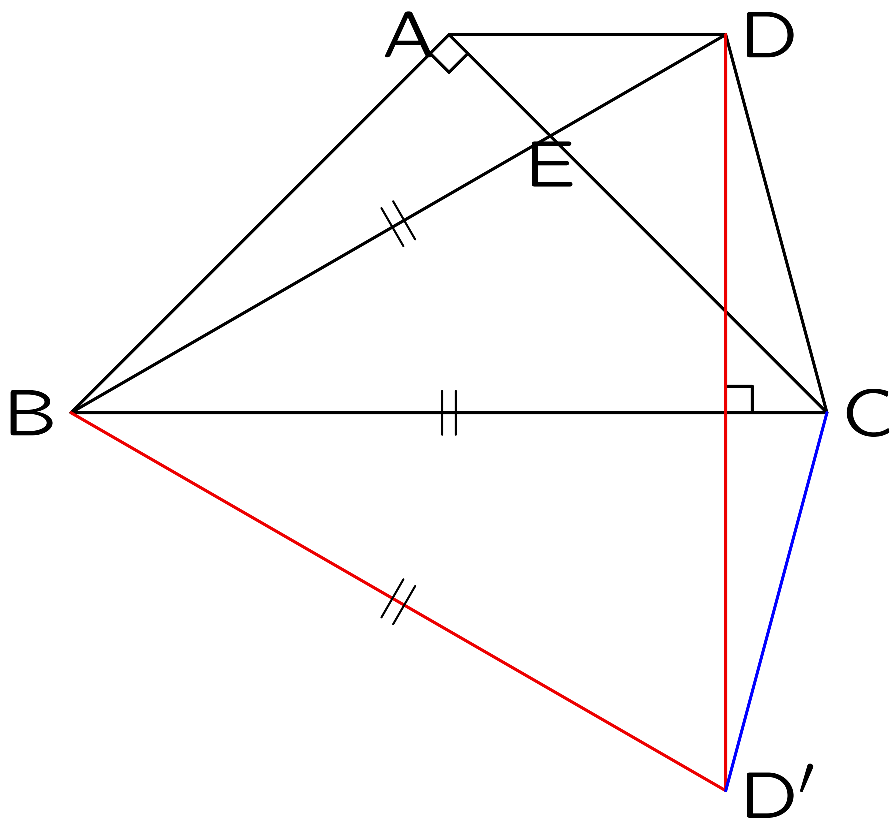
例２：整角四角形　直角２等辺三角形ＡＢＣについて



$$AB = AC,$$
$$BD = BC,$$
$AD \mathbin{/\!/} BC$ のとき、
$CD = CE$ を示せ

資料　P19 参照

例２：整角四角形　直角２等辺三角形ABCについて



$$AB = AC,$$

$$BD = BC,$$

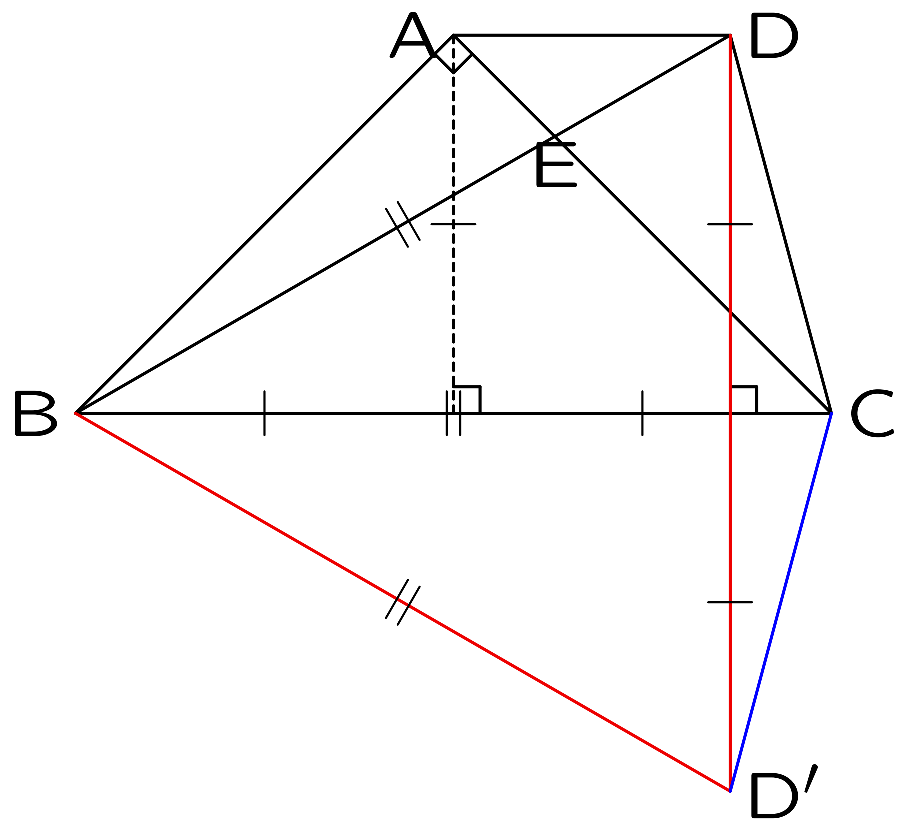
$AD \parallel BC$ のとき、

$CD = CE$ を示せ

△BDCをBCで折り返す。

資料　P19 参照

例２：整角四角形　直角２等辺三角形ABCについて



$$AB = AC,$$
$$BD = BC,$$
$AD \parallel BC$ のとき、

$CD = CE$ を示せ

△BDCをBCで折り返す。

△DBD′は正三角形

・・・・・・

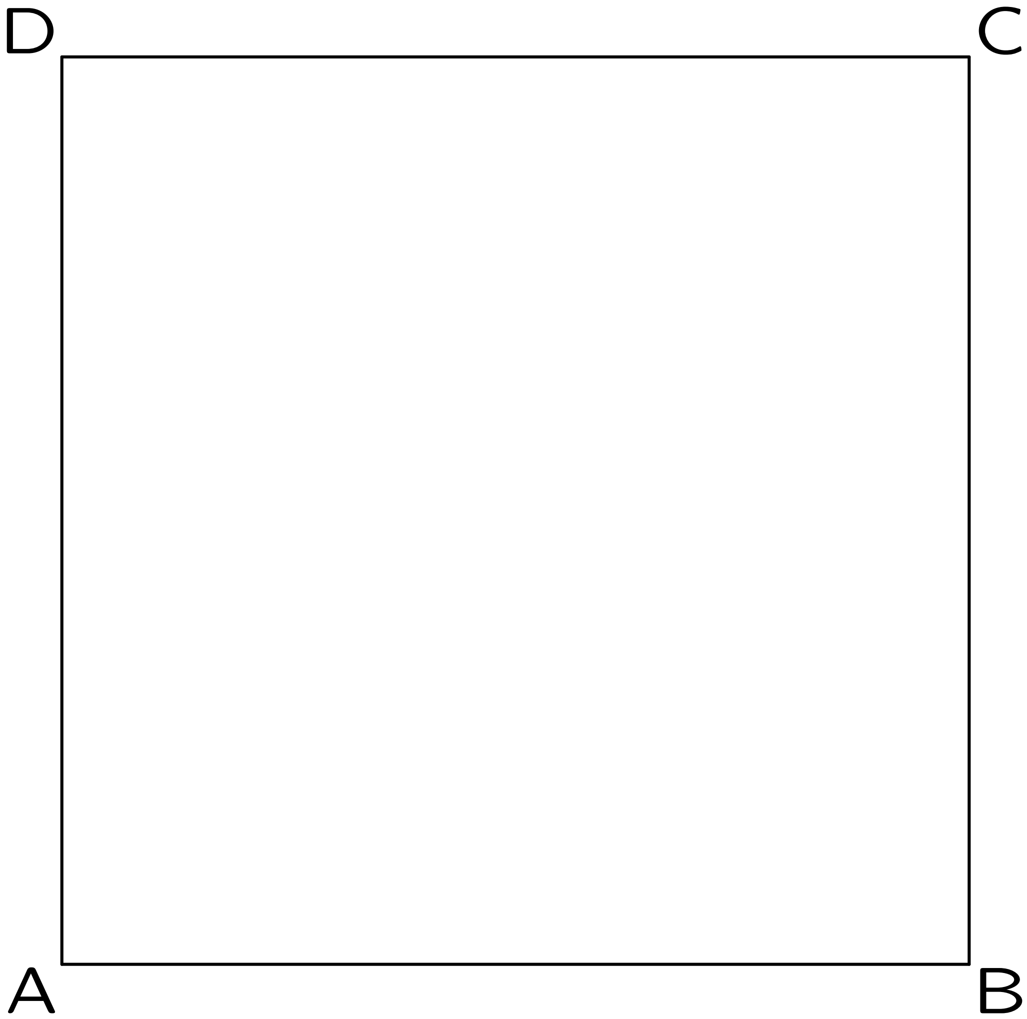
資料　P19 参照

例２：整角四角形　直角２等辺三角形ＡＢＣについて

しかし！
他にも補助線のヒントが！

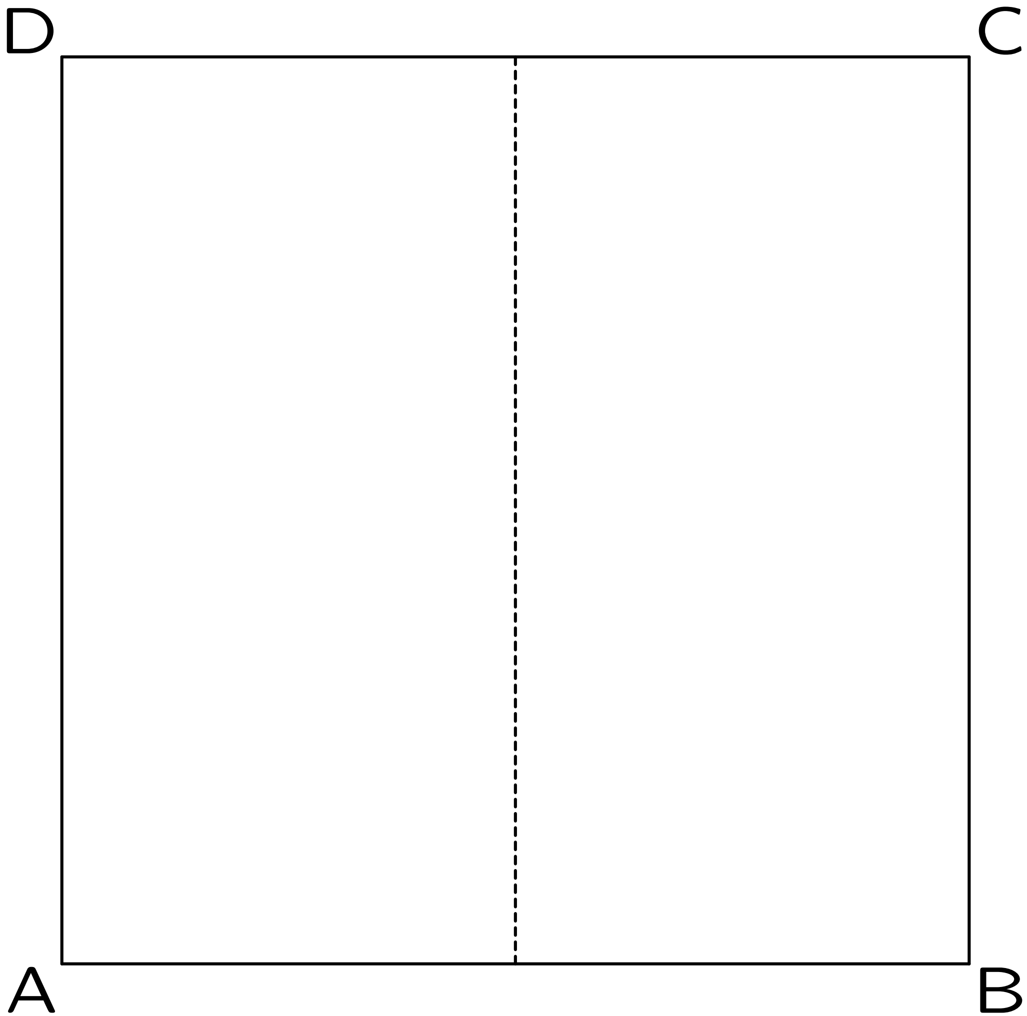
そのヒントになる正三角形を折り紙で折ってみましょう

正三角形の作図



一辺aの正方形用紙で三辺がaとなる正三角形を折って作図して下さい。

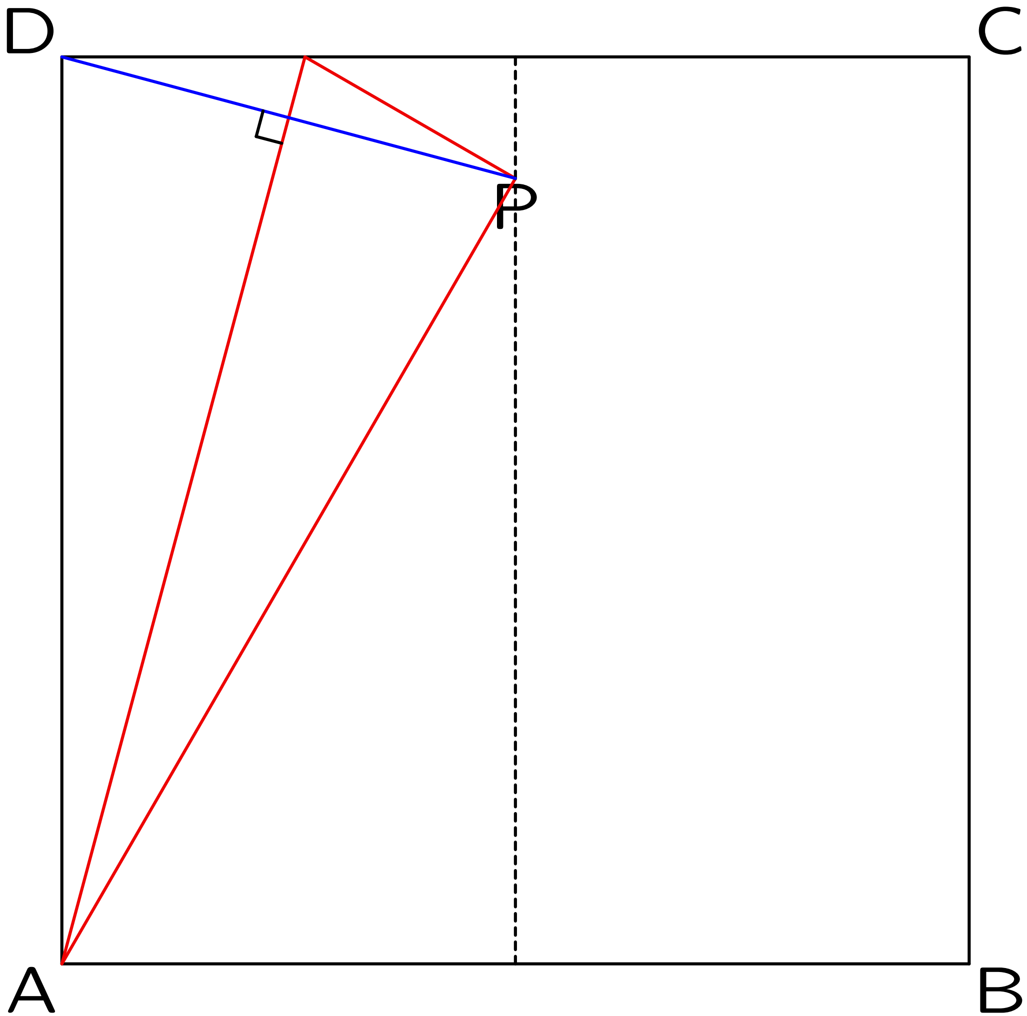
正三角形の作図



一辺aの正方形用紙で三辺がaとなる正三角形を折って作図して下さい。

図のように半分に折ります

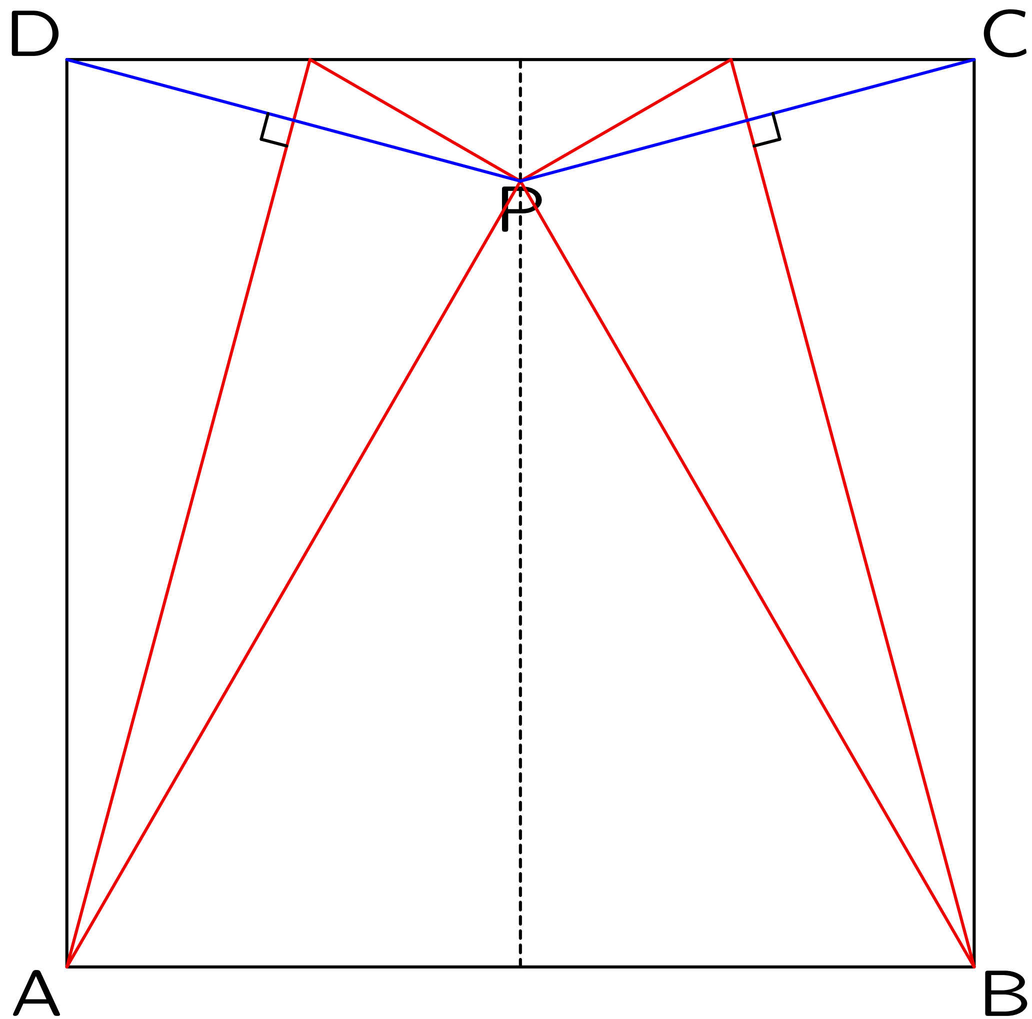
正三角形の作図



一辺aの正方形用紙で三辺がaとなる正三角形を折って作図して下さい。

図のように半分に折ります
Ａを軸にＤがこの折り目上（Ｐ）にのるように折る

