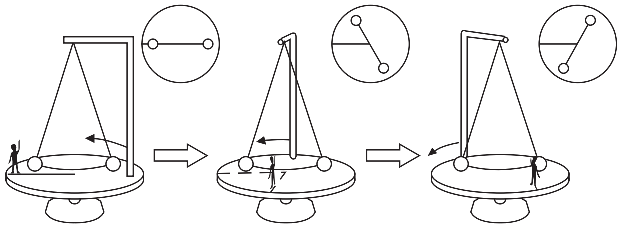
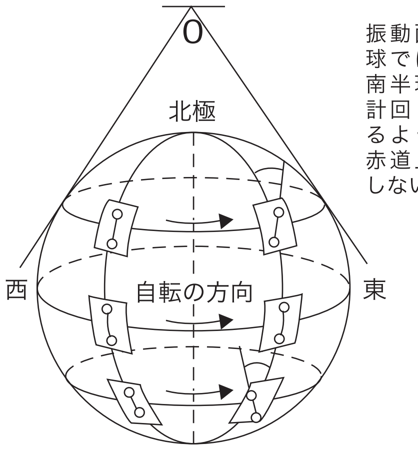
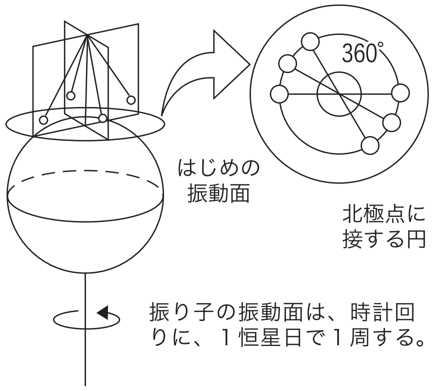
フーコー（フランス, 1819〜1868）が1851年パリのパンテオン寺院で長さ67mの鋼線に28kgの鋼球をつり下げた振り子で実験した。振り子は約16秒の周期で振れたが、時間が経つにつれて振動面が右へ回転することがわかった。この現象も、地球が自転していることの証拠の１つである。



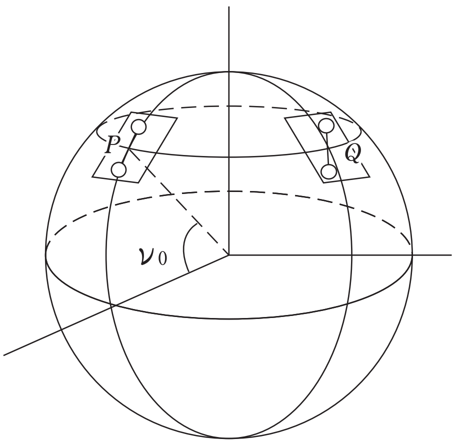
振動面の向きは変わらないため、回転盤上では振動面が回転して見える。



振動面は、北半球では時計回り、南半球では反時計回りに回転するように見える。赤道上では回転しない。



― 地学図表（浜島書店）より ―



§０．はじめに

図は、北緯ν_0の１点Pで真北に向けて振った振り子が地球の自転により点Qの位置に来たときの振り子の方向を表しています。一方、点Pでの振り子の振る方向をベクトルと考えそれを北緯ν_0の緯線に沿って点Qまで平行移動したものは、丁度点Qの振り子の方向と同じなのではないか。こんな疑問に取り付かれ、数学と物理の両方から調べてみました所、この２つの方向が同じであることを確認することができましたので、紹介します。

§１．ベクトルの平行移動

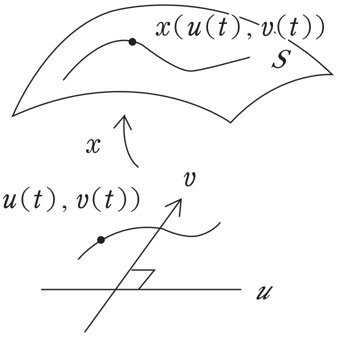
[A]ベクトルの平行移動

u、vを２つのパラメーターとするR^3の曲面Sを

$x：(u,v)\to(x^1(u,v),\,x^2(u,v),\,x^3(u,v))\,\varepsilon TR^3$ で表す。

また、S上の曲線$c(t)$を

$c(t)=x(u(t),v(t))=(x^1(u(t),v(t)),\,x^2(u(t),v(t)),\,x^3(u(t),v(t)))$とする



今後 $u=u^1$, $v=u^2$ とかくことにする。

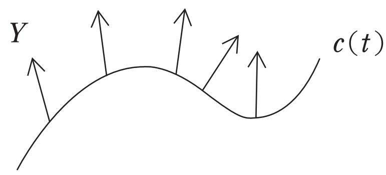
u曲線、v曲線の各点 $P\,\varepsilon\,S$での接ベクトル

$\dfrac{\partial x}{\partial u^1}$、$\dfrac{\partial x}{\partial u^2}$ を単に $\dfrac{\partial}{\partial u^1}$、$\dfrac{\partial}{\partial u^2}$ で表し、

点Pにおける接平面T_pSは$\left\{\dfrac{\partial}{\partial u^1}\ \dfrac{\partial}{\partial u^2}\right\}$で張られているとする。ただしこれらは正規直交系とは限らない。また$\vec{n}$をT_pSの単位法線ベクトルとする。従って

$$\vec{n}=\frac{\dfrac{\partial}{\partial u^1}\times\dfrac{\partial}{\partial u^2}}{\left|\dfrac{\partial}{\partial u^1}\times\dfrac{\partial}{\partial u^2}\right|}$$ とかける

