$x^n-(x-1)^n$の2次以上の因数の凸性について

柳田 五夫

1　はじめに

村田先生 [1] が $(x-1)^5-x^5$, $(x-1)^6-x^6$, $(x-1)^8-x^8$ を整係数の範囲で因数分解し，因数として出てくる4次関数のグラフの形状を調べています．

（第1問） 次の関数を整係数の範囲で因数分解し，既約の因数として出てくる4次関数のグラフの形状を理由を付して述べよ．
(1) $(x-1)^5-x^5$　　(2) $(x-1)^6-x^6$　　(3) $(x-1)^8-x^8$

ここでは，n を正の整数として

$$\boldsymbol{f_n(x)=x^n-(x-1)^n}$$

を整係数の範囲で因数分解し，2次以上の因数のグラフの形状を調べていきたい．

$f_n(x)=x^n-(x-1)^n$ の式は次のようになる．$\left(\text{簡略化のため } s=x-\dfrac{1}{2} \text{ とする．}\right)$

$$\begin{aligned}
f_1(x)&=x-(x-1)=1\\
f_2(x)&=x^2-(x-1)^2=2x-1\\
&=2s\\
f_3(x)&=x^3-(x-1)^3=3x^2-3x+1\\
&=\frac{1}{4}(1+12s^2)\\
f_4(x)&=x^4-(x-1)^4=(2x-1)(2x^2-2x+1)\\
&=s(1+4s^2)\\
f_5(x)&=5x^4-10x^3+10x^2-5x+1\\
&=\frac{1}{16}(1+40s^2+80s^4)\\
f_6(x)&=(2x-1)(x^2-x+1)(3x^2-3x+1)\\
&=\frac{1}{8}s(3+4s^2)(1+12s^2)\\
f_7(x)&=7x^6-21x^5+35x^4-35x^3+21x^2-7x+1\\
&=\frac{1}{64}(1+84s^2+560s^4+448s^6)\\
f_8(x)&=(2x-1)(2x^2-2x+1)(2x^4-4x^3+6x^2-4x+1)\\
&=\frac{1}{8}s(1+4s^2)(1+24s^2+16s^4)\\
f_9(x)&=(3x^2-3x+1)(3x^6-9x^5+18x^4-21x^3+15x^2-6x+1)\\
&=\frac{1}{256}(1+12s^2)(1+132s^2+432s^4+192s^6)\\
f_{10}(x)&=(2x-1)(x^4-2x^3+4x^2-3x+1)(5x^4-10x^3+10x^2-5x+1)\\
&=\frac{1}{128}s(5+40s^2+16s^4)(1+40s^2+80s^4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{11}(x) &= 11x^{10} - 55x^9 + 165x^8 - 330x^7 + 462x^6 - 462x^5 + 330x^4 - 165x^3 + 55x^2 - 11x + 1 \\
&= \frac{1}{1024}(1 + 220s^2 + 5280s^4 + 29568s^6 + 42240s^8 + 11264s^{10}) \\
f_{12}(x) &= (2x-1)(x^2-x+1)(2x^2-2x+1)(3x^2-3x+1)(x^4-2x^3+5x^2-4x+1) \\
&= \frac{1}{256}s(1+4s^2)(3+4s^2)(1+12s^2)(1+56s^2+16s^4) \\
f_{13}(x) &= 13x^{12} - 78x^{11} + 286x^{10} - 715x^9 + 1287x^8 - 1716x^7 + 1716x^6 - 1287x^5 + 715x^4 - 286x^3 \\
&\quad + 78x^2 - 13x + 1 \\
&= \frac{1}{4096}(1 + 312s^2 + 11440s^4 + 109824s^6 + 329472s^8 + 292864s^{10} + 53248s^{12}) \\
f_{14}(x) &= (2x-1)(7x^6-21x^5+35x^4-35x^3+21x^2-7x+1)(x^6-3x^5+9x^4-13x^3+11x^2-5x+1) \\
&= \frac{1}{2048}s(7+140s^2+336s^4+64s^6)(1+84s^2+560s^4+448s^6) \\
f_{15}(x) &= (3x^2-3x+1)(5x^4-10x^3+10x^2-5x+1) \\
&\quad \times (x^8-4x^7+14x^6-28x^5+39x^4-36x^3+21x^2-7x+1) \\
&= \frac{1}{16384}(1+12s^2)(1+40s^2+80s^4)(1+368s^2+2144s^4+1792s^6+256s^8) \\
f_{16}(x) &= (2x-1)(2x^2-2x+1)(2x^4-4x^3+6x^2-4x+1) \\
&\quad \times (2x^8-8x^7+28x^6-56x^5+70x^4-56x^3+70x^4-56x^3+28x^2-8x+1) \\
&= \frac{1}{1024}s(1+4s^2)(1+24s^2+16s^4)(1+112s^2+1120s^4+1792s^6+256s^8) \\
f_{17}(x) &= 17x^{16} - 136x^{15} + 680x^{14} - 2380x^{13} + 6188x^{12} - 12376x^{11} + 19488x^{10} - 24310x^9 \\
&\quad + 24310x^8 - 19488x^7 + 12376x^6 - 6188x^5 + 2380x^4 - 680x^3 + 136x^2 - 17x + 1 \\
&= \frac{1}{65536}(1 + 544s^2 + 38080s^4 + 792064s^6 + 6223360s^8 + 19914752s^{10} \\
&\qquad\qquad + 25346048s^{12} + 11141120s^{14} + 1114112s^{16}) \\
f_{18}(x) &= (2x-1)(x^2-x+1)(3x^2-3x+1)(x^6-3x^5+12x^4-19x^3+15x^2-6x+1) \\
&\quad \times (3x^6-9x^5+18x^4-21x^3+15x^2-6x+1) \\
&= \frac{1}{32768}s(3+4s^2)(1+12s^2)(3+108s^2+528s^4+64s^6)(1+132s^2+432s^4+192s^6) \\
f_{19}(x) &= 19x^{18} - 171x^{17} + 969x^{16} - 3876x^{15} + 11628x^{14} - 27132x^{13} + 50388x^{12} - 75582x^{11} + 92378x^{10} \\
&\quad - 92378x^9 + 75582x^8 - 50388x^7 + 27132x^6 - 11628x^5 + 3876x^4 - 969x^3 + 171x^2 - 19x + 1 \\
&= \frac{1}{262144}(1 + 684s^2 + 62016s^4 + 1736448s^6 + 19348992s^8 + 94595072s^{10} \\
&\qquad\qquad + 206389248s^{12} + 190513152s^{14} + 63504384s^{16} + 4980736s^{18}) \\
f_{20}(x) &= (2x-1)(2x^2-2x+1)(x^4-2x^3+4x^2-3x+1)(5x^4-10x^3+10x^2-5x+1) \\
&\quad \times (x^8-4x^7+18x^6-40x^5+56x^4-50x^3+27x^2-8x+1) \\
&= \frac{1}{65536}s(1+4s^2)(5+40s^2+16s^4)(1+40s^2+80s^4)(1+176s^2+2656s^4+2816s^6+256s^8)
\end{aligned}
$$

