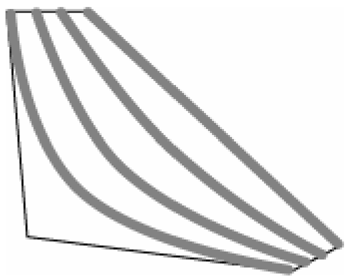
最速降下問題について

北海道小樽桜陽高等学校　佐藤公威

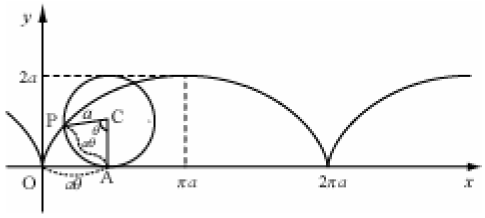
下記は昨年行われた Mathematical Art 展の作品の一つです。この中のサイクロイドという結論を計算でどのように導き出すのか調べてみました。(*)$_1$
また，(*)$_2$についても計算してみました。

いろいろな形をした同じ高さの滑り台があります。各滑り台の最高地点からボールを転がすと，どのボールがより速く地面に到達するでしょうか。斜面の長さは，直線状の滑り台が一番短いのですが，結果はどうなるでしょうか？



この作品は，以下の“最速降下問題”と呼ばれる問題を題材に製作されました。

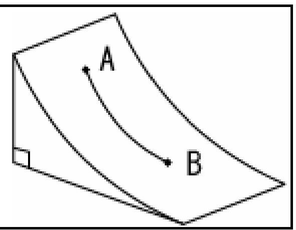
最速降下問題：
鉛直面に与えられた２点間を曲線で結び，その曲線に沿って質点を滑り落とす。最も短い時間で滑り落ちる曲線を求めよ。



この問題は，ヨハン・ベルヌーイやライプニッツなどによって解かれ，その答えは直線でも円弧でもなく，サイクロイド曲線と呼ばれる曲線です。(*)$_1$　サイクロイド曲線とは，直線上を円が滑ることなく転がるとき，円周上の１点が描く曲線です（図）。
実際にボールを転がして，昔の数学者たちの努力の結果を確かめて下さい。
このサイクロイドの滑り台には，斜面のどの位置からボールを転がしても最下点に到達するまでの時間が同じである，という性質もあります。(*)$_2$

○　問題１

斜面上の 2 点 A，B を結ぶ曲線に沿って質点が初速 0 で降下するとき，どんな曲線（測地線のみ考えるからこれは平面曲線）のとき，降下時間が最短となるか。
（最速降下問題と呼ばれている）



（解）求める曲線を $y=\varphi(x)$ とおく。Fig1 において 2 点 $A(a_1,\ a_2)$，$P(x,\ y)$ に対し

点 A… $\frac{1}{2}\cdot m\cdot 0^2+mga_2$，　点 P… $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+mgy$　（g は重力加速度）

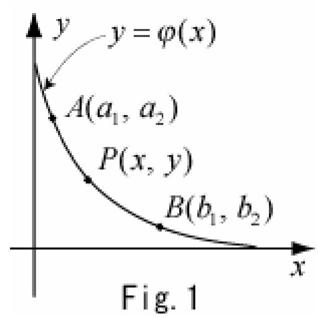


Fig. 1

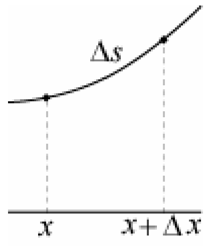
ここで $m=1$ としエネルギー保存則を使って

$$ga_2=\frac{1}{2}v^2+gy$$

$$\therefore\quad v=\sqrt{2g(a_2-y)}\quad\cdots ①$$

また，A，B を結ぶ曲線 $y=\varphi(x)$ について $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$ より，速度 v は

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1+y'^2}\,\frac{dx}{dt}$$



ゆえに降下時間 T は

$$T = \int dt = \int_{a_1}^{b} \frac{dt}{dx}dx = \int_{a_1}^{b} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}dx \overset{①}{=} \int_{a_1}^{b} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(a_2-y)}}dx$$

従って

$$T = \int_{a_1}^{b} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(a_2-y)}}dx \quad ・・・(1.1)$$