正三角形の作図



一辺aの正方形用紙で三辺がaとなる正三角形を折って作図して下さい。

図のように半分に折ります

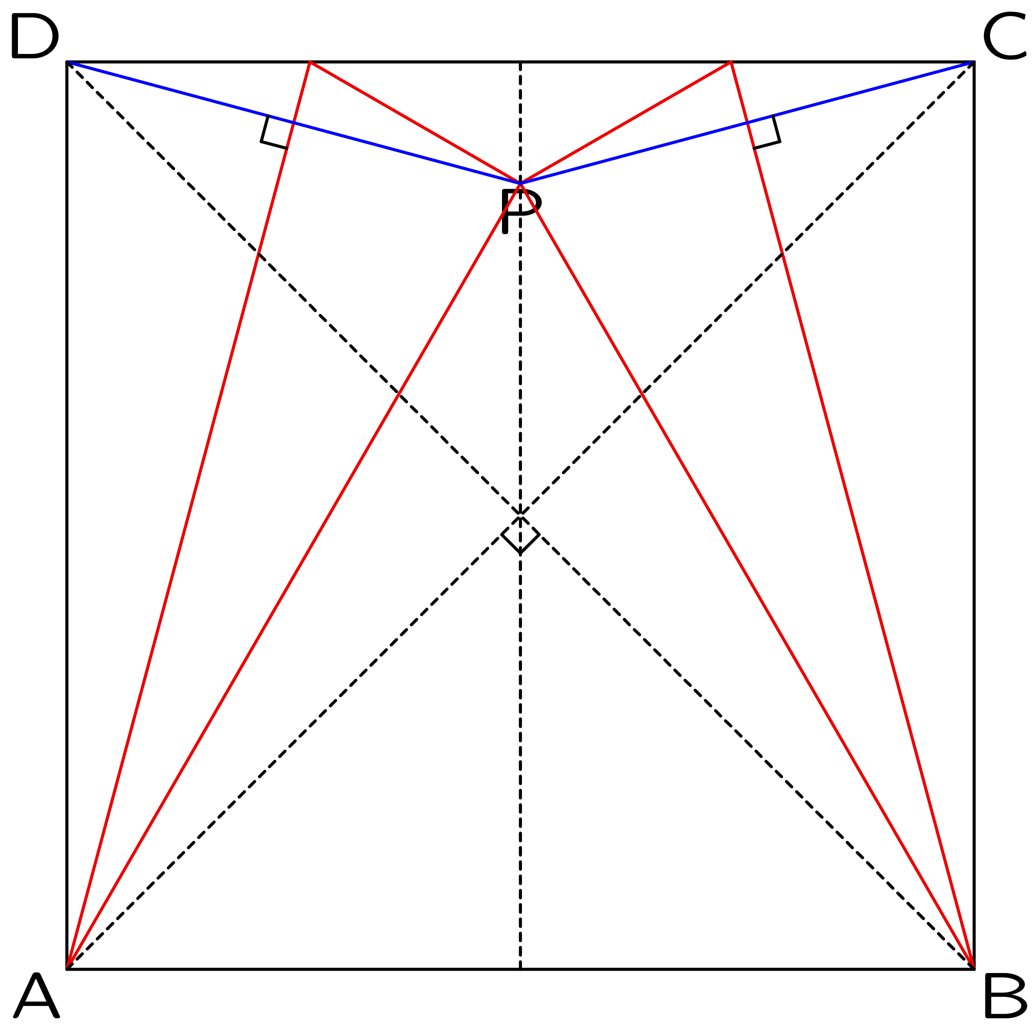
Aを軸にDがこの折り目上(P)にのるように折る

Bも同様

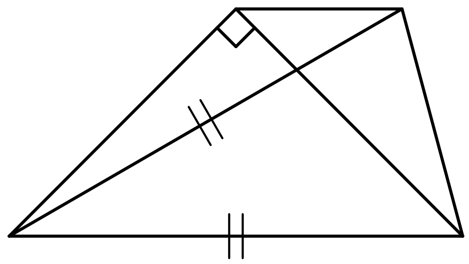
△APBは正三角形

そこで‥‥

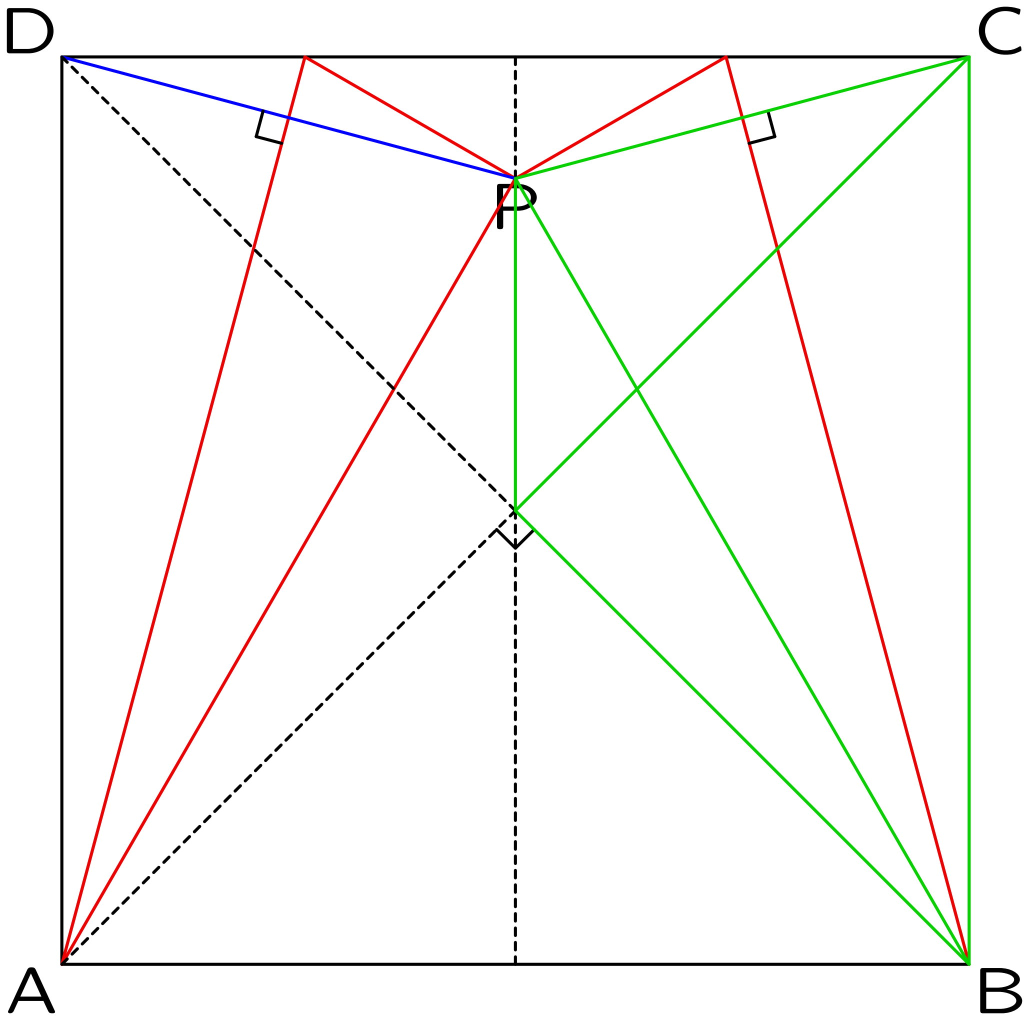
整角四角形



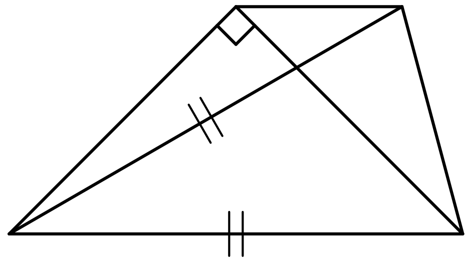
正方形の対角線を引くとこの中に先程の四角形が潜んでいます



整角四角形

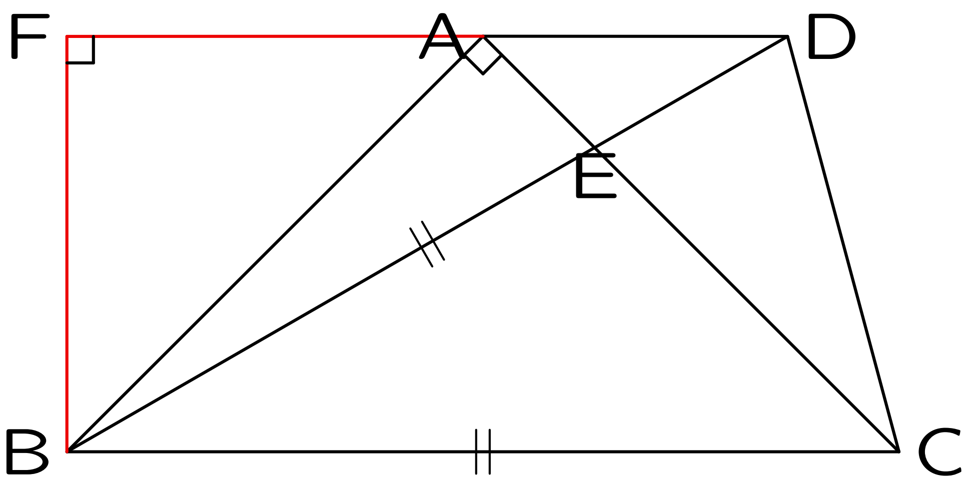


正方形の対角線を引くとこの中に先程の四角形が潜んでいます



そこで・・・・

例３：整角四角形　直角２等辺三角形ABCについて



$$AB = AC,$$

$$BD = BC,$$

$AD \parallel BC$ **のとき、**

$CD = CE$**を示せ**

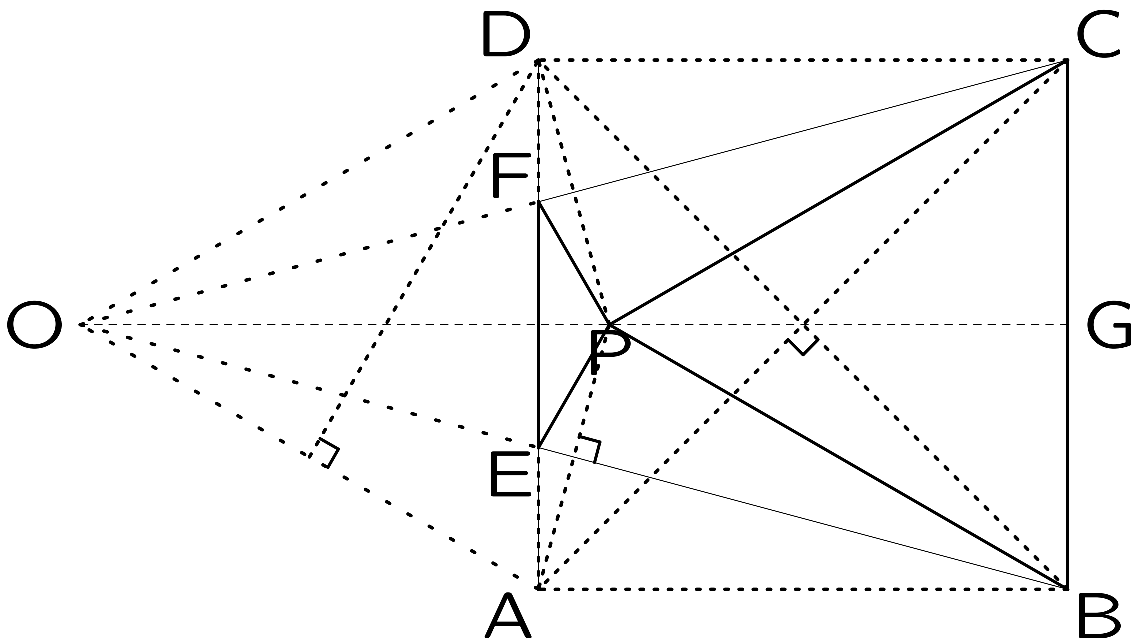
補助線をこのように

引くと‥たちどころに

$\angle$CED ＝ $\angle$CDE

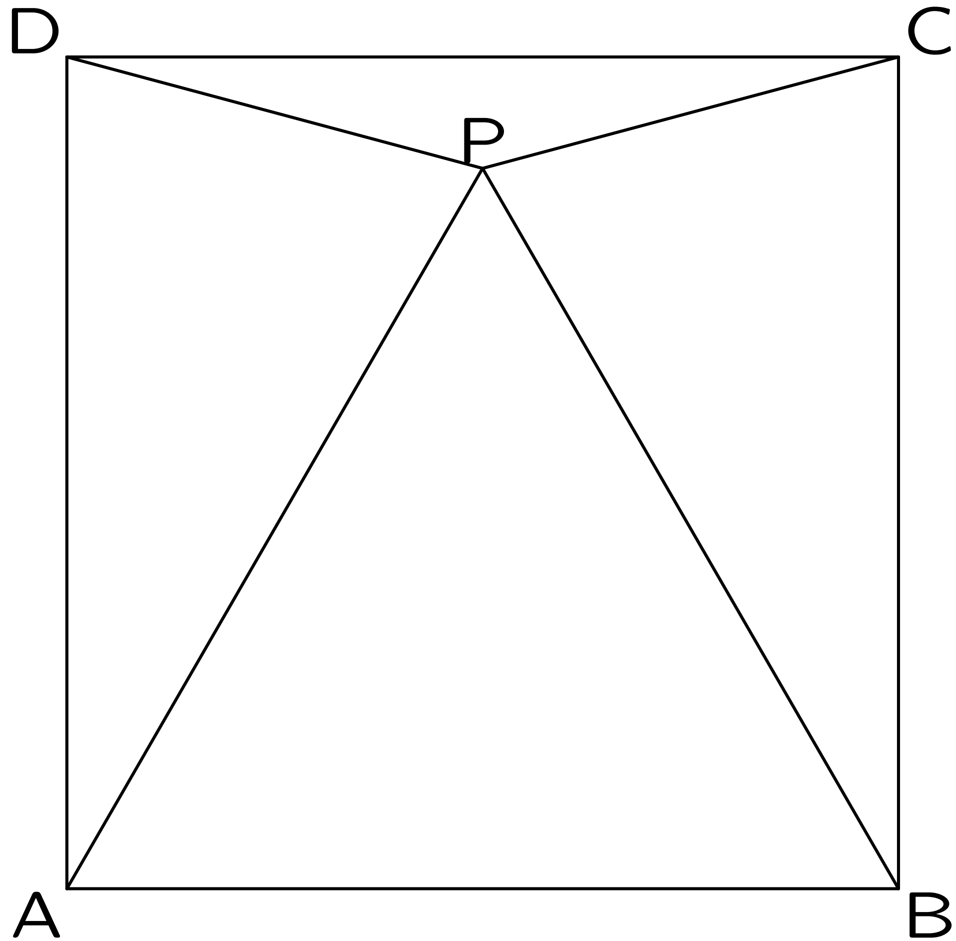
資料　P13 参照

その他



この折り図の構造の一部はパズル等としても多くの本に出題されています。（資料　P13 参照）

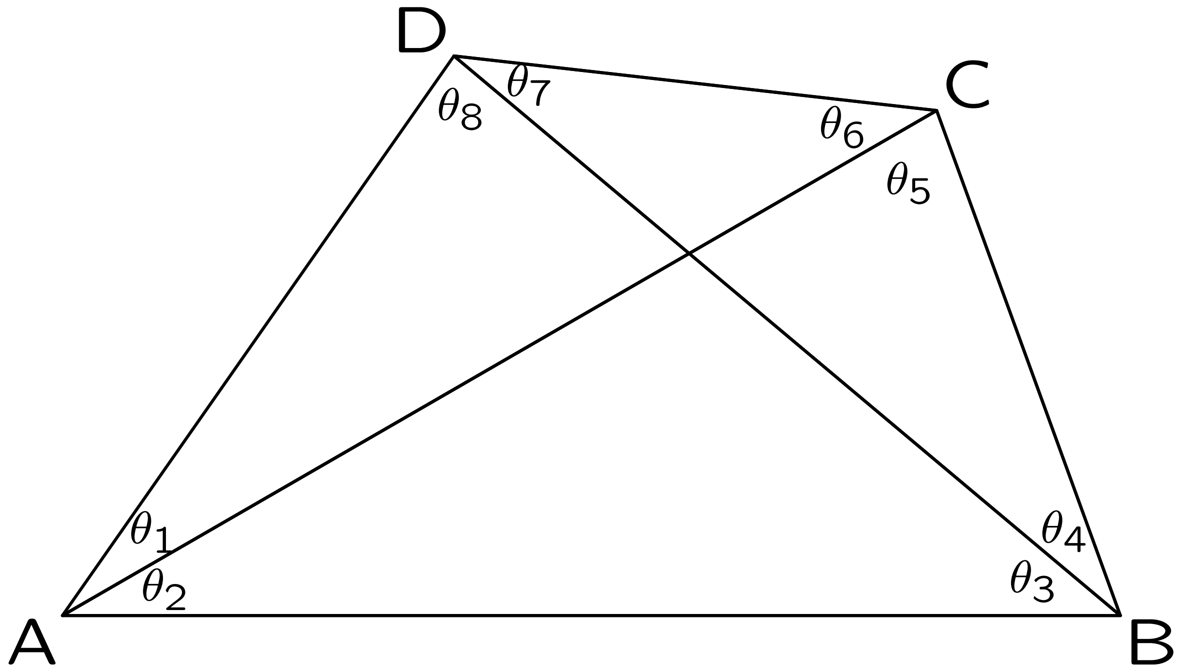
例えば‥



正方形ABCD**の内部に**
$\angle PDC = \angle PCD = 15^\circ$
となるように点P**をとり、図のように結びます。すると、**$\angle APB$ **は何度になるか。**