……

このような因数分解となる理由を探ってみた．

2　$f_n(x)=x^n-(x-1)^n$ の性質

(F1) $p,\ n$ を正の整数とするとき，$f_{pn}(x)$ は $f_n(x)$ で割り切れる．

(F2) (i) n が奇数のとき，$y=f_n(x)$ のグラフは $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称である．

(ii) n が偶数のとき，$y=f_n(x)$ のグラフは点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に関して対称である．

(F3) (i) n が奇数のとき，$f_n(x)>0$ が成り立つ．

(ii) n が偶数のときは

$x<\dfrac{1}{2}$ で $f_n(x)<0$，$x>\dfrac{1}{2}$ で $f_n(x)>0$ が成り立つ．

(F4) n が素数のとき，$f_n(x)$ は既約である．

[証明] (F1) $p\geqq 2,\ n\geqq 2$ としてよい．

$$\begin{aligned}
f_{pn}(x)&=x^{pn}-(x-1)^{pn}\\
&=(x^n)^p-\{(x-1)^n\}^p\\
&=\{x^n-(x-1)^n\}\left[(x^n)^{p-1}+(x^n)^{p-2}(x-1)^n+\cdots+\{(x-1)^n\}^{p-1}\right]\\
&=f_n(x)\left[(x^n)^{p-1}+(x^n)^{p-2}(x-1)^n+\cdots+\{(x-1)^n\}^{p-1}\right]
\end{aligned}$$