を最小にする $y = j\,(x)$ を求めるのが今の問題である。

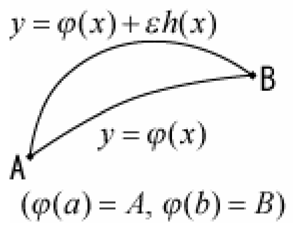
○　変分法からの準備

$\mathbb{R}^2$ 内の c[1]-class 曲線 $g : y = j\,(x)\ \ (a \le x \le b)$ に対し，曲線γの関数

$$F(g) := \int_a^b f(x, y, \frac{dy}{dx})dx \quad ・・・②$$

の極値問題を考える（一般に②のように x の関数 $y = j\,(x)$ を汎関数という）。以下 $F(g)$ を $F(j\,)$ とかく。

さて，ある関数 $y = h(x)\ \ (h(a) = h(b) = 0)$ を使って新たな関数 $y = j\,(x) + e\,h(x)$ を作る。εを動かすと，これは端点 A，B を固定する曲線族をあらわす。（変分曲線という）



$$D_h F(j\,) := \lim_{e\to 0}\frac{1}{e}\left(F(j\,+e\,h) - F(j\,)\right) \quad ・・・③$$

が存在するとき，これを F の j における h 方向の微分という。②に形で与えられる汎関数 $F(j\,)$ の臨界値を与える関数 $y = j\,(x)$ がある微分方程式（これを Euler-Lagrange 方程式という）を満たすことを次に見ていきたい。

$$F(j\,) = \int_a^b f(x,y,v)dx \quad (\,y = j\,(x),\ v = \frac{d\,j}{dx})$$

$$F(j\,+e\,h) = \int_a^b f(x, j(x) + e\,h(x), j\,'(x) + e\,h'(x))dx$$

$$= \int_a^b \left\{ f(x, j\,, j\,') + \frac{\partial f}{\partial y}e\,h + \frac{\partial f}{\partial v}e\,h' + (e^2\text{の項}) + \dots \right\}dx$$

（後半の符号は $f\,(\,y+dy, v+dv) = f\,(y, v) + f_y dy + f_v dv + \cdots$ による）

はεに関して微分し， $e = 0$ で評価すれば

$$D_h F(j\,) = \frac{d}{de}\Big|_{e=0} F(j\,+e\,h) = \int_a^b (\,f_y h + f_v h')dx$$

を得る。

（③は $F(j\,+eh)$ をεの関数 $\Phi(e)$ と考えると $D_h F(j\,) = \lim_{e\to 0}\frac{1}{e}(\Phi(e) - \Phi(0)) = \Phi\,'(0)$）

j は臨界値だから端点条件 $h(a) = h(b) = 0$ を満たす任意の h に対して

$$D_h F(j) = 0$$

$$\therefore \quad \int_a^b (f_y h + f_v h')dx = 0 \quad \cdots ④$$

が成り立つ。ここで

$$\int_a^b f_v h'\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial v}(x,\ j,\ j')h'(x)dx$$

$$= [\,f_v h(x)]_a^b - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)h(x)dx$$

$$= -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)h(x)dx$$

従って④は

$$\int_a^b f_y h dx - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)h(x)dx = 0$$

$$\int_a^b \left(f_y - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right)h\ dx = 0$$

これが $h(a)=h(b)=0$ をみたす任意関数 $h(x)$について成り立つから

$$f_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \quad \cdots (注2)$$

従って $y = j(x)$ は

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(x,\ y,\ v)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y,\ v) \qquad (3・1)$$

をみたす。これを Euler-Lagrange 方程式という。

（注 1）端点を固定する変分曲線 $y = j(x) + e h(x)$ に対し，上記から

$$D_h F(j) = \int_a^b \left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right\}h(x)\ dx \quad \text{であるから}$$

$y = j(x)$ が臨界値（極値曲線）であることと，Euler-Lagrange 方程式が成り立つことは同値である。

（注 2）一般に連続関数 $f(t)$ $(t_0 \le t \le t_1)$ が $h(t_0) = h(t_1) = 0$ である任意の連続関数 $h(t)$に対して常に

$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)\ dt = 0$ であれば $f(t) \equiv 0$ である（証明略）。

さて $\quad f(x,\ y,\ v) = \dfrac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{2g(a-y)}} \quad (v = y')$ に対し

$$T := F(j) = \int_a^b f(x, y, v)\,dx = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(a-y)}}\,dx$$

を最小にする $y = j(x)$ **を求めよう。**

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2g(a-y)}}\frac{2v}{2\sqrt{1+v^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(a-y)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{a-y}}\right)' = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g}} = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{a-y}}}{a-y} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{a-y}^3}$$

