最近の数学コンテストにおける関数方程式

柳田 五夫

$3^2 + 4^2 = 5^2$，ピタゴラスを描いたギリシャのコイン等

ここでは，最近の数学コンテストにおける関数方程式を扱っている．問題と解答についてはインターネットで公開されているものを参考にした．特に，解答作成については，artofproblemsolving.com を参考にしている．

記号・用語

$\mathbb{R}$ 実数全体の集合

$\mathbb{R}^+$ 正の実数全体の集合

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 非負の実数全体の集合

$\mathbb{R}^*$ 0 以外の実数全体の集合

$\mathbb{Q}$ 有理数全体の集合

$\mathbb{Q}^+$，$\mathbb{Q}_{>0}$ 正の有理数全体の集合

$\mathbb{Z}$ 整数全体の集合

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 非負整数全体の集合

$\mathbb{N}$ 正の整数全体の集合

$A \subseteqq B$, $A \subset B$ 集合 A は集合 B の部分集合

$|A|$，$\#(A)$，$n(A)$ 集合 A の個数

$A \setminus B$, $A - B$ 集合 A に含まれ，集合 B に含まれない要素全体の集合 $A \cap B^c$

$m \mid n$ m は n を割り切る （m は n の約数）

$\lfloor x \rfloor$, $[x]$ x 以下の最大の整数，床関数（日本ではガウス記号と呼んでいる）

$\lceil x \rceil$ x 以上の最小の整数，天井関数

1. 単射
   A function f is said to be *injective* if $f(x) = f(y)$ only when $x = y$.
   $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$ が成り立つとき，f は単射であるという，f は単射であることを示すには，対偶をとって
   $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ を示せばよい．
2. 全射
   A function f is said to be *surjective* if for every y,there exsits x such that $f(x) = y$.
3. 全単射
   A function f is said to be *bijective* if it is both injective and surjective .

1　Cauchy functional equation

多くの関数方程式がコーシーの関数方程式（Cauchy functional equation）

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

に帰着される．

1.1　$\mathbb{Q}$ における解

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ がコーシーの関数方程式（Cauchy functional equation）

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たすものとする．

(1) $f(0)=0$.
①でとおくと $x=y=0$ とおくと $f(0)=0$ が得られる．

(2) $f(nx)=nf(x) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$.
数学的帰納法で証明する．
- (i) $n=1$ のときは明らかに成り立つ．
- (ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$f(kx)=kf(x)$.
①で x のところを kx で置き換え $y=x$ とおいた

$$f(kx+x)=f(kx)+f(x)=kf(x)+f(x)=(k+1)f(x)$$

から $f((k+1)x)=(k+1)f(x)$ となり $n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) よりすべての自然数 n について成り立つ．

(3) $f(-x)=-f(x)$.
①で $y=-x$ とおいた

$$f(x)+f(-x)=f(x+(-x))=f(0)=0$$

から $f(-x)=-f(x)$.

(4) $f(mx)=mf(x) \qquad \forall m\in\mathbb{Z}$.
$m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のときは成り立つから，$m<0$ のとき示せばよい．
(3) から

$$f(mx)=-f(-mx)=-\big((-m)f(x)\big)=mf(x).$$

(5) $f(rx) = rf(x) \qquad \forall r \in \mathbb{Q}$.

$r = \dfrac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ とおくと (4) から

$$nf(rx) = f(nrx) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}x\right) = f(mx) = mf(x).$$

よって

$$f(rx) = \frac{m}{n}f(x) = rf(x).$$

(5) で $x = 1$ とおくと

$$f(r) = rf(1) \qquad \forall r \in \mathbb{Q}$$

が成り立つから $c = f(1) \in \mathbb{R}$ とおくと

$$f(x) = cx \qquad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

1.2 $\mathbb{R}$ における解

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が次の条件のいずれかを満たせばコーシーの関数方程式の解は

$$f(x) = cx$$

となる.