資料　P13 **参照**

整角四角形問題(数学セミナー1984.8 池野信一氏)



$$\begin{cases} \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_8=180^\circ \\ \theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5=180^\circ \\ \theta_6+\theta_7=\theta_2+\theta_3 \\ \sin\theta_1\sin\theta_3\sin\theta_5\sin\theta_7=\sin\theta_2\sin\theta_4\sin\theta_6\sin\theta_8 \end{cases}$$

資料　P14 参照

整角四角形問題(数学セミナー1984.8 池野信一氏)

整角四角形問題とは

θ_1〜θ_8の８つの角のうち、

いくつかが与えられたり

あるいは

角の間の関係式が与えられたとき、

残りの角を求める問題

（これら８つの角の比は整数比）

整角四角形問題(数学セミナー 1984.8 池野信一氏)

マイコンを使用して、

$\dfrac{180^\circ}{n}$**を単位として、**

$n = 8$**〜**$n = 36$(*n*は偶数)

について、

すべての場合を調べあげた。

その結果、

整角四角形問題(数学セミナー1984.8 池野信一氏)

例えば、$n = 18(10^\circ$単位)の場合について

総数　724個

Ａ型(円に内接するもの)　372

Ｂ型(対称型)　152(Ａ型100個を含む)

Ｃ型(1頂点が残りの３点でできる三角形の外心)　48

Ｄ型(1頂点が残りの３点でできる三角形の傍心)　48

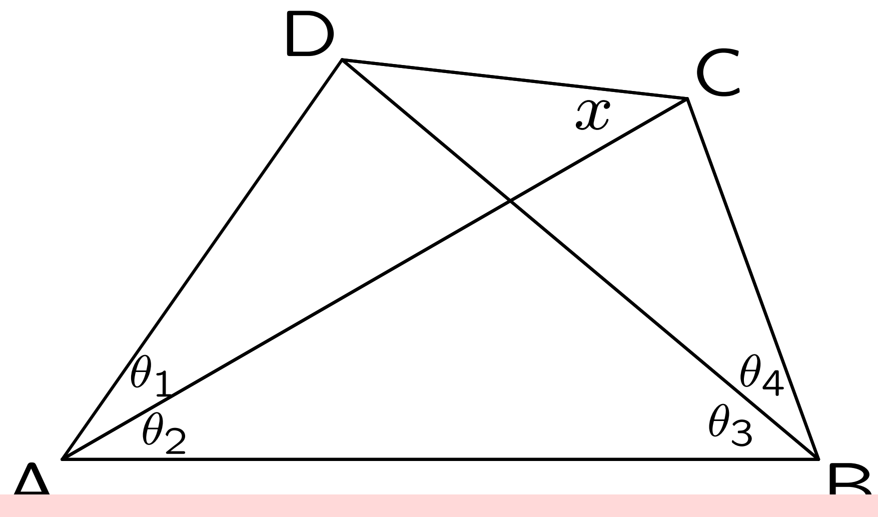
Ｅ型（正三角形と２つの２等辺三角形）　24

(C、Ｄ型共通なもの　12個を含む)

A,B型を除くと300個

資料　P22　参照

整角四角形問題(数学セミナー 1984.8 池野信一氏)



この300個の問題を
「折り返し」で
解いてみました

整角四角形問題

その結果は、

①　辺を対称軸として折り返す　およそ５０題

②　対角線を対称軸として折り返す　およそ１２５題

③　辺の２等分線を折る（外心を含む）　およそ５０題

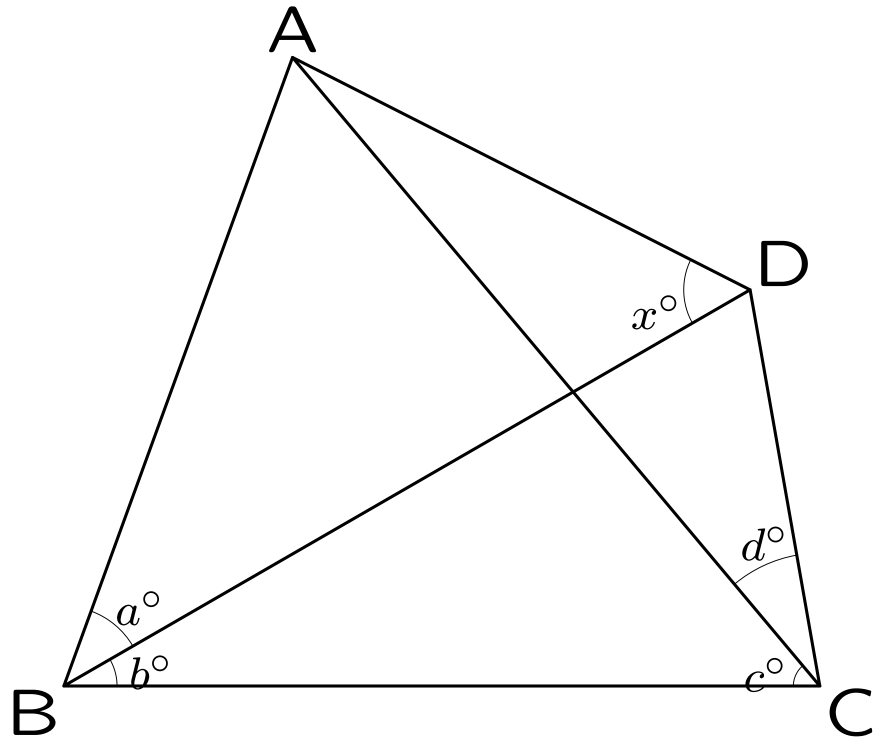
④　角の２等分線を折る　数題（ただし、全て他のパターンで解ける）

⑤　補助線不要　４８題(１頂点が他の３頂点でできる３角形の外心である場合)

⑥　不可能　２６題（ただし、上記１～３の折り返しで既知の問題に変換できる）

資料　P17　参照

角度の問題(具体例)