従って Euler-Lagrange **方程式** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ **は**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(a-y)}}\right) - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{a-y}^3} = 0$$

$$\frac{y''\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(a-y)} - y'\left(\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(a-y)}\right)'}{(1+y'^2)2g(a-y)} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{a-y}^3} = 0$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} & y''\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(a-y)} - y'\left(\frac{2y'y''}{2\sqrt{1+y'^2}}\sqrt{2g(a-y)} + \sqrt{1+y'^2}\frac{-2gy'}{2\sqrt{2g(a-y)}}\right) \\ & -(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}\sqrt{a-y}} = 0 \end{aligned}$$

両辺に $\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(a-y)}$ **をかけて**

$$y''(1+y'^2)2g(a-y) - y'^2y''\cdot 2g(a-y) + g(1+y'^2)y'^2 - (1+y'^2)^2 g = 0$$

これより $\quad 2y''(a-y) = y'^2+1$

$$\therefore \quad \frac{2y''}{1+y'^2} - \frac{1}{a-y} = 0$$

y' **をかけて積分**

$$\int\frac{2y'y''}{1+y'^2}dx - \int\frac{y'}{a-y}dx = 0 \qquad \therefore \quad \log(1+y'^2) + \log(a-y) = C$$

$$\log(1+y'^2)(a-y) = C \qquad \therefore \quad (1+y'^2)(a-y) = C_1$$

これより

$$y'^2 = \frac{C_1}{a-y} = \frac{y-a+C_1}{a-y} = \frac{y-C_2}{a-y} \quad (C_2 = a - C_1)$$

$$y' = \sqrt{\frac{y-C_2}{a-y}} \quad ・・・(5・1)$$

この微分方程式を解いて(*)

$$x = \pm A(\sin u + u) + B, \quad y = A\cos u + C$$

となり，これはサイクロイドである。　（$x = \sin u + u$，$y = \cos u + 1$）

注(*)　**微分方程式** $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-y}{y-a}}$　$(a, b \in \mathbb{R})$ **の解法**

（解）$y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos z$　・・・①**とおくと**

$$\begin{cases} b - y = \dfrac{b-a}{2}(1-\cos z) \\ y - a = \dfrac{b-a}{2}(1+\cos z) \end{cases} \quad ・・・②$$

①**より**　$dy = -\frac{b-a}{2}\sin z dz$　・・・③

また

$$\frac{dy}{dx} \overset{②}{=} \sqrt{\frac{1-\cos z}{1+\cos z}} = \sqrt{\frac{\frac{1-\cos z}{z}}{\frac{1+\cos z}{z}}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{z}{2}}{\cos^2 \frac{z}{2}}} = \tan\frac{z}{2} \quad ・・・④$$

従って③**より**

$$-\frac{b-a}{2}\sin z \frac{dz}{dx} \overset{③}{=} \frac{dy}{dx} \overset{④}{=} \tan\frac{z}{2}$$

$$\therefore \quad -\frac{b-a}{2} 2 \cdot \sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}\frac{dz}{dx} = \frac{\sin\frac{z}{2}}{\cos\frac{z}{2}}$$

$$\therefore \quad -(b-a)\cos^2\frac{z}{2}\frac{dz}{dx} = 1$$

$$\therefore \quad -\int \frac{b-a}{2}(1+\cos z)dz = \int dx$$

これより

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b-a}{2}(z + \sin z) + C \\ y = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos z \end{cases}$$

○　問題 2

斜面のどの位置からボールを転がしても最下点に到達するまでの時間が同じであることを示せ。

（証明）点 A **からボールを転がして** B **に到達するまでの時間を** T_A**，**A**～**B **間の任意の点** P **から** B **に到達するまでの時間を** T_P **とすれば** $T_A = T_P$ **であることを示す。**

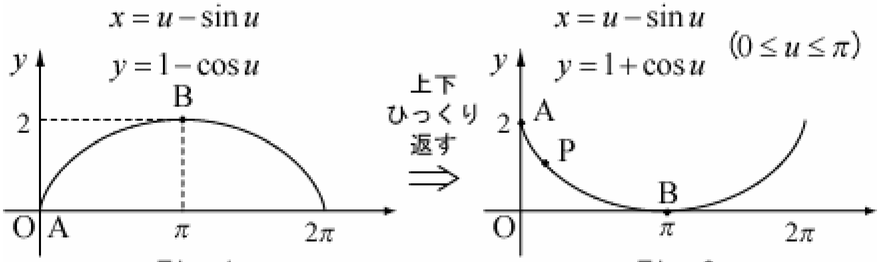


Fig. 1　　Fig. 2

(1.1)　$T = \int_{a_1}^{b} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(a_2 - y)}} dx$　**において** $\sqrt{2g}$ **は本質的ではないので，改めて**

$$T = \int_{a_1}^{b} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{a_2 - y}} dx \quad \cdots (6.1)$$