- 単調性
- 連続性
- ある区間における有界性
- $x > 0$ において $f(x) \geqq 0$ 等

定理 1 コーシーの関数方程式を満たす単調な関数は $f(x) = cx$ である.

[証明] f は増加関数か減少関数であるから，f は増加関数の場合を考える.
ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$f(x) = cx \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

となることを知っているから，

$$f(x) = cx \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

であることを示す.

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して，$p_n \leqq x \leqq q_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = x$ を満たす有理数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ をとると

$$cp_n = f(p_n) \leqq f(x) \leqq f(q_n) = cq_n$$

が成り立つから，$n \to \infty$ とすると $f(x) = cx$ を得る． ■

定理 2　コーシーの関数方程式を満たす連続関数は $f(x) = cx$ である．

[証明]　ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$f(x) = cx \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

となることを知っているから，

$$f(x) = cx \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

であることを示す．

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = x$ を満たす有理数列 $\{p_n\}$ をとると

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) = \lim_{n\to\infty} cp_n = cx$$

から $f(x) = cx$ を得る． ■

定理 3　コーシーの関数方程式を満たす区間 $[a, b]$ で有界な関数は $f(x) = cx$ である．

[証明]　ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$f(x) = cx \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

となることを知っているから，

$$f(x) = cx \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

であることを示す．

x を任意の実数とする．$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $nx - b < nx - a$ だから $nx - b < p_n < nx - a$ となる有理数 p_n が存在する．すると $a < nx - p_n < b$ より $nx - p_n \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}
|f(nx - p_n)| &= |nf(x) - cp_n| \\
&= |n(f(x) - cx) + c(nx - p_n)| \\
&\geqq n\,|f(x) - cx| - |c(nx - p_n)|
\end{aligned}$$

から

$$n\,|f(x)-cx| \leqq |f(nx-p_n)| + |c(nx-p_n)|\,.$$

$nx-p_n \in [a,b]$ だから $|c(nx-p_n)|$ と $|f(nx-p_n)|$ は有界で

$$|c(nx-p_n)| < M,\ |f(nx-p_n)| < M$$

となる定数 $M(>0)$ がある．
よって

$$n\,|f(x)-cx| \leqq |f(nx-p_n)| + |c(nx-p_n)| \leqq 2M,$$

$$0 \leqq |f(x)-cx| \leqq \frac{2M}{n}.$$

最後の式で $n \to \infty$ とすると $|f(x)-cx| = 0$ すなわち $f(x) = cx$ を得る． ■

定理 4　コーシーの関数方程式を満たし，$x > 0$ において $f(x) \geqq 0$ となる関数は $f(x) = cx$ である．

[証明]　$\forall x, h \in \mathbb{R},\ h > 0$ に対して $f(x+h) - f(x) = f(h) \geqq 0$.
よって $h > 0$ のとき，$f(x+h) \geqq f(x)$ が成り立つから，$f(x)$ は非減少関数である．後は定理 1 と同じように証明できる． ■

1.3 Chauchy type Equations

次の関数方程式はコーシーの関数方程式に帰着させることができる．

例 1　Find all continuous functions $f;\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ such that for all x and y,

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

$f(x) > 0$ だから $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = \log f(x)$ とおき，$f(x+y) = f(x)f(y)$ を g で書き直すと

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

g はコーシーの関数方程式を満たすから $g(x) = cx$ となる．
よって $f(x) = e^{cx}$ すなわち

$$f(x) = a^x.$$

ただし，$a > 0$ とする．

例 2　Find all continuous functions $f; \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ such that for all x and y,

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = f(a^x)\,(a > 0, a \fallingdotseq 1)$ とおき，$f(xy) = f(x) + f(y)$ を g で書き直すと

$$g(x + y) = g(x) + g(y).$$

g はコーシーの関数方程式を満たすから $g(x) = cx$ となる．
よって

$$f(x) = g(\log_a x) = c \log_a x.$$

例 3　Find all continuous functions $f; \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that for all x and y,