① 40，30，80，20

外心・合同

② 10，10，40，110

内接・内心

③ 40，60，30，70

内接・外心

④ 10，20，40，40

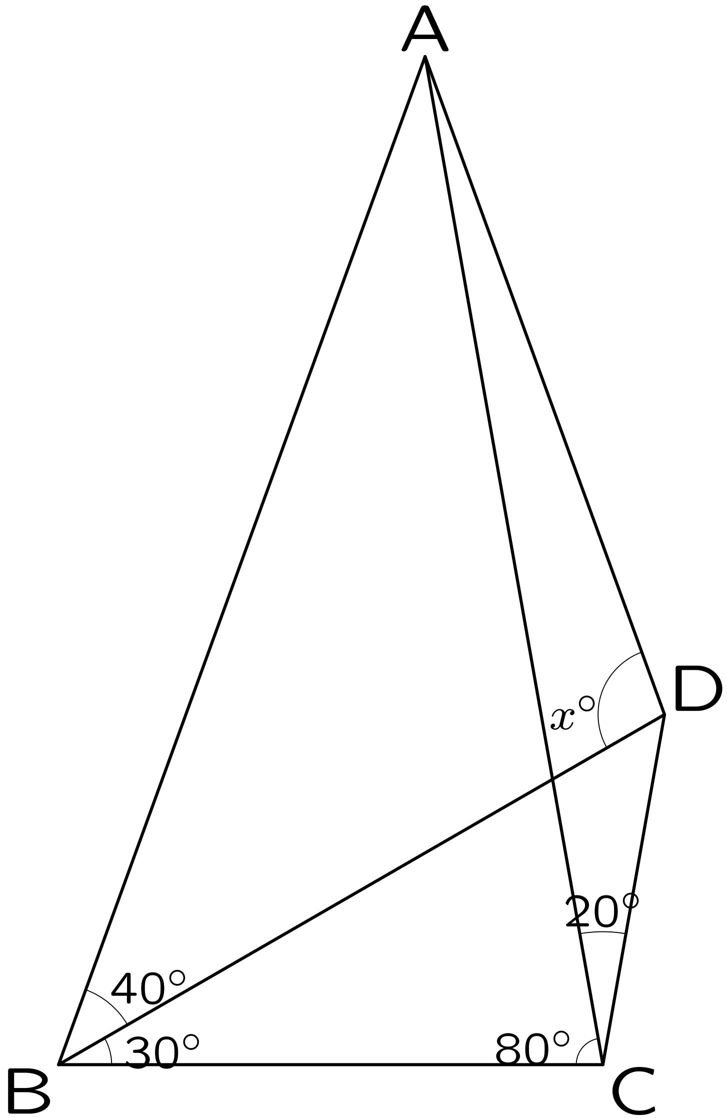
内心・合同

⑤ 20，30，70，40

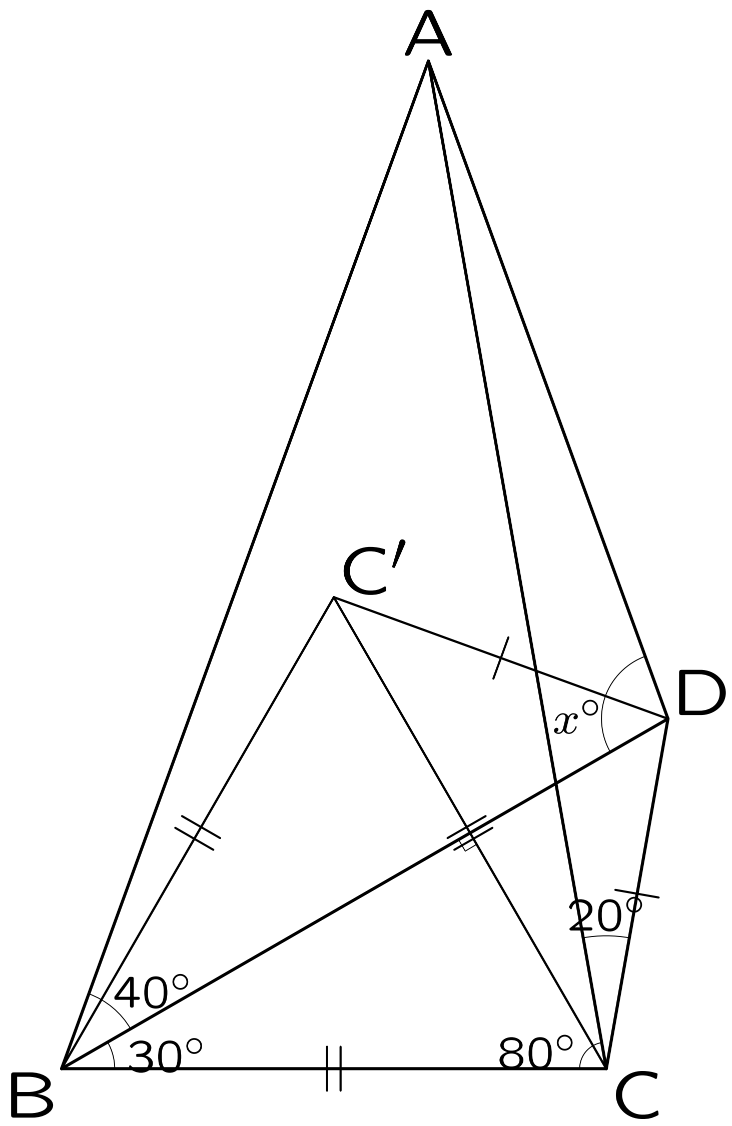
4**通り**

20°，60°，50°，30°

資料　P20　参照



40°, 30°, 80°, 20°

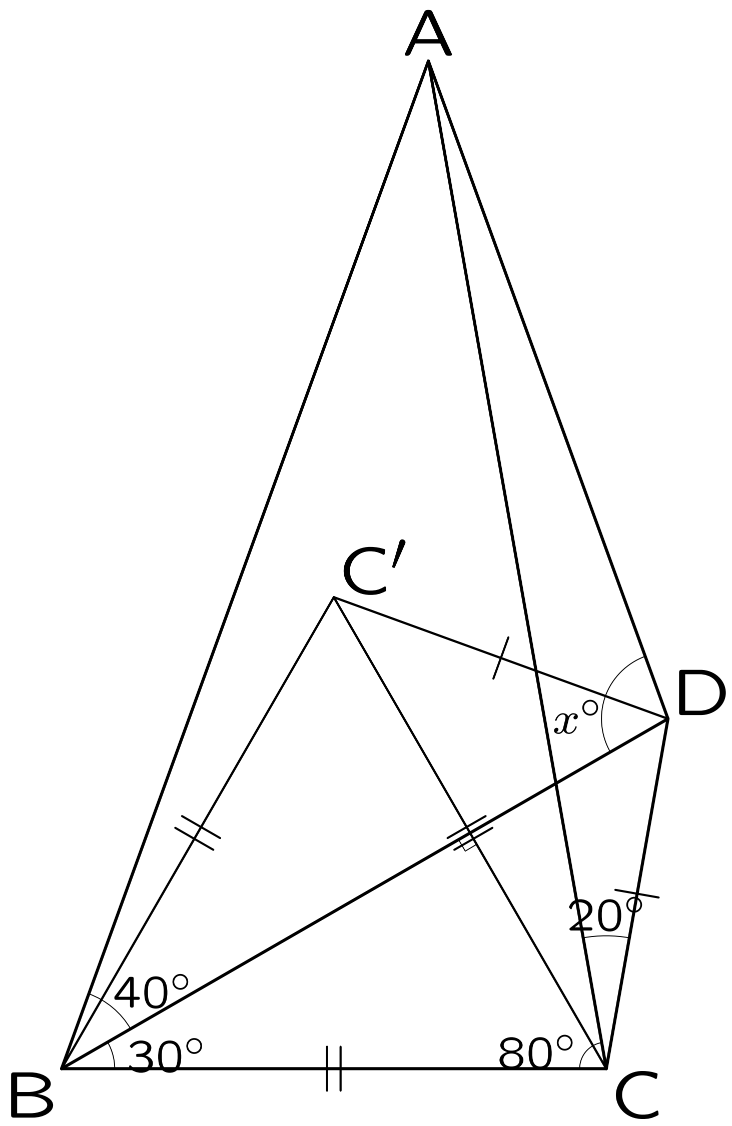


40°，30°，80°，20°

⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒

BDに関して△BCDを対称移動

△BCC′は正三角形



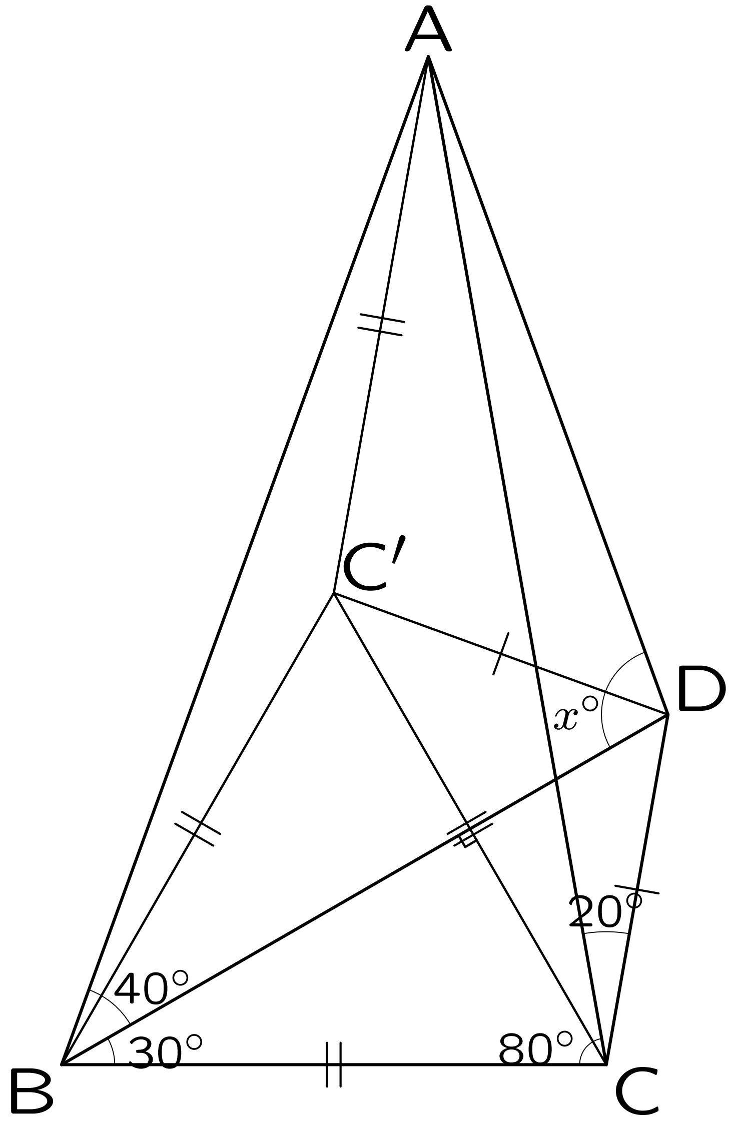
40°, 30°, 80°, 20°

⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒

BDに関して△BCDを対称移動

△BCC′は正三角形

C′は△ABCの外心



40°，30°，80°，20°

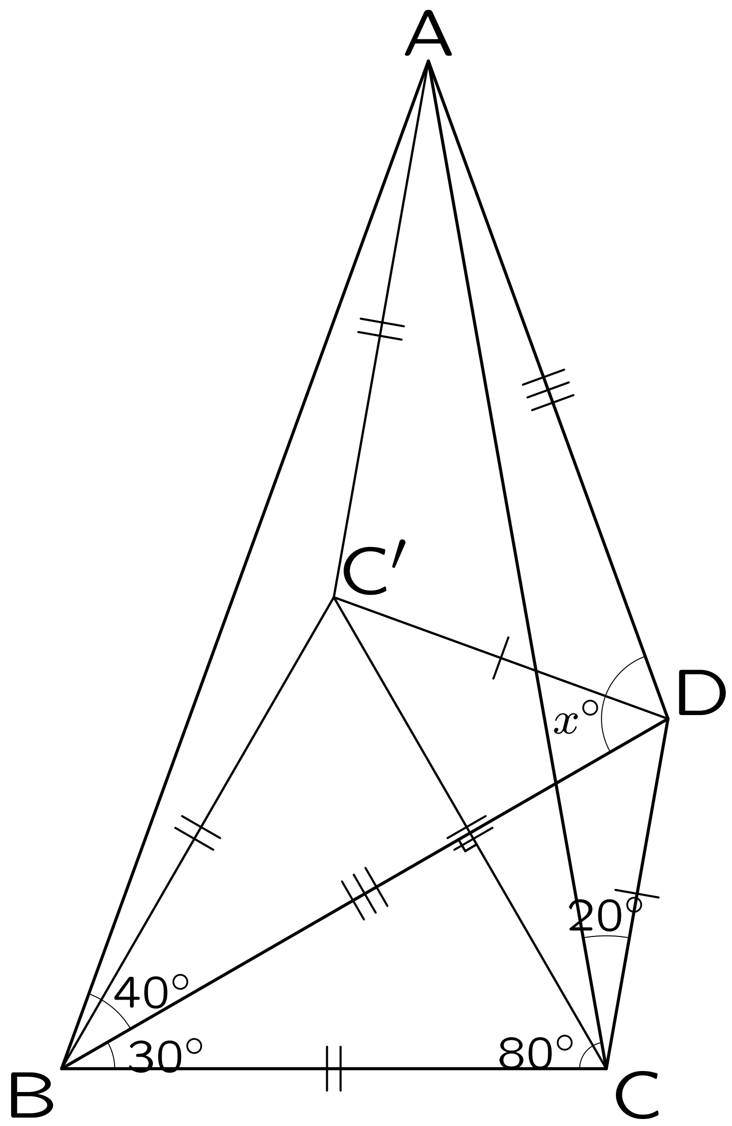
⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛

BDに関して△BCDを対称移動

△BCC′は正三角形

C′は△ABCの外心

C′A を結ぶ



40°, 30°, 80°, 20°

⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒

BDに関して△BCDを対称移動

△BCC′は正三角形

C′は△ABCの外心

C′A を結ぶ

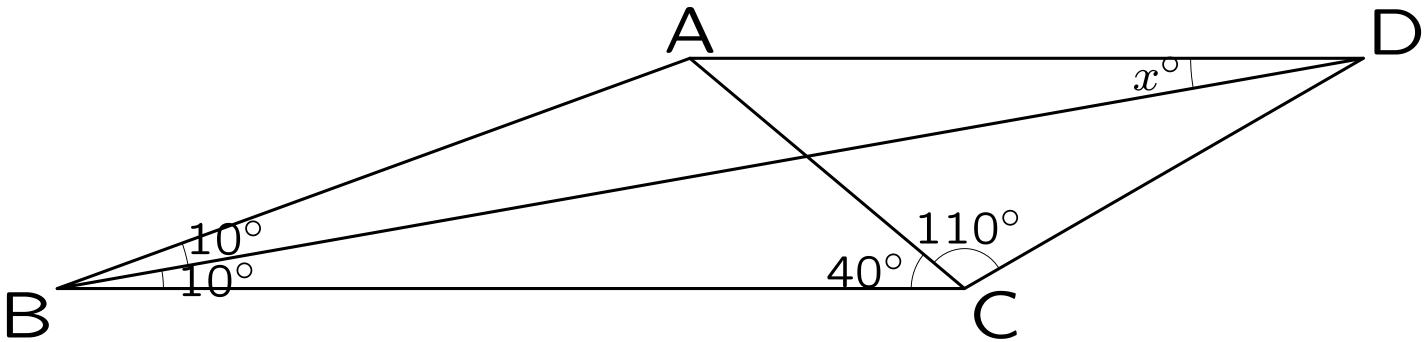
$\triangle DC'B \equiv \triangle DC'A$

$\angle ADB = 50^\circ \times 2$

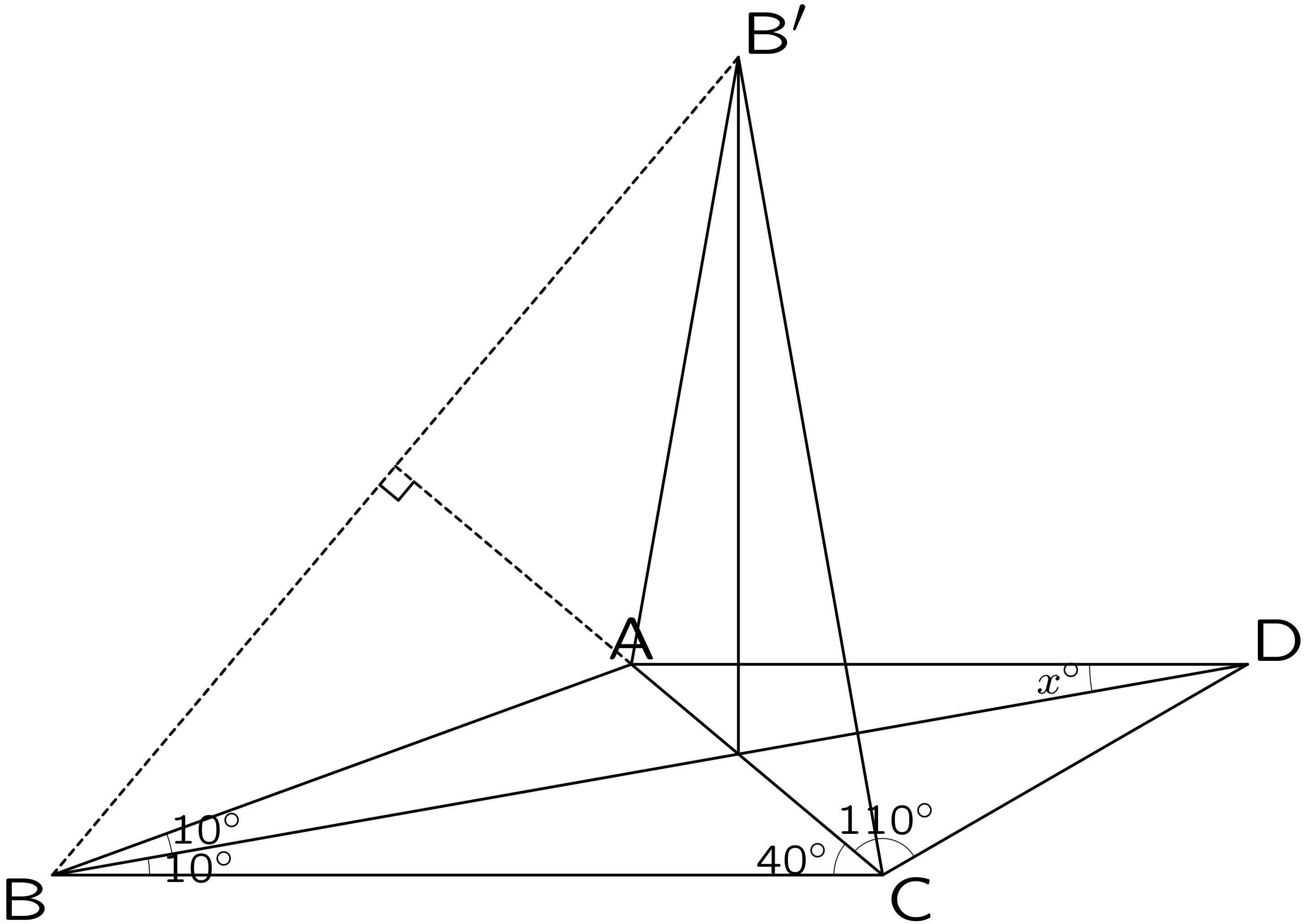
$= 100^\circ$

10°, 10°, 40°, 110°

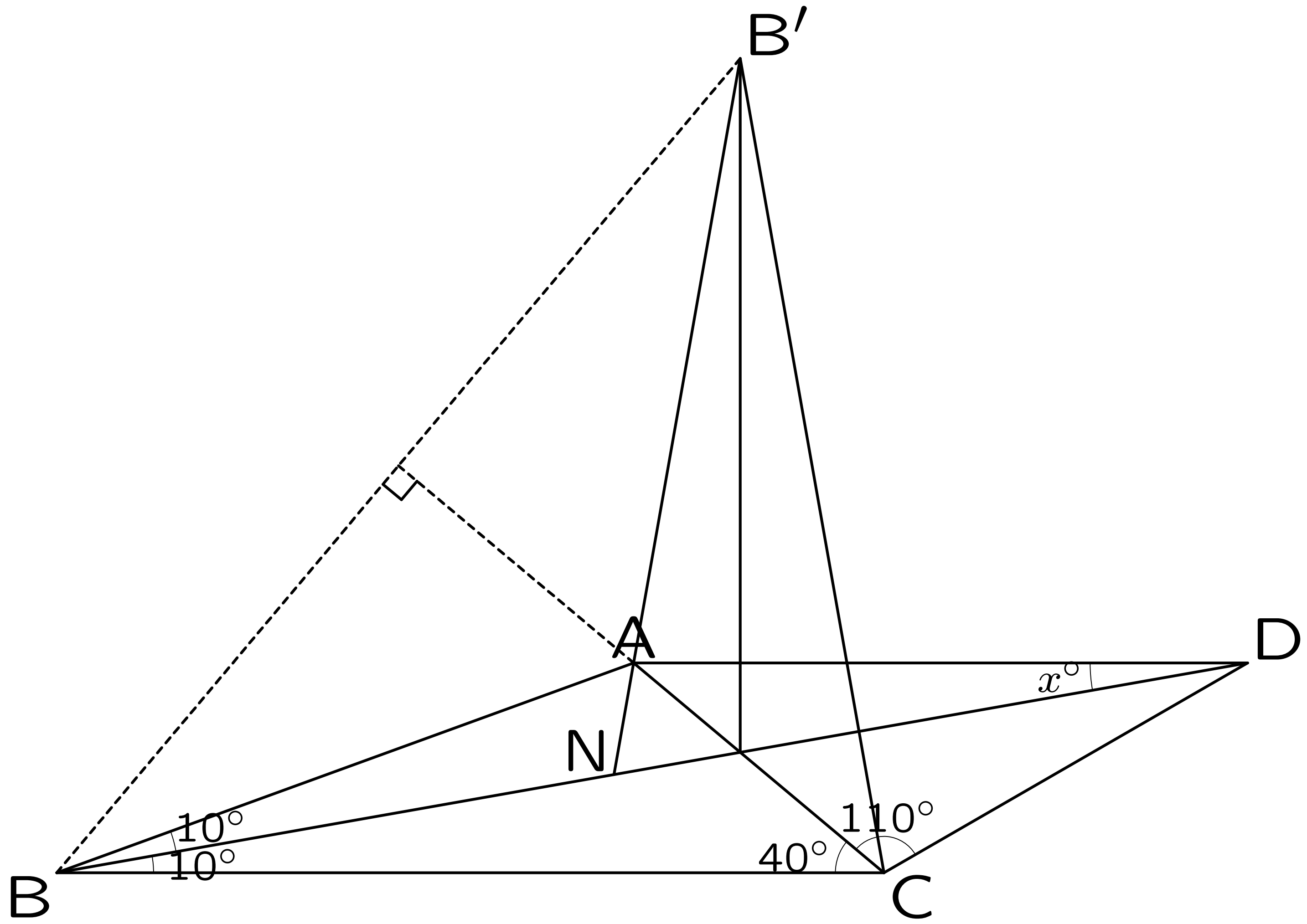
整角四角形＝ 10°，10°，40°，110°



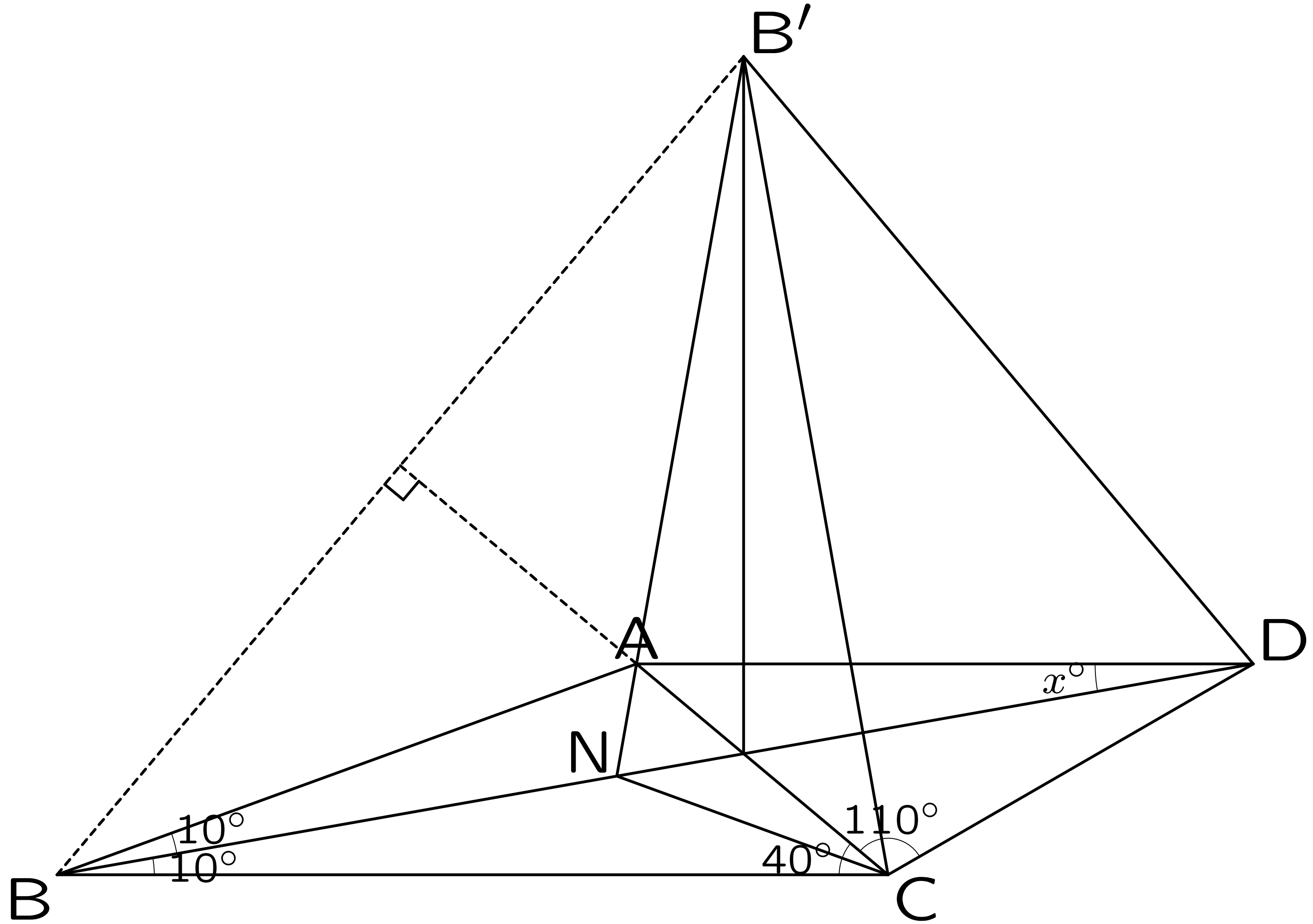
ACに関して△ABCを対称移動



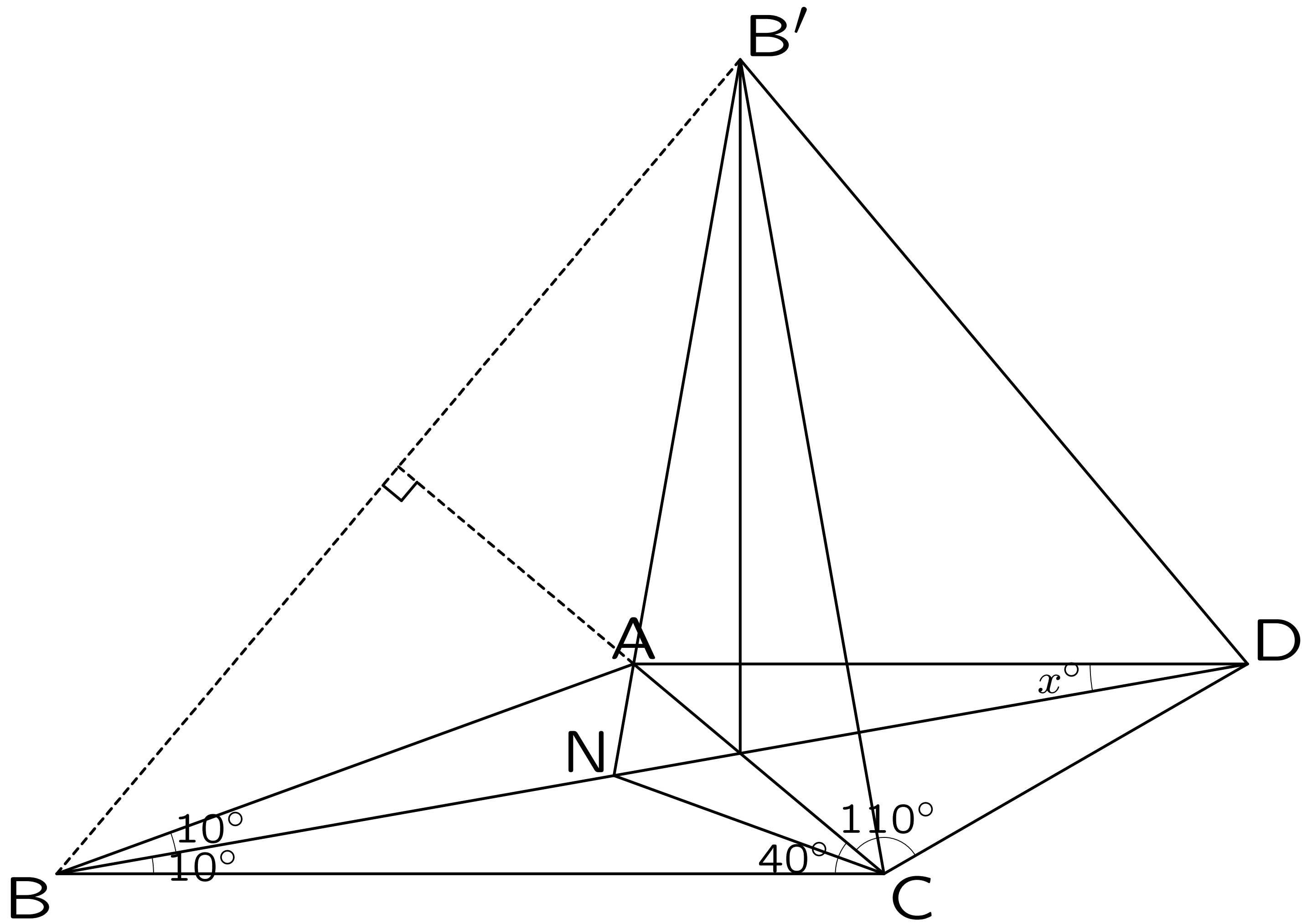
B′AとBDの交点をN:△ABCの内心



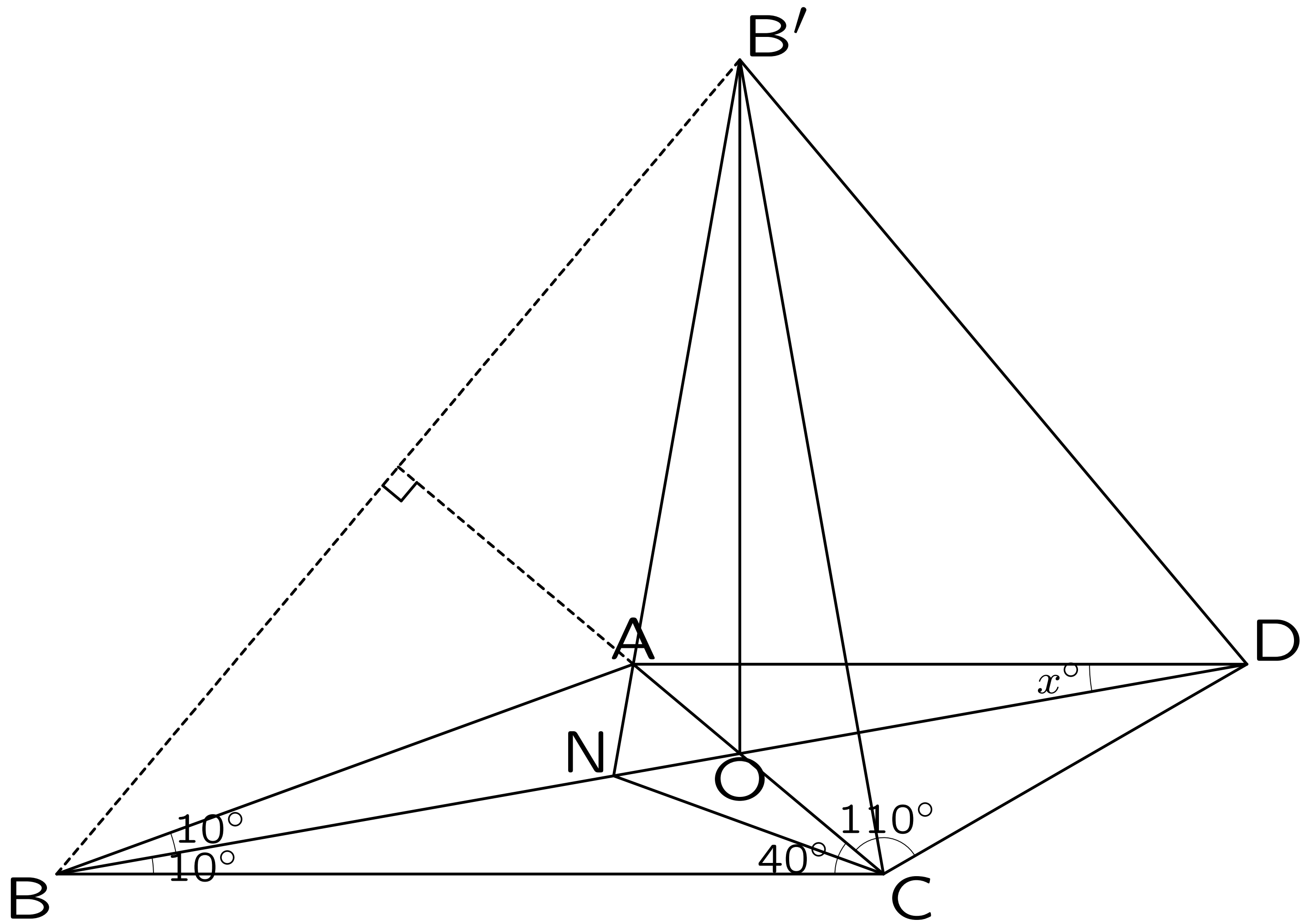
CN ,DB$'$:四角形B$'$NCD は円に内接



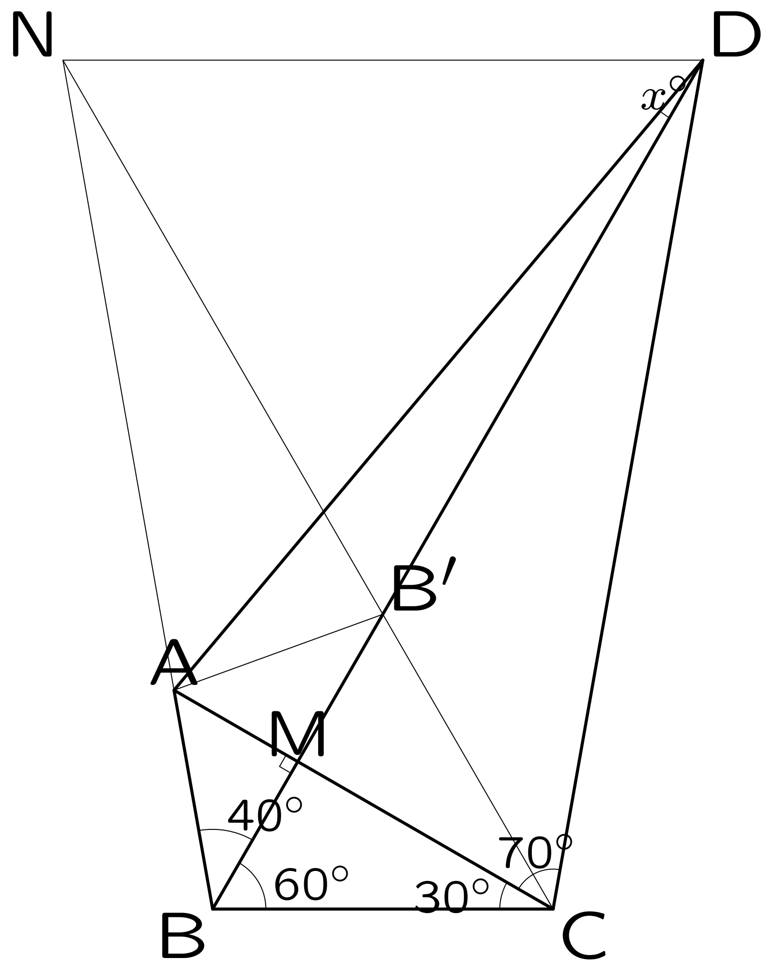
$\angle NDB' = \angle NCB' = 60^\circ = \angle NAC$



四角形B′AOD は円に内接



40°, 60°, 30°, 70°



40°，60°，30°，70°

⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛ ⇛

ACに関して△ABCを対称移動

BAとCB′の交点をN

NとDを結ぶ

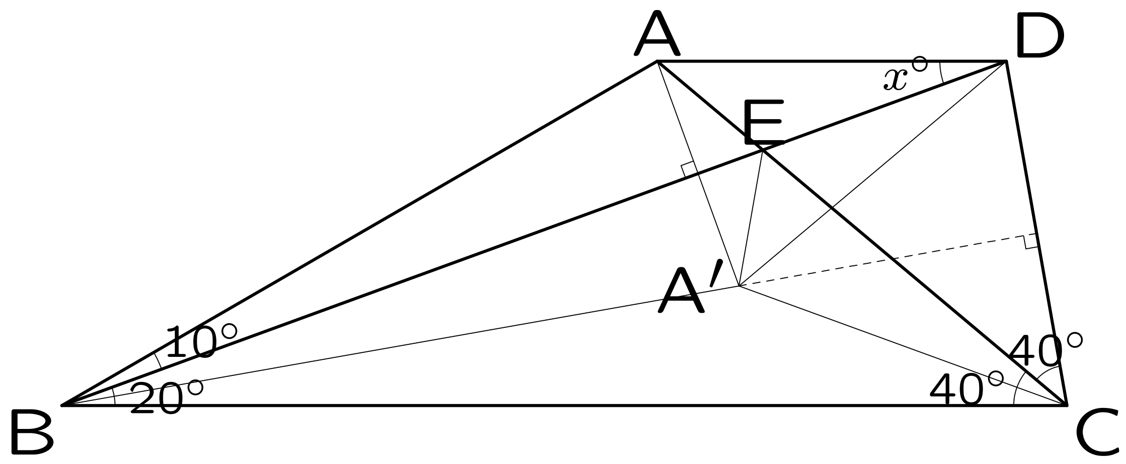
四角形BNDC は円に内接

Nは△AB′Dの外心

$x = 10^\circ$

$10°, 20°, 40°, 40°$

整角四角形＝ 10°, 20°, 40°, 40°



BD に関して △ABD を対称移動

A の対称点を A′

A′ は △EBC の内心

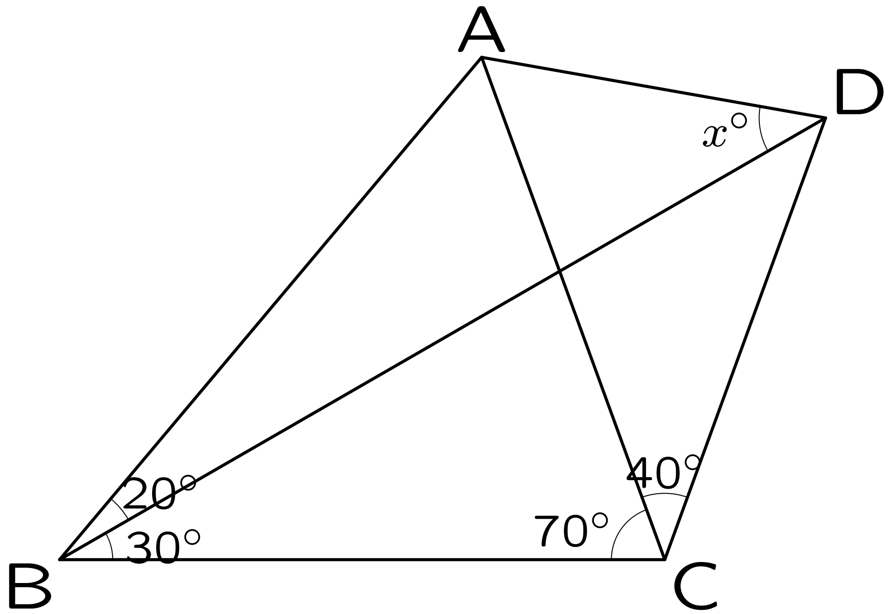
$\triangle \mathrm{DBA}' \equiv \triangle \mathrm{CBA}'$

$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{A'DB}$

$x = 20^\circ$

$$20^\circ,\ 30^\circ,\ 70^\circ,\ 40^\circ$$

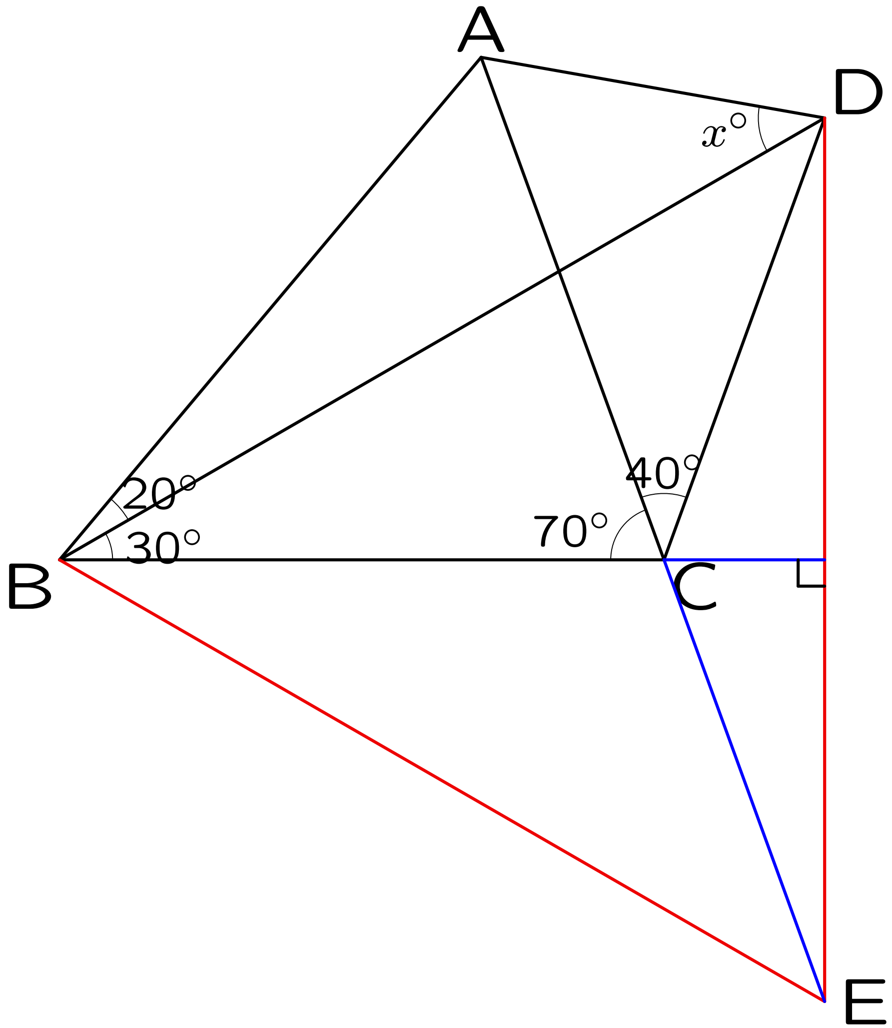
整角四角形 $= 20^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 40^\circ$



（その１）

資料　P9 参照

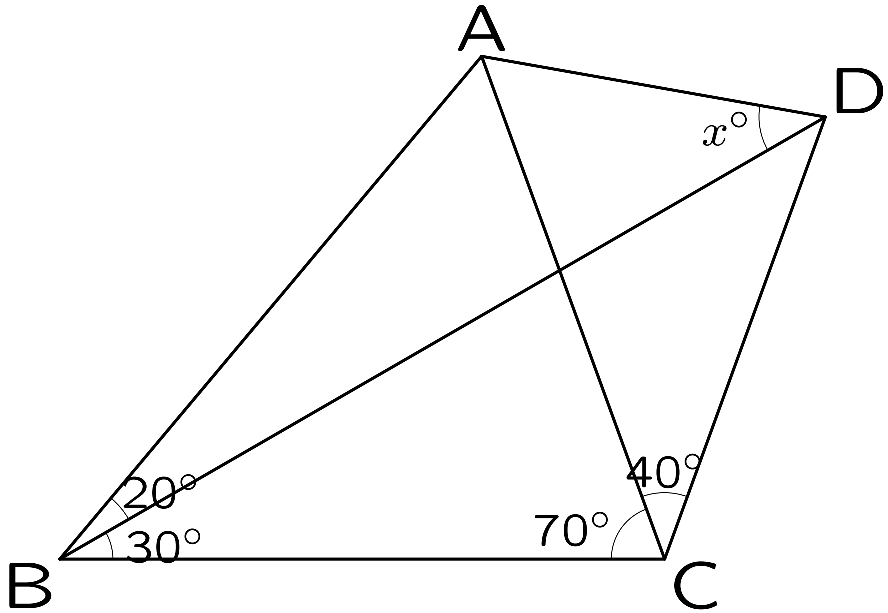
整角四角形＝ $20^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 40^\circ$



