# 教材研究　　三角関数の等式について

柳田 五夫

## 1　はじめに

千葉大学で出題された入試問題

> $10^{\mathrm{o}} = \tan 20^{\mathrm{o}} \cdot \tan 30^{\mathrm{o}} \cdot \tan 40^{\mathrm{o}}$ を示せ。　（2013 千葉大・理）

を見たとき，筆者が高校生の頃出会った

$$\tan\theta \tan(60^{\mathrm{o}} - \theta)\tan(60^{\mathrm{o}} + \theta) = \tan 3\theta$$

を思い出した。この等式を用いると，千葉大の問題が解けるので，**問題 1** にしてみた。

その他

$$\cos 20^{\mathrm{o}} \cos 40^{\mathrm{o}} \cos 80^{\mathrm{o}},$$

$$\tan^2 20^{\mathrm{o}} + \tan^2 40^{\mathrm{o}} + \tan^2 80^{\mathrm{o}}$$

の値も考えてみた。

## 2　三角関数の等式

> **問題 1**　(1)　$\tan\theta \tan(60^{\mathrm{o}} - \theta)\tan(60^{\mathrm{o}} + \theta) = \tan 3\theta$
> を示せ。
> (2)　$\tan 10^{\mathrm{o}} = \tan 20^{\mathrm{o}} \cdot \tan 30^{\mathrm{o}} \cdot \tan 40^{\mathrm{o}}$ を示せ。　（2013 千葉大・理　(2) のみ）

**（解答）**　(1) $t = \tan\theta$ とおくと

$$\tan(60^{\mathrm{o}} - \theta) = \frac{\tan 60^{\mathrm{o}} - \tan\theta}{1 + \tan 60^{\mathrm{o}} \tan\theta} = \frac{\sqrt{3} - t}{1 + \sqrt{3}\,t}$$

$$\tan(60^{\mathrm{o}} + \theta) = \frac{\tan 60^{\mathrm{o}} + \tan\theta}{1 - \tan 60^{\mathrm{o}} \tan\theta} = \frac{\sqrt{3} + t}{1 - \sqrt{3}\,t}$$

を使うと

$$\tan\theta\tan(60^\circ-\theta)\tan(60^\circ+\theta)=t\cdot\frac{\sqrt{3}-t}{1+\sqrt{3}\,t}\cdot\frac{\sqrt{3}+t}{1-\sqrt{3}\,t}$$
$$=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$$

また

$$\tan 3\theta=\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}$$
$$=\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{4\cos^3\theta-3\cos\theta}$$
$$=\frac{3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)}$$
$$=\frac{3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta}$$

(分母・分子を $\cos^3\theta$ で割る)

$$=\frac{3\tan\theta-\tan^4\theta}{1-3\tan^2\theta}$$
$$=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$$

であるから

$$\tan\theta\tan(60^\circ-\theta)\tan(60^\circ+\theta)=\tan 3\theta$$

は成り立つ。

(2) （1）の等式で，$\theta=10^\circ$ とおくと

$$\tan 10^\circ\tan 50^\circ\tan 70^\circ=\tan 30^\circ$$
$$\tan 10^\circ\cdot\frac{1}{\tan 40^\circ}\cdot\frac{1}{\tan 20^\circ}=\tan 30^\circ$$

よって

$$\tan 10^\circ=\tan 20^\circ\tan 30^\circ\tan 40^\circ$$ ■

[注]　$\cos 3\theta,\sin 3\theta$ はド・モアブルの定理を使っても得られる。

$$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$$
$$=\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$$
$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)$$

から

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \qquad (*)$$
$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \qquad (**)$$
$$= 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta$$
$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad \square$$

$\tan 3\theta$ は上記の $(*)$, $(**)$ の式

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

を用いると得られる。

$\tan\theta\tan(60^\circ-\theta)\tan(60^\circ+\theta)=\tan 3\theta$ と似た式が，正弦，余弦に対しても成り立つ。

(1) $4\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)=\cos 3\theta$ ……①

(2) $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta$ ……②

(3) $\tan\theta\tan(60^\circ-\theta)\tan(60^\circ+\theta)=\tan 3\theta$ ……③

**(解答)**

(1) $4\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)$

$$= 4\cos\theta\,(\cos 60^\circ\cos\theta + \sin 60^\circ\sin\theta)\,(\cos 60^\circ\cos\theta - \sin 60^\circ\sin\theta)$$
$$= \cos\theta\left(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta\right)\left(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta\right)$$
$$= \cos\theta\left(\cos^2\theta - 3\sin^2\theta\right)$$
$$= \cos\theta\left[\cos^2\theta - 3(1-\cos^2\theta)\right]$$
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$= \cos 3\theta$$

