数実研発表レポート（袴田）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　平成 25 年 1 月 26 日

曲線・曲面について

袴田　純（北海道豊富高等学校）

1　はじめに

今回のレポート発表は，顧問している陸上部員からの相談内容を課題として考えてみた。相談内容は，「校舎内をジョギングする際，コーナーで他の部員に遅れてしまいます。廊下の上手な曲がり方を教えてほしい。」というものだった。面談の後，この相談を「できるだけ走りやすいコース取りをする。」という問題に置き換え，その問題が解決した後に，さらなる上手な曲がり方をまた別の日に考えることにした。そして，クロソイドを廊下に描こうという話に至った。

2　実践

クロソイドの基本式は

$$RL = A^2$$

（R:点Pにおけるクロソイドの曲率半径　L:クロソイド原点から点Pまでの曲線長）

と表され，

$$c(s) = \left(\int_0^s cos\left(\frac{at^2}{2}\right)dt, \int_0^s sin\left(\frac{at^2}{2}\right)dt\right)$$

で定義される。この曲線は，積分のまま媒介変数表示が可能で，曲率がas（sは弧長）である。

以上のことは事実として知っていたが，実際の作図の方法はわからなかった。そこで，今回はクロソイドのコピーを用いて，廊下に曲線を引いてみた。その曲線上を走った生徒の感想は，スピードは出しにくいが，楽に曲がれたとのことだった。インターネットなどで検索してみると，ＣＡＤなどのソフトを使うと簡単に作図してくれるようだが，昔はクロソイド定規なるもので作図していようなので，今度チャレンジしてみたい。

3　今後の活動の希望的観測

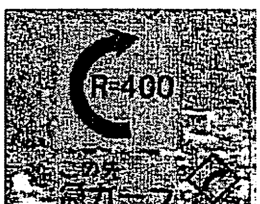
もし，生徒がこの活動を通して，曲線の性質について学びたいと強く願い，かつ，高校の数学をほぼ習得した状態であると仮定した場合を考える。その生徒が，曲線・曲面に対してさらに興味・理解が深まるような取り組みを考察していく。

第１段階の目標として，曲率半径の逆数の値以外にも，２階微分量としての曲率，つまり，フルネ－セレの公式で定義された曲率の絶対値を用いることで，曲率を求められることを理解する。

（1）　曲率について

定義 1.1

平面上の曲線Cと，C上の点Pがあるとする。Cの点Pにおける曲率円とは，点P以外の，C上の２点Q，RでQ，P，Rの順に並んでいるものをとり，この相異なる３点P，Q，Rを通る円のQとRをPに近づけたときの極限として得られる円のことをいう。また，曲率円の中心を曲率中心，曲率円の半径を曲率半径と呼ぶ。



定義 1.2

$\frac{1}{\text{曲率半径}}$のことを曲率と呼ぶ。

以上の定義より，右図の例を紹介したり，３点を通る円の方程式と極限を用いて，放物線や３次曲線の曲率を求めたりすることができる。

（2）　曲率半径を用いずに，曲率を求めることを考える。

定理 2.1

$$|\kappa(s)| = \frac{1}{r}$$

(r：曲率円の半径)

○　定理 2.1 の証明のための準備として，

定義 2.2

正則曲線$C(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ $(t \in I)$に対して，tが曲線Cの弧長パラメーターであるとは，

任意の$(t \in I)$に対して，$\|C'(t)\| = 1$

を満たすものをいう。

定義 2.3

曲線$C(s)$ $(s \in I)$に対して，

$$\{e_1(s), e_2(s)\}$$

を曲線$C(s)$の動標構と呼ぶ。

- $e_1(s) = C'(s)$　（接ベクトル）
- $e_2(s)$は，$e_1(s)$を正の方向に$\frac{\pi}{2}$だけ回転したベクトル　（法線ベクトル）

定義 2.4

曲線$C(s)$ $(s \in I)$の曲率$\kappa(s)$は，この曲線の動標構$\{e_1(s), e_2(s)\}$に対して，

$$e'_1(s) = \kappa(s) e_2(s)$$

を満たすものをいう。

命題 2.5

曲線$C(s)$ $(s \in I)$は，任意のs_0 $(s_0 \in I)$の近くで，

$$C(s) = C(s_0) + (s - s_0)e_1(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 \kappa(s_0) e_2(s_0) + O((s - s_0)^3)$$

と表現することができる。

これは，弧長パラメーター表示された曲線を局所的にテイラー展開したとき，２次の項が曲率であることを意味している。

【証明】

定義より

$$C'(s_0) = e_1(s_0)$$
$$C''(s_0) = e'_1(s_0) = \kappa(s_0) e_2(s_0)$$

これらを，$C(s)$の$s = s_0$におけるテイラー展開したもの

$$C(s) = C(s_0) + C'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}C''(s_0)(s - s_0)^2 + O((s - s_0)^3)$$