曲線$c(t)$ に沿った接ベクトル場$Y(t)=\sum_i Y^i(t)(\partial/\partial u^i)$ が曲線 $c(t)$に沿って平行であるとは。



(1) $\nabla_{\dot{c}(t)}Y=0$

　　で定義される。

これを成分で表示してみよう。

$$c(t)=x(u^1(t),u^2(t))$$

$$\dot{c}(t)=\frac{dc(t)}{dt}=\sum_i\frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt}=\sum_i\frac{du^i}{dt}\frac{\partial}{\partial u^i}$$ とかけるから

$$\nabla_{\dot{c}(t)}Y=\nabla_{\sum_i\frac{du^i}{dt}\frac{\partial}{\partial u^i}}\left(\sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial u^j}\right)$$

$$=\sum_{i,j}\frac{du^i}{dt}\left(\frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j}+Y^j\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)$$

$$=\sum_j\frac{dY^j}{dt}\frac{\partial}{\partial u^j}+\sum_{i,j}Y^j\frac{du^i}{dt}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}$$

ここで$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\dfrac{\partial}{\partial u^j}=\sum_k\Gamma^k_{ij}\dfrac{\partial}{\partial u^k}$ で表すと

$$\nabla_{\dot{c}(t)}Y=\sum_k\left(\frac{dY^k}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}Y^j\frac{du^i}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial u^k}$$

である。従ってベクトル場 $Y(t)=Y^1\dfrac{\partial}{\partial u^1}+Y^2\dfrac{\partial}{\partial u^2}$ が

曲線 $c(t)=x(u^1(t),u^2(t))$ に沿って平行であるための条件は、

(2) $\dfrac{dY^k}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k Y^j\dfrac{\partial u^i}{\partial t}=0$ （$k=1$，2）

である。

ここで $[ij,\ m]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{im}}{\partial u^j}+\dfrac{\partial g_{jm}}{\partial u^i}-\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)$

とかくと Γ_{ij}^k は

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k&=\sum_m g^{km}[ij,\ m]\\&=\frac{1}{2}\sum_m g^{km}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)\end{aligned}$$

とかけ、これをChristoffel（クリストッフェル）の記号といい、i，jに関し対称である。ここでg_{ij}は $\dfrac{\partial}{\partial u^i}$，$\dfrac{\partial}{\partial u^j}$ の内積 $\left\langle\dfrac{\partial}{\partial u^i},\ \dfrac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle$である。

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial u^i},\ \frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle$$

行列(g_{ji})の逆行列を(g^{ji})で表した。

(1)がとくに $Y=\dot{c}(t)=\sum\dfrac{du^k}{dt}\dfrac{\partial}{\partial u^k}$ に対して成り立つとき

すなわち$\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t)=0$ が成り立つとき曲線 $c(t)$ を測地線という

その方程式は（2）で $Y^k=\dfrac{du^k}{dt}$ とおいて

(3) $\dfrac{d^2Y^k}{dt^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt}=0$ （$k=1$，2)となる(*)

(*) $c'(t)=\sum\dfrac{\partial u^i}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial u^i}$ の両辺をtで微分すると$c''(t)$に

$\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^j\partial u^i}$という項が出てくるが、これをTM成分（接平面成分）とそれに直交する$\vec{n}$方向の成分に分解し

$\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^j\partial u^i}=\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\dfrac{\partial}{\partial u^k}+h_{ji}\vec{n}$ とかくと

$$c''(t)=\sum_k\left(\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial u^i}{\partial t}\frac{\partial u^j}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial u^k}+\sum_{j,i}h_{ji}\frac{\partial u^j}{\partial t}\frac{\partial u^i}{\partial t}\vec{n}$$

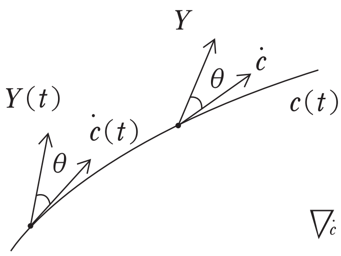
となる。従って測地線(３)とは、$c''(t)$ の接平面成分＝０となる曲線のことである。

すなわち接平面方向の加速度＝０。従って曲面の中に住んでいる住人にとっては、

等速直線運動をしている曲線 $c(t)$ のことである。

(*) ベクトル場 Y が曲線 $c(t)$ に沿って平行であること

の定義は $\nabla_{\dot{c}} Y=0$ であった。



$\nabla_{\dot{c}}\langle Y, \dot{c}\rangle=\langle\nabla_{\dot{c}}Y, \dot{c}\rangle+\langle Y, \nabla_{\dot{c}}\dot{c}\rangle$ だから

Y が測地線 $c(t)$ に沿って平行だとすれば

$\nabla_{\dot{c}}\langle Y, \dot{c}\rangle=0 \quad \therefore \langle Y, \dot{c}\rangle=$一定

従って $\|Y\|, \|\dot{c}(t)\|$ を一定にとれば Y と $\dot{c}(t)$ のなす角 θ は一定となる

［Ｂ］球面上のベクトルの平行移動

半径 a の球面 $S^2(a)$ 上の点は

(３) $x(u, v)=(a\cos v\cos u,\ a\cos v\sin u,\ a\sin v)$

で表される。このとき

(４) $\dfrac{\partial}{\partial u}=\dfrac{\partial x}{\partial u}=(-a\cos v\sin u,\ a\cos v\cos u,\ a\cos v)$

$\dfrac{\partial}{\partial v}=\dfrac{\partial x}{\partial v}=(-a\sin v\cos u,\ -a\sin v\sin u,\ 0)$

$g_{ji}=\left\langle \partial/\partial u^j, \partial/\partial u^i\right\rangle$ より

