三角形におけるs, r, Rの基本的な不等式

柳田 五夫

まえがき

ここでは，三角形に対する不等式を証明するために必要となる基本的な不等式と重要なテクニックを扱う。有名なものとして，基本不等式や基本不等式にに関連した Gerretsen の不等式、Kooi の不等式，Blundon の不等式等がある。これらの不等式は強力な武器になるものである。またガウス和についても扱う。

なお。本書では次のものを扱う。

(1) Klamkin の不等式
(2) 基本不等式
(3) Gerretsen の不等式
(4) Kooi の不等式
(5) Blundon の不等式
(6) Hayashi の不等式
(7) Neuberg-Pedoe の不等式
(8) Bottema の不等式
(9) ガウス和

扱った問題は，crux の問題等である。

必要な知識は

(1) 相加平均と相乗平均の不等式（The Arithmetic Mean Geometric Mean Inequality）
(2) 凸関数に関する Jensen の不等式
(3) コーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality)
(4) ヘルダーの不等式 (Hölder’s Inequality)
(5) Schur の不等式

等である。また三角関数に関する関する基本的な知識は標準編にまとめてある。

2021 年 8 月

著者

目次

1　Klamkin の不等式

1.1　Klamkin　の不等式

n を整数，x, y, z, A, B, C は実数で $A+B+C=\pi$ をみたすとき次の不等式が成り立つ。

$$x^2+y^2+z^2 \geqq 2(-1)^{n+1}(yz\cos nA+zx\cos nB+xy\cos nC). \tag{1.1}$$

証明 まず x について平方完成する。

$$\begin{aligned}
& x^2+y^2+z^2 \geqq 2(-1)^{n+1}(yz\cos nA+zx\cos nB+xy\cos nC) \\
\Longleftrightarrow\ & x^2+2(-1)^n(z\cos nB+y\cos nC)x+y^2+z^2+2(-1)^n yz\cos nA \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x+(-1)^n(z\cos nB+y\cos nC))^2-(z\cos nB+y\cos nC)^2 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad +y^2+z^2+2(-1)^n yz\cos nA \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x+(-1)^n(z\cos nB+y\cos nC))^2+(1-\cos^2 nC)y^2+(1-\cos^2 nB)z^2 \\
& \qquad -2yz\cos nB\cos nC+2(-1)^n yz\cos(n\pi-(nB+nC)) \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x+(-1)^n(z\cos nB+y\cos nC))^2+y^2\sin^2 nC+z^2\sin^2 nB \\
& \qquad -2yz\cos nB\cos nC+2(-1)^n yz\cdot(-1)^n\cos(nB+nC) \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x+(-1)^n(z\cos nB+y\cos nC))^2+y^2\sin^2 nC+z^2\sin^2 nB \\
& \qquad -2yz\cos nB\cos nC+2yz(\cos nB\cos nC-\sin nB\sin nC) \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x+(-1)^n(z\cos nB+y\cos nC))^2+y^2\sin^2 nC+z^2\sin^2 nB \\
& \qquad -2yz\sin nB\sin nC \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x+(-1)^n(z\cos nB+y\cos nC))^2+(y\sin nC-z\sin nB)^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成立する。 ■

等号が成り立つのは

$$x+(-1)^n(z\cos nB+y\cos nC)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

かつ

$$y\sin nC-z\sin nB=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

のときである。

①の両辺に $\sin nC$ をかけると

$$\begin{aligned}
0 &= x\sin nC + (-1)^n(z\cos nBy\sin nC + \underbrace{y\sin nC}_{=z\sin nB}\cos nC) \\
&= x\sin nC + (-1)^n(z\cos nB\sin nC + z\cos nB\cos nC) \\
&= x\sin nC + (-1)^n z\sin(nB+nC) = x\sin nC + (-1)^n z(-1)^{n-1}\sin nA \\
&= x\sin nC - z\sin nA
\end{aligned}$$

から

$$x\sin nC - z\sin nA = 0. \qquad \cdots\cdots ③$$

以上のことから，$\sin nA\sin nB\sin nC \fallingdotseq 0$ のとき，等号の成立条件は

$$\frac{x}{\sin nA} = \frac{y}{\sin nB} = \frac{z}{\sin nC} \qquad \cdots\cdots ④$$

となる。

例　Klamskin の不等式で，$n=1$ とおくと，$A+B+C=\pi$ のとき

$$x^2+y^2+z^2 \geqq 2(yz\cos A + \cos B + \cos C)$$

が成り立つ。

さらに $x=y=z=1$ とおくと，$A+B+C=\pi$ のとき

$$3 \geqq 2(\cos A + \cos B + \cos C)$$

から

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqq \frac{3}{2}$$

を得る。

$n=2$ とおくと，$A+B+C=\pi$ のとき

$$x^2+y^2+z^2 \geqq -2(yz\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$$

が成り立つ。

例題 1　(i)　$x, y, z,$ は実数とする。△ABC において次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \leqq R^2(x+y+z)^2. \qquad \cdots\cdots ①$$

(ii)　$x, y, z,$ は正の実数とする。△ABC において次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$xa^2 + yb^2 + zc^2 \geqq 4S\sqrt{xy+yz+zx}. \qquad \cdots\cdots ②$$

解 (i) 正弦定理を使い角の関係に直す。

$$\begin{aligned}
① &\Longleftrightarrow yz \cdot 4R^2 \sin^2 A + zx \cdot 4R^2 \sin^2 B + xy \cdot 4R^2 \sin^2 C \leqq R^2(x+y+z)^2 \\
&\Longleftrightarrow 2(2\sin^2 A - 1)yz + 2(2\sin^2 B - 1)zx + 2(2\sin^2 C - 1)xy \leqq x^2 + y^2 + z^2 \\
&\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geqq -2(yz\cos 2A + zx\cos 2B + xy\cos 2C).
\end{aligned}$$

最後の不等式は Klamkin の不等式で $n = 2$ とおいたときの式になるから成立する。

(ii) ①において x, y, z のところに xa^2, yb^2, zc^2 を代入すると

$$yc^2 \cdot zc^2 \cdot a^2 + \cdot zc^2 \cdot xa^2 \cdot b^2 + xa^2 \cdot yb^2 \cdot c^2 \leqq R^2(xa^2 + yb^2 + zc^2)^2$$

$$(xy + yz + zx)a^2b^2c^2 \leqq R^2(xa^2 + yb^2 + zc^2)^2$$

$$\sqrt{xy+yz+zx} \cdot abc \leqq R(xa^2 + yb^2 + zc^2)$$

$$\sqrt{xy+yz+zx} \cdot 4RS \leqq R(xa^2 + yb^2 + zc^2)$$

よって

$$xa^2 + yb^2 + zc^2 \geqq 4S\sqrt{xy+yz+zx}. \qquad \blacksquare$$

例題 2　鋭角三角形 ABC において次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(2000 MOSP Mathematical Olympiad Summer Program)

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2 + \left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2 + \left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2 + 8\cos A\cos B\cos C \geqq 4. \qquad \cdots\cdots ①$$

解 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$ だから

$$① \iff \left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2 \geqq 4(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C). \quad \cdots\cdots ②$$

Klamkin の不等式で $n=1$ とおいた

$$x^2+y^2+z^2 \geqq 2(yz\cos A+zx\cos B+xy\cos C) \quad \cdots\cdots ③$$

で $x=\dfrac{\cos B}{\cos C}, y=\dfrac{\cos C}{\cos A}, z=\dfrac{\cos A}{\cos B}$ とおくと

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2\\ \geqq &\left(\frac{\cos C}{\cos B}\cdot\cos A+\frac{\cos A}{\cos C}\cdot\cos B+\frac{\cos B}{\cos A}\cdot\cos C\right).\end{aligned} \quad \cdots\cdots ④$$

③で $x=\sqrt{\dfrac{\cos B\cos C}{\cos A}}, y=\sqrt{\dfrac{\cos C\cos A}{\cos B}}, z=\sqrt{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos C}}$ とおくと

$$\begin{gathered}\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}+\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\\ \geqq 2\left(\cos A\cdot\cos A+\cos B\cdot\cos B+\cos C\cdot\cos C\right)\end{gathered}$$

すなわち

$$2\left((\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}+\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right) \geqq 4\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right). \quad \cdots\cdots ⑤$$

④と ⑤から②を得る。 ■

標準編で次の問題を扱った。

問題４　△ABC に対して，以下を示せ。

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$$

逆に，正の実数 x, y, z が $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ をみたすとき，ある鋭角三角形 ABC が存在して，$x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C$ をみたす。

例題 3　a, b, c は正の実数とする。次の 2 つの等式をみたす正の実数 x, y, z を決定せよ。 (1995 IMO shortlist)

$$x+y+z=a+b+c$$
$$4xyz-(a^2x+b^2y+c^2z)=abc$$

解 $a^2x+b^2y+c^2z+abc=4xyz$ の両辺を $4xyz$ で割ると

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{yz}}\right)^2+\left(\frac{b}{2\sqrt{zx}}\right)^2+\left(\frac{c}{2\sqrt{xy}}\right)^2+2\cdot\frac{a}{2\sqrt{yz}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{zx}}\cdot\frac{c}{2\sqrt{xy}}=1$$

のように変形できるから，ある鋭角三角形 ABC が存在して

$$\frac{a}{2\sqrt{yz}}=\cos A, \frac{b}{2\sqrt{zx}}=\cos B, \frac{c}{2\sqrt{xy}}=\cos C$$

をみたす。

$a=2\sqrt{yz}\cos A, b=2\sqrt{zx}\cos B, c=2\sqrt{xy}\cos C$ を $x+y+z=a+b+c$ に代入すると

$$x+y+z=2(\sqrt{yz}\cos A+\sqrt{zx}\cos B+\sqrt{xy}\cos C). \qquad \cdots\cdots ①$$

これは Klamkin の不等式において $n=1$， のところに を代入した不等式で等号が成り立つ場合になっている。

①を変形（平方完成）していく。

$$x-2(\sqrt{z}\cos B+\sqrt{y}\cos C)\sqrt{x}+y+z-2\sqrt{yz}\cos A=0$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{x}-\left(\sqrt{z}\cos B+\sqrt{y}\cos C\right)\right)^2-\left(\sqrt{z}\cos B+\sqrt{y}\cos C\right)^2\\
&\qquad+y+z-2\sqrt{yz}\cos A=0,\\
&\left(\sqrt{x}-\left(\sqrt{z}\cos B+\sqrt{y}\cos C\right)\right)^2+y(1-\cos^2 C)+z(1-\cos^2 B)\\
&\qquad-2\sqrt{yz}(\cos B\cos C+\cos A)=0,\\
&\left(\sqrt{x}-\left(\sqrt{z}\cos B+\sqrt{y}\cos C\right)\right)^2+y\sin^2 C+z\sin^2 B\\
&\qquad-2\sqrt{yz}(\cos B\cos C+\cos A)=0,\\
&\left(\sqrt{x}-\left(\sqrt{z}\cos B+\sqrt{y}\cos C\right)\right)^2+\left(\sqrt{y}\sin C-\sqrt{z}\sin B\right)^2\\
&\qquad-2\sqrt{yz}(\cos B\cos C-\sin B\sin C+\cos A)=0,\\
&\left(\sqrt{x}-\left(\sqrt{z}\cos B+\sqrt{y}\cos C\right)\right)^2+\left(\sqrt{y}\sin C-\sqrt{z}\sin B\right)^2\\
&\qquad-2\sqrt{yz}(\cos(B+C)+\cos A)=0,
\end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{x}-\left(\sqrt{z}\cos B+\sqrt{y}\cos C\right)\right)^2+\left(\sqrt{y}\sin C-\sqrt{z}\sin B\right)^2=0$$

したがって

$$\sqrt{x}-\left(\sqrt{z}\cos B+\sqrt{y}\cos C\right)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

かつ

$$\sqrt{y}\sin C-\sqrt{z}\sin B=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

②の両辺に $\sin C$ をかけて③を用いると

$$\begin{aligned}\sqrt{x}\sin C&=\sqrt{z}\cos B\sin C+\sqrt{y}\sin C\cos C\\&=\sqrt{z}\cos B\sin C+\sqrt{z}\sin B\cos C\\&=\sqrt{z}\sin(B+C)=\sqrt{z}\sin A\end{aligned}$$

から

$$\sqrt{x}\sin C=\sqrt{z}\sin A. \qquad \cdots\cdots ④$$

③，④から

$$\frac{\sqrt{x}}{\sin A}=\frac{\sqrt{y}}{\sin B}=\frac{\sqrt{z}}{\sin C}.$$

$$\begin{aligned}c+a&=2\sqrt{xy}\cos C+2\sqrt{yz}\cos A=2\sqrt{y}\left(\sqrt{x}\cos C+\sqrt{z}\cos A\right)\\&=2y\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\cos C+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}\cos A\right)\\&=2y\left(\frac{\sin A}{\sin B}\cos C+\frac{\sin C}{\sin B}\cos A\right)\\&=2y\cdot\frac{\sin A\cos C+\cos C\sin C}{\sin B}\\&=2y\cdot\frac{\sin(A+C)}{\sin B}=2y\cdot\frac{\sin B}{\sin B}\\&=2y\end{aligned}$$

から $y=\dfrac{c+a}{2}$ を得る。

同様にして $z=\dfrac{a+b}{2},x=\dfrac{b+c}{2}$ が成り立つから

$$x=\frac{b+c}{2},y=\frac{c+a}{2},z=\frac{a+b}{2}. \qquad \blacksquare$$

例題 4　正の実数 u, v, w が $u+v+w+\sqrt{uvw}=4$ をみたすとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。　(2007 IMO Chinese Team Selection Test)

$$\sqrt{\frac{vw}{u}}+\sqrt{\frac{wu}{v}}+\sqrt{\frac{uv}{w}} \geqq u+v+w.$$

解 $u+v+w+\sqrt{uvw}=4$ の両辺を 4 で割り

$$\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{w}}{2}\right)+2\cdot\frac{\sqrt{u}}{2}\cdot\frac{\sqrt{v}}{2}\cdot\frac{\sqrt{w}}{2}=1$$

と変形すると

$$\frac{\sqrt{u}}{2}=\cos A, \frac{\sqrt{v}}{2}=\cos B, \frac{\sqrt{w}}{2}=\cos C,\ 0<A, B, C<\frac{\pi}{2}$$

をみたす鋭角三角形 ABC が存在する。

$$u=4\cos^2 A, v=4\cos^2 B, w=4\cos^2 C$$

となるから

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{vw}{u}}+\sqrt{\frac{wu}{v}}+\sqrt{\frac{uv}{w}} \geqq u+v+w \\
\Longleftrightarrow &\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}+\frac{\cos A\cos B}{\cos C} \geqq 2\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right). \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

Klamkin の不等式で $n=1$ とおいた

$$x^2+y^2+z^2 \geqq 2(yz\cos A+zx\cos B+xy\cos C)$$

で $x=\sqrt{\dfrac{\cos B\cos C}{\cos A}}, y=\sqrt{\dfrac{\cos C\cos A}{\cos B}}, z=\sqrt{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos C}}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}+\frac{\cos A\cos B}{\cos C} \\
&\geqq 2\left(\cos A\cdot\cos A+\cos B\cdot\cos B+\cos C\cdot\cos C\right)
\end{aligned}$$

すなわち①を得る。　■

例題 5　n は 2 以上の整数とする。

$i=1,2,\ldots,n$ に対して，$\alpha_i,\beta_i>0$ で $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i=\pi$ をみたしている。

このとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。　(1998 IMO Shortlist)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i}\leqq\sum_{i=1}^{n}\cot\alpha_i. \qquad \cdots\cdots ①$$

解 数学的帰納法で証明する。

(i) $n=2$ の場合

$$① \Longleftrightarrow \frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}\leqq\cot\alpha_1+\cot\alpha_2.$$

$\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2=\pi$ だから

$$\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}=\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos(\pi-\beta_1)}{\sin(\pi-\alpha_1)}=\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{-\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}=0,$$

$$\cot\alpha_1+\cot\alpha_2=\cot\alpha_1+\cot(\pi-\alpha_1)=\cot\alpha_1-\cot\alpha_1=0.$$

したがって $n=2$ のとき①は成立する。

(ii) $n=3$ の場合 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ は $\triangle$ABC の 3 つの内角とする。

$2S=bc\sin\alpha_1=ca\sin\alpha_2=ab\sin\alpha_3$ と余弦定理から

$$\cot\alpha_1=\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{bc}{2S}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}.$$

同様にして $\cot\alpha_2=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{4S},\cot\alpha_2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$ となるから

$$\sum_{i=1}^{3}\cot\alpha_i=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

すなわち

$$a^2+b^2+c^2=4S\sum_{i=1}^{3}\cot\alpha_i.$$

β_1,β_2,β_3 はある三角形の 3 つの内角だから，Klamkin の不等式で $n=1$ とおいた

$$x^2+y^2+z^2\geqq 2(yz\cos\beta_1+zx\cos\beta_2+xy\cos\beta_3)$$

で $x=a, y=b, z=c$ とおくと

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &\geqq 2(bc\cos\beta_1+ca\cos\beta_2+ab\cos\beta_3)\\
&=4\left(\frac{1}{2}bc\sin\alpha_1\cdot\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{1}{2}bc\sin\alpha_2\cdot\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}+\frac{1}{2}bc\sin\alpha_3\cdot\frac{\cos\beta_3}{\sin\alpha_3}\right)\\
&=4\left(S\cdot\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+S\cdot\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}+S\cdot\frac{\cos\beta_3}{\sin\alpha_3}\right)\\
&=4S\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i}.
\end{aligned}
$$

$a^2+b^2+c^2=4S\sum\limits_{i=1}^{3}\cot\alpha_i$ であったから

$$4S\sum_{i=1}^{3}\cot\alpha_i \geqq 4S\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i}$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{3}\cot\alpha_i \geqq \sum_{i=1}^{3}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i}.$$

したがって $n=3$ のとき①は成立する。

(iii) $n \geqq 4$ の場合

$n-1$ 以下で①が成り立つと仮定する。

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=(\alpha_1+\alpha_2)+\sum_{i=3}^{n}\alpha_i=\pi, \sum_{i=1}^{n}\beta_i=(\beta_1+\beta_2)+\sum_{i=3}^{n}\beta_i=\pi$$

だから，仮定により

$$\frac{\cos(\beta_1+\beta_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}+\sum_{i=3}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i} \leqq \cot(\alpha_1+\alpha_2)+\sum_{i=3}^{n}\cot\alpha_i. \qquad \cdots\cdots ②$$

また

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i} &= \left(\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}-\frac{\cos(\beta_1+\beta_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\right)+\frac{\cos(\beta_1+\beta_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}+\sum_{i=3}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i}\\
&=\left(\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}+\frac{\cos(\pi-\beta_1-\beta_2)}{\sin(\pi-\alpha_1-\alpha_2)}\right)+\frac{\cos(\beta_1+\beta_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}+\sum_{i=3}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i}.
\end{aligned}
$$

$\cdots\cdots$ ③

$$\alpha_1'=\alpha_1, \alpha_2'=\alpha_2, \alpha_3'=\pi-\alpha_1-\alpha_2,\ \beta_1'=\beta_1, \beta_2'=\beta_2, \beta_3'=\pi-\beta_1-\beta_2$$

とおくと，$\alpha_i', \beta_i' > 0$ で $\sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i' = \sum\limits_{i=1}^{3} \beta_i' = \pi$ をみたしている。
$n = 3$ のとき①が成り立つことから

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\cos \beta_i'}{\sin \alpha_i'} \leqq \sum_{i=1}^{3} \cot \alpha_i'$$