に代入すると，求める等式が得られる。

■

定理 2.6（平面曲線における，フルネ - セレの公式）

曲線$C(s)$と，その曲線の動標構$\{e_1(s), e_2(s)\}$に対して，

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

すなわち，

$$\begin{cases} e'_1(s) = \kappa(s)e_2(s) \\ e'_2(s) = -\kappa(s)e_1(s) \end{cases}$$

が成り立つ。ここで，$\kappa(s)$は曲線Cの曲率とする。

【証明】

$\|e_2(s)\|^2 = 1$より，両辺の微分は，

$$2e_2(s) \cdot e'_2(s) = 0$$

となり，これは，

$e_2(s)$と$e'_2(s)$が直交している。

つまり

$e'_2(s)$は$e_1(s)$の定数倍である。

と言えるので，

ある$\lambda(s)$に対して，

$$e'_2(s) = \lambda(s)e_1(s) \tag{1}$$

また，$e_1(s) \cdot e_2(s) = 0$より，両辺の微分は，

$$e'_1(s) \cdot e_2(s) + e_1(s) \cdot e'_2(s) = 0 \tag{2}$$

となる。

ここで，曲率の定義より，

$$e'_1(s) = \kappa(s)e_2(s) \tag{3}$$

(1)～(3)，ならびに，$\|e_1(s)\| = \|e_2(s)\| = 1$より

$$\lambda(s) = -\kappa(s)$$

(1)，(3)より，求める等式が得られる。

■

○　定理 2.1 の証明

【証明】

任意のsをとり，さらにそれを固定し，s_0とする。$s = s_0$の近くで，命題 2.5 より，

$$C(s) = C(s_0) + (s - s_0)e_1(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\kappa(s_0)e_2(s_0) + O((s - s_0)^3) \tag{4}$$

と表現することができる。いま，回転と平行移動することにより，

$$C(s_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1(s_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2(s_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすることができる。ここで，

$$C(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$$

と書くと，(4)は，

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (s-s_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(s-s_0)^2\kappa(s_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O((s-s_0)^3)$$

つまり,

$$x(s) = (s-s_0) + O((s-s_0)^3) \tag{5}$$

$$y(s) = \tfrac{1}{2}\kappa(s_0)(s-s_0)^2 + O((s-s_0)^3) \tag{6}$$

となる。

ここで, (5), (6)より, $x=0$の近くで, この曲線を

$$y = \tfrac{1}{2}\kappa(s_0)x^2 + O(x^3) \tag{7}$$

と表すことができないかを考える。

(5)より, $x'(s_0) = 1 \neq 0$であるから, $s = s_0$の近くで$x(s)$の逆関数$s = s(x)$が存在する。そこで,

$$\begin{cases} f(s) = x(s) - (s-s_0) \\ g(x) = (s(x) - s_0) - x \end{cases} \tag{8}$$

とおく。

(5)より, $f(s) = O((s-s_0)^3)$となり, $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0$である。

いま, $s(x)$が$x(s)$の逆関数であり, $x(s_0) = 0$であることから, $s(0) = s_0$である。

したがって, (8)第2式で$x = 0$のとき, $g(0) = 0$が得られる。

また, (8)の両辺をそれぞれs, xで微分すると

$$\begin{cases} f'(s_0) = x'(s_0) - 1 \\ g'(0) = s'(0) - 1 \end{cases} \tag{9}$$

となる。

ここで, $f'(s_0) = 0$より, $x'(s_0) = 1$である。

逆関数の微分より, $s'(0) = \frac{1}{x'(s_0)} = 1$となり, $g'(0) = 0$が得られる。

以上より,

$$g(x) = O(x^2)$$

よって, (8)第2式は$O(x^2) = (s(x) - s_0) - x$となる。

これを, (6)に逆関数$s = s(x)$を代入したものに用いると, (7)が得られる。

(I) $\kappa(s_0) \neq 0$のとき

点$C(s_0) = (0,0)$であるので, (7)の原点における曲率円を求める。

(7)上の3点(0,0), $\left(\varepsilon,\ \tfrac{1}{2}\kappa(s_0)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\right)$, $\left(-\varepsilon,\ \tfrac{1}{2}\kappa(s_0)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\right)$を通る円において, εを 0 に近づけたときの極限をとると,

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{\kappa(s_0)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\kappa(s_0)}\right)^2$$