(５) $(g_{ji})=\begin{pmatrix} a^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$(g^{ji})=(g_{ji})^{-1}=\dfrac{1}{a^4\cos^2 v}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2 v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2\cos^2 v} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a^2} \end{pmatrix}$

$\left[11, m\right]=\dfrac{1}{2}\left(2\dfrac{\partial g_{1m}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^m}\right)$ より $\left[11, 2\right]=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial v}=a^2\sin v\cos v$

$\left[12, m\right]=\left[21, m\right]=\dfrac{1}{2}\left(2\dfrac{\partial g_{1m}}{\partial u^2}+\dfrac{\partial g_{2m}}{\partial u^1}-\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^m}\right)$ より

$\left[12, 1\right]=\left[21, 1\right]=-a^2\sin v\cos u$ 他は0である。

これより $\Gamma^2_{11}=\Sigma g^{2m}\left[11, m\right]=g^{22}\left[11, 2\right]=\sin v\cos v$

$\Gamma^2_{11}=\Sigma g^{1m}\left[12, m\right]=g^{11}\left[12, 1\right]=-\tan v$

$$(6)\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\tan v & 0\\ \sin v\cos v & 0 & 0\end{pmatrix}$$

準備ができたので

偏微分方程式（2）を解く

$k=1$のとき　$\dfrac{dY^1}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1 Y^j\dfrac{du^i}{dt}=0$

$k=2$のとき　$\dfrac{dY^2}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2 Y^j\dfrac{du^i}{dt}=0$

上で求めた Γ_{ij}^k を代入して

$$\begin{cases}\dfrac{dY^1}{dt}-\tan v Y^2\dfrac{du^1}{dt}+\tan v Y^1\dfrac{du^2}{dt}=0\\ \dfrac{dY^2}{dt}+\sin v\cos v\, Y^1\dfrac{du^1}{dt}=0\end{cases}$$

初期条件として$t=0$のとき$Y=\dfrac{\partial}{\partial u^2}$ とする。すなわち

$(Y^1,\ Y^2)=(0,\ 1)$とし、これをu曲線$(u(t),\ v(t))=(u,\ v_o(const))$に

沿って平行移動させる。パラメーターは単に $t=u$として

$\dfrac{du^1}{dt}=1$, $\dfrac{du^2}{dt}=0$, とおくと上式はさらに

$$(7)\begin{cases}\dfrac{dY^1}{du}-\tan v_0\, Y^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①\\ \dfrac{dY^2}{du}+\sin v_0\cos v_0\, Y^1=0\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$$

①より　$Y^2=\dfrac{1}{\tan v_0}\dfrac{\partial Y^1}{\partial u}$　　これを②に代入して整理すると

$$\frac{d^2Y^1}{du^2}+Y^1\sin^2 v_0=0$$

$\sin v_0=\mathrm{p}$とおき　これを解くと

$Y^1=A\sin(\mathrm{pu})+B\cos(\mathrm{pu})$, $Y^2=\cos v_0\{A\cos(\mathrm{pu})-B\sin(\mathrm{pu})\}$

初期条件 $u=0$のとき$Y^1=0$、$Y^2=1$として

$B=0$, $A=\dfrac{1}{\cos v_0}$　　$\therefore Y^1=\dfrac{1}{\cos v_0}\sin(\mathrm{pu})$, $Y^2=\cos(\mathrm{pu})$

これで $Y(u)$ が求まった。

pu

(8) $Y(u)=\dfrac{1}{\cos v_0}\sin(\mathrm{pu})\dfrac{\partial}{\partial u}+\cos(\mathrm{pu})\dfrac{\partial}{\partial v}$

図1

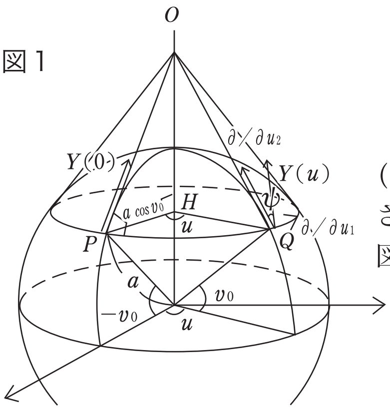


図１の点$Q(u,\ v_0)$における$\partial/\partial u_2$とYとのなす角をψとおくと$|Y|=a$，$|\partial/\partial u^2|=a$から

$$\cos\psi=\frac{\left\langle Y,\ \dfrac{\partial}{\partial v}\right\rangle}{|Y|\left|\dfrac{\partial}{\partial v}\right|}=\cos(\mathrm{pu})$$

(9) $\psi=\mathrm{pu}=u\sin v_0$　を得た

さてこれについてもう少し調べて見る。

図２は、図１の円錐部分の平面への展開図である

$$OP=a\tan\left(\frac{\pi}{2}-v_0\right)=\frac{a}{\tan v_0}$$

$PH=a\cos v_0$　より

$\overset{\frown}{PQ}=PH\cdot u=au\cos v_0$

従って

扇形OPQの中心角をθとおくと

$OP\cdot\theta=\overset{\frown}{PQ}$ より

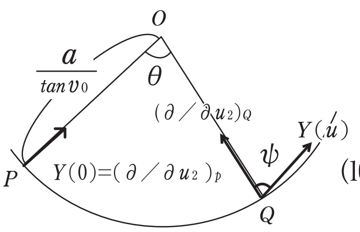


図2　$au\cos v_0$

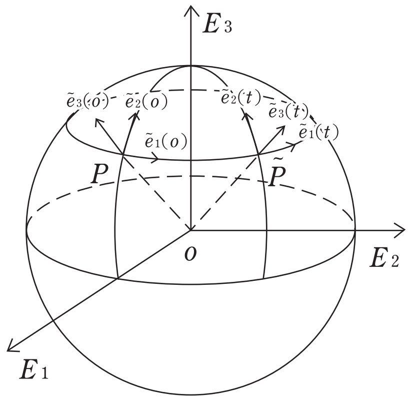
(10) $\theta=\dfrac{\overset{\frown}{PQ}}{OP}=au\cos v_0\times\dfrac{\tan v_0}{a}=u\sin v_0$