すなわち

$$\begin{aligned}\frac{\cos \beta_1}{\sin \alpha_1} + \frac{\cos \beta_2}{\sin \alpha_2} + \frac{\cos(\pi - \beta_1 - \beta_2)}{\sin(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} &\leqq \cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 + \cot(\pi - \alpha_1 - \alpha_2) \\ &= \cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 - \cot(\alpha_1 + \alpha_2)\end{aligned}$$

から

$$\frac{\cos \beta_1}{\sin \alpha_1} + \frac{\cos \beta_2}{\sin \alpha_2} + \frac{\cos(\pi - \beta_1 - \beta_2)}{\sin(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} \leqq \cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 - \cot(\alpha_1 + \alpha_2). \quad \cdots\cdots ④$$

②，③，④より

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos \beta_i}{\sin \alpha_i} &= \left(\frac{\cos \beta_1}{\sin \alpha_1} + \frac{\cos \beta_2}{\sin \alpha_2} + \frac{\cos(\pi - \beta_1 - \beta_2)}{\sin(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} \right) + \frac{\cos(\beta_1 + \beta_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} + \sum_{i=3}^{n} \frac{\cos \beta_i}{\sin \alpha_i} \\ &\leqq \cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 - \cot(\alpha_1 + \alpha_2) + \cot(\alpha_1 + \alpha_2) + \sum_{i=3}^{n} \cot \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \cot \alpha_i\end{aligned}$$

となり，n のときも成立する。 ■

例題 6　x, y, z は正の実数で $A + B + C = \pi$ とするとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。(Barrow の不等式)

$$\frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z} \geqq x \cos A + y \cos B + z \cos C. \quad \cdots\cdots ①$$

解 Klamkin の不等式で $n = 1$ とおくと，p, q, r が実数のとき

$$p^2 + q^2 + r^2 \geqq 2(qr \cos A + rp \cos B + pq \cos C)$$

が成り立つ。

$$p = \sqrt{\frac{yz}{x}}, q = \sqrt{\frac{zx}{y}}, r = \sqrt{\frac{xy}{z}}$$

とおくと

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z} \geqq 2(x\cos A+y\cos B+z\cos C)$$

すなわち

$$\frac{yz}{2x}+\frac{zx}{2y}+\frac{xy}{2z} \geqq x\cos A+y\cos B+z\cos C. \qquad \blacksquare$$

別解 拡張した形で証明できる。

任意の実数 x, y, z に対して

$$(xz\cos A+yz\cos B-xy)^2+(xz\sin A-yz\sin B)^2 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。

②を変形する。

$$\begin{aligned} &y^2z^2(\cos^2 B+\sin^2 B)+z^2x^2(\cos^2 A+\sin^2 A)+x^2y^2 \\ &\qquad +2xyz^2(\cos A\cos B-\sin A\sin B)-2xy^2z\cos B-2x^2yz\cos A \geqq 0 \end{aligned}$$

$$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2xyz^2\cos(A+B)-2xy^2z\cos B-2x^2yz\cos A \geqq 0$$

$A+B=\pi-C$ を使うと

$$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-2xyz^2\cos C-2xy^2z\cos B-2x^2yz\cos A \geqq 0$$

よって

$$2x^2yz\cos A+2xy^2z\cos B+2xyz^2\cos C \leqq y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2. \qquad \cdots\cdots ③$$

$xyz>0$ のとき，③の両辺を $2xyz(>0)$ で割ると

$$x\cos A+y\cos B+z\cos C \leqq \frac{yz}{2x}+\frac{zx}{2y}+\frac{xy}{2z}.$$

$xyz<0$ のとき，③の両辺を $2xyz(<0)$ で割ると

$$x\cos A+y\cos B+z\cos C \geqq \frac{yz}{2x}+\frac{zx}{2y}+\frac{xy}{2z}. \qquad \blacksquare$$

例題 7　m は 0 以上の整数とする。鋭角三角形 ABC において，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sum_{cyc}\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^{m+1} \geqq \frac{3}{2^{m+1}}. \qquad \cdots\cdots ①$$

解 Klamkin の不等式で $n=1$ とおくと，x, y, z が実数のとき

$$x^2+y^2+z^2 \geqq 2(yz\cos A+zx\cos B+xy\cos C) \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。

②で $x=\sqrt{\dfrac{\cos B\cos C}{\cos A}}, y=\sqrt{\dfrac{\cos C\cos A}{\cos B}}, z=\sqrt{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos C}}$ とおくと

$$\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}+\frac{\cos A\cos B}{\cos C} \geqq 2\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right). \qquad \cdots\cdots ③$$

ここで $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \geqq \dfrac{3}{4}$ であるから

$$\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}+\frac{\cos A\cos B}{\cos C} \geqq \frac{3}{2}. \qquad \cdots\cdots ③$$

Radon の不等式と (2) から

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^{m+1} \\
&= \frac{\left(\dfrac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^{m+1}}{1^m}+\frac{\left(\dfrac{\cos B\cos C}{\cos A}\right)^{m+1}}{1^m}+\frac{\left(\dfrac{\cos C\cos A}{\cos B}\right)^{m+1}}{1^m} \\
&= \frac{\left(\displaystyle\sum_{cyc}\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^{m+1}}{(1+1+1)^m} \\
&\geqq \frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{m+1}}{3^m}=\frac{3}{2^{m+1}}.
\end{aligned}$$

したがって①は成立する。 ■

別解 $\frac{\cos A\cos B}{\cos C}$ を $\tan A, \tan B, \tan C$ の式に変形する。

$$\begin{aligned}
\frac{\cos A\cos B}{\cos C} &= \frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\cos A\cos B}{\sin C}=\tan C\cdot\frac{\cos A\cos B}{\sin(\pi-A-B)} \\
&= \tan C\cdot\frac{\cos A\cos B}{\sin(A+B)}=\tan C\cdot\frac{\cos A\cos B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B} \\
&= \tan C\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}} \\
&= \frac{\tan C}{\tan A+\tan B}
\end{aligned}$$

より

$$\sum_{cyc} \frac{\cos A \cos B}{\cos C} = \sum_{cyc} \frac{\tan C}{\tan A + \tan B}.$$

Nesbitt **の不等式**

p, q, r が正の実数のとき $\dfrac{p}{q+r} + \dfrac{p}{q+r} + \dfrac{p}{q+r} \geqq \dfrac{3}{2}.$

を使うと

$$\sum_{cyc} \frac{\cos A \cos B}{\cos C} = \sum_{cyc} \frac{\tan C}{\tan A + \tan B} = \sum_{cyc} \frac{\tan A}{\tan B + \tan C} \geqq \frac{3}{2}$$

から

$$\sum_{cyc} \frac{\cos A \cos B}{\cos C} \geqq \frac{3}{2}. \qquad \cdots\cdots ②$$

よって $m = 0$ のとき①は成立する。

②を使って一般の $m \geqq 1$ の場合を証明する。

m が正の整数のとき，$f(x) = x^{m+1} \quad (x > 0)$ は凸関数だから，

p, q, r が正の実数のとき $p^{m+1} + q^{m+1} + r^{m+1} \geqq 3\left(\dfrac{p+q+r}{3}\right)^{m+1}.$

$p = \dfrac{\cos A \cos B}{\cos C}, q = \dfrac{\cos B \cos C}{\cos A}, r = \dfrac{\cos C \cos A}{\cos B}$ とおくと

$$\sum_{cyc} \left(\frac{\cos A \cos B}{\cos C}\right)^{m+1} \geqq 3\left(\frac{\displaystyle\sum_{cyc} \frac{\cos A \cos B}{\cos C}}{3}\right)^{m+1} \geqq 3\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^{m+1} = \frac{3}{2^{m+1}}$$

となり，①は成立する。 ■

2　ガウス和　Quadratic Gauss Sum

ガウスは

p を奇素数とすると

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left(\frac{m}{p}\right)e^{\frac{2\pi i m}{p}}=\begin{cases}\sqrt{p} & p\equiv 1 \pmod 4\\ i\sqrt{p} & p\equiv 3 \pmod 4\end{cases}\tag{2.1}$$

が成り立つことを証明した。$\left(\frac{m}{p}\right)$ は Legendre 記号と呼ばれている。

$\xi=e^{\frac{2\pi i}{p}}=\cos\frac{2\pi i}{p}+i\sin\frac{2\pi i}{p}$　として

$$G_p=\sum_{m=1}^{p-1}\left(\frac{m}{p}\right)e^{\frac{2\pi i m}{p}}=\sum_{m=1}^{p-1}\left(\frac{m}{p}\right)\xi^m$$

とおく。

[第 1 段階] $G_p^2=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p$　$\cdots\cdots$ ①

となることを示す。

$$G_p^2=\sum_{m=1}^{p-1}\left(\frac{m}{p}\right)\xi^m\cdot\sum_{l=1}^{p-1}\left(\frac{l}{p}\right)\xi^l=\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right)\xi^m\xi^l.$$

固定した t $(1\leqq t\leqq p-1)$ に対して

$$m\equiv lt \pmod p \qquad (m=lt+kp, k\in\mathbb{Z})$$

となるような m をとると，$\left(\frac{m}{p}\right)=\left(\frac{lt}{p}\right)=\left(\frac{l}{p}\right)\left(\frac{t}{p}\right)$ となり

$$\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right)=\left(\frac{l}{p}\right)^2\left(\frac{t}{p}\right)=\left(\frac{t}{p}\right).$$

また $\xi^m\xi^l=\xi^{lt+kp}\xi^l=(\xi^p)^k\xi^{l(t+1)}=\xi^{l(t+1)}$ だから

$$G_p^2=\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right)\xi^{m+l}=\sum_{t=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\frac{t}{p}\right)\xi^{l(t+1)}=\sum_{t=1}^{p-1}\left(\frac{t}{p}\right)\sum_{l=1}^{p-1}\xi^{l(t+1)}$$

となる。

$\sum_{l=1}^{p-1}\xi^{l(t+1)}$ については

$t=p-1$ のとき

$$\sum_{l=1}^{p-1}\xi^{l(t+1)}=\sum_{l=1}^{p-1}\xi^{lp}=\sum_{l=1}^{p-1}1=p-1,$$

$1\leqq t<p-1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\xi^{(t+1)}\right)^{l}=\sum_{l=1}^{p-1}\xi^{l(t+1)}&=\frac{\xi^{t+1}\left(1-(\xi^{t+1})^{p-1}\right)}{1-\xi^{t+1}}=\frac{\xi^{t+1}-(\xi^{t+1})^{p}}{1-\xi^{t+1}}\\&=\frac{\xi^{t+1}-(\xi^{p})^{t+1}}{1-\xi^{t+1}}=\frac{\xi^{t+1}-1}{1-\xi^{t+1}}=-1\end{aligned}$$

であるから

$$G_p^2=\sum_{t=1}^{p-1}\left(\frac{t}{p}\right)\sum_{l=1}^{p-1}\xi^{l(t+1)}=\sum_{t=1}^{p-2}\left(\frac{t}{p}\right)\cdot(-1)+\left(\frac{p-1}{p}\right)\cdot(p-1).$$

さらに $\sum_{t=1}^{p-1}\left(\frac{t}{p}\right)=0$ より $\sum_{t=1}^{p-2}\left(\frac{t}{p}\right)=-\left(\frac{p-1}{p}\right)$ なので

$$\begin{aligned}G_p^2&=-\sum_{t=1}^{p-2}\left(\frac{t}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right)\cdot(p-1)\\&=\left(\frac{p-1}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right)(p-1)\\&=\left(\frac{p-1}{p}\right)p\\&=\left(\frac{-1}{p}\right)p.\end{aligned}$$

$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ だから $G_p^2=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p.$

[第 2 段階] $(-1)^{\frac{p-1}{2}}p=\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\xi^{2k-1}-\xi^{-(2k-1)}\right)$ が成り立つことを示す。

$x^p=1$ の解は ξ^j $(j=0,1,\ldots,p-1)$ だから

$$x^p-1=(x-1)\prod_{k=1}^{p-1}(x-\xi^j)$$

が成り立つので，両辺を $x-1$ で割った

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1=\prod_{k=1}^{p-1}(x-\xi^j)$$

は x についての恒等式だから，$x=1$ とおくと

$$p=\prod_{k=1}^{p-1}(1-\xi^j).$$

証明すべき等式の右辺を

$$H=\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\xi^{2k-1}-\xi^{-(2k-1)}\right)=(\xi-\xi^{-1})(\xi^3-\xi^{-3})\cdots(\xi^{p-2}-\xi^{-(p-2)})$$

とおく。

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{p-1}{2}}H&=(\xi^{-1}-\xi)(\xi^{-3}-\xi^3)\cdots(\xi^{-(p-2)}-\xi^{p-2})\\&=(\xi^{p-1}-\xi^{-(p-1)})(\xi^{p-3}-\xi^{-(p-3)})\cdots(\xi^2-\xi^{-2})\\&=(\xi^2-\xi^{-2})(\xi^4-\xi^{-4})\cdots(\xi^{p-1}-\xi^{-(p-1)})\end{aligned}$$

に $H=(\xi-\xi^{-1})(\xi^3-\xi^{-3})\cdots(\xi^{p-2}-\xi^{-(p-2)})$ をかけると

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{p-1}{2}}H^2&=(\xi^{-1}-\xi)(\xi^2-\xi^{-2})(\xi^{-3}-\xi^3)\cdots(\xi^{-(p-2)}-\xi^{p-2})(\xi^{p-1}-\xi^{-(p-1)})\\&=\xi(1-\xi^{-2})\xi^2(1-\xi^{-4})\cdots\xi^{p-1}(1-\xi^{-2(p-1)})\\&=\xi^{1+2+\cdots+(p-1)}(1-\xi^{-2})(1-\xi^{-4})\cdots(1-\xi^{-2(p-1)})\\&=\xi^{\frac{(p-1)p}{2}}(1-\xi^{-2})(1-\xi^{-4})\cdots(1-\xi^{-2(p-1)})\\&=(1-\xi^{-2})(1-\xi^{-4})\cdots(1-\xi^{-2(p-1)}).\end{aligned}$$

$\gcd(-2,p)=1$ より，$\{-2\cdot 1,-2\cdot 2,\dots,-2\cdot(p-1)\}$ は $\mod p$ で $\{1,2,\dots,p-1\}$ と等しいから

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{p-1}{2}}H^2&=(1-\xi^{-2})(1-\xi^{-4})\cdots(1-\xi^{-2(p-1)})\\&=(1-\xi)(1-\xi^2)\cdots(1-\xi^{p-1})=\prod_{j=1}^{p-1}(1-\xi^j)=p\end{aligned}$$

すなわち

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}H^2=p.$$

$\because$　$k \equiv l \pmod{p}$ のとき，$k = l + mp \quad (m \in \mathbb{Z})$ とおけるから

$$\xi^k = \xi^{l+mp} = \xi^l \cdot (\xi^p)^m = \xi^l.$$

よって

$$(1-\xi^{-2})(1-\xi^{-4})\cdots(1-\xi^{-2(p-1)}) = (1-\xi)(1-\xi^2)\cdots(1-\xi^{p-1})$$

が成り立つ。

p は奇素数で，$(-1)^{\frac{p-1}{2}}H^2 = p$ が成り立つから

$$H^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p. \qquad \cdots\cdots ②$$

[第 3 段階]

$$H = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\xi^{2k-1} - \xi^{-(2k-1)}\right) = \begin{cases} \sqrt{p} & p \equiv 1 \pmod{4} \\ i\sqrt{p} & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \qquad \cdots\cdots ③$$

を示す。

$$H = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\xi^{2k-1} - \xi^{-(2k-1)}\right) = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} 2i\sin\frac{(2k-1)\cdot 2\pi}{p} = i^{\frac{p-1}{2}}\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} 2\sin\frac{(4k-2)\pi}{p}$$

で，$1 \leqq k \leqq \dfrac{p-1}{2}$ のとき

$$\sin\frac{(4k-2)\pi}{p} < 0 \iff \frac{p+2}{4} < k \leqq \frac{p-1}{2}$$

であることに注意したい。

$p \equiv 1 \pmod{4}$ のとき $\frac{p+3}{4} \leqq k \leqq \frac{p-1}{2}$ を満たす整数 k は $\frac{p-1}{2} - \frac{p+3}{4} + 1 = \frac{p-1}{4}$ 個の $\sin\frac{(4k-2)\pi}{p}$ が負になるので $\displaystyle\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} 2\sin\frac{(4k-2)\pi}{p}$ の符号は $(-1)^{\frac{p-1}{4}}$ となる。

$i^{\frac{p-1}{2}} = (i^2)^{\frac{p-1}{4}} = (-1)^{\frac{p-1}{4}}$ とあわせると，H の符号は $(-1)^{\frac{p-1}{4}} \cdot (-1)^{\frac{p-1}{4}} =$ で正となる。

$H > 0, (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$ だから，②より

$$H = \sqrt{p}.$$

$p \equiv 3 \pmod 4$ のとき $\frac{p+5}{4} \leqq k \leqq \frac{p-1}{2}$ を満たす整数 k は $\frac{p-1}{2} - \frac{p+5}{4} + 1 = \frac{p-3}{4}$ 個の $\sin \frac{(4k-2)\pi}{p}$ が負になるので $\displaystyle\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} 2\sin \frac{(4k-2)\pi}{p}$ の符号は $(-1)^{\frac{p-3}{4}}$ となる。

$p = 4m+3$ $(m \geqq 0)$ とおくと，$i^{\frac{p-1}{2}} = i^{2m+1} = i(i^2)^m = i(-1)^{\frac{p-3}{4}}$ とあわせると，$\dfrac{H}{i}$ の符号は $(-1)^{\frac{p-3}{4}} \cdot (-1)^{\frac{p-3}{4}} =$ で正となる。

$\dfrac{H}{i} > 0, (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$ だから，②より

$$H = i\sqrt{p}.$$

[第 4 段階] ① と②より $G_p^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p, H^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$ だから $G_p^2 = H^2$ すなわち

$$G_p = \pm H.$$

$G_p = \epsilon H$ とおくと $\epsilon \in \{-1, 1\}$ となるが，$\epsilon = 1$ であることを示す。

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) x^j - \epsilon \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(x^{2k-1} - x^{p-(2k-1)}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \xi^j - \epsilon \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\xi^{2k-1} - \xi^{-(2k-1)}\right) \\ &= G_p - \epsilon H = 0, \\ f(1) &= \sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) - \epsilon \cdot 0 \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

ξ の $\mathbb{Q}$ における最小多項式は $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} x^k$ だから， $f(x)$ は $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} x^k$ で割り切れる。
$x-1$ と $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} x^k$ は既約だから $\mathrm{Q}[x]$ で互いに素となり， $f(x)$ は $(x-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} x^k = x^p - 1$ で割り切れることになる。
したがって，$h(x) \in \mathrm{Q}[x]$ が存在して $f(x) = (x^p-1)h(x)$ とかける。
$f(x), x^p - 1 \in \mathrm{Z}[x]$ だから，この等式により $h(x) \in \mathrm{Z}[x]$ がわかる。

$x=e^z$ とおくと，$f(e^z)=(e^{pz}-1)h(e^z)$ かつ

$$f(e^z)=\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)e^{jz}-\epsilon\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(e^{(2k-1)z}-e^{(p-(2k-1))z}\right)$$

より

$$\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)e^{jz}-\epsilon\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(e^{(2k-1)z}-e^{(p-(2k-1))z}\right)=(e^{pz}-1)h(e^z). \qquad \cdots\cdots ④$$

④の両辺の $z^{\frac{p-1}{2}}$ の係数を比較する。

④の左辺の第 1 項 $\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)e^{jz}=\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(jz)^k$ の $z^{\frac{p-1}{2}}$ の係数は

$$\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)j^{\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{1}{(\frac{p-1}{2})!}$$