したがって，$f_{pn}(x)$ は $f_n(x)$ で割り切れる．

(F2)

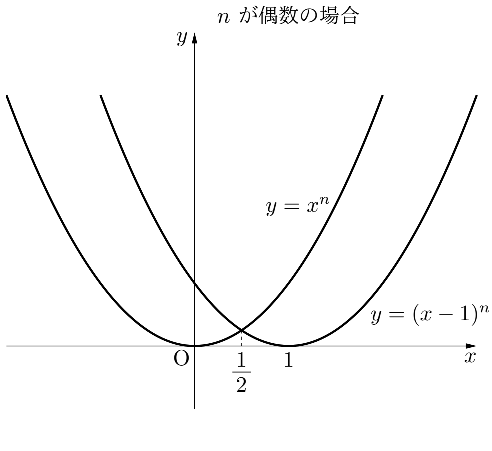
$$\begin{aligned}
f_n\left(\frac{1}{2}-x\right)&=\left(\frac{1}{2}-x\right)^n-\left(-\frac{1}{2}-x\right)^n\\
&=(-1)^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n-(-1)^n\left(\frac{1}{2}+x\right)^n\\
&=(-1)^{n+1}\left[\left(\frac{1}{2}+x\right)^n-\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right]\\
&=(-1)^{n+1}f_n\left(\frac{1}{2}+x\right)
\end{aligned}$$

したがって

n が奇数のとき，$y=f_n(x)$ のグラフは $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称である．

n が偶数のとき，$y=f_n(x)$ のグラフは点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に関して対称である．

(F3) n が奇数のときは，$x>x-1$ より $x^n>(x-1)^n$ であるから $f_n(x)>0$



n が偶数のときは，グラフから

$x<\dfrac{1}{2}$ で $f_n(x)<0$，$x>\dfrac{1}{2}$ で $f_n(x)>0$ が成り立つ．

(F4) $n=2$ のとき，$f_2(x)=x^2-(x-1)^2=2x-1$ は既約であるから，$n \geqq 3$ とする．
二項定理を使うと

$$\begin{aligned} f_n(x)=x^n-(x-1)^n &= x^n-\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^{n-k}(-1)^k \\ &= -\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k x^{n-k}(-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k (-1)^{k+1} x^{n-k} \\ &= {}_nC_1 x^{n-1} - {}_nC_2 x^{n-2} + \cdots + {}_nC_n (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$n \geqq 3$ は素数であるから，n は奇数で

$$f_n(x) = {}_nC_1 x^{n-1} - {}_nC_2 x^{n-2} + \cdots + {}_nC_n$$

となる．$f_n(x)$ は既約であることを示すには

$$\begin{aligned} x^{n-1} f_n\left(-\frac{1}{x}\right) &= {}_nC_1 + {}_nC_2 x + \cdots + {}_nC_n x^{n-1} \\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \end{aligned}$$

が既約であることを示せばよい．
$n \geqq 3$ は素数なので，$1 \leqq l \leqq n-1$ のとき，n と l は互いに素である．
よって，$2 \leqq k \leqq n-1$ のとき，

$$a_{k-1} = {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!}$$

は n の倍数である．また，$a_0 = n$ も n の倍数である．
したがって

$$a_i \equiv 0 \pmod{n} \ (0 \leqq i \leqq n-2), \quad a_{n-1} = 1 \not\equiv 0 \pmod{n}, \quad a_0 = n \not\equiv 0 \pmod{n^2}$$

となるから，アイゼンシュタインの定理より

$$x^{n-1} f_n\left(-\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

は既約である． ■

定理 1 (Eisenstein[アイゼンシュタイン])
整係数の多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ $(a_n \neq 0)$ において
ある素数 p に対して

$$a_n \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p),\ a_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p) \ (0 \leqq i \leqq n-1),\ a_0 \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^2)$$