となる(9)(10)から

$\psi=\theta$を得る。

$Y(0)$を北緯v_0の緯線に沿って点Qまで平行移動したものが$Y(u)$であるが、平面に展開したとき$Y(0)$と$Y(u)$は$\boldsymbol{R}^2$のベクトルとして普通の意味で平行となっている。

§2．フーコーの振り子



図のように固定された静止座標系$S=\{E_1E_2E_3\}$に球が置かれている。時刻 $t=0$ で図の位置にいた点Pが地球の回転によって東の方へ回転し時刻tで$\tilde{P}$に移ったとする。

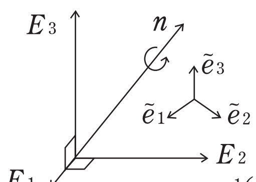
点$\tilde{P}$での座標系を$\tilde{S}=\{\tilde{e}_1(t), \tilde{e}_2(t), \tilde{e}_3(t)\}$（運動系）とする。ここで$\tilde{S}$は正規直交系とし、$\tilde{e}_1(t)$を東向きにとる。

$\boldsymbol{R}^3$内を運動する質点の位置ベクトルを$\gamma=\gamma(t)$としこの質点の運動をS系から見た場合と$\tilde{S}$系から見た場合の関係を調べたい。

そのために先ずは、この地球の自転を一度離れて、もっと一般に次のことを考える。

[C] 回転座標系での速度・加速度

慣性系（静止座標系）$S=\{E_1, E_2, E_3\}$に対し、ある軸$\vec{n}$のまわりに回転している座標系$\tilde{S}=\{\tilde{e}_1(t), \tilde{e}_2(t), \tilde{e}_3(t)\}$を考え、$\boldsymbol{R}^3$を運動している質点$\gamma=\gamma(t)$を$S$および$\tilde{S}$系の両方からながめることにする。



（ここで$\tilde{S}$は正規直交系とする）

時刻tにおける質点の位置ベクトル$\gamma=\gamma(t)$をS系および$\tilde{S}$系であらわして

$$\gamma=x^1(t)\mathrm{E}_1+x^2(t)\mathrm{E}_2+x^3(t)\mathrm{E}_3=\tilde{x}^1(t)\tilde{e}_1(t)+\tilde{x}^2(t)\tilde{e}_2(t)+\tilde{x}^3(t)\tilde{e}_3(t)$$

とおく。これをtで微分して

(1) $$\frac{d\gamma(t)}{dt}=\left(\frac{d\tilde{x}^1}{dt}\tilde{e}_1+\frac{d\tilde{x}^2}{dt}\tilde{e}_2+\frac{d\tilde{x}^3}{dt}\tilde{e}_3\right)+\left(\tilde{x}^1\frac{d\tilde{e}_1}{dt}+\tilde{x}^2\frac{d\tilde{e}_2}{dt}+\tilde{x}^3\frac{d\tilde{e}_3}{dt}\right)$$

ここで $\dfrac{d\gamma(t)}{dt}=v(t)$，$\Sigma\dfrac{d\tilde{x}^i}{dt}\tilde{e}_i=\tilde{v}(t)$，$\Sigma\tilde{x}^i\dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}=(*)$ とおく。

$v(t)$はS系からみた質点$\gamma(t)$の速度ベクトル

$v(t)$は$\tilde{S}$系からみた質点$\gamma(t)$の速度ベクトルである。

そこで(*)について考えてみる。

$\dfrac{d\tilde{e}_i(t)}{dt}$は$\boldsymbol{R}^3$のベクトルだから

$$\frac{d\tilde{e}_1}{dt}=\omega_{11}\tilde{e}_1+\omega_{12}\tilde{e}_2+\omega_{13}\tilde{e}_3$$

$$\frac{d\tilde{e}_2}{dt}=\omega_{21}\tilde{e}_1+\omega_{22}\tilde{e}_2+\omega_{23}\tilde{e}_3$$

$$\frac{d\tilde{e}_3}{dt}=\omega_{31}\tilde{e}_1+\omega_{32}\tilde{e}_2+\omega_{33}\tilde{e}_3$$

と表すと係数(w_{ij})はどうなるであろうか

$\{\tilde{e}_i\}$は正規直交系だから$\tilde{e}_i$と$\tilde{e}_i$の内積$\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_i \rangle = 1$である。両辺を$t$　で微分して

$\left\langle \dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}, \tilde{e}_i \right\rangle = 0$これより$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$を得る。

また$i \neq j$のとき$\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle = 0$　$\therefore \left\langle \dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}, \tilde{e}_j \right\rangle + \left\langle \tilde{e}_j, \dfrac{d\tilde{e}_j}{dt} \right\rangle = 0$

これより$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \ (i \neq j)$である。これから$\dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}$は次の様にかける。

(2)
$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{e}_1}{dt} = \qquad\qquad \omega_{12}\tilde{e}_2 - \omega_{31}\tilde{e}_3 \\ \dfrac{d\tilde{e}_2}{dt} = -\omega_{12}\tilde{e}_1 \qquad\qquad + \omega_{23}\tilde{e}_3 \\ \dfrac{d\tilde{e}_3}{dt} = \omega_{31}\tilde{e}_1 - \omega_{23}\tilde{e}_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{31} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