である。

④の左辺の第 2 項

$$\begin{aligned}&-\epsilon\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(e^{(2k-1)z}-e^{(p-(2k-1))z}\right)\\ =&-\epsilon\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(e^{(4k-p-2)z}-1\right)e^{(p-2k+1)z}\\ =&-\epsilon\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\underbrace{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\left((4k-p-2)z\right)^l}_{1\text{ 次以上}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left((p-2k+1)z\right)^m\right)\end{aligned}$$

の $z^{\frac{p-1}{2}}$ の項は，$1\leqq k\leqq\frac{p-1}{2}$ をみたす各 k に対して

$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}$ が 1 次で，$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left((p-2k+1)z\right)^m$ が定数項のときだから，$z^{\frac{p-1}{2}}$ の係数は

$$-\epsilon\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(4k-p-2)$$

である。

④の右辺の $z^{\frac{p-1}{2}}$ の係数は，A, B を $\gcd(B,p)=1$ である整数として $\dfrac{pA}{B}$ の形をしている。

$\because$ $h(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\cdots+h_mx^m \in \mathrm{Z}[x]$ とおくと

$$\begin{aligned}
&(e^{pz}-1)h(e^z)\\
&=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}(pz)^l\left(h_0+h_1e^z+h_2(e^z)^2+\cdots+h_m(e^z)^m\right)\\
&=p\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}(pz)^{l-1}z\left(h_0+h_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+h_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n!}+\cdots+h_m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(mz)^n}{n!}\right)
\end{aligned}$$

となるので，$z^{\frac{p-1}{2}}$ の係数は，A, B を $\gcd(A,B)=1$ である整数として $p\cdot\dfrac{A}{B}$ の形をしている。$\dfrac{A}{B}$ の作り方から分母 B の素因数は 未満なので $\gcd(B,p)=1$ である。

以上のことから

$$\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)j^{\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}-\epsilon\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(4k-p-2)=\frac{pA}{B}.$$

両辺に $\left(\frac{p-1}{2}\right)!B$ をかけると

$$B\left(\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)j^{\frac{p-1}{2}}-\epsilon\left(\frac{p-1}{2}\right)!\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(4k-p-2)\right)=p\left(\frac{p-1}{2}\right)!.$$

等式の左辺は p で割り切れるが， $\gcd(B,p)=1$ だから

$$\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)j^{\frac{p-1}{2}}-\epsilon\left(\frac{p-1}{2}\right)!\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(4k-p-2)$$

が p で割り切れなければならない。

$$\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)j^{\frac{p-1}{2}}\equiv\epsilon\left(\frac{p-1}{2}\right)!\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(4k-p-2)\pmod{p}. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

以下　mod p で考えていくことにする。

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)j^{\frac{p-1}{2}} &\equiv \epsilon\left(\frac{p-1}{2}\right)!\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(4k-p-2)\\ &\equiv \epsilon\left(\frac{p-1}{2}\right)!\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(4k-2)\\ &\equiv \epsilon\left(\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}\cdots 2\cdot 1\right)\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}2\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(2k-1)\\ &\equiv \epsilon\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(2k)\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(2k-1)\\ &\equiv \epsilon(p-1)!\\ &\equiv -\epsilon \pmod p. \qquad (\because \text{　ウィルソンの定理})\end{aligned}$$

オイラーの基準 (criterion) により，$j^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{j}{p}\right) \pmod p$ だから

$$\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)j^{\frac{p-1}{2}} \equiv \sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{j}{p}\right)\left(\frac{j}{p}\right) \equiv \sum_{j=1}^{p-1}1 \equiv p-1 \equiv -1 \pmod p.$$

したがって ⑤ より，$-1 \equiv -\epsilon \pmod p$ すなわち $\epsilon \equiv 1 \pmod p$ を得る。
$\epsilon \in \{-1, 1\}$ だから $\epsilon = 1$ となり，$G_p = H$.

③より

$$H = \begin{cases}\sqrt{p} & p \equiv 1 \pmod 4\\ i\sqrt{p} & p \equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

であったから

$$G_p = \begin{cases}\sqrt{p} & p \equiv 1 \pmod 4\\ i\sqrt{p} & p \equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

が成り立つ。 ■

注意 $G_p = \sum_{m=1}^{p-1}\left(\frac{m}{p}\right)e^{\frac{2\pi i m}{p}}$ は $\boldsymbol{G_p = \sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^2}{p}}}$ とも表される。

r は完全剰余系の中で平方剰余を動き，n は平方非剰余を動くとすると

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{p-1}e^{\frac{2\pi i x^2}{p}} &= 1+\sum_{x=1}^{p-1}\exp\left(2\pi i\cdot\frac{x^2}{p}\right)\\ &= 1+2\sum_{r}\exp\left(2\pi i\cdot\frac{r}{p}\right). \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$$0 = 1 + \sum_r \exp\left(2\pi i \cdot \frac{r}{p}\right) + \sum_n \exp\left(2\pi i \cdot \frac{n}{p}\right). \qquad \cdots\cdots ②$$

① − ② から

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^2}{p}} = \sum_r \exp\left(2\pi i \cdot \frac{r}{p}\right) - \sum_n \exp\left(2\pi i \cdot \frac{n}{p}\right) = \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) \exp\left(2\pi i \cdot \frac{x}{p}\right). \ \blacksquare$$

まとめると

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^2}{p}} = \begin{cases} \sqrt{p} & p \equiv 1 \pmod 4 \\ i\sqrt{p} & p \equiv 3 \pmod 4). \end{cases}$$

具体的に $p = 7, 11, 13$ のときの結果を示しておく。

$p = 7, u = \exp\left(\frac{2\pi i}{7}\right)$

$$u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 - u^6 = i\sqrt{7}$$

$p = 11, u = \exp\left(\frac{2\pi i}{11}\right)$

$$u - u^2 + u^3 + u^4 + u^5 - u^6 - u^7 - u^8 + u^9 - u^{10} = i\sqrt{11}$$

$p = 13, u = \exp\left(\frac{2\pi i}{13}\right)$

$$u - u^2 + u^3 + u^4 - u^5 - u^6 - u^7 - u^8 + u^9 + u^{10} - u^{11} + u^{12} = \sqrt{13}$$

参考 次の等式は興味深い。

任意の正の整数 p, q に対して，次の等式が成り立つ。(Landberg-Schaar relation)

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{n=0}^{p-1}\exp\left(\frac{2\pi i n^2 q}{p}\right)=\frac{e^{\frac{1}{4}\pi i}}{\sqrt{2q}}\sum_{n=0}^{2q-1}\exp\left(-\frac{\pi i n^2 p}{2q}\right). \tag{2.2}$$

(2.2) において $q=1$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{n=0}^{p-1}\exp\left(\frac{2\pi i n^2}{p}\right)\\
&=\frac{e^{\frac{1}{4}\pi i}}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{1}\exp\left(-\frac{\pi i n^2 p}{2}\right)\\
&=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\exp\left(-\frac{p\pi i}{2}\right)\right)\\
&=\frac{1+i}{2}\left(1+\cos\left(-\frac{p\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{p\pi}{2}\right)\right)\\
&=\frac{1+i}{2}\left(1+\cos\frac{p\pi}{2}-i\sin\frac{p\pi}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{p\pi}{2}+\sin\frac{p\pi}{2}\right)+i\cdot\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{p\pi}{2}-\sin\frac{p\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

となり，

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{n=0}^{p-1}\exp\left(\frac{2\pi i n^2}{p}\right)=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{n=0}^{p-1}\left(\cos\frac{2n^2\pi}{p}+i\sin\frac{2n^2\pi}{p}\right)$$

だから，実部と虚部を比較して次の結果を得る。

任意の正の整数 p に対して，次の等式が成り立つ。

$$\sum_{n=0}^{p-1}\cos\frac{2n^2\pi}{p}=\frac{\sqrt{p}}{2}\left(1+\cos\frac{p\pi}{2}+\sin\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{p-1}\sin\frac{2n^2\pi}{p}=\frac{\sqrt{p}}{2}\left(1+\cos\frac{p\pi}{2}-\sin\frac{p\pi}{2}\right)$$

例題 8　次の等式を証明せよ。

(i)　$\tan\dfrac{2\pi}{13}+4\sin\dfrac{6\pi}{13}=\tan\dfrac{6\pi}{13}-4\sin\dfrac{5\pi}{13}=\tan\dfrac{5\pi}{13}+4\sin\dfrac{2\pi}{13}$

(ii)　$\tan\dfrac{4\pi}{13}+4\sin\dfrac{\pi}{13}=-\tan\dfrac{\pi}{13}+4\sin\dfrac{3\pi}{13}=-\tan\dfrac{3\pi}{13}+4\sin\dfrac{4\pi}{13}$

解 1 次の補題を利用する。

補題　$w_k=\dfrac{2k\pi}{13}$ $(k=1,2,\ldots,12)$ とすると

$$\tan w_k=2\left(\sin 2w_k-\sin 4w_k+\sin 6w_k-\sin 8w_k+\sin 10w_k-\sin 12w_k\right)$$

が成り立つ。

証明 証明すべき等式の右辺を R とおくと

$$\begin{aligned}R\cos w_k&=2\sin 2w_k\cos w_k-2\sin 4w_k\cos w_k+2\sin 6w_k\cos w_k-2\sin 8w_k\cos w_k\\&\qquad+2\sin 10w_k\cos w_k-2\sin 12w_k\cos w_k\\&=\sin 3w_k+\sin w_k-(\sin 5w_k+\sin 3w_k)+\sin 7w_k+\sin 5w_k\\&\qquad-(\sin 9w_k+\sin 7w_k)+\sin 11w_k+\sin 9w_k-(\sin 13w_k+\sin 11w_k)\\&=\sin w_k-\sin 13w_k=\sin w_k-\sin 2k\pi\\&=\sin w_k.\end{aligned}$$

よって $R=\tan w_k$.　(q.e.d.)

(i)　$k=1$ のとき

$$\begin{aligned}\tan\frac{2\pi}{13}&=2\left(\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{8\pi}{13}+\sin\frac{12\pi}{13}-\sin\frac{16\pi}{13}+\sin\frac{20\pi}{13}-\sin\frac{24\pi}{13}\right)\\&=2\left(\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{5\pi}{13}+\sin\frac{\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}-\sin\frac{6\pi}{13}+\sin\frac{2\pi}{13}\right)\\&=2\left(\sin\frac{\pi}{13}+\sin\frac{2\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{5\pi}{13}-\sin\frac{6\pi}{13}\right)\end{aligned}$$

$k=3$ のとき

$$\begin{aligned}\tan\frac{6\pi}{13}&=2\left(\sin\frac{12\pi}{13}-\sin\frac{24\pi}{13}+\sin\frac{36\pi}{13}-\sin\frac{48\pi}{13}+\sin\frac{60\pi}{13}-\sin\frac{70\pi}{13}\right)\\&=2\left(\sin\frac{\pi}{13}+\sin\frac{2\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}+\sin\frac{5\pi}{13}+\sin\frac{6\pi}{13}\right)\end{aligned}$$

$k=4$ のとき

$$\begin{aligned}
\tan\frac{5\pi}{13} &= -\tan\frac{8\pi}{13} \\
&= -2\left(\sin\frac{16\pi}{13}-\sin\frac{32\pi}{13}+\sin\frac{48\pi}{13}-\sin\frac{64\pi}{13}+\sin\frac{80\pi}{13}-\sin\frac{96\pi}{13}\right) \\
&= 2\left(\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{6\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}+\sin\frac{\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}-\sin\frac{5\pi}{13}\right) \\
&= 2\left(\sin\frac{\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{5\pi}{13}+\sin\frac{6\pi}{13}\right)
\end{aligned}$$

以上の式から

$$\begin{aligned}
&\tan\frac{2\pi}{13}+4\sin\frac{6\pi}{13}=\tan\frac{6\pi}{13}-4\sin\frac{5\pi}{13}=\tan\frac{5\pi}{13}+4\sin\frac{2\pi}{13} \\
&=2\left(\sin\frac{\pi}{13}+\sin\frac{2\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{5\pi}{13}+\sin\frac{6\pi}{13}\right).
\end{aligned}$$

(ii) $k=2$ のとき

$$\begin{aligned}
\tan\frac{4\pi}{13} &= 2\left(\sin\frac{8\pi}{13}-\sin\frac{16\pi}{13}+\sin\frac{24\pi}{13}-\sin\frac{32\pi}{13}+\sin\frac{40\pi}{13}-\sin\frac{48\pi}{13}\right) \\
&= 2\left(\sin\frac{15\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}-\sin\frac{6\pi}{13}-\sin\frac{\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}\right) \\
&= 2\left(-\sin\frac{\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}+\sin\frac{5\pi}{13}-\sin\frac{6\pi}{13}\right)
\end{aligned}$$

$k=5$ のとき

$$\begin{aligned}
-\tan\frac{5\pi}{13} &= \tan\frac{10\pi}{13} \\
&= 2\left(\sin\frac{20\pi}{13}-\sin\frac{40\pi}{13}+\sin\frac{60\pi}{13}-\sin\frac{80\pi}{13}+\sin\frac{100\pi}{13}-\sin\frac{120\pi}{13}\right) \\
&= 2\left(-\sin\frac{6\pi}{13}+\sin\frac{\pi}{13}+\sin\frac{5\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}-\sin\frac{4\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}\right) \\
&= 2\left(\sin\frac{\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}-\sin\frac{4\pi}{13}+\sin\frac{5\pi}{13}-\sin\frac{6\pi}{13}\right)
\end{aligned}$$

$k=6$ のとき

$$\begin{aligned}
-\tan\frac{\pi}{13} &= \tan\frac{12\pi}{13} \\
&= 2\left(\sin\frac{24\pi}{13}-\sin\frac{48\pi}{13}+\sin\frac{72\pi}{13}-\sin\frac{96\pi}{13}+\sin\frac{120\pi}{13}-\sin\frac{144\pi}{13}\right) \\
&= 2\left(-\sin\frac{2\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{6\pi}{13}+\sin\frac{5\pi}{13}-\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{\pi}{13}\right) \\
&= 2\left(\sin\frac{\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}-\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}+\sin\frac{5\pi}{13}-\sin\frac{6\pi}{13}\right)
\end{aligned}$$

以上の式から

$$\tan\frac{4\pi}{13}+4\sin\frac{\pi}{13}=-\tan\frac{\pi}{13}+4\sin\frac{3\pi}{13}=-\tan\frac{3\pi}{13}+4\sin\frac{4\pi}{13}$$
$$=2\left(\sin\frac{\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}+\sin\frac{5\pi}{13}-\sin\frac{6\pi}{13}\right).\qquad\blacksquare$$

解 2　$u=\exp\left(\dfrac{2\pi i}{13}\right)$ とおくと $u^{13}=1$ で

$$\sum_{m=1}^{12}\left(\frac{m}{13}\right)e^{\frac{2\pi i m}{13}}=\sum_{m=1}^{12}\left(\frac{m}{13}\right)u^m=\sqrt{13}$$

より

$$u-u^2+u^3+u^4-u^5-u^6-u^7-u^8+u^9+u^{10}-u^{11}+u^{12}=\sqrt{13}.\qquad\cdots\cdots ①$$

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$ より

$$\boldsymbol{4\sin x=-2i(e^{ix}-e^{-ix}),}$$

$$\boldsymbol{\tan x}=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})}=-i\cdot\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}=\boldsymbol{i\left(\frac{2}{1+e^{2ix}}-1\right)}.$$

この 2 つの等式を使う。

(i) $\tan\frac{2\pi}{13}+4\sin\frac{6\pi}{13}$ 等を u を用いて表す。

$$4\sin\frac{6\pi}{13}=-2i\left(e^{\frac{6\pi i}{13}}-e^{-\frac{6\pi i}{13}}\right)=-2i\left(u^3-u^{-3}\right)=-2i\left(u^3-u^{10}\right).$$

$$\begin{aligned}\tan\frac{2\pi}{13}&=i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{4\pi i}{13}}}-1\right)=i\left(\frac{2}{1+u^2}-1\right)=i\left(\frac{1+(u^2)^{13}}{1+u^2}-1\right)\\&=i\left(1-u^2+u^4-u^6+u^8-u^{10}+u^{12}-u^{14}+u^{16}-u^{18}+u^{20}-u^{22}+u^{24}-1\right)\\&=i\left(-u^2+u^4-u^6+u^8-u^{10}+u^{12}-u+u^3-u^5+u^7-u^9+u^{11}\right)\\&=i\left(-u-u^2+u^3+u^4-u^5-u^6+u^7+u^8-u^9-u^{10}+u^{11}+u^{12}\right).\end{aligned}$$

よって

$$\tan\frac{2\pi}{13}+4\sin\frac{6\pi}{13}$$
$$=i\left(-u-u^2-u^3+u^4-u^5-u^6+u^7+u^8-u^9+u^{10}+u^{11}+u^{12}\right).$$

$$4\sin\frac{2\pi}{13}=-2i\left(e^{\frac{2\pi i}{13}}-e^{-\frac{2\pi i}{13}}\right)=-2i\left(u-u^{-1}\right)=-2i\left(u^3-u^{12}\right).$$

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{5\pi}{13} &= i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{10\pi i}{13}}}-1\right) = i\left(\frac{2}{1+u^5}-1\right) = i\left(\frac{1+(u^5)^{13}}{1+u^5}-1\right) \\
&= i\left(1-u^5+u^{10}-u^{15}+u^{20}-u^{25}+u^{30}-u^{35}+u^{40}-u^{45}+u^{50}-u^{55}+u^{60}-1\right) \\
&= i\left(-u^5+u^{10}-u^2+u^7-u^{12}+u^4-u^9+u-u^6+u^{11}-u^3+u^8\right) \\
&= i\left(-u-u^2-u^3+u^4-u^5-u^6+u^7+u^8-u^9+u^{10}+u^{11}-u^{12}\right).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\tan\frac{5\pi}{13}+4\sin\frac{2\pi}{13} \\
&= i\left(-u-u^2-u^3+u^4-u^5-u^6+u^7+u^8-u^9+u^{10}+u^{11}+u^{12}\right).
\end{aligned}
$$

$$
4\sin\frac{5\pi}{13} = 4\sin\frac{18\pi}{13} = -2i\left(e^{\frac{8\pi i}{13}}-e^{-\frac{8\pi i}{13}}\right) = -2i\left(u^4-u^{-4}\right) = -2i\left(u^4-u^9\right).
$$

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{6\pi}{13} &= i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{12\pi i}{13}}}-1\right) = i\left(\frac{2}{1+u^6}-1\right) = i\left(\frac{1+(u^6)^{13}}{1+u^6}-1\right) \\
&= i\left(1-u^6+u^{12}-u^{18}+u^{24}-u^{30}+u^{36}-u^{42}+u^{48}-u^{54}+u^{60}-u^{66}+u^{72}-1\right) \\
&= i\left(-u^6+u^{12}-u^5+u^{11}-u^4+u^{10}-u^3+u^9-u^2+u^8-u+u^7\right) \\
&= i\left(-u-u^2-u^3-u^4-u^5-u^6+u^7+u^8+u^9+u^{10}+u^{11}+u^{12}\right).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\tan\frac{6\pi}{13}-4\sin\frac{5\pi}{13} \\
&= i\left(-u-u^2-u^3+u^4-u^5-u^6+u^7+u^8-u^9+u^{10}+u^{11}+u^{12}\right).
\end{aligned}
$$

以上のことから

$$
\tan\frac{2\pi}{13}+4\sin\frac{6\pi}{13} = \tan\frac{6\pi}{13}-4\sin\frac{5\pi}{13} = \tan\frac{5\pi}{13}+4\sin\frac{2\pi}{13}.
$$

(ii) (i) と同様にする。

$$
4\sin\frac{\pi}{13} = 4\sin\frac{12\pi}{13} = -2i\left(e^{\frac{12\pi i}{13}}-e^{-\frac{12\pi i}{13}}\right) = -2i\left(u^6-u^{-6}\right) = -2i\left(u^6-u^7\right).
$$