となる。これは, (7)の原点における曲率円であり, 半径は$\kappa(s_0)$となる。

(II) $\kappa(s_0) = 0$のとき

(7)は$y = O(x^3)$となるので, 曲線(7)の原点での曲率円は直線である。したがって, 曲率半径は無限大となり, 定理 2.1 を満たす。

■

（３）パラメーターを用いて円の曲率を求める。

定理 3.1

$$C(t) = (x(t), y(t))$$

のとき，

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となる。

【証明】

（Ｉ） 弧長パラメーターsの場合

$$C(s) = (x(s), y(s))$$

より，

$$e_1(s) = C'(s) = (x'(s), y'(s))$$

である。

$e_2(s)$は$e_1(s)$を反時計回りに 90 度回転させたものなので，

$$e_2(s) = (-y'(s), x'(s))$$

定義 2.4，$e_1(s) = C'(s)$より

$$C''(s) = \kappa(s)e_2(s)$$

いま，両辺に$e_2(s)$を内積し，$e_2(s)$が単位ベクトルであることを用いると，

$$\kappa(s) = C''(s) \cdot e_2(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$$

となり，求める式を得られる。

（Ⅱ） 一般のパラメーターtの場合

パラメーターのとりかえにより，tはsの関数$t = t(s)$と見ることができる。合成関数の微分より

$$x'(s) = \frac{dx}{ds}(s) = \frac{dx}{dt}\big(t(s)\big)\frac{dt}{ds}(s) = \dot{x}\big(t(s)\big)\frac{dt}{ds}(s) \tag{10}$$

であり，

$$x''(s) = \frac{dx'(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\dot{x}(t(s))\frac{dt}{ds}(s)\right) = \ddot{x}\big(t(s)\big)\left(\frac{dt}{ds}(s)\right)^2 + \dot{x}\big(t(s)\big)\frac{d^2t}{ds^2}(s) \tag{11}$$

ここで，$\frac{dt}{ds}(s) > 0$，$1 = \|C'(s)\| = \left\|\frac{dC}{dt}\big(t(s)\big)\frac{dt}{ds}(s)\right\| = \frac{dt}{ds}(s)\left\|\frac{dC}{dt}\big(t(s)\big)\right\| = \frac{dt}{ds}(s)\|\dot{C}\big(t(s)\big)\|$

より，

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\|\dot{C}(t(s))\|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}\big(t(s)\big)^2 + \dot{y}\big(t(s)\big)^2}} \tag{12}$$

となる。$s = s(t)$だから，

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \kappa\big(s(t)\big) \\
&= x'\big(s(t)\big)y''\big(s(t)\big) - x''\big(s(t)\big)y'\big(s(t)\big) \\
&= \dot{x}(t)\frac{dt}{ds}\big(s(t)\big)\left(\ddot{y}(t)\left(\frac{dt}{ds}\big(s(t)\big)\right)^2 + \dot{y}(t)\frac{d^2t}{ds^2}\big(s(t)\big)\right) \\
&\qquad - \left(\ddot{x}(t)\left(\frac{dt}{ds}\big(s(t)\big)\right)^2 + \dot{x}(t)\frac{d^2t}{ds^2}\big(s(t)\big)\right)\dot{y}(t)\frac{dt}{ds}\big(s(t)\big)
\end{aligned}$$

(10)，(11)より

$$= (\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t))\left(\frac{dt}{ds}s(t)\right)^3$$

(12)より

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

■

定理 3.1 を用いて，数Ⅲの教科書に出てくる曲線の曲率を求めさせると理解が深まるものと考える。
① 螺旋　② カテナリー　③ カージオイド　④ アステロイド　⑤ トロコイド

4　今後の活動の希望的観測（2）

第2段階以降は，次のようなステップを踏んでいこうと考えている。

第2段階は，第1基本量，第2基本量，平均曲率，ガウス曲率を求めることで，曲面の情報を得ることできるようにする。キーワードとして，弧長パラメーター，フルネ - セレの公式，曲率，捩率，法平面，法曲率，主曲率，極小曲面，可展面が挙げられる。

第3段階は，ガウスーボネ（Gauss-Bonnet）の定理（「解析的（連続）量」と「位相的（離散）量」という異種なものが等しいという幾何学ならではの式）のよさを実感できるようにする。キーワードとして，ガウスの公式，ワインガルテンの公式，ガウスの基本定理が挙げられる。

第4段階は，曲線と曲面の概要を理解させ，生徒を多様体の世界の入口へと誘う。

5　終りに（今後の課題）

本来の生徒の質問では，「速度」や「体の傾き」などの問題を含んでいた。この問題の解決には，スプライン補間などの要素が関係してくると思われる。しかし，自分自身が不勉強のため，生徒に伝えることができない。今後は，まず，車の車庫入れのハンドルの切り方などの計測などから考察していき，曲線・曲面についての学習へとつなげていきたい。

参考図書

1　中内伸光，じっくりと学ぶ曲線と曲面，共立出版，2005

2　J. Oprea, Differential Geometry and its Applications, Prentice Hall, 1997