（その１）

$\triangle$BDCを
BCで折り返す

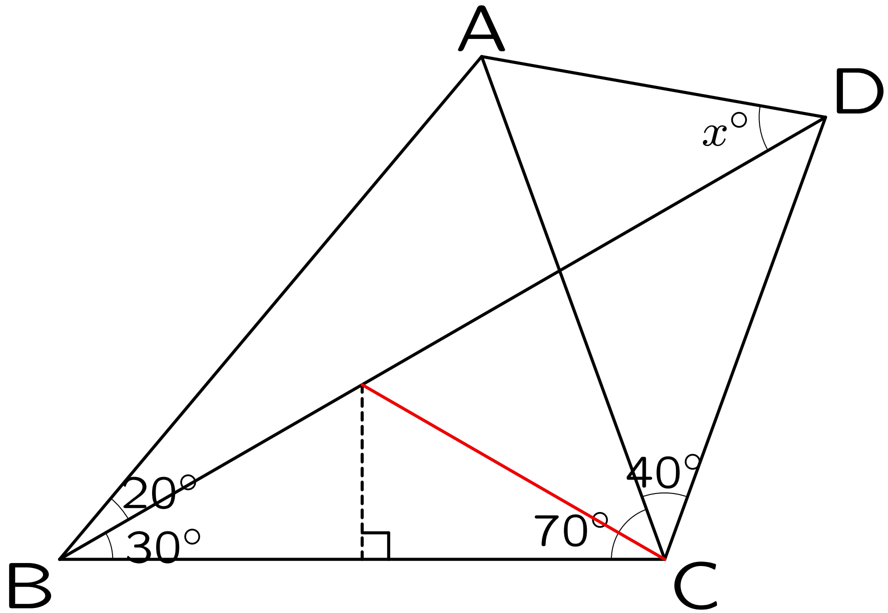
整角四角形＝ $20^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 40^\circ$



（その２）

資料　P9 参照

整角四角形 $= 20^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 40^\circ$



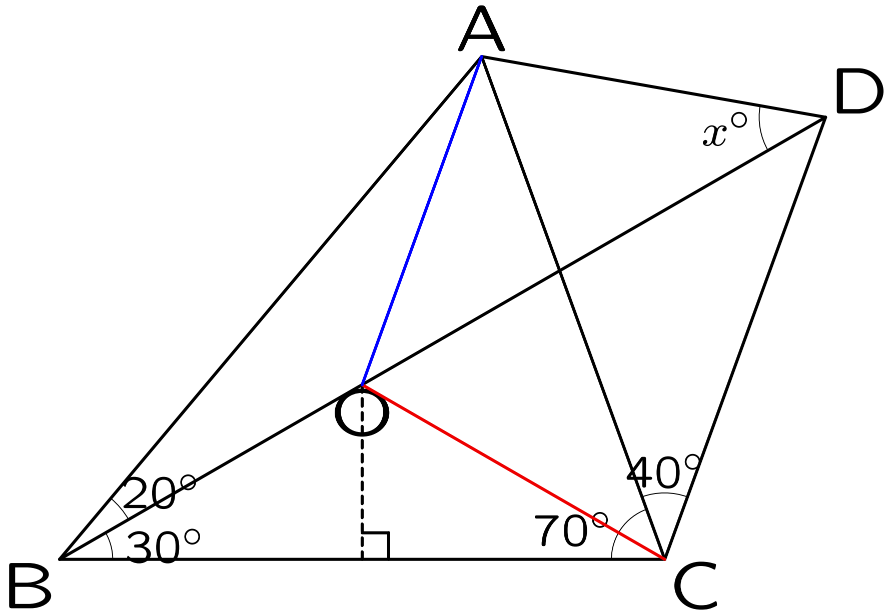
（その２）

$\triangle$BCD について

BC の垂直２等分線で折り返す

資料　P9 参照

整角四角形$= 20^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 40^\circ$



（その２）

△BCDについて

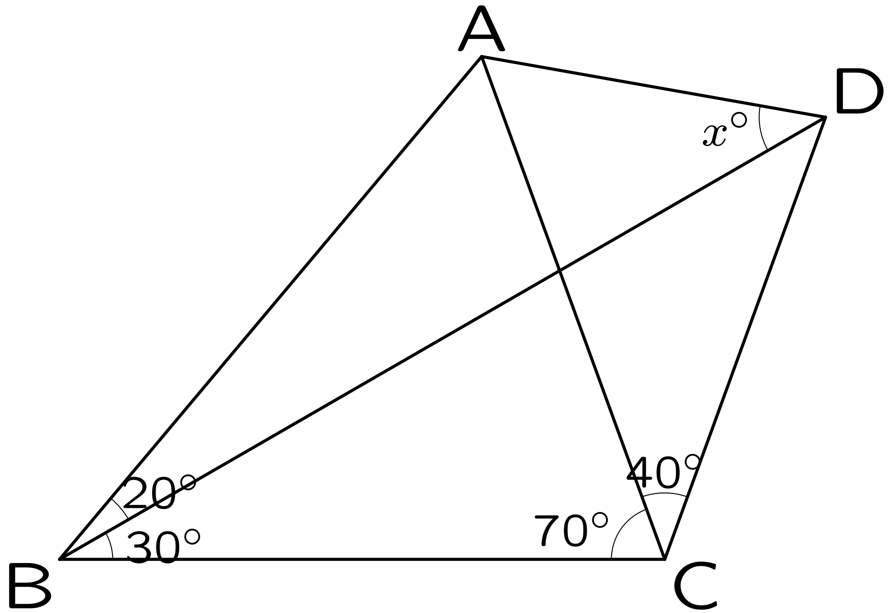
BCの垂直２等分線で折り返す

$$\angle \mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{BOC}$$

Oは△ABCの外心

資料　P9 参照

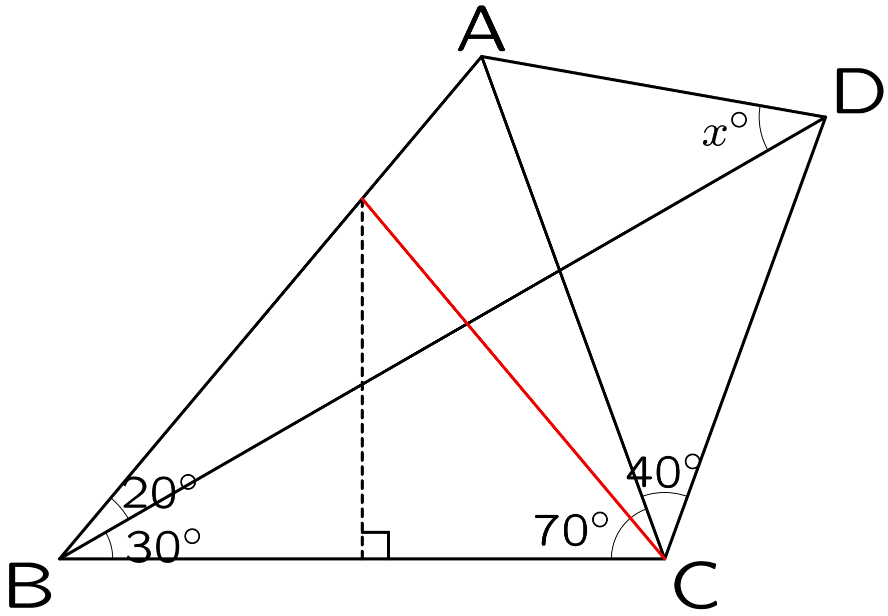
整角四角形＝ $20^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 40^\circ$



（その３）

資料　P9 参照

整角四角形＝ $20°, 30°, 70°, 40°$



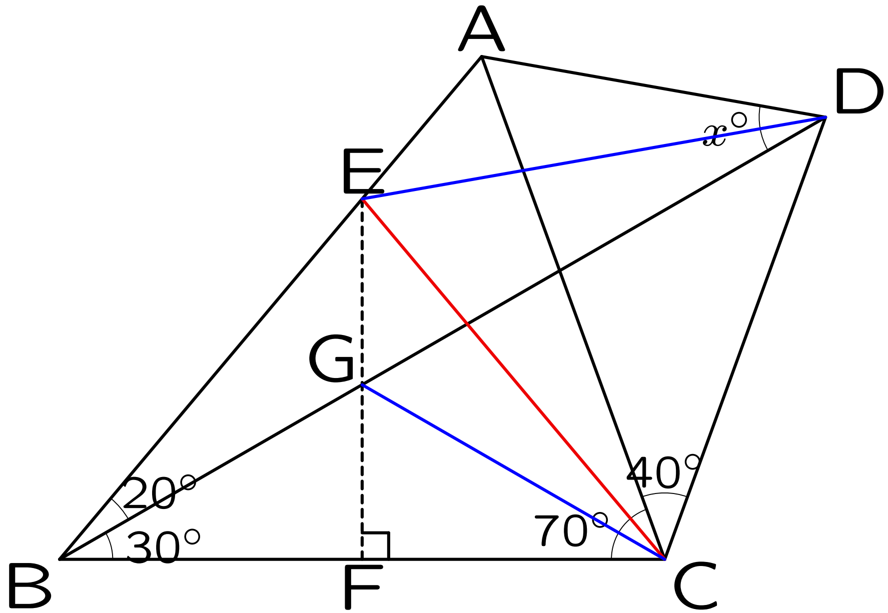
（その３）

△BACについて

BCの垂直２等分線で折り返す

資料　P9 参照

整角四角形$=20°, 30°, 70°, 40°$



（その３）

$\triangle$BAC**について**

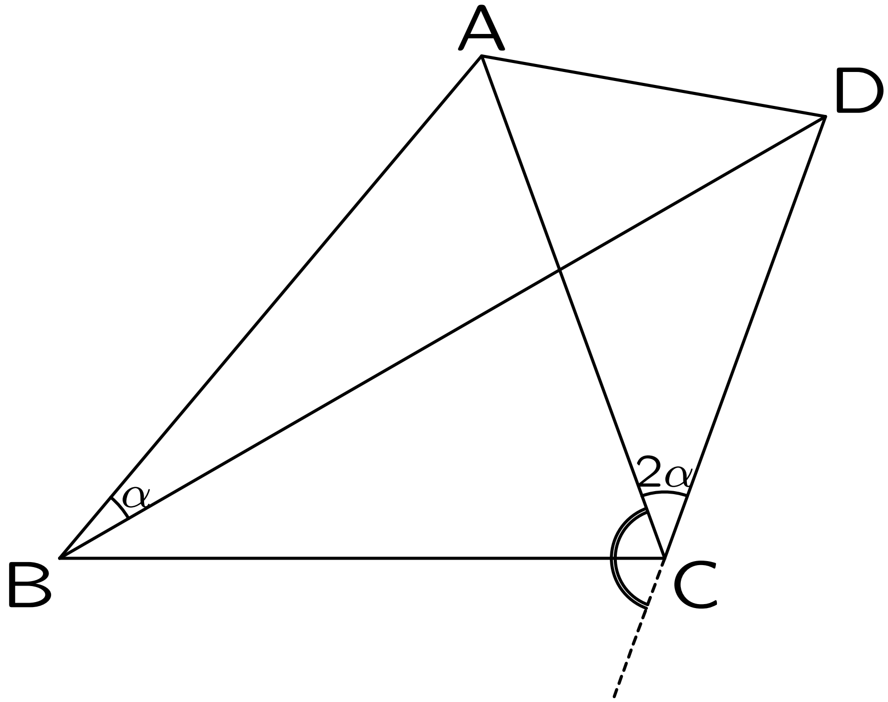
BC**の垂直２等分線で折り返す**

E**は**$\triangle$BCD**の外心**

四角形EGCD,AECD**は円に内接**

資料　P9 **参照**

証明を考えて下さい



(その4)