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{4\pi}{13} &= i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{8\pi i}{13}}}-1\right) = i\left(\frac{2}{1+u^4}-1\right) = i\left(\frac{1+(u^4)^{13}}{1+u^4}-1\right)\\
&= i\left(1-u^4+u^8-u^{12}+u^{16}-u^{20}+u^{24}-u^{28}+u^{32}-u^{36}+u^{40}-u^{44}+u^{48}-1\right)\\
&= i\left(-u^4+u^8-u^{12}+u^3-u^7+u^{11}-u^2+u^6-u^{10}+u-u^5+u^9\right)\\
&= i\left(u-u^2+u^3-u^4-u^5+u^6-u^7+u^8+u^9-u^{10}+u^{11}-u^{12}\right).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\tan\frac{4\pi}{13}+4\sin\frac{\pi}{13}\\
&= i\left(u-u^2+u^3-u^4-u^5-u^6+u^7+u^8+u^9-u^{10}+u^{11}-u^{12}\right).
\end{aligned}
$$

$$
4\sin\frac{3\pi}{13} = 4\sin\frac{10\pi}{13} = -2i\left(e^{\frac{10\pi i}{13}}-e^{-\frac{10\pi i}{13}}\right) = -2i\left(u^6-u^{-5}\right) = -2i\left(u^5-u^8\right).
$$

$$
\begin{aligned}
-\tan\frac{\pi}{13} &= -i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{2\pi i}{13}}}-1\right) = -i\left(\frac{2}{1+u}-1\right) = -i\left(\frac{1+u^{13}}{1+u}-1\right)\\
&= -i\left(1-u+u^2-u^3+u^4-u^5+u^6-u^7+u^8-u^9+u^{10}-u^{11}+u^{12}-1\right)\\
&= -i\left(-u+u^2-u^3+u^4-u^5+u^6-u^7+u^8-u^9+u^{10}-u^{11}+u^{12}\right)\\
&= i\left(u-u^2+u^3-u^4+u^5-u^6+u^7-u^8+u^9-u^{10}+u^{11}-u^{12}\right).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&-\tan\frac{\pi}{13}+4\sin\frac{3\pi}{13}\\
&= i\left(u-u^2+u^3-u^4-u^5-u^6+u^7+u^8+u^9-u^{10}+u^{11}-u^{12}\right).
\end{aligned}
$$

$$
4\sin\frac{4\pi}{13} = -2i\left(e^{\frac{4\pi i}{13}}-e^{-\frac{4\pi i}{13}}\right) = -2i\left(u^2-u^{-2}\right) = -2i\left(u^2-u^{11}\right).
$$

$$
\begin{aligned}
-\tan\frac{3\pi}{13} &= -i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{6\pi i}{13}}}-1\right) = -i\left(\frac{2}{1+u^3}-1\right) = -i\left(\frac{1+(u^3)^{13}}{1+u^3}-1\right)\\
&= -i\left(1-u^3+u^6-u^9+u^{12}-u^{15}+u^{18}-u^{21}+u^{24}-u^{27}+u^{30}-u^{33}+u^{36}-1\right)\\
&= -i\left(-u^3+u^6-u^9+u^{12}-u^2+u^5-u^8+u^{11}-u+u^4-u^7+u^{10}\right)\\
&= -i\left(-u-u^2-u^3+u^4+u^5+u^6-u^7-u^8-u^9+u^{10}+u^{11}+u^{12}\right)\\
&= i\left(u+u^2+u^3-u^4-u^5-u^6+u^7+u^8+u^9-u^{10}-u^{11}-u^{12}\right).
\end{aligned}
$$

よって

$$\begin{aligned}&-\tan\frac{3\pi}{13}+4\sin\frac{4\pi}{13}\\=&\,i\left(u-u^2+u^3-u^4-u^5-u^6+u^7+u^8+u^9-u^{10}+u^{11}-u^{12}\right).\end{aligned}$$

以上のことから

$$\tan\frac{4\pi}{13}+4\sin\frac{\pi}{13}=-\tan\frac{\pi}{13}+4\sin\frac{3\pi}{13}=-\tan\frac{3\pi}{13}+4\sin\frac{4\pi}{13}.\qquad\blacksquare$$

例題 9　$\tan\frac{2\pi}{13}+4\sin\frac{6\pi}{13}$ と $\tan\frac{4\pi}{13}+4\sin\frac{\pi}{13}$ の値をそれぞれ求めよ。

解　$u=\exp\left(\frac{2\pi i}{13}\right)$ とおくと $u^{13}=1$ で

$$\sum_{m=1}^{12}\left(\frac{m}{13}\right)e^{\frac{2\pi im}{13}}=\sum_{m=1}^{12}\left(\frac{m}{13}\right)u^m=\sqrt{13}$$

より

$$u-u^2+u^3+u^4-u^5-u^6-u^7-u^8+u^9+u^{10}-u^{11}+u^{12}=\sqrt{13}.\qquad\cdots\cdots ①$$

$A=u+u^3+u^4+u^9+u^{10}+u^{12}$, $B=u^2+u^5+u^6+u^7+u^8+u^{11}$ とおくと，①から

$$A-B=\sqrt{13}.$$

ところで

$$A+B=\sum_{k=1}^{12}u^k=\sum_{k=0}^{12}u^k-1=\frac{1-u^{13}}{1-u}-1=-1$$

だから，$A-B=\sqrt{13}$ とあわせて

$$A=\frac{\sqrt{13}-1}{2},\ B=-\frac{\sqrt{13}+1}{2}.$$

例題 8 の解 2 で示したように

$$\begin{aligned}&\tan\frac{2\pi}{13}+4\sin\frac{6\pi}{13}\\=&\,i\left(-u-u^2-u^3+u^4-u^5-u^6+u^7+u^8-u^9+u^{10}+u^{11}+u^{12}\right)\end{aligned}$$

が成り立つから $C = u^4 + u^7 + u^8 + u^{10} + u^{11} + u^{12},\ D = u + u^2 + u^3 + u^5 + u^6 + u^9$ とおくと，

$$\tan\frac{2\pi}{13} + 4\sin\frac{6\pi}{13} = i(C - D).$$

となる。

$C + D = \sum_{k=1}^{12} u^k = \sum_{k=0}^{12} u^k - 1 = \dfrac{1 - u^{13}}{1 - u} - 1 = -1.$

$(i(C - D))^2 = -(C - D)^2 = -\left((C + D)^2 - 4CD\right) = 4CD - (C + D)^2 = 4CD - 1$

なので，CD を計算してみる。

$$\begin{aligned}
CD &= (u^4 + u^7 + u^8 + u^{10} + u^{11} + u^{12})(u + u^2 + u^3 + u^5 + u^6 + u^9) \\
&= (u^4 + u^7 + u^8 + u^{10} + u^{11} + u^{12})u + (u^4 + u^7 + u^8 + u^{10} + u^{11} + u^{12})u^2 \\
&\quad + (u^4 + u^7 + u^8 + u^{10} + u^{11} + u^{12})u^3 + (u^4 + u^7 + u^8 + u^{10} + u^{11} + u^{12})u^5 \\
&\qquad + (u^4 + u^7 + u^8 + u^{10} + u^{11} + u^{12})u^6 + (u^4 + u^7 + u^8 + u^{10} + u^{11} + u^{12})u^9 \\
&= (u^5 + u^8 + u^9 + u^{11} + u^{12} + u^{13}) + (u^6 + u^9 + u^{10} + u^{12} + u^{13} + u^{14}) \\
&\quad + (u^7 + u^{10} + u^{11} + u^{13} + u^{14} + u^{15}) + (u^9 + u^{12} + u^{13} + u^{15} + u^{16} + u^{17}) \\
&\qquad + (u^{10} + u^{13} + u^{14} + u^{16} + u^{17} + u^{18}) + (u^{13} + u^{16} + u^{17} + u^{19} + u^{20} + u^{21}) \\
&= (1 + u^5 + u^8 + u^9 + u^{11} + u^{12}) + (1 + u + u^6 + u^9 + u^{10} + u^{12}) \\
&\quad + (1 + u + u^2 + u^7 + u^{10} + u^{11}) + (1 + u^2 + u^3 + u^4 + u^9 + u^{12}) \\
&\qquad + (1 + u + u^3 + u^4 + u^5 + u^{10}) + (1 + u^3 + u^4 + u^6 + u^7 + u^8) \\
&= 6 + 3(u + u^3 + u^4 + u^9 + u^{10} + u^{12}) + 2(u^2 + u^5 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{11}) \\
&= 6 + 3A + 2B = 6 + 3\cdot\frac{\sqrt{13} - 1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{13} + 1}{2} \\
&= \frac{7 + \sqrt{13}}{2}.
\end{aligned}$$

したがって

$$(i(C - D))^2 = 4CD - 1 = 14 + 2\sqrt{13} - 1 = 13 + 2\sqrt{13}$$

から

$$\tan\frac{2\pi}{13} + 4\sin\frac{6\pi}{13} = i(C - D) = \pm\sqrt{13 + 2\sqrt{13}}.$$

$\tan\dfrac{2\pi}{13} + 4\sin\dfrac{6\pi}{13} > 0$ だから

$$\boldsymbol{\tan\frac{2\pi}{13} + 4\sin\frac{6\pi}{13} = \sqrt{13 + 2\sqrt{13}}}.$$

例題 8 の解 2 で示したように

$$
\begin{aligned}
&\tan\frac{4\pi}{13}+4\sin\frac{\pi}{13}\\
&=i\left(u-u^2+u^3-u^4-u^5-u^6+u^7+u^8+u^9-u^{10}+u^{11}-u^{12}\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つから $E=u+u^3+u^7+u^8+u^9+u^{11},\ F=u^2+u^4+u^5+u^6+u^{10}+u^{12}$ とおくと，

$$\tan\frac{4\pi}{13}+4\sin\frac{\pi}{13}=i(E-F).$$

となる。

$E+F=\sum_{k=1}^{12}u^k=\sum_{k=0}^{12}u^k-1=\dfrac{1-u^{13}}{1-u}-1=-1.$

$(i(E-F))^2=-(E-F)^2=-\left((E+F)^2-4EF\right)=4EF-(E+F)^2=4EF-1$

なので，EF を計算してみる。

$$
\begin{aligned}
EF&=(u+u^3+u^7+u^8+u^9+u^{11})(u^2+u^4+u^5+u^6+u^{10}+u^{12})\\
&=(u^3+u^5+u^6+u^7+u^{11}+1)+(u^5+u^7+u^8+u^9+1+u^2)\\
&\quad+(u^9+u^{11}+u^{12}+1+u^4+u^6)+(u^{10}+u^{12}+1+u+u^5+u^7)\\
&\qquad+(u^{11}+1+u+u^2+u^6+u^8)+(1+u^2+u^3+u^4+u^8+u^{10})\\
&=6+2(u+u^3+u^4+u^9+u^{10}+u^{12})+3(u^2+u^5+u^6+u^7+u^8+u^{11})\\
&=6+2A+3B=6+2\cdot\frac{\sqrt{13}-1}{2}-3\cdot\frac{\sqrt{13}+1}{2}\\
&=\frac{7-\sqrt{13}}{2}.
\end{aligned}
$$

したがって

$$(i(E-F))^2=4EF-1=14-2\sqrt{13}-1=13-2\sqrt{13}$$

から

$$\tan\frac{4\pi}{13}+4\sin\frac{\pi}{13}=i(E-F)=\pm\sqrt{13-2\sqrt{13}}.$$

$\tan\dfrac{4\pi}{13}+4\sin\dfrac{\pi}{13}>0$ だから

$$\boldsymbol{\tan\frac{4\pi}{13}+4\sin\frac{\pi}{13}=\sqrt{13-2\sqrt{13}}}. \qquad \blacksquare$$

> **例題 10** $\cos\dfrac{2\pi}{13}+\cos\dfrac{6\pi}{13}+\cos\dfrac{8\pi}{13}$ と $\cos\dfrac{\pi}{13}+\cos\dfrac{3\pi}{13}-\cos\dfrac{4\pi}{13}$ の値をそれぞれ求めよ。

解　$u=\exp\left(\dfrac{2\pi i}{13}\right)$ とおくと $u^{13}=1$ で

$$\sum_{m=1}^{12}\left(\frac{m}{13}\right)e^{\frac{2\pi i m}{13}}=\sum_{m=1}^{12}\left(\frac{m}{13}\right)u^m=\sqrt{13}$$

より

$$u-u^2+u^3+u^4-u^5-u^6-u^7-u^8+u^9+u^{10}-u^{11}+u^{12}=\sqrt{13}. \qquad \cdots\cdots ①$$

$A=u+u^3+u^4+u^9+u^{10}+u^{12},\ B=u^2+u^5+u^6+u^7+u^8+u^{11}$ とおくと，①から

$$A-B=\sqrt{13}.$$

ところで

$$A+B=\sum_{k=1}^{12}u^k=\sum_{k=0}^{12}u^k-1=\frac{1-u^{13}}{1-u}-1=-1$$

だから，$A-B=\sqrt{13}$ とあわせて

$$A=\frac{\sqrt{13}-1}{2},\ B=-\frac{\sqrt{13}+1}{2}.$$

$\cos x=\dfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ を用いると

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{13}&=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i}{13}}+e^{-\frac{2\pi i}{13}}\right)=\frac{1}{2}\left(u+u^{-1}\right)=\frac{1}{2}\left(u+u^{12}\right),\\
\cos\frac{6\pi}{13}&=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{6\pi i}{13}}+e^{-\frac{6\pi i}{13}}\right)=\frac{1}{2}\left(u^3+u^{-3}\right)=\frac{1}{2}\left(u^3+u^{10}\right),\\
\cos\frac{8\pi}{13}&=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{8\pi i}{13}}+e^{-\frac{8\pi i}{13}}\right)=\frac{1}{2}\left(u^4+u^{-4}\right)=\frac{1}{2}\left(u^4+u^9\right)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}}&=\frac{1}{2}\left(u+u^3+u^4+u^9+u^{10}+u^{12}\right)\\
&=\frac{A}{2}\boldsymbol{=\frac{\sqrt{13}-1}{4}}.
\end{aligned}$$

同様にして

$$\cos\frac{\pi}{13} = -\cos\frac{12\pi}{13} = -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{12\pi i}{13}} + e^{-\frac{12\pi i}{13}}\right) = -\frac{1}{2}\left(u^6 + u^{-6}\right) = -\frac{1}{2}\left(u^6 + u^7\right),$$
$$\cos\frac{3\pi}{13} = -\cos\frac{10\pi}{13} = -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{10\pi i}{13}} + e^{-\frac{10\pi i}{13}}\right) = -\frac{1}{2}\left(u^5 + u^{-5}\right) = \frac{1}{2}\left(u^5 + u^8\right),$$
$$\cos\frac{4\pi}{13} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{4\pi i}{13}} + e^{-\frac{4\pi i}{13}}\right) = \frac{1}{2}\left(u^2 + u^{-2}\right) = \frac{1}{2}\left(u^2 + u^{11}\right)$$

より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} - \cos\frac{4\pi}{13}} &= -\frac{1}{2}\left(u^2 + u^5 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{11}\right)\\ &= -\frac{B}{2} \boldsymbol{= \frac{1+\sqrt{13}}{4}}.\end{aligned}$$

■

例題 11 $\dfrac{1}{\cos\frac{6\pi}{13}} - 4\cos\dfrac{4\pi}{13} - 4\cos\dfrac{5\pi}{13}$ の値を求めよ。

解 $u = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{13}\right)$ とおくと $u^{13} = 1$ で

$$\sum_{m=1}^{12}\left(\frac{m}{13}\right)e^{\frac{2\pi i m}{13}} = \sum_{m=1}^{12}\left(\frac{m}{13}\right)u^m = \sqrt{13}$$

より

$$u - u^2 + u^3 + u^4 - u^5 - u^6 - u^7 - u^8 + u^9 + u^{10} - u^{11} + u^{12} = \sqrt{13}. \qquad \cdots\cdots ①$$

$\cos x = \dfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ を用いると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos\frac{6\pi}{13}} &= \frac{2}{e^{\frac{6\pi i}{13}} + e^{-\frac{6\pi i}{13}}} = \frac{2}{u^3 + u^{-3}} = \frac{2u^3}{u^6 + 1} = \frac{u^3\left(1 + (1 + u^6)^{13}\right)}{1 + u^6}\\ &= u^3\left(1 - u^6 + u^{12} - u^{18} + u^{24} - u^{30} + u^{36} - u^{42} + u^{48} - u^{54} + u^{60} - u^{66} + u^{72}\right)\\ &= u^3 - u^9 + u^2 - u^8 + u - u^7 + 1 - u^6 + u^{12} - u^5 + u^{11} - u^4 + u^{10}\\ &= 1 + u + u^2 + u^3 - u^4 - u^5 - u^6 - u^7 - u^8 - u^9 + u^{10} + u^{11} + u^{12},\end{aligned}$$
$$-4\cos\frac{4\pi}{13} = -2\left(e^{\frac{4\pi i}{13}} + e^{-\frac{4\pi i}{13}}\right) = -2\left(u^2 + u^{-2}\right) = -2\left(u^2 + u^{11}\right),$$
$$-4\cos\frac{5\pi}{13} = 4\cos\frac{8\pi}{13} = 2\left(e^{\frac{8\pi i}{13}} + e^{-\frac{8\pi i}{13}}\right) = 2\left(u^4 + u^{-4}\right) = 2\left(u^4 + u^9\right)$$

より

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos\frac{6\pi}{13}} - 4\cos\frac{4\pi}{13} - 4\cos\frac{5\pi}{13} \\
&= 1 + u - u^2 + u^3 + u^4 - u^5 - u^6 - u^7 - u^8 + u^9 + u^{10} - u^{11} + u^{12} \\
&= 1 + \sqrt{13}.
\end{aligned}
$$

■

例題 12　$t_n = \tan\frac{n\pi}{7} - 4\sin\frac{2n\pi}{7}$　$(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ とおくと

$$t_1 = t_2 = t_4,\ t_3 = t_5 = t_6$$

が成り立つことを示せ。

解 1 次の補題を利用する。

補題　$w_k = \dfrac{2k\pi}{7}$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ とすると

$$\tan w_k = 2\left(\sin 2w_k - \sin 4w_k + \sin 6w_k\right)$$

が成り立つ。

証明 証明すべき等式の右辺を R とおくと

$$
\begin{aligned}
R\cos w_k &= 2\sin 2w_k \cos w_k - 2\sin 4w_k \cos w_k + 2\sin 6w_k \cos w_k \\
&= \sin 3w_k + \sin w_k - (\sin 5w_k + \sin 3w_k) + \sin 7w_k + \sin 5w_k \\
&= \sin w_k + \sin 7w_k = \sin w_k + \sin 2k\pi \\
&= \sin w_k.
\end{aligned}
$$

よって $R = \tan w_k$.　(q.e.d.)

(i)　$k = 4$ のとき

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{7} &= \tan\frac{8\pi}{7} \\
&= 2\left(\sin\frac{16\pi}{7} - \sin\frac{32\pi}{7} + \sin\frac{48\pi}{7}\right) \\
&= 2\left(\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\right) \\
&= 2\left(\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right)
\end{aligned}
$$

よって

$$\tan\frac{\pi}{7}-4\sin\frac{2\pi}{7}=2\left(\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

$k=1$ のとき

$$\begin{aligned}\tan\frac{2\pi}{7}&=2\left(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{8\pi}{7}+\sin\frac{12\pi}{7}\right)\\&=2\left(\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}\right)\\&=2\left(\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\tan\frac{2\pi}{7}-4\sin\frac{4\pi}{7}=\tan\frac{2\pi}{7}-4\sin\frac{3\pi}{7}=2\left(\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

$k=2$ のとき

$$\begin{aligned}\tan\frac{4\pi}{7}&=2\left(\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{16\pi}{7}+\sin\frac{24\pi}{7}\right)\\&=2\left(-\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{13}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\tan\frac{4\pi}{7}-4\sin\frac{8\pi}{7}=\tan\frac{4\pi}{7}+4\sin\frac{\pi}{7}=2\left(\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

以上のことから，$t_1=t_2=t_4$.