とおく。 $\begin{cases} x = u - \sin u \\ y = 1 + \cos u \end{cases}$　・・・(6.2) **より**

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{-\sin u}{1 - \cos u}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-\sin u}{1-\cos u}\right)^2} = \sqrt{\frac{2(1-\cos u)}{(1-\cos u)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos u}}$$

$dx = (1 - \cos u) du$ 。**点** A **では** $a_1 = 0,\ a_2 = 2$ **だから**

$$T_A = \int_0^p \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos u}}{\sqrt{1-\cos u}} du = \sqrt{2} \int_0^p du = \sqrt{2} p \quad \cdots (6.3)$$

次に点 P **を与える** u **の値を** u_0 **とし**

$$x_0 = u_0 - \sin u_0,\ y_0 = 1 + \cos u_0$$

とおく。このとき

$$a_2 - y = (1 + \cos u_0) - (1 + \cos u) = \cos u_0 - \cos u$$

$$\therefore \quad T_p = \int_{u_0}^{p} \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos u}}{\sqrt{\cos u_0 - \cos u}} du \quad \cdots (7.1)$$

これを実際に計算をする。

$$\cos u_0 - \cos u = t \quad \cdots (7.2)$$

とおくと

$$\sin u du = dt$$

$$\therefore \quad 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}du = dt$$

$$\therefore \quad \sin\frac{u}{2}du = \frac{1}{2}\frac{dt}{\cos\frac{u}{2}}$$

ところが（7.2）より

$$\cos u = \cos u_0 - t$$

これと

$$\cos u = 2\cos^2\frac{u}{2} - 1$$

とから

$$\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos u_0 - t}{2}} \quad \cdots (7.3)$$

従って（7.2）から

$$\sin\frac{u}{2}du = \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos u_0 - t}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{1-\cos u}du = \sqrt{2\sin^2\frac{u}{2}}du = \sqrt{2}\sin\frac{u}{2}du = \frac{dt}{\sqrt{1+\cos u_0 - t}} \quad \cdots (7.4)$$

また

u	$u_0 \to p$
t	$0 \to 1+\cos u_0$

これと（7.2）（7.4）とから（7.1）は

$$T_p = \int_0^{1+\cos u_0}\frac{\sqrt{2}dt}{\sqrt{t}\sqrt{(1+\cos u_0)-t}} \quad \cdots (7.5)$$

ここで一般に

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = -2\tan^{-1}\sqrt{\frac{b-x}{x-a}} \quad \cdots (8.1)$$

であることを示そう。実際

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = t(x-a) \quad (a < x < b)$$

すなわち $t = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$ とおくと

$$t^2 = \frac{b-x}{x-a} \quad \cdots (8.2)$$

$$2tdt=\frac{a-b}{(x-a)^2}dx$$

従って

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int\frac{1}{t(x-a)}\cdot\frac{2t(x-a)^2}{a-b}dt=\frac{2}{a-b}\int(x-a)dt$$

ところが（8.2）より

$$x=\frac{at^2+b}{t^2+1}\qquad\therefore\quad x-a=\frac{b-a}{t^2+1}$$

であるから，上式は

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=-2\int\frac{dt}{t^2+1}=-2\tan^{-1}t=-2\tan^{-1}\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$$

ここで $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ から $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C$ を使った。

$y=\tan^{-1}x$ とおくと $\tan y=x$ $\qquad\therefore\quad \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}$

$$y'=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}\qquad\therefore\quad(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

さて（8.1）を使うと一般に

$$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=-2\left[\tan^{-1}\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right]_a^b=-2\left(0-\frac{p}{2}\right)=p$$

すなわち

$$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=p\qquad\cdot\cdot\cdot(8.2)$$

（8.2）を使うと（7.5）から

$$T_P=\sqrt{2}p\qquad\cdot\cdot\cdot(9.1)$$

を得る。（6.3）（9.1）から

$$T_A=T_P$$

であることがわかった。（証明終わり）

＜参考図書＞

・岩波講座　現代数学への入門「力学と微分方程式」1996（高橋陽一郎）