(2) $\quad 4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)$

$$
\begin{aligned}
&= 4\sin\theta\,(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)\,(\sin 60^\circ\sin\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)\\
&= \sin\theta\left(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\right)\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right)\\
&= \sin\theta\left(3\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\\
&= \sin\theta\left[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta\right]\\
&= 3\sin\theta-4\sin^3\theta\\
&= \sin 3\theta
\end{aligned}
$$

(3) ② $\div$ ① より③ を得る。 ■

[注] ①，②は積を和に直す公式を使用しても証明することができる。

③ は筆者が高校生の時使用した教科傍用の問題集 [1] の 187(2) として取り上げられている。

①，②に関連する問題を探してみた。

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$$

の値を求める問題が自治医大で出題されている。

**問題 2** $\quad \dfrac{1}{(\cos 20^\circ)\cdot(\cos 40^\circ)\cdot(\cos 80^\circ)}$ の値を求めよ。 (2005 自治医大)

①で $\theta=20^\circ$ とおくと

$$4\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\cos 60^\circ\left(=\frac{1}{2}\right)$$

よって

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8} \qquad \cdots\cdots(*)$$

から

$$\frac{1}{(\cos 20^\circ)\cdot(\cos 40^\circ)\cdot(\cos 80^\circ)}=8$$

(解答)

$$\begin{aligned}
\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)\cos 80^\circ \\
&= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 80^\circ \\
&= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{4}(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) \\
&= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{4}\cos(180^\circ - 80^\circ) + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4}\cos 80^\circ - \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{(\cos 20^\circ)\cdot(\cos 40^\circ)\cdot(\cos 80^\circ)} = 8 \qquad \blacksquare$$

[注]　① を証明したときのように，$\theta = 20^\circ$ とおき

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \cos\theta \cos(60^\circ - \theta)\cos(60^\circ + \theta)$$

として，右辺を加法定理で展開する方法が考えられる。

(別解)　$a_n = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ とおくと

$$\begin{aligned}
2^n a_n \sin\frac{x}{2^n} &= 2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot 2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n} \\
&= 2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}} \\
&= 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}} \\
&= 2^{n-1}a_{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}} \\
&\quad (n \text{ の値によらず一定})
\end{aligned}$$

したがって

$$2^n a_n \sin\frac{x}{2^n} = 2a_1 \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$$

から

$$2^n a_n \sin\frac{x}{2^n} = 2a_1\sin\frac{x}{2} = \sin x \qquad \cdots\cdots(**)$$

この式で，$n = 3,\ x = 160^\circ$ とおくと

$$a_3 = \frac{\sin 160^\circ}{2^3\sin\dfrac{160^\circ}{2^3}} = \frac{\sin 160^\circ}{2^3\sin 20^\circ} = \frac{\sin 200^\circ}{2^3\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}$$

よって

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

から

$$\frac{1}{(\cos 20^\circ)\cdot(\cos 40^\circ)\cdot(\cos 80^\circ)} = 8 \qquad \blacksquare$$

$(**)$ より，次の等式④を得る。

$\sin\dfrac{x}{2^n} \fallingdotseq 0$ のとき

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\dfrac{x}{2^n}} \qquad \cdots\cdots ④$$

$n$ は正の整数とする。

(4) $\sin\dfrac{x}{2^n} \fallingdotseq 0$ のとき

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\dfrac{x}{2^n}} \qquad \cdots\cdots ④$$

(5) $\sin\dfrac{x}{2^n} \fallingdotseq 0$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = -\cot x + \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

ただし，$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ である。

**(解答)**　(5) 等式④の両辺の絶対値の対数をとって

$$\begin{aligned}&\log\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \log\left|\cos\frac{x}{2^2}\right| + \cdots + \log\left|\cos\frac{x}{2^n}\right| \\ &= -n\log 2 + \log|\sin x| - \log\left|\sin\frac{x}{2^n}\right|\end{aligned}$$

両辺を $x$ で微分すると

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cdot\frac{-\sin\dfrac{x}{2^k}}{\cos\dfrac{x}{2^k}}\right) = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = -\cot x + \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} \qquad \blacksquare$$

[注 1]　⑤ は次のように導くこともできる。

$$\begin{aligned}
\cot\theta - 2\cot 2\theta &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 2\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\
&= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= \tan\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ。この等式を使うと

$$\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{x}{2^{k-1}}$$

よって

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{x}{2^{k-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x \qquad \square
\end{aligned}$$