(ii) $k=5$ のとき

$$\begin{aligned}\tan\frac{3\pi}{7}&=\tan\frac{10\pi}{7}\\&=2\left(\sin\frac{20\pi}{7}-\sin\frac{40\pi}{7}+\sin\frac{60\pi}{7}\right)\\&=2\left(\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\tan\frac{3\pi}{7}-4\sin\frac{6\pi}{7}=\tan\frac{3\pi}{7}-4\sin\frac{\pi}{7}=2\left(-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

$k=6$ のとき

$$\begin{aligned}\tan\frac{5\pi}{7}&=\tan\frac{12\pi}{7}\\&=2\left(\sin\frac{24\pi}{7}-\sin\frac{48\pi}{7}+\sin\frac{72\pi}{7}\right)\\&=2\left(-\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}\right)\\&=2\left(-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\tan\frac{5\pi}{7}-4\sin\frac{10\pi}{7}=\tan\frac{5\pi}{7}+4\sin\frac{3\pi}{7}=2\left(-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

$k=3$ のとき

$$\begin{aligned}\tan\frac{6\pi}{7}&=2\left(\sin\frac{12\pi}{7}-\sin\frac{24\pi}{7}+\sin\frac{36\pi}{7}\right)\\&=2\left(-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)\\&=2\left(-\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\tan\frac{6\pi}{7}-4\sin\frac{12\pi}{7}=\tan\frac{6\pi}{7}+4\sin\frac{2\pi}{7}=2\left(-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

以上のことから，$t_3=t_5=t_6$. ■

解 2　$u=\exp\left(\frac{2\pi i}{7}\right)$ とおくと $u^7=1$ で

$$\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k}{7}\right)e^{\frac{2\pi ik}{7}}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k}{7}\right)u^k=i\sqrt{7}$$

より

$$u+u^2-u^3+u^4-u^5-u^6=i\sqrt{7}. \qquad \cdots\cdots ①$$

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$ より

$$\boldsymbol{4\sin x=-2i(e^{ix}-e^{-ix}),}$$

$$\boldsymbol{\tan x}=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})}=-i\cdot\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}=\boldsymbol{i\left(\frac{2}{1+e^{2ix}}-1\right)}.$$

この 2 つの等式を使う。

(i) $\tan\frac{\pi}{7}-4\sin\frac{2\pi}{7}$ 等を u を用いて表す.

$$4\sin\frac{2\pi}{7}=-2i\left(e^{\frac{2\pi i}{7}}-e^{-\frac{2\pi i}{7}}\right)=-2i\left(u-u^{-1}\right)=-2i\left(u-u^6\right).$$

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{7}&=i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{2\pi i}{7}}}-1\right)=i\left(\frac{2}{1+u}-1\right)=i\left(\frac{1+u^7}{1+u}-1\right)\\&=i\left(1-u+u^2-u^3+u^4-u^5+u^6-1\right)\\&=i\left(-u+u^2-u^3+u^4-u^5+u^6\right)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{7}-4\sin\frac{2\pi}{7}&=i\left(u+u^2-u^3+u^4-u^5-u^6\right)\\&=i\cdot i\sqrt{7}=-\sqrt{7}.\end{aligned}$$

$$4\sin\frac{4\pi}{7}=-2i\left(e^{\frac{4\pi i}{7}}-e^{-\frac{4\pi i}{7}}\right)=-2i\left(u^2-u^{-2}\right)=-2i\left(u^2-u^5\right).$$

$$\begin{aligned}\tan\frac{2\pi}{7}&=i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{4\pi i}{7}}}-1\right)=i\left(\frac{2}{1+u^2}-1\right)=i\left(\frac{1+(u^2)^7}{1+u^2}-1\right)\\&=i\left(1-u^2+u^4-u^6+u^8-u^{10}+u^{12}-1\right)\\&=i\left(-u^2+u^4-u^6+u-u^3+u^5\right)\\&=i\left(u-u^2-u^3+u^4+u^5-u^6\right).\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\tan\frac{2\pi}{7}-4\sin\frac{4\pi}{7}&=i\left(u+u^2-u^3+u^4-u^5-u^6\right)\\&=i\cdot i\sqrt{7}=-\sqrt{7}.\end{aligned}$$

$$4\sin\frac{8\pi}{7}=-2i\left(e^{\frac{8\pi i}{7}}-e^{-\frac{8\pi i}{7}}\right)=-2i\left(u^4-u^{-4}\right)=-2i\left(u^4-u^3\right).$$

$$\begin{aligned}\tan\frac{4\pi}{7}&=i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{8\pi i}{7}}}-1\right)=i\left(\frac{2}{1+u^4}-1\right)=i\left(\frac{1+(u^4)^7}{1+u^4}-1\right)\\&=i\left(1-u^4+u^8-u^{12}+u^{16}-u^{20}+u^{24}-1\right)\\&=i\left(-u^4+u-u^5+u^2-u^6+u^3\right)\\&=i\left(u+u^2+u^3-u^4-u^5-u^6\right)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\tan\frac{4\pi}{7}-4\sin\frac{8\pi}{7}&=i\left(u+u^2-u^3+u^4-u^5-u^6\right)\\&=i\cdot i\sqrt{7}=-\sqrt{7}.\end{aligned}$$

以上のことから， $t_1=t_2=t_4\quad(=-\sqrt{7})$.

(ii) (i) と同様に $\tan\frac{3\pi}{7}-4\sin\frac{6\pi}{7}$ 等を u を用いて表す。

$$4\sin\frac{6\pi}{7}=-2i\left(e^{\frac{6\pi i}{7}}-e^{-\frac{6\pi i}{7}}\right)=-2i\left(u^3-u^{-3}\right)=-2i\left(u^3-u^4\right).$$

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{3\pi}{7} &= -i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{6\pi i}{7}}}-1\right) = i\left(\frac{2}{1+u^3}-1\right) = i\left(\frac{1+(u^3)^7}{1+u^3}-1\right) \\
&= i\left(1-u^3+u^6-u^9+u^{12}-u^{15}+u^{18}-1\right) \\
&= i\left(-u^3+u^6-u^2+u^5-u+u^4\right) \\
&= i\left(-u-u^2-u^3+u^4+u^5+u^6\right)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{3\pi}{7}-4\sin\frac{6\pi}{7} &= i\left(-u-u^2+u^3-u^4+u^5+u^6\right) \\
&= -i\left(u+u^2-u^3+u^4-u^5-u^6\right) \\
&= -i\cdot i\sqrt{7} = \sqrt{7}.
\end{aligned}
$$

$$
4\sin\frac{10\pi}{7} = -2i\left(e^{\frac{10\pi i}{7}}-e^{-\frac{10\pi i}{7}}\right) = -2i\left(u^5-u^{-5}\right) = -2i\left(u^5-u^2\right).
$$

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{5\pi}{7} &= i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{10\pi i}{7}}}-1\right) = i\left(\frac{2}{1+u^5}-1\right) = i\left(\frac{1+(u^5)^7}{1+u^5}-1\right) \\
&= i\left(1-u^5+u^{10}-u^{15}+u^{20}-u^{25}+u^{30}-1\right) \\
&= i\left(-u^5+u^3-u+u^6-u^4+u^2\right) \\
&= i\left(-u+u^2+u^3-u^4-u^5+u^6\right).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{5\pi}{7}-4\sin\frac{10\pi}{7} &= i\left(-u-u^2+u^3-u^4+u^5+u^6\right). \\
&= -i\left(u+u^2-u^3+u^4-u^5-u^6\right) \\
&= -i\cdot i\sqrt{7} = \sqrt{7}.
\end{aligned}
$$

$$
4\sin\frac{12\pi}{7} = -2i\left(e^{\frac{12\pi i}{7}}-e^{-\frac{12\pi i}{7}}\right) = -2i\left(u^6-u^{-6}\right) = -2i\left(u^6-u\right).
$$

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{6\pi}{7} &= i\left(\frac{2}{1+e^{\frac{12\pi i}{7}}}-1\right) = i\left(\frac{2}{1+u^6}-1\right) = i\left(\frac{1+(u^6)^7}{1+u^6}-1\right) \\
&= i\left(1-u^6+u^{12}-u^{18}+u^{24}-u^{30}+u^{36}-1\right) \\
&= i\left(-u^6+u^5-u^4+u^3-u^2+u\right) \\
&= i\left(u-u^2+u^3-u^4+u^5-u^6\right).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{6\pi}{7} - 4\sin\frac{12\pi}{7} &= i\left(-u - u^2 + u^3 - u^4 + u^5 + u^6\right) \\
&= -i\left(u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 - u^6\right) \\
&= -i \cdot i\sqrt{7} = \sqrt{7}.
\end{aligned}
$$

以上のことから， $t_3 = t_5 = t_6 \quad (= \sqrt{7})$. ■

例題 13　$\sin\frac{2\pi}{7}, \sin\frac{4\pi}{7}, \sin\frac{8\pi}{7}$ は $x^3 - \frac{\sqrt{7}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{7}}{8} = 0$ の 3 つの解であることを示せ。

解　$u = \exp\left(\frac{2\pi i}{7}\right)$ とおくと $u^7 = 1$ で

$$
\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k}{7}\right)e^{\frac{2\pi ik}{7}} = \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k}{7}\right)u^k = i\sqrt{7}
$$

より

$$
u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 - u^6 = i\sqrt{7}. \qquad \cdots\cdots ①
$$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ より

$$
\boldsymbol{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi}{7} &= \frac{e^{\frac{2\pi i}{7}} - e^{-\frac{2\pi i}{7}}}{2i} = \frac{u - u^{-1}}{2i} = \frac{u - u^6}{2i}, \\
\sin\frac{4\pi}{7} &= \frac{e^{\frac{4\pi i}{7}} - e^{-\frac{4\pi i}{7}}}{2i} = \frac{u^2 - u^{-2}}{2i} = \frac{u^2 - u^5}{2i}, \\
\sin\frac{8\pi}{7} &= \frac{e^{\frac{8\pi i}{7}} - e^{-\frac{8\pi i}{7}}}{2i} = \frac{u^4 - u^{-4}}{2i} = \frac{u^4 - u^3}{2i}.
\end{aligned}
$$

$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}, \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7},$
$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}$　の値を計算する。

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7} &= \frac{1}{2i}\left(u-u^6+u^2-u^5+u^4-u^3\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(u+u^2-u^3+u^4-u^5-u^6\right) \\
&= \frac{1}{2i}\cdot i\sqrt{7} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} \\
&= -\frac{1}{4}\left((u-u^6)(u^2-u^5)+(u^2-u^5)(u^4-u^3)+(u^4-u^3)(u-u^6)\right) \\
&= -\frac{1}{4}(u^3+u^{11}-u^{10}-u^4) = -\frac{1}{4}(u^3+u^4-u^3-u^4) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7} &= -\frac{1}{8i}(u-u^6)(u^2-u^5)(u^4-u^3) \\
&= -\frac{1}{8i}(u^3-u^6-u^8+u^{11})(u^4-u^3) \\
&= -\frac{1}{8i}(-u+u^3+u^4-u^6)(u^4-u^3) \\
&= -\frac{1}{8i}(-u^5+u^7+u^8-u^{10}+u^4-u^6-u^7+u^9) \\
&= -\frac{1}{8i}(-u^5+1+u-u^3+u^4-u^6-1+u^2) \\
&= -\frac{1}{8i}(u+u^2-u^3+u^4-u^5-u^6) \\
&= -\frac{1}{8i}\cdot i\sqrt{7} \\
&= -\frac{\sqrt{7}}{8}.
\end{aligned}
$$

したがって，$\sin\frac{2\pi}{7}, \sin\frac{4\pi}{7}, \sin\frac{8\pi}{7}$ は $x^3-\frac{\sqrt{7}}{2}x^2+\frac{\sqrt{7}}{8}=0$ の 3 つの解である。 ■

例題 14　次の等式が成り立つことを示せ。

(i)
$$\frac{\sin\dfrac{2\pi}{7}}{\sin^2\dfrac{3\pi}{7}} - \frac{\sin\dfrac{\pi}{7}}{\sin^2\dfrac{2\pi}{7}} + \frac{\sin\dfrac{3\pi}{7}}{\sin^2\dfrac{\pi}{7}} = 2\sqrt{7}$$

(ii)
$$\frac{\sin^2\dfrac{3\pi}{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}} - \frac{\sin^2\dfrac{2\pi}{7}}{\sin\dfrac{\pi}{7}} + \frac{\sin^2\dfrac{\pi}{7}}{\sin\dfrac{3\pi}{7}} = 0$$

（解） (i) 左辺を L とおくと

$$L = \frac{\sin^3\dfrac{2\pi}{7}\sin^2\dfrac{\pi}{7} - \sin^3\dfrac{\pi}{7}\sin^2\dfrac{3\pi}{7} + \sin^3\dfrac{3\pi}{7}\sin^2\dfrac{2\pi}{7}}{\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\sin^3\theta\sin^2\varphi \\
=\ &\frac{3\sin\theta - \sin^3\theta}{4}\cdot\frac{1-\cos 2\varphi}{2} \\
=\ &\frac{1}{8}\left(3\sin\theta - \sin 3\theta - 3\sin\theta\cos 2\varphi + \sin 3\theta\cos 2\varphi\right) \\
=\ &\frac{1}{8}\left(3\sin\theta - \sin 3\theta - \frac{3}{2}\left(\sin(\theta+2\varphi)+\sin(\theta-2\varphi)\right) + \frac{1}{2}\left(\sin(3\theta+2\varphi)+\sin(3\theta-2\varphi)\right)\right)
\end{aligned}$$

より

$$16\sin^3\theta\sin^2\varphi = 6\sin\theta - 2\sin 3\theta - 3\left(\sin(\theta+2\varphi)+\sin(\theta-2\varphi)\right) + \sin(3\theta+2\varphi) + \sin(3\theta-2\varphi).$$

これを使うと

$$\begin{aligned}
16\sin^3\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7} &= 6\sin\frac{2\pi}{7} - 2\sin\frac{6\pi}{7} - 3\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} \\
&= 6\sin\frac{2\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7} - 3\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} \\
&= -3\sin\frac{\pi}{7} + 6\sin\frac{2\pi}{7} - 2\sin\frac{3\pi}{7},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16\sin^3\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7} &= 6\sin\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{3\pi}{7} - 3\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) + \sin\frac{9\pi}{7} + \sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right) \\
&= 6\sin\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{3\pi}{7} + 3\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} \\
&= 6\sin\frac{\pi}{7} + 2\sin\frac{2\pi}{7} - 3\sin\frac{3\pi}{7},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
16\sin^3\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7} &= 6\sin\frac{3\pi}{7} - 2\sin\frac{9\pi}{7} - 3\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) + \sin\frac{13\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} \\
&= 6\sin\frac{3\pi}{7} + 2\sin\frac{2\pi}{7} + 3\sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} \\
&= 2\sin\frac{\pi}{7} + 3\sin\frac{2\pi}{7} + 6\sin\frac{3\pi}{7}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&16\left(\sin^3\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7} - \sin^3\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^3\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\right) \\
&= -7\sin\frac{\pi}{7} + 7\sin\frac{2\pi}{7} + 7\sin\frac{3\pi}{7} \\
&= 7\left(\sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}\right).
\end{aligned}
$$

ここで，$\sin\frac{2\pi}{7}, \sin\frac{4\pi}{7}, \sin\frac{8\pi}{7}$ が $x^3 - \frac{\sqrt{7}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{7}}{8} = 0$ の 3 つの解であることを用いると

$$
\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7} = -\frac{\sqrt{7}}{8}.
$$

したがって

$$
16\left(\sin^3\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7} - \sin^3\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^3\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{7\sqrt{7}}{2}
$$

から

$$
\sin^3\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7} - \sin^3\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^3\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7} = \frac{7\sqrt{7}}{32},
$$

$$
\left(\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{7}}{8}\right)^2 = \frac{7}{64}
$$

だから

$$
L = \frac{\frac{7\sqrt{7}}{32}}{\frac{7}{64}} = 2\sqrt{7}.
$$

(ii) 左辺を L とおくと

$$
L = \frac{\sin^3\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - \sin^3\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} + \sin^3\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin^3\theta\sin\varphi\\
&= \frac{3\sin\theta - \sin^3\theta}{4}\cdot\sin\varphi\\
&= \frac{1}{4}\left(3\sin\theta\sin\varphi - \sin 3\theta\sin\varphi\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\left(\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)\right) - \frac{1}{2}\left(\cos(3\theta-\varphi)-\cos(3\theta+\varphi)\right)\right)
\end{aligned}
$$

より

$$
8\sin^3\theta\sin\varphi = 3\left(\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)\right) - \cos(3\theta-\varphi) + \cos(3\theta+\varphi).
$$

これを使うと

$$
\begin{aligned}
8\sin^3\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} &= 3\left(\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}\right) - \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7}\\
&= 3\cos\frac{2\pi}{7} + 3\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}\\
&= \cos\frac{\pi}{7} + 3\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{3\pi}{7},\\
8\sin^3\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} &= 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)-\cos\frac{5\pi}{7}\right) - \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{7}\\
&= 3\cos\frac{\pi}{7} + 3\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7}\\
&= 3\cos\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7},\\
8\sin^3\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} &= 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)-\cos\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\\
&= 3\cos\frac{\pi}{7} - 3\cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7}\\
&= 2\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - 3\cos\frac{3\pi}{7}
\end{aligned}
$$

より $8\left(\sin^3\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - \sin^3\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} + \sin^3\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\right) = 0$ すなわち $L = 0$.

■

例題 15　次の等式が成り立つことを示せ。

(i) $$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7} = 4\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7}.$$

(ii) $$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

解 $\sin\dfrac{2\pi}{7}, \sin\dfrac{4\pi}{7}, \sin\dfrac{8\pi}{7}$ は $x^3 - \dfrac{\sqrt{7}}{2}x^2 + \dfrac{\sqrt{7}}{8} = 0$ の 3 つの解であるから

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} = 0, \qquad \cdots\cdots ②$$
$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7} = -\frac{\sqrt{7}}{8}. \qquad \cdots\cdots ③$$

(i) $\sin\dfrac{8\pi}{7} = \sin\left(2\pi - \dfrac{6\pi}{7}\right) = -\sin\dfrac{6\pi}{7}$ を用いて①，③を書き直すと

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2},\ \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

よって $\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} - \sin\dfrac{6\pi}{7} = 4\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7}\sin\dfrac{5\pi}{7}$.

(ii) $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \dfrac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}} \Longleftrightarrow \sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7} = \sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7} + \sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}$.