さてこの$\dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}$の成分を使って、新しいベクトル$\vec{\omega}$を次の様に定義する。

（3）$\vec{\omega} = \omega_{23}\tilde{e}_1 + \omega_{31}\tilde{e}_2 + \omega_{12}\tilde{e}_3$　（これを回転ベクトルとよぶ）

そうすると上式はさらに外積の記号Xをつかって簡決に

(4)
$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \tilde{e}_1 \\ \dfrac{d\tilde{e}_2}{dt} = \vec{\omega} \times \tilde{e}_2 \\ \dfrac{d\tilde{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \tilde{e}_3 \end{cases}$$

とかけることがわかる。従って先程の$(*) = \Sigma\, \tilde{x}^i \dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}$は

$(*) = \Sigma\, \tilde{x}^i \omega \times \tilde{e}_i = \vec{\omega} \times (\Sigma \tilde{x}^i \tilde{e}_i) = \vec{\omega} \times \gamma$　とかける。

これより（1）は$\dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}$の成分から作った新しいベクトル　を使って

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{d\tilde{x}^i(t)}{dt}\,\tilde{e}_i(t) + \vec{\omega} \times \gamma \quad \text{すなわち}$$

(5) $v(t) = \tilde{v}(t) + \vec{\omega} \times \gamma$
　とかけることがわかった　$\left(\begin{array}{l} v(t)\text{は}S\text{系でみた質点}\gamma(t)\text{の速度ベクトル} \\ \tilde{v}(t)\text{は}\tilde{S}\text{系でみた質点}\gamma(t)\text{の速度ベクトル} \end{array} \right)$

尚

(5)は位置ベクトル$\gamma(t)$に限らず任意の$\boldsymbol{R}^3$ベクトル

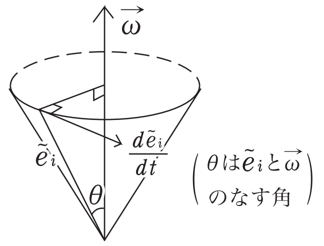
$X(t) = \Sigma x^i(t) e_i = \Sigma \tilde{x}^i(t) \tilde{e}_i(t)$　に対しても

(6) $\dfrac{dX(t)}{dt} = \dfrac{d\tilde{X}(t)}{dt} + \vec{\omega} \times X$　が成り立つ　$\left(\dfrac{d\tilde{X}(t)}{dt} = \Sigma \dfrac{d\tilde{x}^i(t)}{dt}\,\tilde{e}_i \quad \text{のこと} \right)$

ここで新しく作った$\vec{\omega}$について詳しく調べてみよう。

$\tilde{e}_1$、$\tilde{e}_2$、$\tilde{e}_3$は最初軸$\vec{n}$の周りを回転しているとしていたが

(4) 式 $\dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}=\vec{\omega}\times\tilde{e}_i$ も成り立つことから$\vec{\omega}$と$\vec{n}$は回転軸としては、同じものでなければならない。∴$\vec{n}$を単位ベクトルとすると



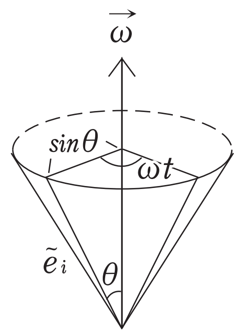
$\vec{\omega}=|\vec{\omega}|\vec{n}$ とかける。

ここで$|\vec{\omega}|$は回転軸$\vec{n}$の角速度ωである。すなわち

(7) $\vec{\omega}=\omega\vec{n}$ （ωは回転軸$\vec{n}$の角速度）が成り立つ

∵) $\dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}=\vec{\omega}\times\tilde{e}_i$ より$\tilde{e}_i$の終点の速さは $\left|\dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}\right|=|\vec{\omega}\times\tilde{e}_i|=|\vec{\omega}||\tilde{e}_i|\ sin\theta=|\vec{\omega}|sin\theta$

∴ t 秒間の移動距離は $t|\vec{\omega}|sin\theta$ である。



一方回転軸$\vec{n}$の角速度をωとおく$\tilde{e}_i$の終点は

t 秒間で$(sin\theta)wt$だけ動くから

$$t|\vec{\omega}|sin\theta=(sin\theta)wt$$

$$\therefore\ \omega=|\vec{\omega}|$$

$$\therefore\ \vec{\omega}=|\vec{\omega}|\vec{n}=\omega\vec{n}$$ （終）

結局 $\dfrac{d\tilde{e}_i(t)}{dt}$ の成分（方向）から回転軸 $\vec{\omega}(t)$が定まりさらに $|\vec{\omega}(t)|$ が回転の角速度を表していることになる。

まとめ (7)	$\boldsymbol{R}^3$内を運動する質点の運動$\gamma(t)$をS系、および$\tilde{S}$系から観た時の速度ベクトルを各々$v(t)$，$\tilde{v}(t)$とおくと(3)で定義した$\vec{\omega}$を使って $v(t)=\tilde{v}(t)+\vec{\omega}\times\gamma$ （ここで $\vec{\omega}=\omega\vec{n}$　ωは回転軸$\vec{\omega}$の角速度を表す）

次に質点の加速度について調べよう。

(1)式 $\dfrac{d\gamma(t)}{dt}=\sum_i\left(\dfrac{d\tilde{x}^i}{dt}\tilde{e}^i+\tilde{x}^i\dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}\right)$ をさらに t で微分して