[注 2]　$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ の値を求める問題は筆者が高校生の時使用した教科傍用の問題集 [1] の 183(1) として取り上げられている。また，当時の参考書には

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$$

の値を求める問題が載っている。

[参考]　$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$ の値は次のように求められる。

②で $\theta = 20^\circ$ とおくと

$$4\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \sin 60^\circ \left(= \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

**問題 3**　$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ の値を求めよ。

②で $\theta = 10^\circ$ とおくと

$$4\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin 30^\circ \left(= \frac{1}{2}\right)$$

よって

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

[注 **1**]　$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ$ である。

[注 **2**]　$\sin(3 \cdot 10^\circ) = \sin(3 \cdot 50^\circ) = \sin\{3 \cdot (-70^\circ)\} = \dfrac{1}{2}$ であるから，方程式

$$\sin 3\theta = \frac{1}{2}$$

を考える。3 倍角の公式を使い方程式を変形すると

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \frac{1}{2}$$

から

$$8\sin^3\theta - 6\sin\theta + 1 = 0$$

を得る。

異なる 3 つの実数 $\sin 10^\circ$，$\sin 50^\circ$，$\sin(-70^\circ)$ は

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

の 3 つの解であるから，解と係数の関係より

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin(-70^\circ) = -\frac{1}{8}$$

よって

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$ ■

[注 **3**]　② を証明したときのように，$\theta = 10^\circ$ とおき

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin\theta \sin(60^\circ - \theta)\sin(60^\circ + \theta)$$

として，右辺を加法定理で展開する方法が考えられる。

## 3　$\tan^2 20^\circ + \tan^2 40^\circ + \tan^2 80^\circ$ の値

**問題 4**　(1)　$\tan\theta + \tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 3\tan 3\theta$

であることを証明せよ。

(2)　$\tan^2\theta + \tan^2\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) + \tan^2\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 3\left(3\tan^2 3\theta + 2\right)$

であることを証明せよ。

(3)　$\tan^2 20^\circ + \tan^2 40^\circ + \tan^2 80^\circ$ の値を求めよ。

（解答） (1) $t = \tan\theta$ とおくと

$$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\theta - \tan\dfrac{\pi}{3}}{1 + \tan\theta\tan\dfrac{\pi}{3}} = \frac{t - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\,t}$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\theta + \tan\dfrac{\pi}{3}}{1 - \tan\theta\tan\dfrac{\pi}{3}} = \frac{t + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\,t}$$

となるから，これを使うと

$$\begin{aligned}\tan\theta + \tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= t + \frac{t - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\,t} + \frac{t + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\,t} \\ &= \frac{3(3t - t^3)}{1 - 3t^2} \\ &= 3\tan 3\theta\end{aligned}$$

よって

$$\tan\theta + \tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 3\tan 3\theta$$

(2) (1) の等式の両辺を $\theta$ で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)} = \frac{9}{\cos^2 3\theta}$$

$\dfrac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \tan^2\varphi$ を用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} \\
&= 1 + \tan^2\theta + 1 + \tan^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + 1 + \tan^2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 9\left(1 + \tan^2 3\theta\right)
\end{aligned}$$

よって

$$\tan^2\theta + \tan^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \tan^2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 3\left(3\tan^2 3\theta + 2\right)$$

(3) （2）の等式において，$\theta = 20^{\circ}$ とおくと

$$\tan^2 20^{\circ} + \tan^2 40^{\circ} + \tan^2 80^{\circ} = 33 \qquad \blacksquare$$

**[注 1]** (1) は次のように求めることができる。

等式①

$$4\cos\theta\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3\theta$$

の両辺の絶対値の対数をとって

$$\begin{aligned}
&\log 4 + \log|\cos\theta| + \log\left|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right| \\
&\quad + \log\left|\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right| \\
&= \log|\cos 3\theta|
\end{aligned}$$

両辺を微分して

$$\begin{aligned}
&-\tan\theta - \tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= -3\tan 3\theta
\end{aligned}$$

すなわち

$$\tan\theta + \tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 3\tan 3\theta$$

**[注 2]** 上記の等式 (2)，(3) は，垣原祐一郎　氏による (大学への数学，1970 年 9 月号)。

## 参考文献

[ 1 ] 田中　稔，米田　信夫　共編著，教科傍用　オリジナル数学演習 II・B，新訂版，昭和 43 年