$\sin\dfrac{4\pi}{7} = \sin\dfrac{3\pi}{7}, \sin\dfrac{8\pi}{7} = -\sin\dfrac{\pi}{7}$ を用いて②を書き直すと

$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7}\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)\sin\frac{2\pi}{7} = 0$$

すなわち
$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}$$

が成立する。 ■

例題 16 (i) n は正の整数で，$x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ とするとき，次の等式を示せ。

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

(ii) $\cos\dfrac{2\pi}{21} + \cos\dfrac{8\pi}{21} + \cos\dfrac{10\pi}{21} = \dfrac{1+\sqrt{21}}{4}$ が成り立つことを示せ。

解 (i) $S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ とおき，両辺に $2\sin\dfrac{x}{2}$ をかける。

$$
\begin{aligned}
&S\cdot 2\sin\frac{x}{2}\\
&=\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\sin\frac{x}{2}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{(2k+1)x}{2}-\sin\frac{(2k-1)x}{2}\right)\\
&=\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)+\cdots+\left(\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{(2n-1)x}{2}\right)\\
&=\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}.
\end{aligned}
$$

$\dfrac{x}{2}\fallingdotseq k\pi$ より $\sin\dfrac{x}{2}\fallingdotseq 0$ だから

$$
S=\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}=\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}-\frac{1}{2}.
$$

(ii) 左辺を L とおくと

$$
\begin{aligned}
L&=\cos\frac{2\pi}{21}+\cos\frac{8\pi}{21}+\cos\frac{10\pi}{21}\\
&=\cos\frac{-2\pi}{21}-\cos\frac{13\pi}{21}+\cos\frac{10\pi}{21}\\
&=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{7}\right)\\
&=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{7}\\
&\qquad+\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{7}\\
&=\cos\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)+\sin\frac{\pi}{3}\left(-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right)\\
&=\cos\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)+\sin\frac{\pi}{3}\left(\sin\frac{8\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\right).
\end{aligned}
$$

(i) の式で $n=3, x=\dfrac{2\pi}{7}$ とおくと

$$
\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\sum_{k=1}^{3}\cos\frac{2k\pi}{7}=\frac{\sin\pi}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.
$$

$\cos\dfrac{2\pi}{7} = -\cos\dfrac{5\pi}{7}, \cos\dfrac{4\pi}{7} = -\cos\dfrac{3\pi}{7}, \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\cos\dfrac{\pi}{7}$ を使って書き直すと

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

例題 13 より

$$\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

よって　$L = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{21}}{4}.$ ■

例題 17　$\cos\dfrac{5\pi}{28} + \cos\dfrac{13\pi}{28} - \cos\dfrac{17\pi}{28}$ の値を求めよ。

解 $L = \cos\dfrac{5\pi}{28} + \cos\dfrac{13\pi}{28} - \cos\dfrac{17\pi}{28}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\cos\frac{5\pi}{28} &= -\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{28}\right) = -\cos\frac{3\pi}{28} = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{7}\right), \\
\cos\frac{13\pi}{28} &= \cos\left(-\frac{3\pi}{28}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{7}\right), \\
-\cos\frac{17\pi}{28} &= \cos\left(\pi - \frac{17\pi}{28}\right) = \cos\frac{11\pi}{28} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{7}\right)
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
L &= -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{7}\right) \\
&= -\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{7} \\
&\qquad + \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{7} \\
&= \cos\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) + \sin\frac{\pi}{4}\left(-\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}\right)
\end{aligned}$$

例題 16 より

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

例題 13 より

$$\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

よって　$L = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{1} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{21}}{4}.$ ■

3 幾何の不等式等

3.1 Erdös - Mordell の不等式

(Erdös - Mordell の不等式) △ABC の内部の点 P から 3 辺 BC， CA， AB に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{PP_A}, \mathrm{PP_B}, \mathrm{PP_C}$ とするとき，次の不等式が成り立つ。

$$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC} \geqq 2(\mathrm{PP_A} + \mathrm{PP_B} + \mathrm{PP_C}). \qquad \cdots\cdots ①$$

証明 $\mathrm{PP_A} = x, \mathrm{PP_B} = y, \mathrm{PP_C} = z$ とおく。

$$\mathrm{PC} \geqq x\frac{\sin B}{\sin C} + y\frac{\sin A}{\sin C} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つことを示す。

正弦定理から $\dfrac{\mathrm{P_AP_B}}{\sin C} = \mathrm{PC}$ だから $\mathrm{P_AP_B} = \mathrm{PC}\sin C$.
余弦定理を使うと

$$\begin{aligned}
\mathrm{P_AP_B}^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cos(\pi - C) \\
&= x^2 + y^2 - 2xy\cos(A + B) \\
&= x^2\left(\cos^B + \sin^2 B\right) + y^2\left(\cos^A + \sin^2 A\right) - 2xy\left(\cos A\cos B - \sin A\sin B\right) \\
&= (x\cos B - y\cos A)^2 + (x\sin B + y\sin A)^2 \\
&\geqq (x\sin B + y\sin A)^2
\end{aligned}$$

から $\mathrm{P_AP_B} \geqq x\sin B + y\sin A$ が得られる。
$\mathrm{P_AP_B} = \mathrm{PC}\sin C$ であったから，$\mathrm{PC}\sin C \geqq x\sin B + y\sin A$ すなわち②が成立する。
同様にして

$$\mathrm{PA} \geqq y\frac{\sin C}{\sin A} + z\frac{\sin B}{\sin A}, \mathrm{PB} \geqq z\frac{\sin A}{\sin B} + x\frac{\sin C}{\sin B}$$

が成り立つから，3 つの不等式を加えると

$$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC} \geqq x\left(\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin C}\right) + y\left(\frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A}\right) + z\left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B}\right).$$

ここで，$s, t > 0$ のとき $\dfrac{s}{t} + \dfrac{t}{s} \geqq 2\sqrt{\dfrac{s}{t}\cdot\dfrac{t}{s}} = 2$ が成り立つから

$$\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin C} \geqq 2, \frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A} \geqq 2, \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B} \geqq 2.$$

これを使うと

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} &\geqq x\left(\frac{\sin C}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin C}\right)+y\left(\frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\right)+z\left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\right)\\ &\geqq 2x+2y+2z=2(\mathrm{PP_A}+\mathrm{PP_B}+\mathrm{PP_C})\end{aligned}$$

となり①が得られた。 ■

等号が成立する必要十分条件は，

$$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A}=1, x\cos B-y\cos A=x\cos C-z\cos A=y\cos C-z\cos B=0$$

がすべて成立することだから，$A=B=C, x=y=z$ すなわち $\triangle$ABC が正三角形で P が $\triangle$ABC の内心となることである。

3.2 Hayashi の不等式

(Hayashi **の不等式**) 任意の $\triangle$ABC と任意の点 P に対して

$$R_1=\mathrm{PA}, R_2=\mathrm{PB}, R_3=\mathrm{PC}$$

とおく。このとき，次の不等式が成り立つ。

$$aR_2R_3+bR_3R_1+cR_1R_2 \geqq abc. \quad \cdots\cdots①$$

証明 z_1, z_2, z_3 を複素数とするとき

$$z_2z_3(z_2-z_3)+z_3z_1(z_3-z_1)+z_1z_2(z_1-z_2)+(z_2-z_3)(z_3-z_1)(z_1-z_2)=0 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ。

P を原点とし，A，B，C を表す複素数を z_1, z_2, z_3 とすると

$$|z_1|=\mathrm{PA}=R_1, |z_2|=\mathrm{PB}=R_2, |z_3|=\mathrm{PC}=R_3,$$

$$|z_1-z_2|=\mathrm{AB}=c, |z_2-z_3|=\mathrm{BC}=a, |z_3-z_1|=\mathrm{CA}=b.$$

z_1, z_2, z_3 は異なるから，②の両辺を $(z_2-z_3)(z_3-z_1)(z_1-z_2)$ で割ると

$$\frac{z_2z_3}{(z_3-z_1)(z_1-z_2)}+\frac{z_3z_1}{(z_1-z_2)(z_2-z_3)}+\frac{z_1z_2}{(z_2-z_3)(z_3-z_1)}=-1$$

両辺の絶対値をとると

$$
\begin{aligned}
1 &= \left| \frac{z_2 z_3}{(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)} + \frac{z_3 z_1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)} + \frac{z_1 z_2}{(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)} \right| \\
&\leqq \left| \frac{z_2 z_3}{(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)} \right| + \left| \frac{z_3 z_1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)} \right| + \left| \frac{z_1 z_2}{(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)} \right| \\
&= \frac{|z_2|\,|z_3|}{|z_3 - z_1|\,|z_1 - z_2|} + \frac{|z_3|\,|z_1|}{|z_1 - z_2|\,|z_2 - z_3|} + \frac{|z_1|\,|z_2|}{|z_2 - z_3|\,|z_3 - z_1|} \\
&= \frac{R_2 R_3}{bc} + \frac{R_3 R_1}{ca} + \frac{R_1 R_2}{ab}
\end{aligned}
$$

から

$$
\frac{R_2 R_3}{bc} + \frac{R_3 R_1}{ca} + \frac{R_1 R_2}{ab} \geqq 1. \qquad \cdots\cdots ③
$$

両辺に abc をかけると

$$
aR_2 R_3 + bR_3 R_1 + cR_1 R_2 \geqq abc. \qquad \blacksquare
$$

Hayashi の不等式は③から次のようにも書ける。

(Hayashi の不等式)　平面上の $\triangle$ABC と点 P に対して次の不等式が成り立つ。

$$
\frac{\mathrm{PB} \cdot \mathrm{PC}}{bc} + \frac{\mathrm{PC} \cdot \mathrm{PA}}{ca} + \frac{\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB}}{ab} \geqq 1.
$$

問 1 (i) a,b,c,x,y,z は $a+b+c \geqq 0, ab+bc+ca \geqq 0,$
$x+y+z \geqq 0, xy+yz+zx \geqq 0$ をみたす実数とする。
次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geqq 2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}.$$

$$(y+z)a+(z+x)b+(x+y)c \geqq 2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}.$$

(ii) $\triangle$ABC と点 P は同一平面上にある。
x,y,z は $x+y+z \geqq 0, xy+yz+zx \geqq 0$ をみたす実数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(y+z)\frac{\mathrm{PA}}{a}+(z+x)\frac{\mathrm{PB}}{b}+(x+y)\frac{\mathrm{PC}}{c} \geqq 2\sqrt{xy+yz+zx}.$$

(iii) $\triangle$ABC と点 P が同一平面上にあるとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$a\cdot\mathrm{PA}+b\cdot\mathrm{PB}+c\cdot\mathrm{PC} \geqq 4S.$$

(iv) $\triangle$ABC と点 P が同一平面上にあるとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} \geqq 2\sqrt{r(4R+r)} \geqq 6r.$$

P と $\triangle$ABC の 3 頂点 A，B，C との距離を R_1, R_2, R_3 とおくと Hayashi の不等式は

$$aR_2R_3+bR_3R_1+cT_1R_2 \geqq abc$$

であったが，(iii) の不等式は

$$aR_1+bR_2+cR_3 \geqq 4S$$

となる。

また問 2 では

$$aR_1^2+bR_2^2+cR_3^2 \geqq abc$$

を証明する。

解 (ii) で Hayashi の不等式を使用する。

(i) $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=(a+b+c)(x+y+z)-(ax+by+cz)$ と変形できるから $(a+b+c)(x+y+z)$ を評価する。

コーシー・シュワルツの不等式を用いると

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c^2)(x+y+z)^2\\
&=\left(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\right)\left(x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\right)\\
&=\left(\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2+\left(\sqrt{2(ab+bc+ca)}\right)^2\right)\\
&\qquad\times\left(\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2+\left(\sqrt{2(xy+yz+zx)}\right)^2\right)\\
&\geqq\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{2(ab+bc+ca)}\sqrt{2(xy+yz+zx)}\right)^2\\
&=\left(\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\right)^2\\
&\geqq\left(\sqrt{(ax+by+cz)^2}+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\right)^2\\
&=\left(|ax+by+cz|+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\right)^2
\end{aligned}
$$

$a+b+c, x+y+z \geqq 0$ だから

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)(x+y+z) &\geqq |ax+by+cz|+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\\
&\geqq ax+by+cz+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z &= (a+b+c)(x+y+z)-(ax+by+cz)\\
&\geqq ax+by+cz+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\\
&\qquad -(ax+by+cz)\\
&=2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}
\end{aligned}
$$

となり，$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geqq 2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}$ は成立する。

(ii) (i) の不等式で (a,b,c) のところに $\left(\dfrac{\mathrm{PA}}{a}, \dfrac{\mathrm{PB}}{b}, \dfrac{\mathrm{PC}}{c}\right)$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
&(y+z)\cdot\frac{\mathrm{PA}}{a}+(z+x)\cdot\frac{\mathrm{PB}}{b}+(x+y)\cdot\frac{\mathrm{PC}}{c}\\
&\geqq 2\sqrt{\left(\frac{\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}}{ab}+\frac{\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}}{bc}+\frac{\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PA}}{ca}\right)(xy+yz+zx)}.
\end{aligned}
$$

Hayashi の不等式

$$\frac{\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}}{bc}+\frac{\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PA}}{ca}+\frac{\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}}{ab}\geqq 1$$

を使うと

$$\begin{aligned}&(y+z)\cdot\frac{\mathrm{PA}}{a}+(z+x)\cdot\frac{\mathrm{PB}}{b}+(x+y)\cdot\frac{\mathrm{PC}}{c}\\ &\geqq 2\sqrt{\left(\frac{\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}}{ab}+\frac{\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}}{bc}+\frac{\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PA}}{ca}\right)(xy+yz+zx)}\\ &\geqq 2\sqrt{xy+yz+zx}.\end{aligned}$$

よって

$$(y+z)\frac{\mathrm{PA}}{a}+(z+x)\frac{\mathrm{PB}}{b}+(x+y)\frac{\mathrm{PC}}{c}\geqq 2\sqrt{xy+yz+zx}.$$

(iii) $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}, y=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}, z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$ とおくと

$$x+y+z=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}>0,$$

ヘロンの公式を使うと

$$xy+yz+zx=\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{4}=4\mathrm{S}^2>0$$

で $y+z=a^2, z+x=b^2, x+y=c^2$ だから，(ii) より

$$(y+z)\frac{\mathrm{PA}}{a}+(z+x)\frac{\mathrm{PB}}{b}+(x+y)\frac{\mathrm{PC}}{c}\geqq 2\sqrt{xy+yz+zx}$$

$$a^2\cdot\frac{\mathrm{PA}}{a}+b^2\cdot\frac{\mathrm{PB}}{b}+c^2\cdot\frac{\mathrm{PC}}{c}\geqq 2\sqrt{4\mathrm{S}^2}=4\mathrm{S}.$$

よって

$$a\cdot\mathrm{PA}+b\cdot\mathrm{PB}+c\cdot\mathrm{PC}\geqq 4\mathrm{S}.$$

(iv) $x=s-a>0, y=s-b>0, z=s-c>0$ とおくと $y+z=a, z+x=b, x+y=c$ で (ii)

$$(y+z)\frac{\mathrm{PA}}{a}+(z+x)\frac{\mathrm{PB}}{b}+(x+y)\frac{\mathrm{PC}}{c}\geqq 2\sqrt{xy+yz+zx}.$$

を使うと

$$a\cdot\frac{\mathrm{PA}}{a}+b\cdot\frac{\mathrm{PB}}{b}+c\cdot\frac{\mathrm{PC}}{c}\geqq 2\sqrt{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-c)}.$$

$$
\begin{aligned}
&(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-c)\\
&=3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ca\\
&=3s^2-2s\cdot 2s+s^2+4Rr+r^2\\
&=r(4R+r)
\end{aligned}
$$

だから

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} \geqq 2\sqrt{r(4R+r)}.$$

また

$$2\sqrt{r(4R+r)} \geqq 6r \iff r(4R+r) \geqq 9r^2 \iff 4Rr \geqq 8r^2 \iff R \geqq 2r.$$

最後の不等式はオイラーの不等式より成立する。

以上のことから

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} \geqq 2\sqrt{r(4R+r)} \geqq 6r. \qquad \blacksquare$$

問 2 点 P と $\triangle$ABC の 3 頂点 A，B，C との距離を R_1, R_2, R_3 とする。

(i) 任意の実数 x, y, z に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(x+y+z)\left(xR_1^2+yR_2^2+zR_3^2\right) \geqq yza^2+zxb^2+xyc^2.$$

(ii) 任意の実数 x, y, z に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(x+y+z)^2R^2 \geqq yza^2+zxb^2+xyc^2.$$

(iii) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$aR_1^2+bR_2^2+cR_3^2 \geqq abc.$$

解 (i) $\left|x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}+z\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|^2 \geqq 0$ が成り立つから，左辺を展開すると

$$x^2R_1^2+y^2R_2^2+z^2R_3^2+2xy\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2yz\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+2zx\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}} \geqq 0. \quad \cdots\cdots ①$$

P が直線 AB 上にないときは

$$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=2R_1R_2\cos\angle\mathrm{APB}=2R_1R_2\cdot\frac{R_1^2+R_2^2-c^2}{2R_1R_2}=R_1^2+R_2^2-c^2$$

から

$$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=R_1^2+R_2^2-c^2.$$

（これは P が直線 AB 上にあるときも成り立つ。）

同様にして

$$2\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=R_2^2+R_3^2-a^2,2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}=R_3^2+R_1^2-b^2$$

が成り立つから，①に使用する。

$$x^2R_1^2+y^2R_2^2+z^2R_3^2+xy(R_1^2+R_2^2-c^2)+yz(R_2^2+R_3^2-a^2)+zx(R_3^2+R_1^2-b^2)\geqq 0$$

$$x(x+t+z)R_1^2+y(x+y+z)R_2^2+z(x+y+z)R_3^2\geqq yza^2+zxb^2+xyc^2$$

$$(x+y+z)\left(xR_1^2+yR_2^2+zR_3^2\right)\geqq yza^2+zxb^2+xyc^2.$$

(ii) (i) の不等式で P を △ABC の外心とすると $R_1=R_2=R_3=R$ だから

$$(x+y+z)\left(xR^2+yR^2+zR^2\right)\geqq yza^2+zxb^2+xyc^2$$

すなわち

$$(x+y+z)^2R^2\geqq yza^2+zxb^2+xyc^2.$$

(iii) (i) の不等式で $x=a,y=b,z=c$ とおくと

$$a+b+c)\left(aR_1^2+bR_2^2+cR_3^2\right)\geqq bc\cdot a^2+ca\cdot b^2+ab\cdot c^2=abc(a+b+c).$$

両辺を $a+b+c$ で割ると

$$aR_1^2+bR_2^2+cR_3^2\geqq abc.$$ ■

注意 (ii) の不等式は例題 1(ii) で klamkin の不等式を用いて証明してある。

問 3　(i)　△ABC と 0 以外の任意の実数 x,y,z に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x^2\sin^2A+y^2\sin^2B+z^2\sin^2C\leqq\frac{1}{4}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

(ii)　△ABC と点 P が同一平面上にあるとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(b+c-a)\mathrm{PA}^2+(c+a-b)\mathrm{PB}^2+(a+b-c)\mathrm{PC}^2\geqq 8rs(R-r).$$

解 問 2 の不等式を利用する。

(i) 問 2(ii) より，任意の実数 x, y, z に対して

$$(x+y+z)^2R^2 \geqq yza^2 + zxb^2 + xyc^2$$

が成り立つから，(x, y, z) のところに $\left(\dfrac{yz}{x}, \dfrac{zx}{y}, \dfrac{xy}{z}\right)$ を代入すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)^2 R^2 &\geqq \frac{zx}{y}\cdot\frac{xy}{z}a^2 + \frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}b^2 + \frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}c^2 \\ &= x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 \\ &= 4R^2(x^2\sin^2 A + y^2\sin^2 B + z^2\sin^2 C)\end{aligned}$$

から

$$x^2\sin^2 A + y^2\sin^2 B + z^2\sin^2 C \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

(ii) 問 2(i) より，任意の実数 x, y, z に対して

$$(x+y+z)\left(x\mathrm{PA}^2 + y\mathrm{PB}^2 + z\mathrm{PC}^2\right) \geqq yza^2 + zxb^2 + xyc^2.$$

$x = b+c-ay = c+a-b, z = a+b-c$ とおくと $x+y+z = a+b+c = 2s$ で

$$\begin{aligned}&2s\left((b+c-a)\mathrm{PA}^2 + (c+a-b)\mathrm{PB}^2 + (a+b-c)\mathrm{PC}^2\right) \\ &\geqq (c+a-b)(a+b-c)a^2 + (a+b-c)(b+c-a)b^2 + (b+c-a)(c+a-b)c^2 \\ &= a^4+b^4+c^4 - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) + 2abc(a+b+c). \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