が成り立つならば，$f(x)$ は既約である．

次のことから $f_n(x)$ が（有理数の範囲で）因数分解される場合には，整係数の多項式の積に因数分解できることがわかる．

定理 2 整係数の多項式が可約ならば，その多項式は整係数の多項式の積に因数分解される．

3 $g_n(x)=f_n\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^n$ の性質

$$
\begin{aligned}
\frac{f_4(x)}{2x-1}&=\frac{x^4-(x-1)^4}{2x-1}=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\\
f_5(x)&=x^5-(x-1)^5=5x^4-10x^3+10x^2-5x+1\\
&=5\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\\
\frac{f_6(x)}{2x-1}&=\frac{x^6-(x-1)^6}{2x-1}=(x^2-x+1)(3x^2-3x+1)\\
&=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\left[3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\\
f_7(x)&=7x^6-21x^5+35x^4-35x^3+21x^2-7x+1\\
&=7\left(x-\frac{1}{2}\right)^6+\frac{35}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{21}{16}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{64}
\end{aligned}
$$

となるから，$g_n(x)=f_n\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^n-\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$ の性質を調べることにする．ここでの目標は後述の (G5) を示すことである．

まず，「凸-多項式」の概念を導入する．（これは一般的な用語ではない．）

1 以上のある整数 m に対して，次の条件（T）を満たす多項式 $g(x)$ を**「凸-多項式」**と呼ぶことにする．次数を特定するときには「$2m$ 次の凸-多項式」という．

(T) $g(x)=\sum_{k=0}^{2m}b_kx^k$ $(b_{2m}\neq 0)$ とおくとき，偶数次数の係数（定数項を含む） b_{2m}，b_{2m-2}，…，b_0 は正で，奇数次数の係数 b_{2m-1}，b_{2m-3}，…，b_1 は 0 である．

定義からわかるように，$g(x)$ が「$2m$ 次の凸-多項式」のとき，

$$g(x)=\sum_{k=0}^{2m}b_kx^k=\sum_{k=0}^{m}b_{2k}x^{2k}$$

と表せる．

(G1) $g(x)$ が「凸-多項式」のとき，$y=g(x)$ のグラフは下に凸である．
(G2) $f(x)$，$g(x)$ が「凸-多項式」のとき，積 $f(x)g(x)$ は「凸-多項式」となる．
(G3) 方程式 $g_n(x)=0$ の複素数解の実数部分は 0 である．
(G4) (i) n が奇数のとき，$g_n(x)$ は「凸-多項式」である．
(ii) n が偶数のとき，$\dfrac{g_n(x)}{2x}$ は「凸-多項式」である．
(G5) (i) n が奇数で $g_n(x)$ が可約のとき，$g_n(x)$ は「凸-多項式」の積に因数分解できる．
(ii) n が偶数で $\dfrac{g_n(x)}{2x}$ が可約のとき，$\dfrac{g_n(x)}{2x}$ は「凸-多項式」の積に因数分解できる．

[証明] (G1) $g(x)$ が「$2m$ 次の凸-多項式」のとき，

$$g(x)=\sum_{k=0}^{2m}b_kx^k=\sum_{k=0}^{m}b_{2k}x^{2k}$$

と表せる．

$$g''(x)=\sum_{k=1}^{m}2k(2k-1)b_{2k}x^{2k-2}>0$$

となるからである．

(G2) $f(x),\ g(x)$ がそれぞれ「$2m$ 次，$2n$ 次の凸-多項式」とすると

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}a_kx^{2k}\quad(a_0>0,\ a_1>0,\ \ldots,\ a_m>0),$$
$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^{2k}\quad(b_0>0,\ b_1>0,\ \ldots,\ b_n>0)$$

と表せるから

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x^2+\cdots+(a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0)x^{2k}\\&\quad+\cdots+a_mb_nx^{2(m+n)}\end{aligned}$$
$$f(x)g(x)=c_0+c_1x^2+\cdots+c_kx^{2k}+\cdots+c_{m+n}x^{2(m+n)}$$

とおくと

$$c_0>0,\ c_1>0,\ \ldots,\ c_{m+n}>0$$

であるから，$f(x)g(x)$ は「$2(m+n)$ 次の凸-多項式」である．

(G3) $g_n(x)=0$ とおくと

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^n=\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

両辺の絶対値をとると

$$\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^n\right|=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right|\quad\text{から}\quad\left|x+\frac{1}{2}\right|=\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

両辺を 2 乗して

$$\left|x+\frac{1}{2}\right|^2=\left|x-\frac{1}{2}\right|^2$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\overline{x}+\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\overline{x}-\frac{1}{2}\right)$$
$$x\cdot\overline{x}+\frac{x+\overline{x}}{2}+\frac{1}{4}=x\cdot\overline{x}-\frac{x+\overline{x}}{2}+\frac{1}{4}$$