(8) $\dfrac{d^2\gamma(t)}{dt^2}=\sum_i\left(\dfrac{d^2\tilde{x}^i}{dt^2}\tilde{e}_i+2\dfrac{d\tilde{x}^i}{dt}\dfrac{d\tilde{e}^i}{dt}+x^i\dfrac{d^2\tilde{e}^i}{dt^2}\right)$

右辺の第１項 $\dfrac{d^2\tilde{x}^i}{dt^2}\tilde{e}_i$ は $\tilde{S}$系でみた質点の加速度を表し$\tilde{a}(t)$とおく

$$第２項=2\Sigma\frac{d\tilde{x}^i}{dt}\left(\vec{\omega}\times\tilde{e}_i\right)=2\vec{\omega}\times\left(\Sigma\frac{d\tilde{x}^i}{dt}\tilde{e}_i\right)=2\vec{\omega}\times v$$

（ここで $\tilde{v}=\Sigma\dfrac{d\tilde{x}^i}{dt}\tilde{e}_i$ は$\tilde{S}$からみた質点の速度ベクトル）

また $\dfrac{d^2\tilde{e}_i}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\tilde{e}_i)=\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\times\tilde{e}_i+\vec{\omega}\times\dfrac{d\tilde{e}_i}{dt}$ であるが今後地球の自転を考えるので、今、角速度は一定とし、従って角速度ベクトル $\vec{\omega}=\omega\vec{n}$ も定ベクトルだから

$\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}=0$ である。

$\therefore$ (第３項) $=\tilde{x}^i\dfrac{d^2\tilde{e}^i}{dt^2}=\tilde{x}^i\left(\vec{\omega}\times\dfrac{d\tilde{e}^i}{dt}\right)=\tilde{x}^i\,\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\tilde{e}_i\right)$

$$=\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\tilde{x}^i\tilde{e}_i\right)=\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\tilde{\gamma}\right)$$

従って（８）は、

（９）$\dfrac{d^2\gamma(t)}{dt^2}=\Sigma\dfrac{d^2\tilde{x}^i}{dt^2}\tilde{e}_i+2\vec{\omega}\times\tilde{v}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\tilde{\gamma}\right)$

$\tilde{\mathrm{S}}$ 系での運動方程式は

$$m\tilde{a}=ma-2m\vec{\omega}\times\tilde{v}-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\tilde{\gamma}\right)$$

$ma=F$ とすれば

(10) $m\tilde{a}=F-2m\vec{\omega}\times\tilde{v}-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\tilde{\gamma}\right)$ 　　となる。

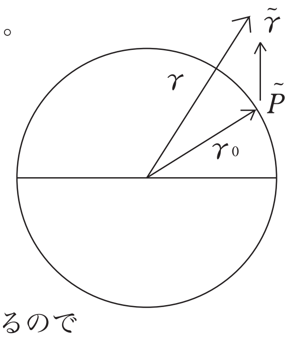
もし質点に外力を与えず $F=0$ とすると (10) より

$m\tilde{a}=-2m\vec{\omega}\times\tilde{v}-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\tilde{\gamma}\right)$ となる。

外力が働かないのに $\tilde{S}$ 系ではこのようなみかけの力がかかっているように感じられるということである。ここで $-2m\vec{\omega}\times\tilde{v}$ をコリオリの力、 $m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\tilde{\gamma}\right)$ は遠心力という。

[D] 地球上での運動

今度は最初に問題に戻って R^3 の中を運動する質点 $\gamma(t)$ を、自転している地球上の点 $\tilde{P}$（図１）での座標系 $\tilde{S}$ でみたときの運動方程式を求めよう。



$$\gamma(t)=\gamma_0+\tilde{\gamma}(t)$$
$$=\gamma_0+\tilde{x}^1(t)\tilde{e}_1(t)+\tilde{x}^2(t)\tilde{e}_2(t)+\tilde{x}^3(t)\tilde{e}_3(t)$$

$\gamma_0=\vec{0}$ のときの質点の運動方程式は先程の

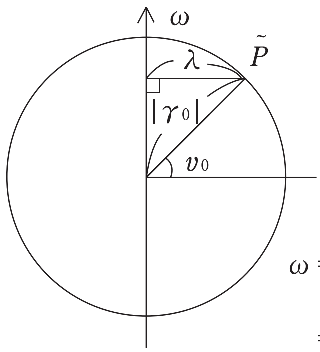
$m\tilde{a}=F-2m\vec{\omega}\times\tilde{v}-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\tilde{\gamma}\right)$ であり

これは（１）式から得られたものである。今は γ_0 の項があるので

(11) $m\tilde{a}=F-\dfrac{d^2\gamma_0}{dt^2}-2m\vec{\omega}\times\tilde{v}-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\tilde{\gamma}\right)$ となる。

前のと比べ $-m\dfrac{d^2\gamma_0}{dt^2}$ が加わった形となる。

(11) における質点にかかる外力Fにはつねに$-\tilde{e}_3$方向の重力$-m\overrightarrow{g}$が含まれている。$\tilde{S}$系の原点$\tilde{P}$には自転による東向きの自転のため遠心力が働く。この遠心力は実は重力加速度と比較すると無視できる程小さいことを次に示す。点$\tilde{P}$と地軸との距離をλ、北緯をv_0地球の半径を$|\gamma_0|$とすると



$\lambda=|\gamma_0|\cos v_0$だから

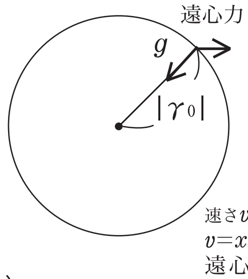
$$\frac{d^2\gamma_0}{dt^2}=\omega^2\lambda=\omega^2\gamma_0\cos v_0$$