左図で、

$\angle$ACD = 2$\angle$ABD

BC **は** $\triangle$ACD **の外角の 2 等分線**

であるとき、B **は** $\triangle$ACD **の傍心**

これで 36 **題** (300 **題中**) **が解けます。**

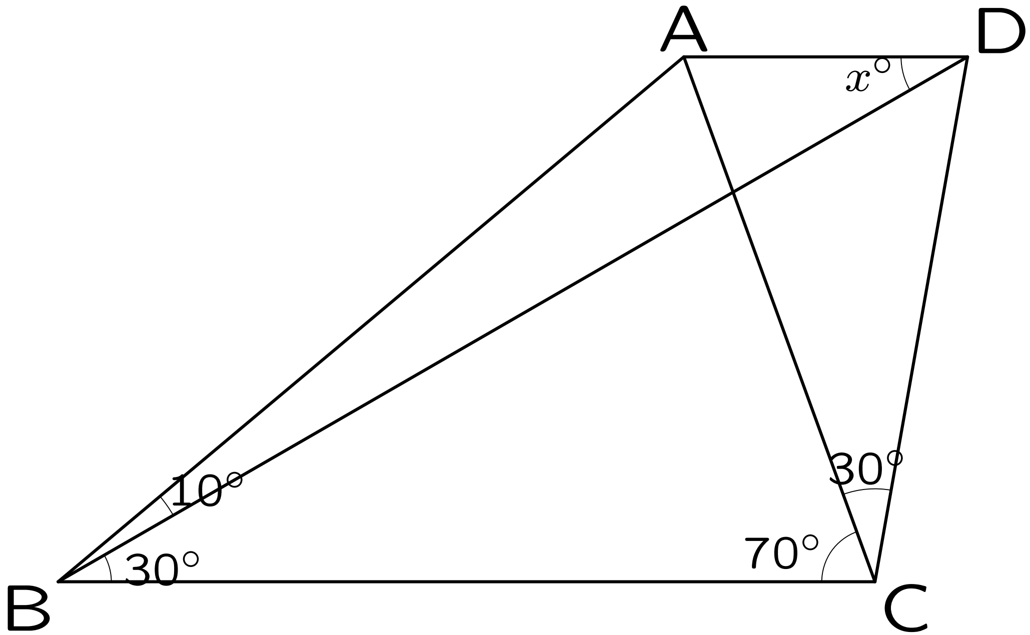
$$10°,\ 20°,\ 100°,\ 20°$$

＝既知の問題を利用して＝

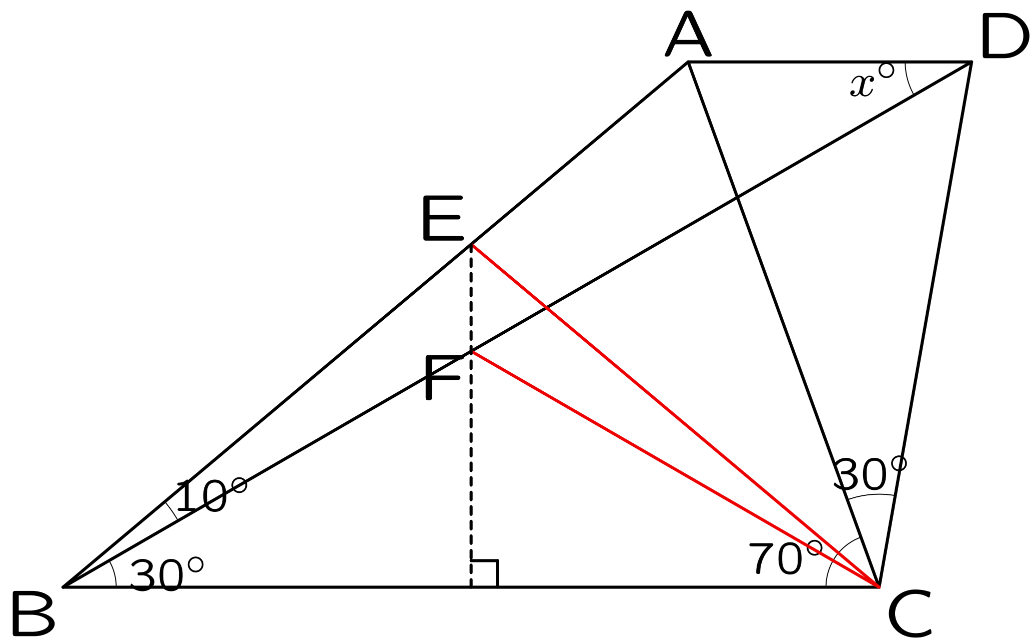
まず、整角四角形＝ $10°, 30°, 70°, 30°$

を解き、これを利用します

整角四角形＝ $10°, 30°, 70°, 30°$



整角四角形 $= 10°, 30°, 70°, 30°$



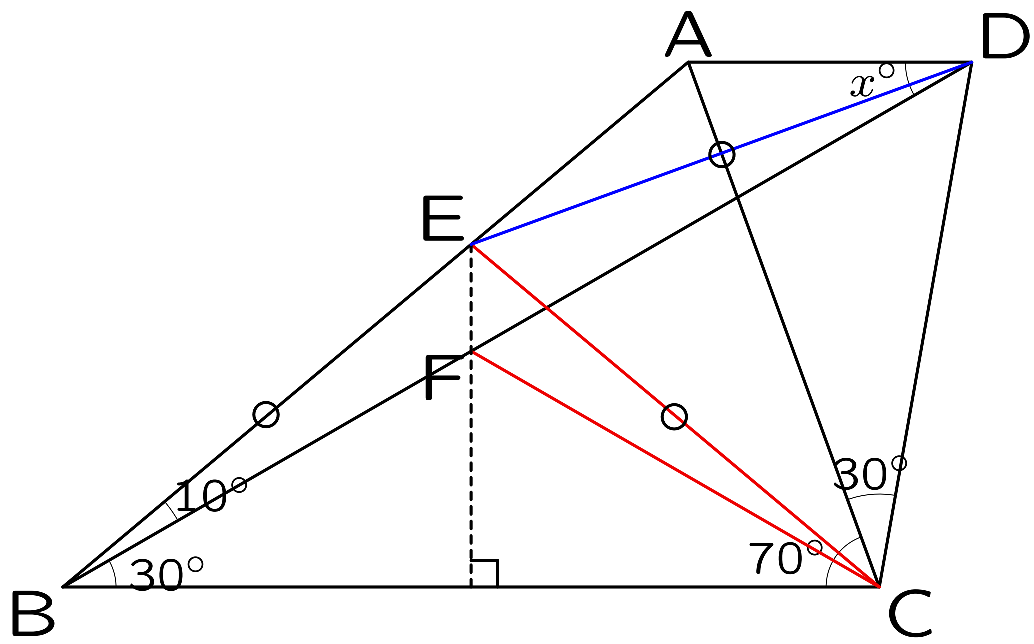
BCの垂直２等分線を折る

$\angle BEC = 2\angle FEC$

$= 2\angle BDC$

Eは$\triangle BCD$の外心

整角四角形＝ $10^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 30^\circ$



BCの垂直２等分線を折る

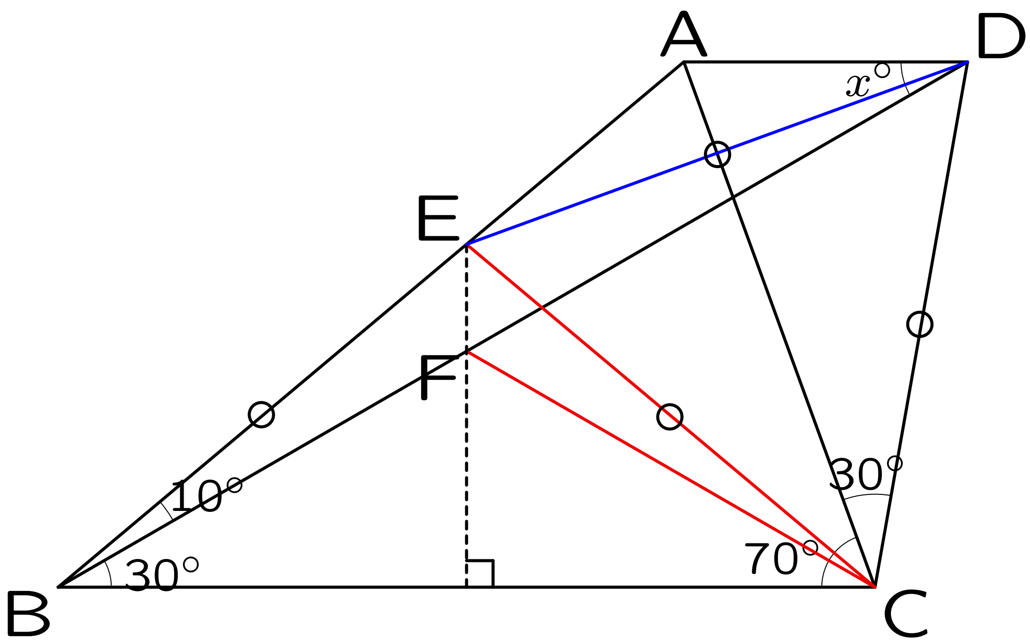
$\angle BEC = 2\angle FEC$

$= 2\angle BDC$

Eは△BCDの外心

四角形EFCDは円に内接

整角四角形$= 10^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 30^\circ$



BC**の垂直２等分線を折る**

$\angle \mathrm{BEC} = 2\angle \mathrm{FEC}$

$\quad = 2\angle \mathrm{BDC}$

E**は**△BCD**の外心**

四角形EFCD**は円に内接**

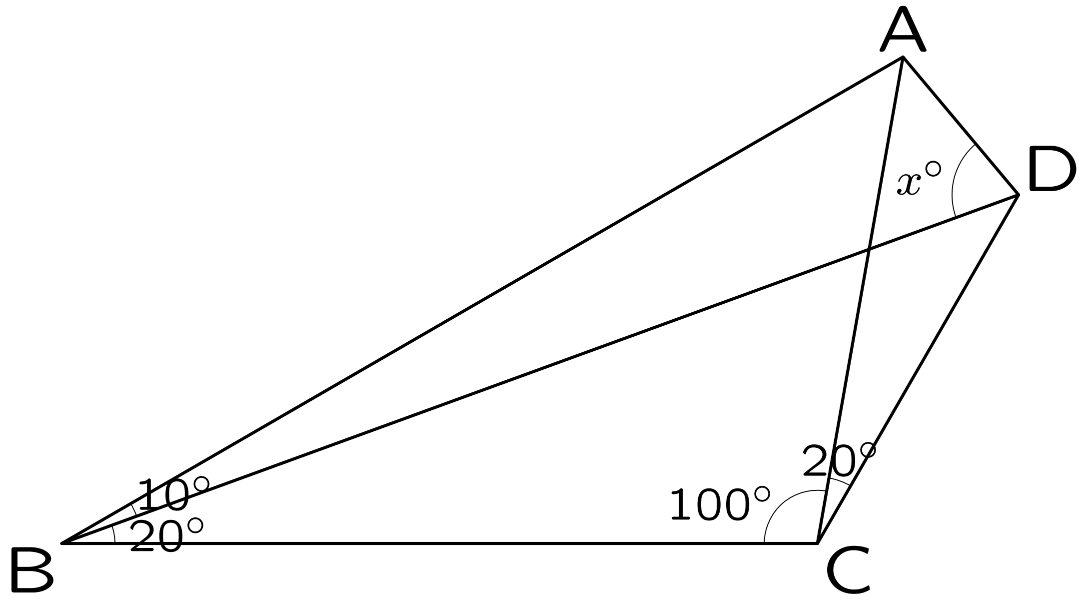
△CDE**は正三角形**

△ACE≡△ACD

$x^\circ = 30^\circ$

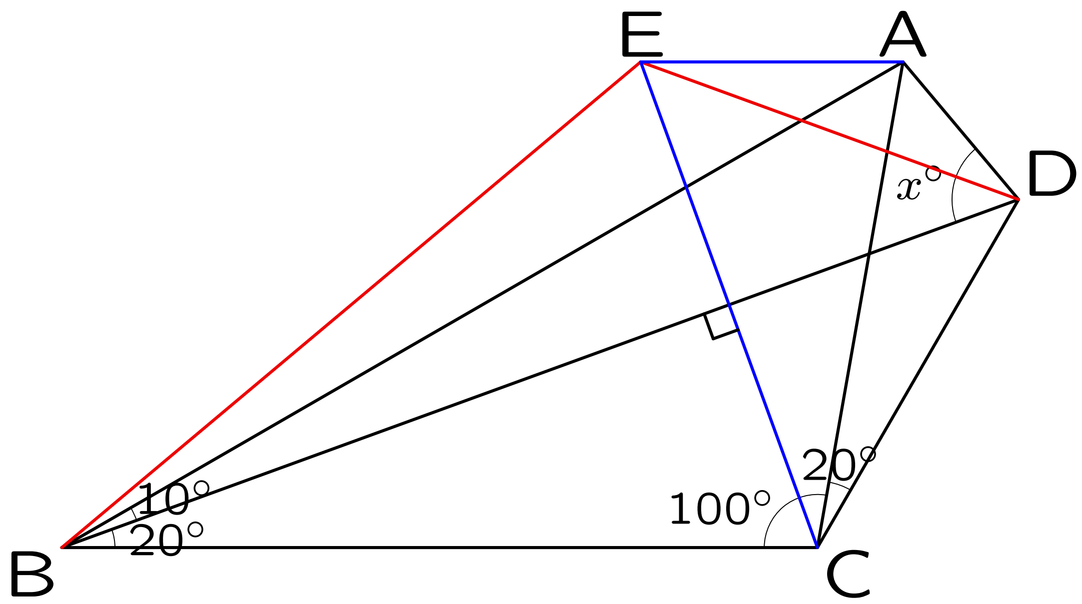
整角四角形$=10^\circ, 20^\circ, 100^\circ, 20^\circ$

既知の問題（整角四角形$=10^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 30^\circ$）を利用



整角四角形$=10^\circ, 20^\circ, 100^\circ, 20^\circ$

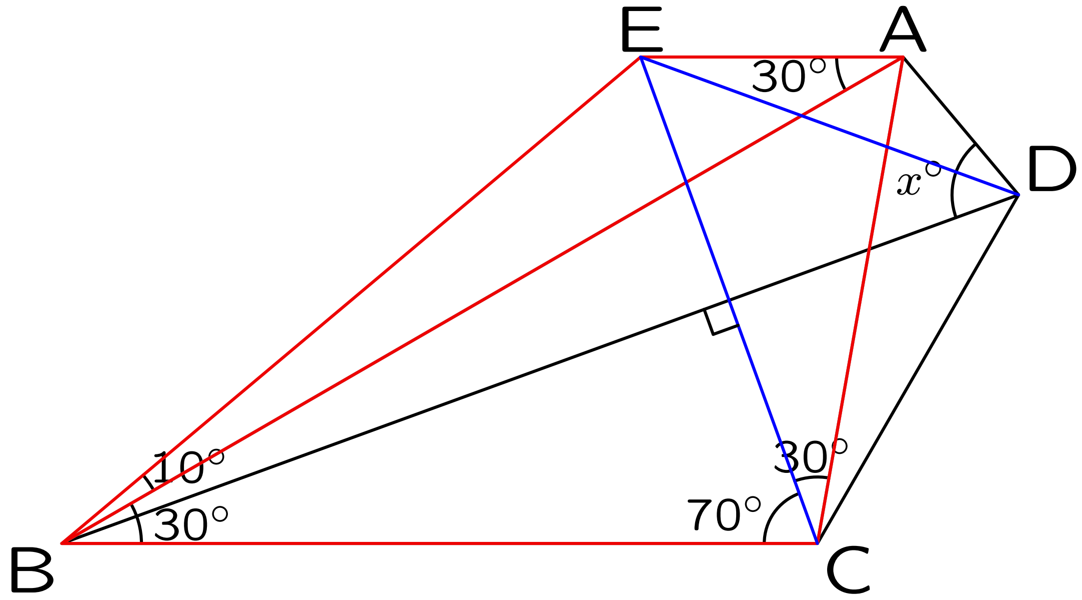
既知の問題（整角四角形$=10^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 30^\circ$）を利用



BDで△BCDを折り返す

整角四角形$=10^\circ, 20^\circ, 100^\circ, 20^\circ$

既知の問題（整角四角形$=10^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 30^\circ$）を利用