よって

$$\mathrm{Re}(x)=\frac{x+\overline{x}}{2}=0$$

から，方程式 $g_n(x)=0$ の複素数解の実数部分は 0 である．

[注] $\left|x+\frac{1}{2}\right|=\left|x-\frac{1}{2}\right|$ から，x は 2 点 $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$ から等しい点である．したがって，x は虚軸上にある．

(G4) n が奇数のとき

$$\begin{aligned}g_n(x)&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^n-\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\\&=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rx^{n-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r-\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rx^{n-r}\left(-\frac{1}{2}\right)^r\\&=2\sum_{\substack{r=1\\r:\text{奇数}}}^{n}{}_nC_rx^{n-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r\\&=2\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}{}_nC_{2k-1}x^{n-(2k-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}\\&=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}{}_nC_{2k-1}\cdot\frac{1}{2^{2k-2}}(x^2)^{\frac{n+1}{2}-k}\end{aligned}$$

したがって，n が奇数のとき，$g_n(x)$ は「凸-多項式」である．

n が偶数のとき

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^n - \left(x-\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^{n-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r - \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^{n-r}\left(-\frac{1}{2}\right)^r \\
&= 2\sum_{\substack{r=1 \\ r:\text{奇数}}}^{n} {}_nC_r x^{n-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r \\
&= 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} {}_nC_{2k-1} x^{n-(2k-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\
&= 2x\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} {}_nC_{2k-1}\cdot\frac{1}{2^{2k-1}}(x^2)^{\frac{n}{2}-k}
\end{aligned}$$

したがって，n が偶数のとき，$\dfrac{g_n(x)}{2x}$ は「凸-多項式」である．

(G5) (i) x が実数のとき $f_n(x) > 0$ であるから，(G3) より $g_n(x) = 0$ の解はすべて純虚数である．よって，実数の範囲で

$$g_n(x) = (x^2+{q_1}^2)(x^2+{q_2}^2)\cdots(x^2+{q_m}^2) \quad (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$

のように因数分解できる．$g_n(x)$ を有理数の範囲で因数分解したときの各因数は，$x^2+{q_1}^2$，$x^2+{q_2}^2$，$\ldots$，$x^2+{q_m}^2$ のうちの何個かの積であるから，(G2) より各因数は「凸-多項式」である．

(ii) も同様に示すことができる． ■

[注] (G5) を $f_n(x)$ の話にかえると次のようになる．

(i) n が奇数で $f_n(x)$ が可約のとき，$f_n(x)$ は $s = x - \dfrac{1}{2}$ の「凸-多項式」の積に因数分解できる．

(ii) n が偶数で $\dfrac{f_n(x)}{2x-1}$ が可約のとき，$\dfrac{f_n(x)}{2x-1}$ は $s = x - \dfrac{1}{2}$ の「凸-多項式」の積に因数分解できる．

4　$f_n(x)=x^n-(x-1)^n$ の因数分解について

ここでは $f_n(x)$ を具体的に因数分解することを考える．最初に因数分解する際に役立つ式を示しておく．

m は正の整数，k は正の奇数とすると

$$f_{2^m k}(x)=h_{2^{m-1}k}(x)h_{2^{m-2}k}(x)\cdots h_k(x)f_k(x)$$

が成り立つ．ただし，$h_n(x)=x^n+(x-1)^n=2x^n-f_n(x)$ とする．

[証明] n が偶数のとき

$$\begin{aligned}f_n(x)&=(x^{\frac{n}{2}})^2-\left\{(x-1)^{\frac{n}{2}}\right\}^2\\&=\left\{x^{\frac{n}{2}}+(x-1)^{\frac{n}{2}}\right\}\left\{x^{\frac{n}{2}}-(x-1)^{\frac{n}{2}}\right\}\\&=h_{\frac{n}{2}}(x)f_{\frac{n}{2}}(x)\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}f_{2^m k}(x)&=h_{2^{m-1}k}(x)f_{2^{m-1}k}(x)\\&=h_{2^{m-1}k}(x)h_{2^{m-2}k}(x)f_{2^{m-2}k}(x)\\&=\cdots\cdots\\&=h_{2^{m-1}k}(x)h_{2^{m-2}k}(x)\cdots h_k(x)f_k(x)\end{aligned}$$