ヘロンの公式より

$$16S^2 = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - (a^4+b^4+c^4)$$

だから

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4 - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) + 2abc(a+b+c) &= -16S^2 + 2abc(a+b+c) \\ &= -16(rs)^2 + 2\cdot 4Rrs\cdot 2s \\ &= 16rs^2(R-r).\end{aligned}$$

これを①に用いると

$$2s\left((b+c-a)\mathrm{PA}^2 + (c+a-b)\mathrm{PB}^2 + (a+b-c)\mathrm{PC}^2\right) \geqq 16rs^2(R-r)$$

から

$$(b+c-a)\mathrm{PA}^2 + (c+a-b)\mathrm{PB}^2 + (a+b-c)\mathrm{PC}^2 \geqq 8rs(R-r). \qquad \blacksquare$$

問 4　(i)　△ABC と任意の正の実数 x,y,z に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$R(x+y+z)\sqrt{xy+yz+zx} \geqq yza+zxb+xyc.$$

(ii)　△ABC と任意の正の実数 p,q,r に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}(pq+qr+rp)\sqrt{\frac{p+q+r}{pqr}} \geqq p\sin A+q\sin B+r\sin C.$$

解 (i) 問 2(ii) より，任意の実数 x,y,z に対して

$$(x+y+z)^2R^2 \geqq yza^2+zxb^2+xyc^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

またコーシー・シュワルツの不等式より

$$(yz+zx+xy)(yza^2+zxb^2+xyc^2) \geqq (yza+zxb+xyc)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。①と ②から

$$(x+y+z)^2R^2(yz+zx+xy) \geqq (yz+zx+xy)(yza^2+zxb^2+xyc^2) \geqq (yza+zxb+xyc)^2$$

すなわち

$$R(x+y+z)\sqrt{xy+yz+zx} \geqq yza+zxb+xyc.$$

(ii) (i) において $x=\sqrt{\frac{qr}{p}}, y=\sqrt{\frac{rp}{q}}, z=\sqrt{\frac{pq}{r}}$ とおくと

$$R\left(\sqrt{\frac{qr}{p}}+\sqrt{\frac{rp}{q}}+\sqrt{\frac{pq}{r}}\right)\sqrt{r+p+q} \geqq pa+qb+rc$$

$$R\cdot\frac{qr+rp+pq}{\sqrt{pqr}}\cdot\sqrt{p+q+r} \geqq p\cdot 2R\sin A+q\cdot 2R\sin B+y\cdot 2R\sin C$$

両辺を $2R$ で割ると

$$\frac{1}{2}(pq+qr+rp)\sqrt{\frac{p+q+r}{pqr}} \geqq p\sin A+q\sin B+r\sin C. \qquad \blacksquare$$

4　2つの三角形の不等式

4.1　Neuberg - Pedoe の不等式

(Neuberg - Pedoe の不等式)

a, b, c と a', b', c' を面積が F, F' である 2 つの三角形の辺の長さとするとき，次の不等式が成り立つ。

$$a^2\left(b'^2+c'^2-a'^2\right)+b^2\left(c'^2+a'^2-b'^2\right)+c^2\left(a'^2+b'^2-c'^2\right) \geqq 16FF'. \quad \cdots\cdots ①$$

証明 $H = a^2\left(b'^2+c'^2-a'^2\right)+b^2\left(c'^2+a'^2-b'^2\right)+c^2\left(a'^2+b'^2-c'^2\right)$

$$= \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a'^2+b'^2+c'^2\right)-\left(a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2\right)$$

とおき

$$H \geqq 8\left(\frac{S'}{S}F^2+\frac{S}{S'}F'^2\right) \geqq 16FF' \quad \cdots\cdots ②$$

を示す。ここで，$S = a^2+b^2+c^2, S' = a'^2+b'^2+c'^2$,

$$x = \frac{a^2}{S}, y = \frac{b^2}{S}, z = \frac{c^2}{S}, x' = \frac{a'^2}{S'}, y' = \frac{b'^2}{S'}, z' = \frac{c'^2}{S'}$$

とおくと

$$H = SS' - 2(xS \cdot x'S' + yS \cdot y'S' + zS \cdot z'S') = SS'(1-2(xx'+yy'+zz')). \quad \cdots\cdots ③$$

ヘロンの公式より

$$\begin{aligned} 16F^2 &= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4) \\ &= (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4) \\ &= S^2-2(x^2S^2+y^2S^2+z^2S^2) \\ &= S^2(1-2(x^2+y^2+z^2)) \end{aligned}$$

となるので

$$16F^2 = S^2(1-2(x^2+y^2+z^2)). \quad \cdots\cdots ④$$

同様にして

$$16F'^2 = S'^2(1-2(x'^2+y'^2+z'^2)). \quad \cdots\cdots ⑤$$

$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \geqq 0$ から

$$x^2+y^2+z^2+{x'}^2+{y'}^2+{z'}^2 \geqq 2(xx'+yy'+zz') \qquad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つ。③，④，⑤を変形した

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}-\frac{8F^2}{S^2}, {x'}^2+{y'}^2+{z'}^2=\frac{1}{2}-\frac{8{F'}^2}{{S'}^2}, xx'+yy'+zz'=\frac{1}{2}-\frac{H}{2SS'}$$

を⑥に代入すると

$$\frac{1}{2}-\frac{8F^2}{S^2}+\frac{1}{2}-\frac{8{F'}^2}{{S'}^2} \geqq 1-\frac{H}{SS'}$$

$$\frac{H}{SS'} \geqq \frac{8F^2}{S^2}+\frac{8{F'}^2}{{S'}^2}$$

SS' を両辺にかけると

$$H \geqq 8\left(\frac{S'}{S}F^2+\frac{S}{S'}{F'}^2\right)$$

となり②の左側の不等式は成立する。

相加平均と相乗平均の不等式を使うと

$$8\left(\frac{S'}{S}F^2+\frac{S}{S'}{F'}^2\right) \geqq 8\cdot 2\sqrt{\frac{S'}{S}F^2\cdot\frac{S}{S'}{F'}^2}=16FF'$$

となり②の右側の不等式は成立する。■

①で等号が成り立つのは，$x=x', y=y', z=z'$ かつ $\dfrac{F}{S}=\dfrac{F'}{S'}$ すなわち

$$\frac{a^2}{S}=\frac{{a'}^2}{S'}, \frac{b^2}{S}=\frac{{b'}^2}{S'}, \frac{c^2}{S}=\frac{{c'}^2}{S'}, \frac{F}{F'}=\frac{S}{S'}$$

が成立するときである。$\dfrac{S}{S'}=k^2\ (k>0)$ とおくと

$$\frac{a^2}{{a'}^2}=\frac{b^2}{{b'}^2}=\frac{c^2}{{c'}^2}=\frac{S}{S'}=k^2, \frac{F}{F'}=\frac{S}{S'}=k^2$$

から

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k, \frac{F}{F'}=k^2$$

となるので，等号が成立するのは 2 つの三角形が相似のときであることがわかる。

4.2　Bottema の不等式

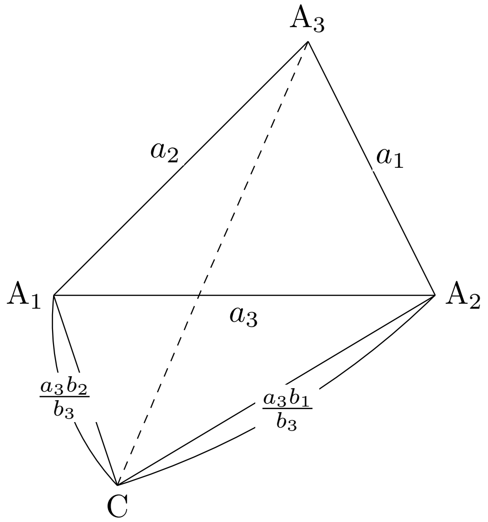
(Bottema の不等式)　a_1, a_2, a_3 と b_1, b_2, b_3 を面積が F, F' である 2 つの三角形 $\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$ と $\triangle \mathrm{B_1B_2B_3}$ の辺の長さとし，x_1, x_2, x_3 を任意の点 P と $\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$ の頂点 $\mathrm{A_1, A_2, A_3}$ との距離とする。

$$H = b_1^2(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + b_2^2(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) + b_3^2(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)$$

とおくと，次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{3} b_k x_k \geqq \left(\frac{H}{2} + 8FF'\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \cdots\cdots ①$$

証明



$\triangle \mathrm{A_1A_2C}$ を $\triangle \mathrm{A_1A_2C} \backsim \triangle \mathrm{B_1B_2B_3}$ となるように作る。

それには $\mathrm{A_1C} = \dfrac{a_3b_2}{b_3}, \mathrm{A_2C} = \dfrac{a_3b_1}{b_3}$ とおくと

$$\mathrm{A_1A_2 : A_2C : A_1C} = a_3 : \frac{a_3b_2}{b_3} : \frac{a_3b_1}{b_3} = b_3 : b_1 : b_2$$

より可能である。

トレミーの不等式を $\mathrm{PA_1CA_2}$ に適用すると

$$\mathrm{PA_1 \cdot A_2C + PA_2 \cdot A_1C} \geqq a_3 \cdot \mathrm{PC}$$

$$x_1 \cdot \frac{a_3 b_1}{b_3} + x_2 \cdot \frac{a_3 b_2}{b_3} \geqq a_3 \mathrm{PC}$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 \geqq b_3 \mathrm{PC}.$$

この不等式を使うと

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \geqq b_3 \mathrm{PC} + b_3 x_3 = b_3(\mathrm{PC} + x_3) \geqq b_3 \cdot \mathrm{A_3C}$$

すなわち

$$2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 \geqq 2b_3^2 \cdot \mathrm{A_3C}^2. \qquad \cdots\cdots ②$$

$\triangle \mathrm{A_3A_1C}$ に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{A_3C}^2 = a_2^2 + \left(\frac{a_3 b_2}{b_3}\right)^2 - 2a_2 \cdot \frac{a_3 b_2}{b_3} \cos\left(\angle \mathrm{A_3A_1A_2} + \angle \mathrm{A_2A_1C}\right)$$

$$\begin{aligned}
&2b_3^2 \mathrm{A_3C}^2 \\
&= 2a_2^2 b_3^2 + 2a_3^2 b_2^2 - 4a_2 a_3 b_2 b_3 \cos\left(\angle \mathrm{A_3A_1A_2} + \angle \mathrm{A_2A_1C}\right) \\
&= 2a_2^2 b_3^2 + 2a_3^2 b_2^2 - 4a_2 a_3 b_2 b_3 \left(\cos \angle \mathrm{A_3A_1A_2} \cos \angle \mathrm{A_2A_1C} - \sin \angle \mathrm{A_3A_1A_2} \sin \angle \mathrm{A_2A_1C}\right) \\
&= 2a_2^2 b_3^2 + 2a_3^2 b_2^2 - 4a_2 a_3 b_2 b_3 \cdot \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{2a_2 a_3} \cdot \frac{b_2^2 + b_3^2 - b_1^2}{2b_2 b_3} \\
&\quad 16\left(\frac{1}{2} a_2 a_3 \sin \angle \mathrm{A_3A_1A_2} \cdot \frac{1}{2} b_2 b_3 \sin \angle \mathrm{A_2A_1C}\right) \\
&== 2a_2^2 b_3^2 + 2a_3^2 b_2^2 - (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)(b_2^2 + b_3^2 - b_1^2) + 16FF' \\
&= b_1^2(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + b_2^2(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) + b_3^2(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) + 16FF' \\
&= H + 16FF'.
\end{aligned}$$

②から

$$2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 \geqq 2b_3^2 \cdot A_3C^2 = H + 16FF'.$$

よって

$$\sum_{k=1}^{3} b_k x_k \geqq \left(\frac{H}{2} + 8FF'\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \blacksquare$$

Neuberg-Pedoe の不等式 $H \geqq 16FF'$ を①に使うと

$$\sum_{k=1}^{3} b_k x_k \geqq \left(\frac{H}{2} + 8FF'\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \left(\frac{16FF'}{2} + 8FF'\right)^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{FF'}$$

すなわち

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \geqq 4\sqrt{FF'}$$

が成り立つ。$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$ と $\triangle \mathrm{B_1B_2B_3}$ は面積が S の $\triangle \mathrm{ABC}$ と合同な三角形とすると，$a_1 = b_1 = a, a_2 = b_2 = b, a_3 = b_3 = c, F = F' = S$ で

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \geqq 4\sqrt{FF'}$$

は

$$a\mathrm{PA} + b\mathrm{PB} + c\mathrm{PC} \geqq 4S$$

となる。これは問 1(ii) で証明した不等式である。

4.3　例題

例題 18　2 つの三角形 △ABC と △A′B′C′ において次の不等式が成り立つ。

$$\frac{\sin A'}{\sin A}+\frac{\sin B'}{\sin B}+\frac{\sin C'}{\sin C}\leqq 1+\frac{R}{r}. \qquad \cdots\cdots ①$$

ただし，r, R は △ABC の内接円の半径，外接円の半径を表すものとする。

解 不等式の両辺を $2R$ で割り，正弦定理を用いる。

$$\begin{aligned} ① &\iff \frac{\sin A'}{2R\sin A}+\frac{\sin B'}{2R\sin B}+\frac{\sin C'}{2R\sin C}\leqq \frac{R+r}{2Rr} \\ &\iff \frac{\sin A'}{a}+\frac{\sin B'}{b}+\frac{\sin C'}{c}\leqq \frac{R+r}{2Rr}. \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

問 4 (ii) より △A′B′C′ と任意の正の実数 p, q, r に対して不等式

$$\frac{1}{2}(pq+qr+rp)\sqrt{\frac{p+q+r}{pqr}}\geqq p\sin A'+q\sin B'+r\sin C'$$

が成り立つから，$p=\dfrac{1}{a}, q=\dfrac{1}{b}, r=\dfrac{1}{c}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\sin A'}{a}+\frac{\sin B'}{b}+\frac{\sin C'}{c} &\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+c}{abc}\cdot\sqrt{ab+bc+ca} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{4Rrs}\cdot\sqrt{s^2+4Rr+r^2} \\ &= \frac{\sqrt{s^2+4Rr+r^2}}{4Rr}. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\sqrt{s^2+4Rr+r^2}}{4Rr}\leqq\frac{R+r}{2Rr} \qquad \cdots\cdots ③$$

を示せば十分である。

$$\begin{aligned} ③ &\iff \sqrt{s^2+4Rr+r^2}\leqq 2(R+r) \iff s^2+4Rr+r^2\leqq 4(R^2+2Rr+r^2) \\ &\iff s^2\leqq 4R^2+4Rr+3r^2. \end{aligned}$$

最後の不等式は Gerretsen の不等式より成立する。 ■

例題 19　　2 つの三角形 △ABC と △A′B′C′ において次の不等式が成り立つ。

$$R\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{R'}\right) \geqq \frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}. \qquad \cdots\cdots ①$$

ただし，r', R' は △A′B′C′ の内接円の半径，外接円の半径を表すものとする。

解 問 4 (ii) より △ABC と任意の正の実数 p, q, r に対して不等式

$$p\sin A+q\sin B+r\sin C \leqq \frac{1}{2}(pq+qr+rp)\sqrt{\frac{p+q+r}{pqr}}$$

が成り立つから，$p=\dfrac{1}{\sin A'}, q=\dfrac{1}{\sin B'}, r=\dfrac{1}{\sin C'}$ とおくと

$$\frac{\sin A}{\sin A'}+\frac{\sin B}{\sin B'}+\frac{\sin C}{\sin C'} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A'\sin B'}+\frac{1}{\sin B'\sin C'}+\frac{1}{\sin C'\sin A'}\right)$$
$$\times\sqrt{\sin A'\sin B'\sin C'\left(\frac{1}{\sin A'}+\frac{1}{\sin B'}+\frac{1}{\sin C'}\right)}$$

$$\sum_{cyc}\frac{\sin A}{\sin A'} \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin A'+\sin B'+\sin C'}{\sin A'\sin B'\sin C'}\cdot\sqrt{\sin A'\sin B'+\sin B'\sin C'+\sin C'\sin A'}$$

$$\frac{2R'}{2R}\sum_{cyc}\frac{a}{a'} \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{(2R)^3}{2R'}\,\frac{a'+b'+c'}{a'b'c'}\sqrt{\frac{1}{(2R')^2}(a'b'+b'c'+c'a')}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a}{a'} \leqq R\left(\frac{a'+b'+c'}{a'b'c'}\right)\sqrt{a'b'+b'c'+c'a'}. \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで

$$\frac{a'+b'+c'}{a'b'c'}=\frac{2s'}{4R'r's'}=\frac{1}{2R'r'}, a'b'+b'c'+c'a'={s'}^2+4R'r'+{r'}^2$$

だから②は

$$\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'} \leqq \frac{R}{2R'r'}\sqrt{{s'}^2+4R'r'+{r'}^2} \qquad \cdots\cdots ③$$

となる。Gerretsen の不等式より，${s'}^2 \leqq 4{R'}^2+4R'r'+3{r'}^2$ が成り立つから

$$\begin{aligned}\frac{R}{2R'r'}\sqrt{{s'}^2+4R'r'+{r'}^2} &\leqq \frac{R}{2R'r'}\sqrt{4{R'}^2+4R'r'+3{r'}^2+4R'r'+{r'}^2}\\ &= \frac{R}{2R'r'}\sqrt{4(R'+r')^2}=\frac{R}{2R'r'}\cdot 2(R'+r')\\ &= R\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{R'}\right)\end{aligned}$$

から

$$\frac{R}{2R'r'}\sqrt{{s'}^2+4R'r'+{r'}^2} \leqq R\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{R'}\right) \qquad \cdots\cdots ④$$

③，④より①が得られる。 ■

例題 20　2 つの三角形 $\triangle \mathrm{A_1B_1C_1}$，$\triangle \mathrm{A_2B_2C_2}$ と正の数 x, y, z が与えられている。$i = 1, 2$ に対して $a_i, b_i, c_i, A_i, B_i, C_i, S_i$ を $\triangle \mathrm{A}_i\mathrm{B}_i\mathrm{C}_i$ の辺の長さ，角の大きさ，面積とするとき，次の不等式が成り立つ。

$$xa_1a_2 + yb_1b_2 + zc_1c_2 \geqq 4\sqrt{(xy+yz+zx)S_1S_2}.$$

解 $u = xa_1a_2, v = yb_1b_2, w = zc_1c_2$ とおくと

$$2S_1 = b_1c_1 \sin A_1 = c_1a_1 \sin B_1 = a_1b_1 \sin C_1,$$

$$2S_2 = b_2c_2 \sin A_2 = c_2a_2 \sin B_2 = a_2b_2 \sin C_2$$

だから

$$\begin{aligned} 4(xy+yz+zx)S_1S_2 &= xy \cdot a_1b_1 \sin C_1 \cdot a_2b_2 \sin C_2 + yz \cdot b_1c_1 \sin A_1 \cdot b_2c_2 \sin A_2 \\ &\quad + zx \cdot c_1a_1 \sin B_1 \cdot c_2a_2 \sin B_2 \\ &= uv \sin C_1 \sin C_2 + vw \sin A_1 \sin A_2 + wu \sin B_1 \sin B_1 \sin B_2 \end{aligned}$$

となるので，$L = (xa_1a_2 + yb_1b_2 + zc_1c_2)^2 - \left(4\sqrt{(xy+yz+zx)S_1S_2}\right)^2$ とおくと

$$\begin{aligned} L &= (xa_1a_2 + yb_1b_2 + zc_1c_2)^2 - (16(xy+yz+zx)S_1S_2) \\ &= (u+v+w)^2 - 4(uv \sin C_1 \sin C_2 + vw \sin A_1 \sin A_2 + wu \sin B_1 \sin B_1 \sin B_2) \\ &= u^2 + v^2 + w^2 + 2uv(1 - 2\sin C_1 \sin C_2) + 2vw(1 - 2\sin A_1 \sin A_2) \\ &\qquad + 2wu(1 - 2\sin B_1 \sin B_2). \end{aligned}$$