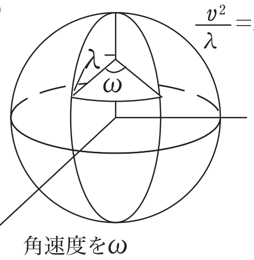
ここで$\gamma_0=6378$km

地球の角速度ωは

$$\omega=\frac{2\pi}{23.94(h)}=6.28\div 86184(s)$$

$$=7.290\times10^{-5}(rad/s)$$





$v_0=45°$ とすると

$$\omega^2 a\cos v_0=53.1441\times10^{-10}\times6378\times10^3\times0.7071$$

$$\fallingdotseq 0.0239(\mathrm{m/s^2})$$

となり、これは重力加速度9.81(m/s²) の$\frac{1}{410}$倍しかない。私たちは重力加速度と遠心力の合力を地球の重力として感じていますが、実際には遠心力は無いに等しい程のものである。

そこで (11) 式の$-\frac{d^2\gamma_0}{dt^2}$は重力加速度を含んだFと比較して十分小さいので無視します。また、(11) 式の右辺の第４項 $-m\overrightarrow{\omega}\times\left(\overrightarrow{\omega}\times\tilde{\gamma}\right)$ において$\tilde{\gamma}$は地球上の点$\tilde{P}$においた振り子の運動であり$|\tilde{\gamma}|$は地球の半径$|\gamma_0|$に比べ十分小さいとし、これも無視できる。従って、地球上での運動方程式 (11) は

(12) $m\tilde{a}=F-2m\overrightarrow{\omega}\times\tilde{v}$ となる。

今後、地球上の $\tilde{S}$ 系でのみ考えるので〜 (ウエーブ) はとって表記する。そこで新めて地球上の北緯v_0の点Pの座標系を$\{e_1, e_2, e_3\}$とおくと

回転軸$\overrightarrow{\omega}$は、図から

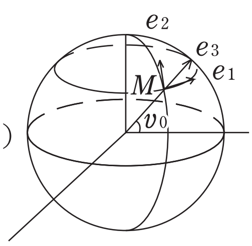
$$\overrightarrow{\omega}=\omega\cos v_0 e_2+\omega\sin v_0 e_3$$

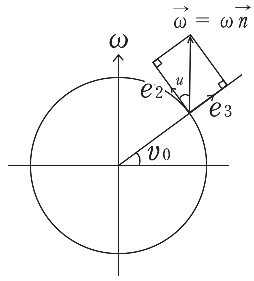
となる。また地球上で運動している

質点$\gamma(t)=x(t)e_1(t)+y(t)e_2(t)+z(t)e_3(t)$

の速度ベクトル $v(t)=\frac{d\gamma(t)}{dt}$ は

$$v(t)=\frac{dx}{dt}e_1+\frac{dy}{dt}e_2+\frac{dz}{dt}e_3$$ となり





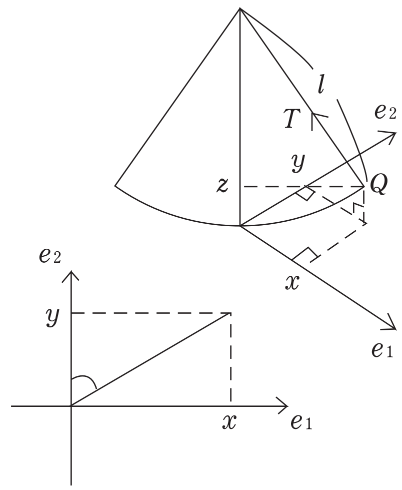
$\vec{\omega} \times v = (\omega \cos v_0 \dfrac{dz}{dt} - \omega \sin v_0 \dfrac{\mathrm{dy}}{dt}) e_1 + \omega \sin v_0 \dfrac{dx}{dt} e_2 - \omega \cos v_0 \dfrac{dx}{dt} e_3$

となる（12）においてFには重力$-mg$を含んでいるが、今後$F \equiv (X, Y, Z)$は重力以外の外力を表すことにする。

従って$F=(X, Y, Z)+(0, 0, -mg)$とすると（12）は

$$(12)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X - 2m\omega(\cos v_0 \dfrac{dz}{dt} - \sin v_0 \dfrac{dy}{dt}) \\ m\dfrac{d^2\mathrm{y}}{dt^2} = Y - 2m\omega \sin v_0 \dfrac{dx}{dt} \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z - mg + 2m\omega \cos v_0 \dfrac{d\mathrm{x}}{dt} \end{cases}$$

となる。



今、長さlの糸で質量mの質点Qが$x-y$平面付近で振動している。点Qにかかる力$F=(X, Y, X)$は糸の張力をTとすれば

$X=-T\dfrac{x}{l}$, $Y=-T\dfrac{y}{l}$, $Z=T\dfrac{l-z}{l}$

糸の長さlが大きくZ方向の変位z, $\dfrac{dz}{dt}$, $\dfrac{d^2z}{dt^2}$は他と比べ小さいとしてOとおく。さらに（12）の第３式において $2m\omega \cos \mathrm{v} \dfrac{dx}{dt}$ はmgに比べ非常に小さくこれも無視して、振り子の振りを小さくとると、$T=mg$を得る。これを第１、２式に代入して

$$(13)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mg\dfrac{x}{l} + 2m\omega' \dfrac{dy}{dt} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg\dfrac{y}{l} - 2m\omega' \dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

（ここで $\omega' = \omega \sin v_0$）

この微分方程式を解く。　$\eta = x + iy$とおくと

$\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{dx}{dt} + i\dfrac{dy}{dt}$,　$\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2} + i\dfrac{d^2y}{dt^2}$　から(13)は