BDで△BCDを折り返す

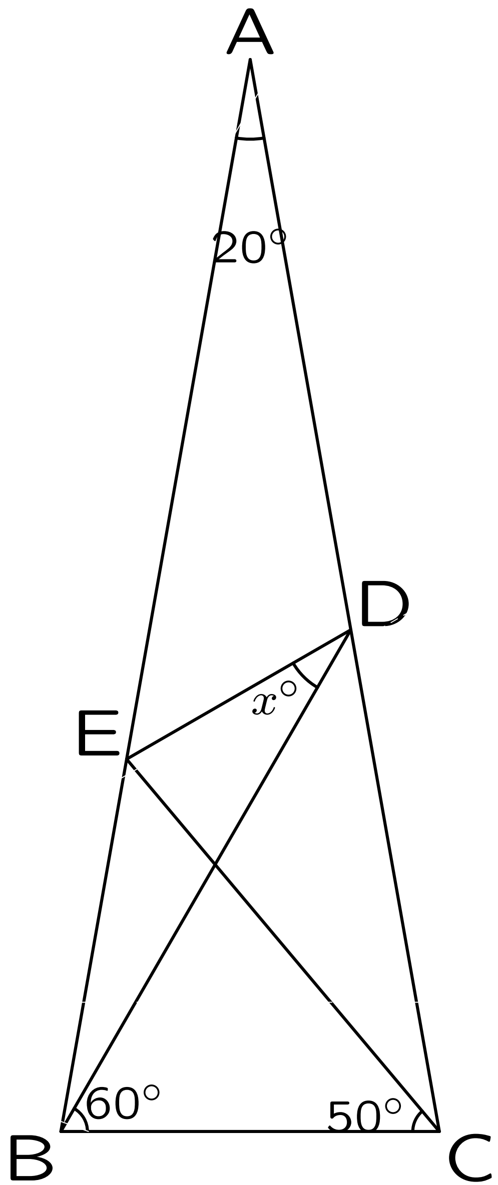
既知の問題＝

$10^\circ, 30^\circ, 70^\circ, 30^\circ$

となる

四角形AECDは円に内接

20°, 60°, 50°, 30°
langleyの問題



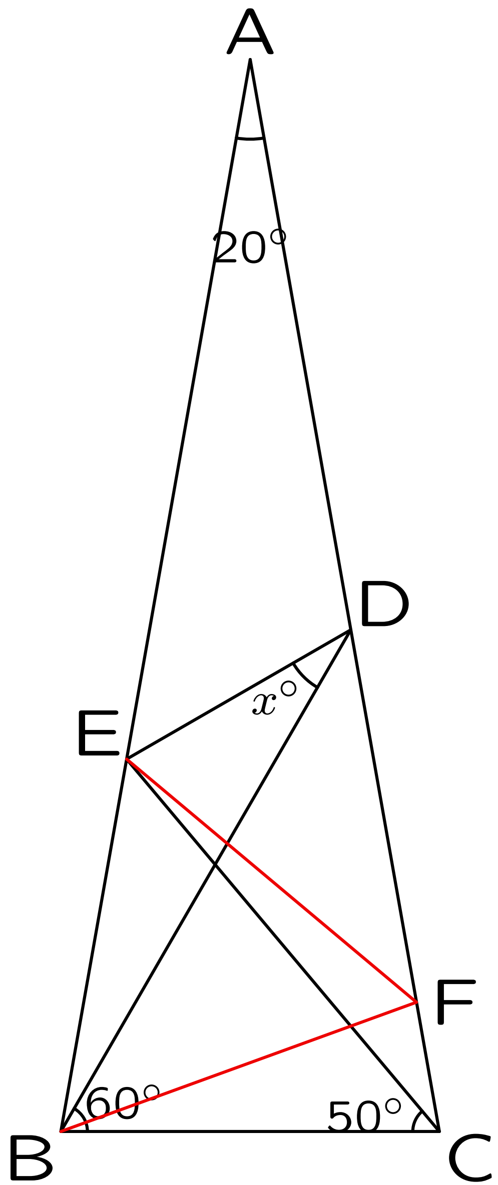
20°，60°，50°，30°

図のような２等辺三角形において、

$\angle$DBC ＝ 60°

$\angle$ECB ＝ 50°

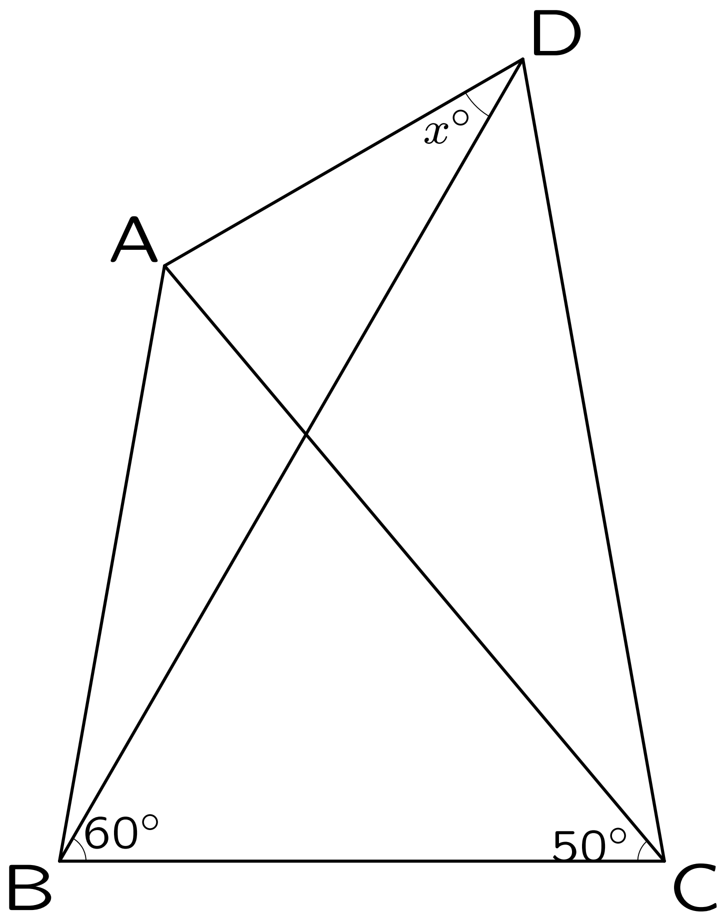
のとき、$\angle$EDB**を求めよ。**



20°，60°，50°，30°

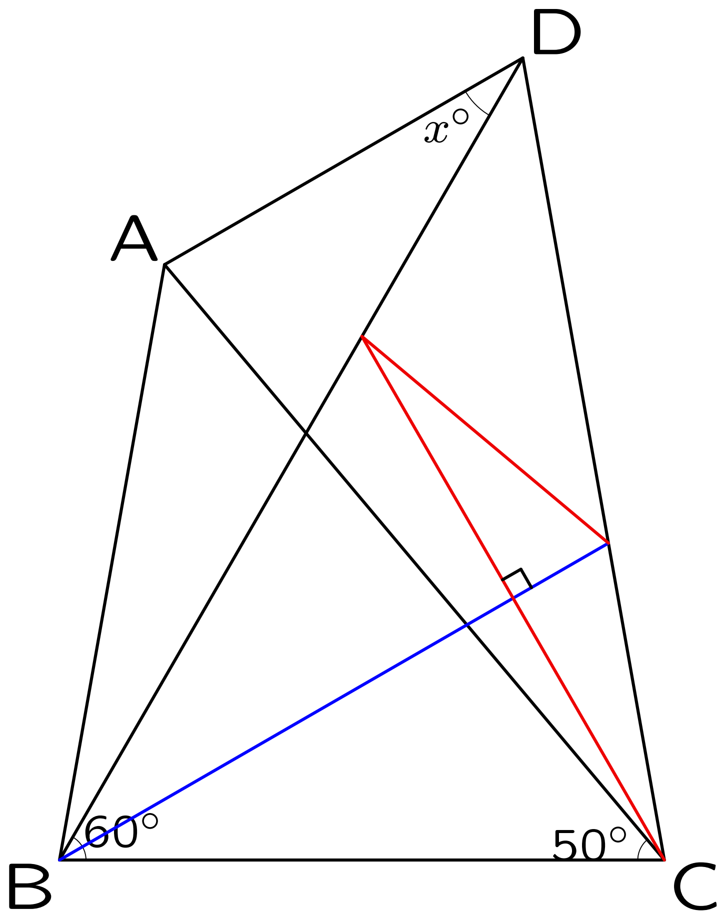
一般的な解き方

AC上に△BEFが正三角形になるように点Fをとる。



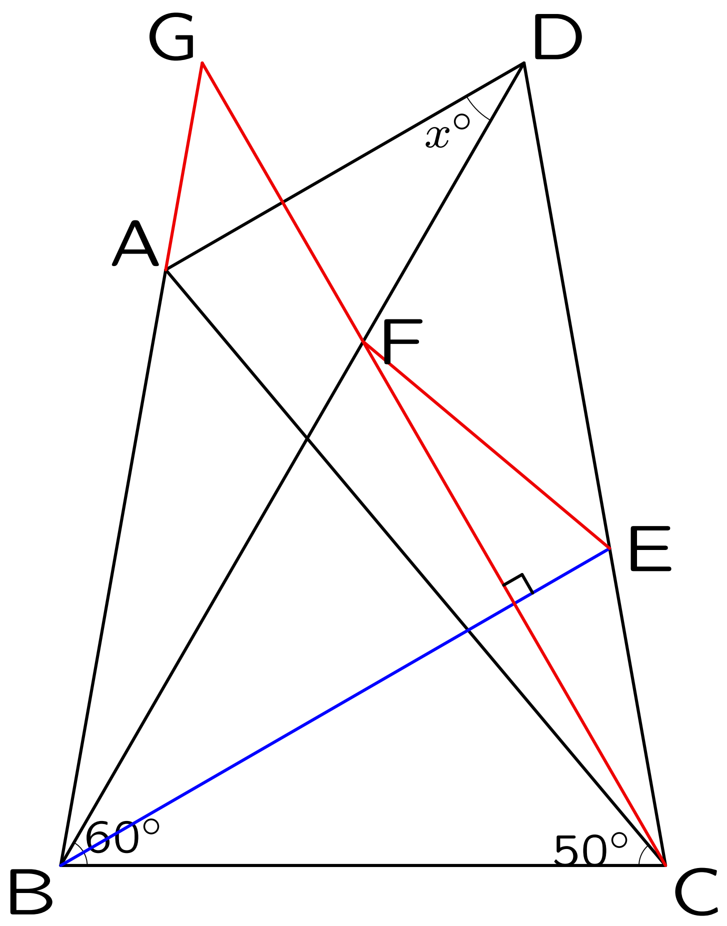
20°，60°，50°，30°

問題の図を書き直します。等脚台形をつくるやり方もありますが、それを折り返しで考えて見ます。



20°，60°，50°，30°

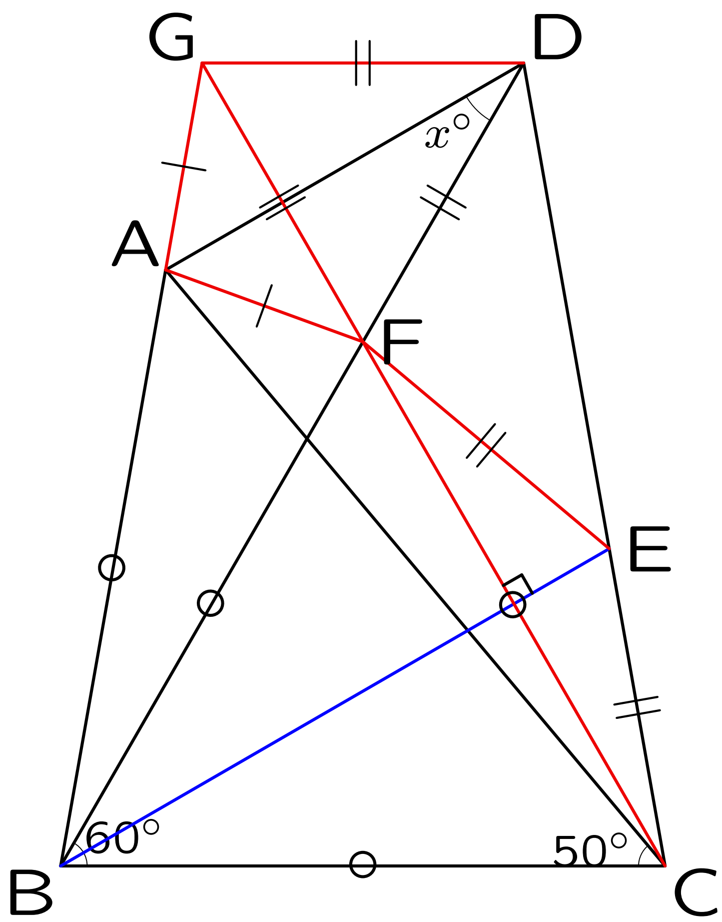
$\angle$DBC**の２等分線を折る**



20°，60°，50°，30°

∠DBCの２等分線を折る

CFとBAとの交点をG



20°，60°，50°，30°

∠DBCの２等分線を折る

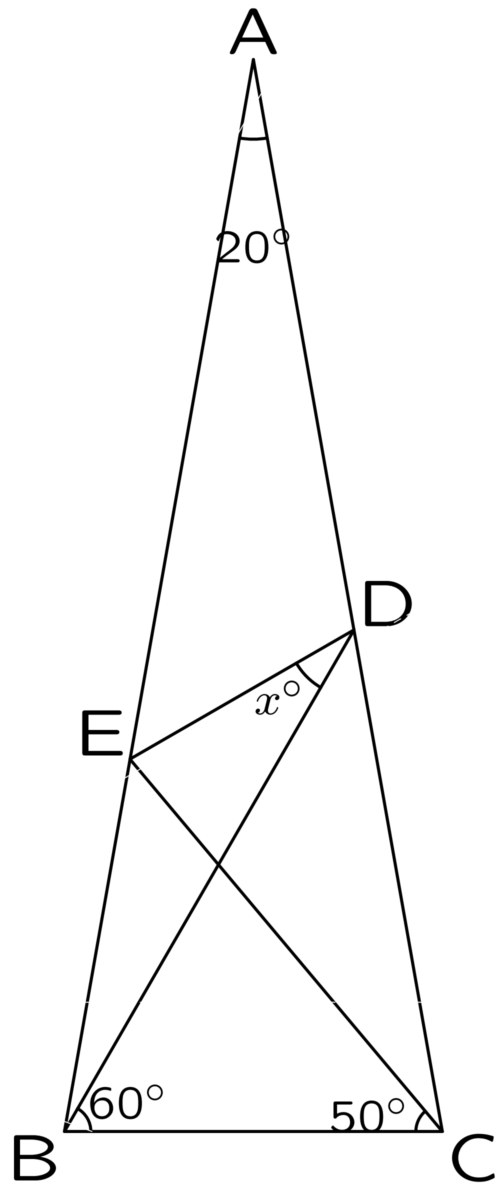
CFとBAとの交点をG

FとA,GとDを結ぶ

△AFGは２等辺３角形

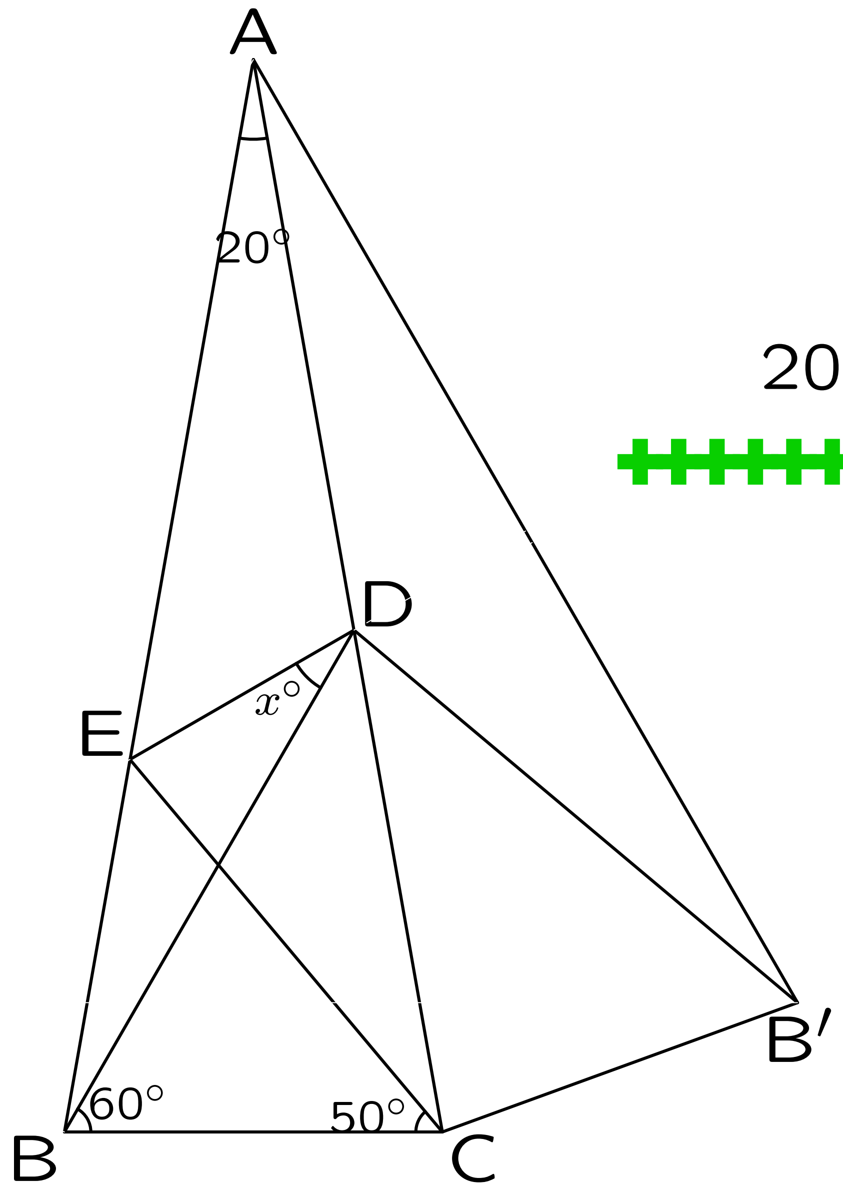
△GFDは正３角形

ADは２等分線



20°，60°，50°，30°

折り返しを利用して（2）

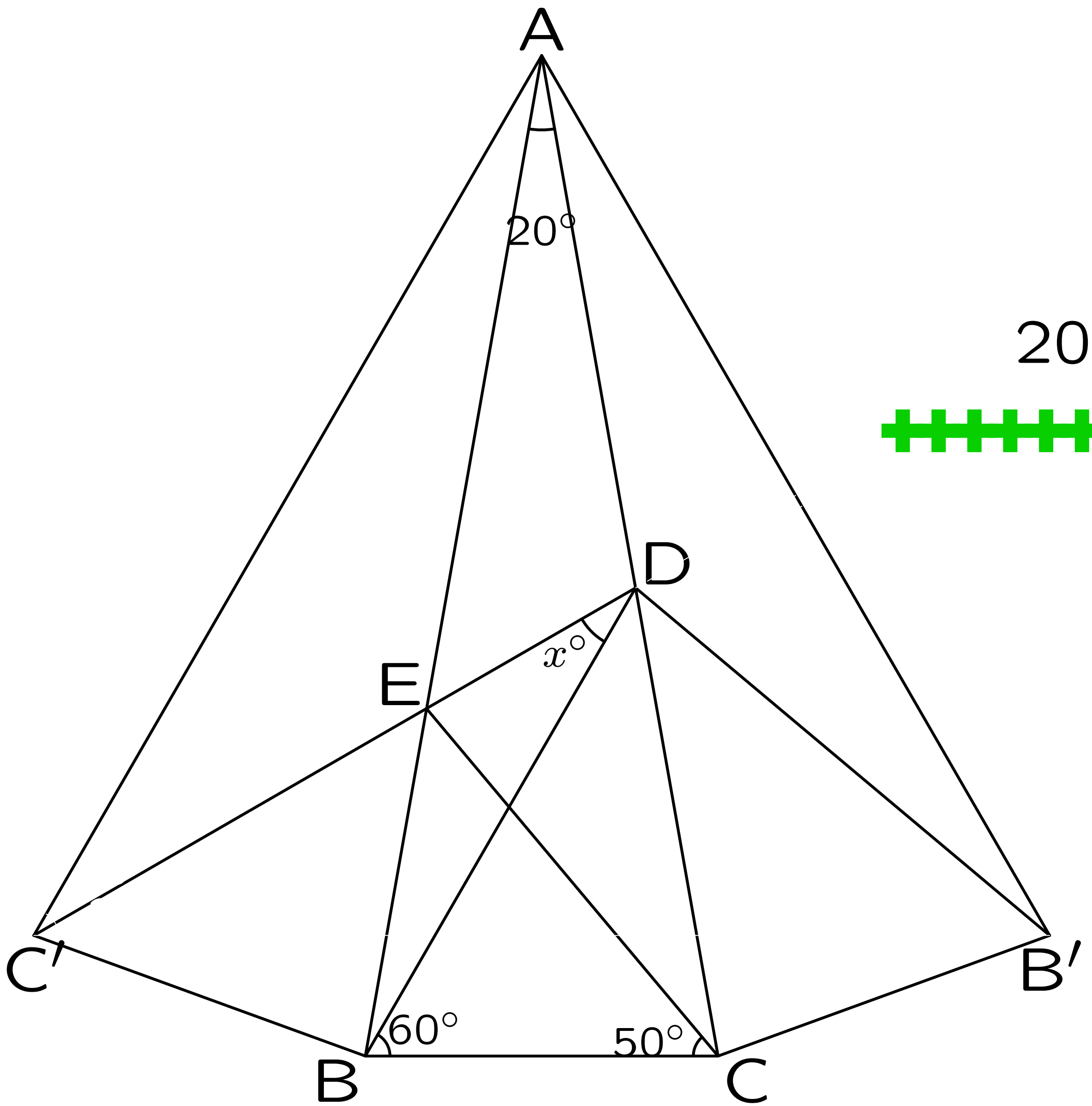


20°, 60°, 50°, 30°

辺ACに関して

△ABC

を対称移動

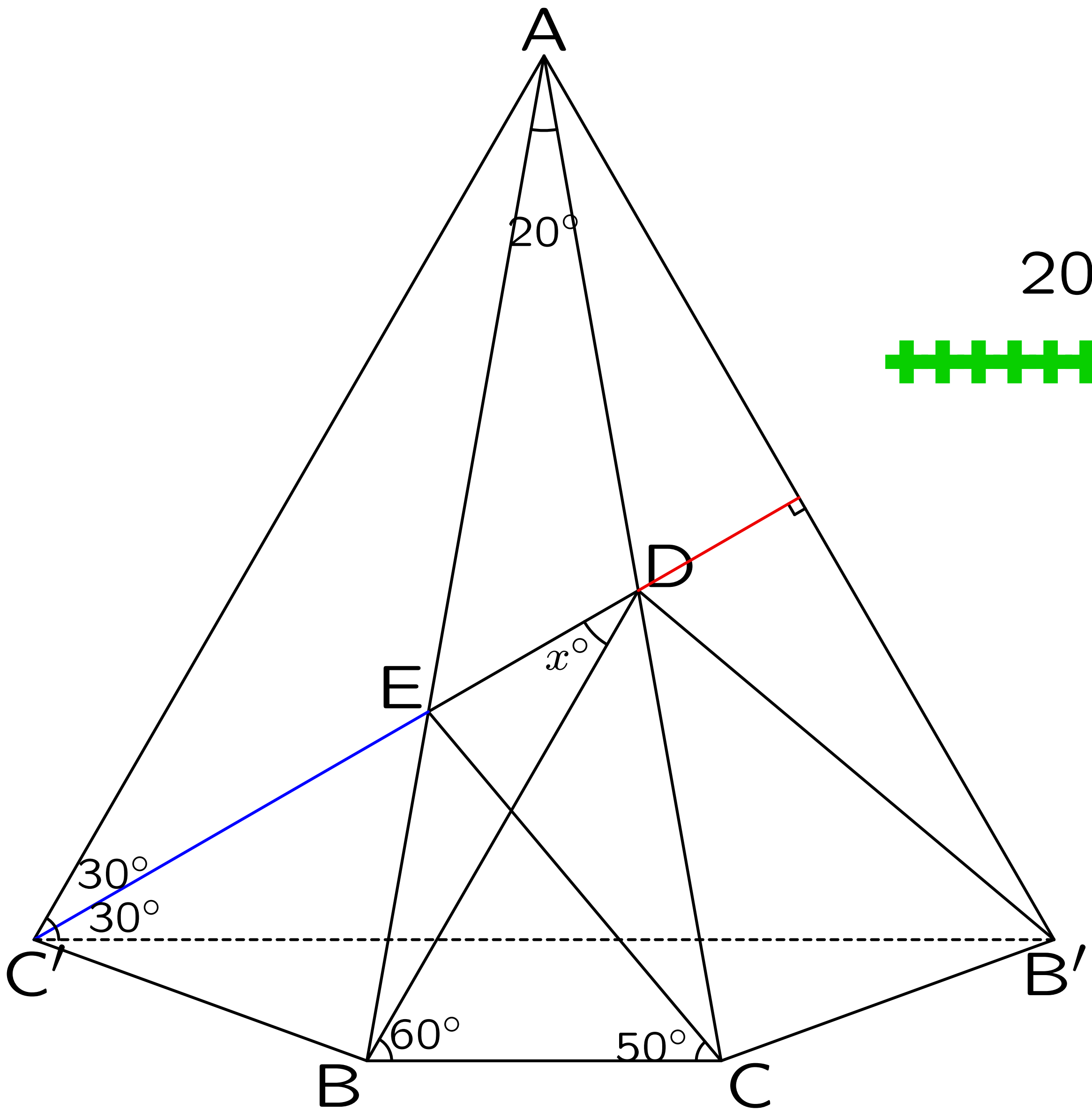


20°, 60°, 50°, 30°

辺AB**に関して**

△ABC

を対称移動



20°, 60°, 50°, 30°

C′B′を結び

DからAB′に

垂線をおろす

関連図書

関連図書の紹介

資料　Ｐ３ 参照

おわり