$U = 1 - 2\sin A_1 \sin A_2, V = 1 - 2\sin B_1 \sin B_2, W = 1 - 2\sin C_1 \sin C_2$ とおくと

$$U = 1 - 2\sin A_1 \sin A_2 = 1 + \cos(A_1 + A_2) - \cos(A_1 - A_2) \geqq \cos(A_1 + A_2).$$

同様にして $V \geqq \cos(B_1 + B_2), W \geqq \cos(C_1 + C_2)$ が成り立つから

$$\begin{aligned} L &= u^2 + v^2 + w^2 + 2uvW + 2vwU + 2wuV \\ &\geqq u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos(C_1 + C_2) + 2vw\cos(A_1 + A_2) + 2wu\cos(B_1 + B_2) \end{aligned}$$

から

$$L \geqq u^2+v^2+w^2+2uv\cos(C_1+C_2)+2vw\cos(A_1+A_2)+2wu\cos(B_1+B_2). \quad \cdots\cdots ②$$

$A = A_1 + A_2, B = B_1 + B_2, C = C_1 + C_2$ とおくと $A + B + C = 2\pi$ で

$$
\begin{aligned}
&u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos(C_1 + C_2) + 2vw\cos(A_1 + A_2) + 2wu\cos(B_1 + B_2) \\
&= u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos(2\pi - A - B) + 2vw\cos A + 2wu\cos B \\
&= w^2 + 2w(v\cos A + u\cos B) + u^2 + v^2 + 2uv\cos(A + B) \\
&= (w + v\cos A + u\cos B)^2 - (v\cos A + u\cos B)^2 \\
&\qquad + u^2 + v^2 + 2uv(\cos A\cos B - \sin A\sin B) \\
&= (w + v\cos A + u\cos B)^2 + u^2(1 - \cos^2 B) + v^2(1 - \cos^2 A) - 2uv\sin A\sin B \\
&= (w + v\cos A + u\cos B)^2 + u^2\sin^2 B + v^2\sin^2 A - 2uv\sin A\sin B \\
&= (w + v\cos A + u\cos B)^2 + (u\sin B - v\sin A)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

だから，②より $L \geqq 0$ となる。 ■

△ABC において，$\triangle \mathrm{A_1B_1C_1}$，$\triangle \mathrm{A_2B_2C_2}$ を △ABC と同じものとすれば

$a_1 = a_2 = a, b_1 = b_2 = b, c_1 = c_2 = c, S_1 = S_2 = S$ だから①から

△ABC と正の数 x, y, z に対して

$$xa^2 + yb^2 + zc^2 \geqq 4\sqrt{xy + yz + zx}\,S$$

が成り立つことがわかる。

例題 21　2 つの三角形 △ABC，△A′B′C′ に対して次の不等式が成り立つ。

$$x^2aa' + y^2bb' + z^2cc' \geqq \frac{4}{3}(yzw_aw'_a + zxw_bw'_b + xyw_cw'_c).$$

解 $w_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$ であるから，相加平均と相乗平均の不等式を使うと

$$w_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \leqq \frac{2bc}{2\sqrt{bc}}\cos\frac{A}{2} = \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$$

から $w_a \leqq \sqrt{bc}\cos\dfrac{A}{2}$. 同様にして $w'_a \leqq \sqrt{b'c'}\cos\dfrac{A'}{2}$ 等が成り立つから

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{3}(yzw_aw'_a + zxw_bw'_b + xyw_cw'_c) \\
&\leqq \frac{4}{3}\left(yz\sqrt{bcb'c'}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A'}{2} + zx\sqrt{cabc'a'}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B'}{2} + xy\sqrt{aba'b'}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C'}{2}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(yz\sqrt{bcb'c'}\left(\cos\frac{A+A'}{2} + \cos\frac{A-A'}{2}\right) + zx\sqrt{cabc'a'}\left(\cos\frac{B+B'}{2} + \cos\frac{B-B'}{2}\right)\right. \\
&\qquad \left. + xy\sqrt{aba'b'}\left(\cos\frac{C+C'}{2} + \cos\frac{C-C'}{2}\right)\right). \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

Klamkin の不等式より

n を整数，x, y, z, A, B, C は実数で $A + B + C = \pi$ をみたすとき次の不等式が成り立つ。

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq 2(-1)^{n+1}(yz\cos nA + zx\cos nB + xy\cos nC).$$

$\dfrac{A+A'}{2} + \dfrac{B+B'}{2} + \dfrac{C+C'}{2} = \pi$ だから，Klamkin の不等式で $n = 1$ とおいた不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq 2(yz\cos A + zx\cos B + xy\cos C)$$

において，(x, y, z) のところに $(\sqrt{aa'}\,x, \sqrt{bb'}\,y, \sqrt{cc'}\,z)$，$(A, B, C)$ のところに $\left(\dfrac{A+A'}{2}, \dfrac{B+B'}{2}, \dfrac{C+C'}{2}\right)$ を代入すると

$$\begin{aligned}&aa'x^2 + bb'y^2 + cc'z^2\\ &\leqq 2\left(\sqrt{bcb'c'}\,yz\cos\frac{A+A'}{2} + \sqrt{cac'a'}\,zx\cos\frac{B+B'}{2} + \sqrt{aba'b'}\,xy\cos\frac{C+C'}{2}\right)\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}&yz\sqrt{bcb'c'}\cos\frac{A+A'}{2} + zx\sqrt{cabc'a'}\cos\frac{B+B'}{2} + xy\sqrt{aba'b'}\cos\frac{C+C'}{2}\\ &\leqq \frac{1}{2}(x^2aa' + y^2bb' + z^2cc'). \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

また $\cos\dfrac{A-A'}{2} \leqq 1, \cos\dfrac{B-B'}{2} \leqq 1, \cos\dfrac{C-C'}{2} \leqq 1$ だから

$$\begin{aligned}&yz\sqrt{bcb'c'}\cos\frac{A-A'}{2} + zx\sqrt{cabc'a'}\cos\frac{B-B'}{2} + xy\sqrt{aba'b'}\cos\frac{C-C'}{2}\\ &\leqq yz\sqrt{bcb'c'} + zx\sqrt{cabc'a'} + xy\sqrt{aba'b'} \qquad \cdots\cdots ④\end{aligned}$$

が成り立つ。

$XY + YZ + ZX \leqq X^2 + Y^2 + Z^2$ において，$X = \sqrt{aa'}\,x, Y = \sqrt{bb'}\,y, Z = \sqrt{cc'}\,z$, とおくと

$$\sqrt{aa'}\,x \cdot \sqrt{bb'}\,y + \sqrt{bb'}\,y \cdot \sqrt{cc'}\,z + \sqrt{cc'}\,z \cdot \sqrt{aa'}\,x \leqq aa'x^2 + bb'y^2 + cc'z^2$$

すなわち

$$yz\sqrt{bcb'c'} + zx\sqrt{cabc'a'} + xy\sqrt{aba'b'} \leqq x^2aa' + y^2bb' + z^2cc'. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤から

$$\begin{aligned}&yz\sqrt{bcb'c'}\cos\frac{A-A'}{2} + zx\sqrt{cabc'a'}\cos\frac{B-B'}{2} + xy\sqrt{aba'b'}\cos\frac{C-C'}{2}\\ &\leqq \frac{1}{2}(x^2aa' + y^2bb' + z^2cc'). \qquad \cdots\cdots ⑥\end{aligned}$$

③，⑥を ②に使うと

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{3}\sum_{cyc} yzw_a w_a' \\
&\leqq \frac{2}{3}\left(\sum_{cyc} yz\sqrt{bcb'c'}\cos\frac{A+A'}{2} + \sum_{cyc}\sqrt{bcb'c'}\cos\frac{A-A'}{2}\right) \\
&\leqq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\sum_{cyc} x^2aa' + \sum_{cyc} x^2aa'\right) \\
&= \sum_{cyc} x^2aa'.
\end{aligned}
$$

■

例題 22　△ABC に対して次の不等式が成り立つ。

(i) $w_a w_b w_c = \dfrac{16Rr^2s^2}{s^2+2Rr+r^2}$.

(ii) $\dfrac{1}{w_a}+\dfrac{1}{w_b}+\dfrac{1}{w_c} \leqq \dfrac{1}{2R}+\dfrac{3}{4r}$.

(iii) $w_a w_b + w_b w_c + w_c w_a \leqq 3r(4R+r)$.

(iv) $(w_a+w_b+w_c)^2 \leqq s^2+24Rr+6r^2$.

(v) $w_a+w_b+w_c \leqq \dfrac{3}{2}\sqrt{ab+bc+ca}$.

解 w_a 等は △ABC の内角の二等分線の長さを表す。

(i) $w_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$ 等から

$$
\begin{aligned}
w_a w_b w_c &= \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{2ca}{c+a}\cos\frac{B}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2} \\
&= \frac{8(abc)^2}{(b+c)(c+a)(a+b)}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b+c)(c+a)(a+b) &= (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc \\
&= 2s(s^2+4Rr+r^2)-4Rrs \\
&= 2s(s^2+2Rr+r^2),
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\prod_{cyc}\cos\frac{A}{2} = \frac{s}{4R}$ だから

$$
w_a w_b w_c = \frac{8(4Rrs)^2}{2s(s^2+2Rr+r^2)}\cdot\frac{s}{4R} = \frac{16Rr^2s^2}{s^2+2Rr+r^2}
$$

(ii) $w_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{2bc}{b+c}\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}} = \dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$ から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w_a} &= \frac{b+c}{2\sqrt{bcs(s-a)}} = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{2bc}\cdot\frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \\
&= \frac{(b+c)\sqrt{bc(s-b)(s-c)}}{2bcS} \\
&= \frac{b+c}{4bcS}\cdot 2\sqrt{\frac{abc}{b+c}\cdot\frac{(b+c)(s-b)(s-c)}{a}} \\
&\leqq \frac{b+c}{4bcS}\left(\frac{abc}{b+c}+\frac{(b+c)(s-b)(s-c)}{a}\right) \\
&= \frac{a}{4S}+\frac{1}{4abcS}\cdot(s-b)(s-c)(b+c)^2.
\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{cyc}\frac{1}{w_a} \leqq \frac{1}{4S}\sum_{cyc}a+\frac{1}{4abcS}\sum_{cyc}(s-b)(s-c)(b+c)^2.$$

$\displaystyle\sum_{cyc}(s-b)(s-c)(b+c)^2$ を s, R, r で表す。

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}(s-b)(s-c)(b+c)^2 &= \frac{1}{4}\sum_{cyc}(c+a-b)(a+b-c)(b+c)^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(a^2-(b-c)^2\right)(b+c)^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{cyc}a^2(b+c)^2-\frac{1}{4}\sum_{cyc}(b^2-c^2)^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{cyc}(a^2b^2+c^2a^2+2abc\cdot a)-\frac{1}{4}\sum_{cyc}(b^4+c^4-2b^2c^2) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\sum_{cyc}b^2c^2+2abc\sum_{cyc}a\right)-\frac{1}{4}\left(3\sum_{cyc}a^4-2\sum_{cyc}b^2c^2\right) \\
&= \frac{1}{2}abc\sum_{cyc}a+\underbrace{\sum_{cyc}b^2c^2-\frac{1}{2}\sum_{cyc}a^4}_{=8S^2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 4Rrs\cdot 2s+8r^2s^2 \\
&= 4(R+2r)rs^2.
\end{aligned}$$

よって

$$
\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{1}{w_a} &\leqq \frac{1}{4S}\sum_{cyc}a+\frac{1}{4abcS}\sum_{cyc}(s-b)(s-c)(b+c)^2 \\
&= \frac{1}{4rs}\cdot 2s+\frac{1}{4\cdot 4Rrs\cdot rs}\cdot 4(R+2r)rs^2 \\
&= \frac{1}{2r}+=\frac{R+2r}{4Rr} \\
&= \frac{1}{2R}+\frac{3}{2r}
\end{aligned}
$$

となり，$\dfrac{1}{w_a}+\dfrac{1}{w_b}+\dfrac{1}{w_c}\leqq\dfrac{1}{2R}+\dfrac{3}{4r}$ は成立する。

(iii) (i) と (ii) を使うと

$$
\begin{aligned}
\sum_{cyc}w_bw_c &= w_aw_bw_c\sum_{cyc}\frac{1}{w_a} \\
&\leqq \frac{16Rr^2s^2}{s^2+2Rr+r^2}\cdot\left(\frac{1}{2R}+\frac{3}{4r}\right) \\
&= \frac{4r(3R+2r)s^2}{s^2+2Rr+r^2}
\end{aligned}
$$

だから

$$\frac{4r(3R+2r)s^2}{s^2+2Rr+r^2}\leqq 3r(4R+r) \qquad \cdots\cdots ①$$

を示せば十分である。

$$
\begin{aligned}
① &\iff 4r(3R+2r)s^2\leqq 3(4R+r)(s^2+2Rr+r^2) \\
&\iff 5s^2\leqq 24R^2+18Rr+3r^2.
\end{aligned}
$$

Gerretsen の不等式から $s^2\leqq 4R^2+4Rr+3r^2$ だから

$$5(4R^2+4Rr+3r^2)\leqq 24R^2+18Rr+3r^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

を示せば十分である。

$$
\begin{aligned}
② &\iff 2R^2-Rr-6r^2\geqq 0 \\
&\iff (R-2r)(2R+3r)\geqq 0.
\end{aligned}
$$

最後の不等式はオイラーの不等式 $R\geqq 2r$ より成立する。

(iv) $(w_a+w_b+w_c)^2=\sum_{cyc}w_a^2+2\sum_{cyc}w_aw_b.$

$w_a = \dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)} \leqq \sqrt{s(s-a)}$ が成り立つから

$$\sum_{cyc} w_a^2 \leqq \sum_{cyc} s(s-a) = 3s^2 - s\sum_{cyc} = s^2,$$

(iii) より

$$w_a w_b + w_b w_c + w_c w_a \leqq 3r(4R+r)$$

だから

$$\begin{aligned}(w_a+w_b+w_c)^2 &= \sum_{cyc} w_a^2 + 2\sum_{cyc} w_a w_b \\ &\leqq s^2 + 2\cdot 3r(4R+r) \\ &= s^2 + 24Rr + 6r^2.\end{aligned}$$

よって $(w_a+w_b+w_c)^2 \leqq s^2 + 24Rr + 6r^2.$

(v) (iv) より $(w_a+w_b+w_c)^2 \leqq s^2 + 24Rr + 6r^2$ が成り立つから

$$s^2 + 24Rr + 6r^2 \leqq \frac{9}{4}(ab+bc+ca) \qquad \cdots\cdots ③$$

を示せば十分である。$ab+bc+ca = s^2 + 4Rr + r^2$ だから

$$③ \iff 12Rr + 3r^2 \leqq s^2.$$

Gerretsen の不等式から $16Rr - 5r^2 \leqq s^2$ だから

$$12Rr + 3r^2 \leqq 16Rr - 5r^2 \qquad \cdots\cdots ④$$

を示せば十分である。

$$④ \iff 2r \leqq R.$$

最後の不等式はオイラーの不等式 $2r \leqq R$ より成立する。 ■

例題 23　2 つの三角形 △ABC，△A′B′C′ に対して次の不等式が成り立つ。

$$(b+c)\cot\frac{A'}{2} + (c+a)\cot\frac{B'}{2} + (a+b)\cot\frac{C'}{2} \geqq 4(w_a+w_b+w_c). \quad \cdots\cdots ①$$

解 問 1 で

a,b,c,x,y,z は $a+b+c \geqq 0, ab+bc+ca \geqq 0,\ x+y+z \geqq 0, xy+yz+zx \geqq 0$ をみたす実数とするとき，次の不等式が成り立つことを示した。

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geqq 2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}.$$

この不等式で $x=\cot\dfrac{A'}{2}, y=\cot\dfrac{B'}{2}, z=\cot\dfrac{C'}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}&(b+c)\cot\frac{A'}{2}+(c+a)\cot\frac{B'}{2}+(a+b)\cot\frac{C'}{2}\\ \geqq\ & 2\sqrt{(ab+bc+ca)\left(\cot\frac{A'}{2}\cot\frac{B'}{2}+\cot\frac{B'}{2}\cot\frac{C'}{2}+\cot\frac{C'}{2}\cot\frac{A'}{2}\right)}.\end{aligned}$$

相加平均と相乗平均の不等式と $\cot\dfrac{A'}{2}\cot\dfrac{B'}{2}\cot\dfrac{C'}{2} \geqq 3\sqrt{3}$ から

$$\begin{aligned}\cot\frac{A'}{2}\cot\frac{B'}{2}+\cot\frac{B'}{2}\cot\frac{C'}{2}+\cot\frac{C'}{2}\cot\frac{A'}{2} &\geqq 3\sqrt[3]{(\cot\frac{B'}{2}\cot\frac{C'}{2})^2}\\ &\geqq 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^2}=9.\end{aligned}$$

したがって，例題 22 (v) を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}(b+c)\cot\frac{A'}{2} &\geqq 2\sqrt{(ab+bc+ca)\sum_{cyc}\cot\frac{B'}{2}\cot\frac{C'}{2}}\\ &\geqq 2\sqrt{(ab+bc+ca)\cdot 6}\\ &=6\sqrt{(ab+bc+ca)}\\ &\geqq 4(w_a+w_b+w_c).\end{aligned}$$

よって ①は成立する。 ■

参考文献

[1] Crux Mathematicorum https://cms.math.ca/publications/crux/

[2] Mathematical Reflections の Mathematical Reflections - Archive
https://www.awesomemath.org/mathematical-reflections/archives/

[3] IMO からの幾何学的問題 https://imogeometry.blogspot.com/p/romanian-mathematical-magazine-problem.html

[4] ARHIMEDE MATHEMATICAL JOURNAL http://amj-math.com/archive/

[5] SSMA(School Science and Mathematics Association),2019(December 2019)-2020
https://www.ssma.org/solutions-problem-section

[6] AoPSOnline
https://artofproblemsolving.com/community/c13_ contests

[7] ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE
https://www.ssmrmh.ro/
RMM - Triangle Marathon 1 - 100,201-300,301 - 400,401-500,501-600,601-700,701-800,801-900,901-1000,1001-1100,1101-1200,1201-1300,1301-1400,1401-1500,1501-1600,1601-1700,1701-1800,1801-1900,1901-2000-PART1,1901-2000-PART2,2001-2100-1-90,2001-2100-91-146

[8] EVAN Chen https://web.evanchen.cc/problems.html

[9] By Marin Chirciu-Romania,SOLVED PROBLEM

[10] Cezar Lupu,Sharpness of the Finsler-Hadwiger inequality

[11] Yu-Lin Wu,Two geometric inequalities involved twotriangles

[12]RADOSAV Z. DJORDJEVIC,SOME INEQUALITIES FOR TRIANGLE:OLD AND NEW RESULTS

[13] Stanley Rabinowitz,On The Computer Solution of Symmetric Homogeneous Triangle Inequalities

[14] D. S. Mitrinovic,Recent Advances in Geometric Inequalities

[15] Wenchang Chu,Partial Fractions and Trigonometric Identities

[16] A. Laradji・M. Mignotte・N. Tzanakis,Elementary Trigonometric Sums related to Quadratic Residues

[17] The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985-2000 Problems, Solutions, and Commentary

[18] Amir Hossein Parvardi,Geometry Problems

[19] Nguyen Viet Hung,On some triangle inequalities

[20] M.L. Glasser & Michael Milgram,On quadratic Gauss sums and variations thereof

[21] The IMO Compendium A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads:1959-2004