(14) $\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -\omega_0{}^2\eta - 2\omega' i\dfrac{d\eta}{dt}$　（$\omega_0{}^2 = \dfrac{g}{l}$）　と同値であることがわかる。

実は

(15)　$\eta = e^{-i\omega' t}(Ae^{i\omega_0' t} + Be^{-i\omega_0' t})$　　（$\omega_0' = \sqrt{\omega_0{}^2 + \omega'}$）

がこの微分方程式の解となる。

実際 $e^{i\theta t}=cos\theta t+\ i\ sin\theta t$ から $\dfrac{de^{i\theta t}}{dt}=ie^{i\theta t}$ が成り立つことから

$$\frac{d\eta}{dt}=-ie^{-i\omega' t}\{(\omega'-\omega_o')Ae^{i\omega o' t}+(\omega'+\omega_o)^2Be^{-i\omega o' t}\}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=-e^{-i\omega' t}\{(\omega'-\omega_o')^2Ae^{i\omega o' t}+(\omega'+\omega_o)^2Be^{-i\omega o' t}\}$$

となり $\omega_o{}^2=\omega_o'^2-\omega'^2$ なる関係を使うと、（15）が（14）の解であることを確かめることができる。（15）から

（16） $x+y_i=\eta=e^{-i\omega' t}(Ae^{i\omega o' t}+Be^{-i\omega o t})$

これに、初期条件 $t=0$ のとき $x=0$, $y=0$, $\dfrac{dx}{dt}=0$, $\dfrac{dy}{dt}=V_0$（北向き）

を入れる、（16）を t で微分し

$$\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}=\frac{d\eta}{dt}=-ie^{-i\omega' t}\{(\omega'-\omega_o')Ae^{i\omega o' t}+(\omega+\omega_o')Be^{-i\omega_o' t}\}$$

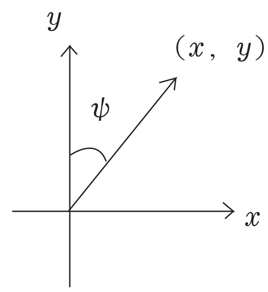
も使って

$A=\dfrac{V_0}{2\omega_o'}$,　$B=\dfrac{-V_0}{2\omega_o'}$ を得る。　（16）より

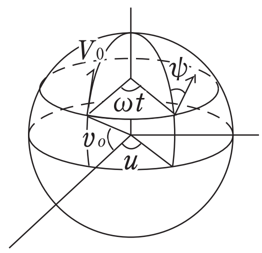
$$x+y_i=y=\frac{V_0}{2\omega_o'}\ (cos\,\omega' t-i\ sin\,\omega' t)\{(cos\,\omega_o' t+i\ sin\,\omega_o' t)-(cos\,\omega_o' t-i\ sin\,\omega_o' t)\}$$

これから

（17） $\begin{cases} x=\dfrac{V_0}{\omega_o'}\ sin(\omega_o' t)sin(\omega' t) \\ y=\dfrac{V_0}{\omega_o'}\ cos(\omega_o' t)cos(\omega' t) \end{cases}$ を得る



従って最初真北に振り始めた振り子が、時間 t の間に真北からずれた角をψとおくと（17）より



$$tan\psi=\frac{x}{y}=tan\,\omega' t \quad （ここで\ \omega'=\omega\,sin\,v_o）$$

$$\therefore \psi=\omega' t=\omega t\,sin\,v_o \quad \omega t=u とおくと$$

（18）　$\psi=u\ sin\,v_o$

となり丁度ベクトルを平行移動した場合に一致する。（§１．(9)）

後書き

去年の12月たまたまフーコーの自伝を図書館から借りて眺めていました。フーコーの名前は聞いた事がある位で、今までとくに興味を持ったこともなかったのですが１回転するのに要する時間については興味も持ちましたので、物理のW先生に相談した所、W先生もその辺の話には精通しておられ、コリオリの力などについての力学の本も色々紹介して戴き大変勉強になりました。その中で地学の図表を見たときに「振り子の振る方向とベクトルの平行移動とは同じ方向なのではないか」という確信に近い予想が湧き、今回それが同じであることを確かめてみたわけです。物理については全くの門外漢であり、にわか勉強で物理の本を読んだので、危ない議論をしている箇所があるのではないかと思います。間違いがあれば指摘して戴きたいと思います。

数学の中での平行移動、物理の中でのフーコーの振り子、どちらも各々の分野の中では、確立されたものであると思います。ただそれらが同じ方向を向いているという記述は今まで見たことがないので、そういう意味では、今回の計算も意義があるかも知れません。

平行移動の概念を作ったLevi-Civita（伊）（1873－1941）は、フーヨー（仏）（1819－1868）の実験から影響を受けているのでしょうか。それとももっと高い視点に立てば、この２つが同じ概念であるのは“当たり前”のことなのでしょうか。それについては良くわかりません。

<参考> せっかく計算をしたので、振り子が１回転する周期T'を調べてみます。
(18) 式によると、真北に振り初めた振り子は少しずつ真北からずれ、北緯v_0では、t秒間で、$\omega t \sin v_0$だけ真北から回転しました。従ってこれが１周２πとなる時間t は

$2\pi=\omega t \sin v_0$ から $t=\dfrac{2\pi}{\omega \sin v_0}=\dfrac{T}{\sin v_0}$ となります。（$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 自転周期）

すなわち、振り子が１回転する周期T'は地球の自転周期をTとすると

$$T'=\frac{T}{\sin v_0}$$

参考図書

1　物理入門コース力学　　戸田　盛和（岩波書店）

2　ニューステージ　地学図書（浜島書店）

3 力と数学のはなし　鷹尾　洋保（日科技連出版社）