■

(1) n が素数のときは，(F4) より $f_n(x)$ は既約であるから，$f_3(x)$，$f_5(x)$，$f_7(x)$，$f_{11}(x)$，$f_{13}(x)$，$f_{17}(x)$，$f_{19}(x)$，… は因数分解できない．

(2) (1) と $n=9,\ 15,\ 18,\ \ldots$ の場合を除けば，因数分解は割と楽にできる．

例えば

$$\begin{aligned}f_{12}(x)&=h_6(x)h_3(x)f_3(x)\\&=(2x^2-2x+1)(x^4-2x^3+5x^2-4x+1)\cdot(2x-1)(x^2-x+1)\cdot(3x^2-3x+1)\\&=(2x-1)(x^2-x+1)(2x^2-2x+1)(3x^2-3x+1)(x^4-2x^3+5x^2-4x+1)\end{aligned}$$

(3) $n=9,\ 15,\ 18,\ \ldots$ の場合

例えば，$n=15$ のとき，$f_{15}(x)$ は $f_3(x)=3x^2-3x+1$ と $f_5(x)=5x^4-10x^3+10x^2-5x+1$ で割り切れることはわかるので，後は実際に割り算をすればよい．

[参考] $h_n(x)$ について

$$\begin{aligned}h_1(x)&=x+(x-1)=2x-1\\h_2(x)&=x^2+(x-1)^2\\&=2x^2-2x+1\\&=\frac{1}{2}(1+4s^2)\\h_3(x)&=x^3+(x-1)^3\\&=(2x-1)(x^2-x+1)\\&=\frac{1}{2}s(3+4s^2)\\h_4(x)&=x^4+(x-1)^4\\&=2x^4-4x^3+6x^2-4x+1\\&=\frac{1}{8}(1+24s^2+16s^4)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h_5(x) &= x^5 + (x-1)^5 \\
&= (2x-1)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1) \\
&= \frac{1}{8}s(5 + 40s^2 + 16s^4) \\
h_6(x) &= x^6 + (x-1)^6 \\
&= (2x^2 - 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1) \\
&= \frac{1}{32}(1 + 4s^2)(1 + 56s^2 + 16s^4) \\
h_7(x) &= x^7 + (x-1)^7 \\
&= (2x-1)(x^6 - 3x^5 + 9x^4 - 13x^3 + 11x^2 - 5x + 1) \\
&= \frac{1}{32}s(7 + 140s^2 + 336s^4 + 64s^6) \\
h_8(x) &= x^8 + (x-1)^8 \\
&= 2x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1 \\
&= \frac{1}{128}(1 + 112s^2 + 1120s^4 + 1792s^6 + 256s^8) \\
h_9(x) &= x^9 + (x-1)^9 \\
&= (2x-1)(x^2 - x + 1)(x^6 - 3x^5 + 12x^4 - 19x^3 + 15x^2 - 6x + 1) \\
&= \frac{1}{128}s(3 + 4s^2)(3 + 108s^2 + 528s^4 + 64s^6) \\
h_{10}(x) &= x^{10} + (x-1)^{10} \\
&= (2x^2 - 2x + 1)(x^8 - 4x^7 + 18x^6 - 40x^5 + 56x^4 - 50x^3 + 27x^2 - 8x + 1) \\
&= \frac{1}{512}(1 + 4s^2)(1 + 176s^2 + 2656s^4 + 2816s^6 + 256s^8) \\
h_{11}(x) &= x^{11} + (x-1)^{11} \\
&= (2x-1)(x^{10} - 5x^9 + 25x^8 - 70x^7 + 130x^6 - 166x^5 + 148x^4 - 91x^3 + 37x^2 - 9x + 1) \\
&= \frac{1}{512}s(11 + 660s^2 + 7392s^4 + 21120s^6 + 14080s^8 + 1024s^{10})
\end{aligned}
$$

$\cdots\cdots$

[注] $f_n(x)$ と同様に，$h_n(x)$ の 2 次以上の因数の凸性も調べられる．

参考文献

[1] 村田　洋一,「4 次関数に放物線（形状が）現れた」‥の検討について，私の数学散歩道 (19)