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

$f(x) > 0$ だから $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ を $g(x) = \log f(x)$ とおき，$f(xy) = f(x)f(y)$ を g で書き直すと

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

で，例 2 の関数方程式となる．$g(x) = c \log_a x$ より $f(x) = e^{c \log_a x}$.
$t = c/\log a$ とおくと

$$f(x) = x^t.$$

2 問題と解答

問題 1 (India National Mathematical Olympiad 2016)

Let $\mathbb{N}$ denote the set of all natural numbers. Define a function $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ by $T(2k) = k$ and $T(2k+1) = 2k+2$. We write $T^2(n) = T(T(n))$ and in general $T^k(n) = T^{k-1}(T(n))$ for any $k > 1$.

(1) Show that for each $n \in \mathbb{N}$, there exists k such that $T^k(n) = 1$.

(2) For $k \in \mathbb{N}$, let c_k denote the number of elements in the set $\{n : T^k(n) = 1\}$. Prove that $c_{k+2} = c_{k+1} + c_k$, for $k \geq 1$.

解答 (1) 数学的帰納法で示す.

(i) $n = 1, 2, 3$ のとき

$T(1) = T(2 \cdot 0 + 1) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$, $T(2) = T(2 \cdot 1) = 1$,

$T(3) = T(2 \cdot 1 + 1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$, $T(4) = T(2 \cdot 2) = 2$ が成り立つ.

$$T^2(1) = T(T(1)) = T(2) = 1,$$

$$T(2) = 1,$$

$$T^3(3) = T^2(T(3)) = T^2(4) = T(T(4)) = T(2) = 1$$

から $T^k(n) = 1$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在する.

(ii) $l \geqq 3$ として $n \leqq l - 1$ のとき成り立つと仮定する.

l が偶数のとき, $T(l) = \dfrac{l}{2} \leqq l - 1$.

仮定から $T^k(l/2) = 1$ となる k が存在するから

$T^{k+1}(l) = T^k(T(l)) = T^k(l/2) = 1$ が成り立つ.

l が奇数のとき, $l = 2l_1 + 1$ とおく

$T^2(l) = T(T(2l_1 + 1)) = T(2l_1 + 2) = l_1 + 1 = \dfrac{l+1}{2} \leqq l - 1$.

仮定から $T^k(l_1 + 1) = 1$ となる k が存在するから

$T^{k+2}(l) = T^k(T^2(l)) = T^k(l_1 + 1) = 1$ が成り立つ.

よって $n = l$ のときも $T^m(l) = 1$ を満たす m が存在する.

(i), (ii) から すべての正の整数 n に対して $T^k(n) = 1$ を満たす k が存在する.

(2)　$k \geqq 3$ として，次の 2 つのことを示す．

$$\left|\{n : T^k(n) = 1, n = 4d+2, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}\right| + \left|\{n : T^k(n) = 1, n = 2d+1, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}\right|$$
$$= \left|\{m : T^{k-1}(m) = 1, m \in \mathbb{N}\}\right|, \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\left|\{n : T^k(n) = 1, n = 4d, d \in \mathbb{N}\}\right| = \left|\{m : T^{k-2}(m) = 1, m \in \mathbb{N}\}\right|. \qquad \cdots\cdots ②$$

まず ①を示す．

$\{n : T^k(n) = 1, n = 4d+2, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ の要素 $n = 4d+2, d \geqq 0$ をとり，$m = n/2 = 2d+1 \in \mathbb{N}$ とおくと m は奇数で

$$1 = T^k(n) = T^{k-1}(T(4d+2)) = T^{k-1}(2d+1) = T^{k-1}(m)$$

から $T^{k-1}(m) = 1$.

$\{n : T^k(n) = 1, n = 2d+1, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ の要素 $n = 2d+1, d \geqq 0$ をとり，$m = n+1 = 2d+2 \in \mathbb{N}$ とおくと m は偶数で

$$1 = T^k(n) = T^{k-1}(T(2d+1)) = T^{k-1}(2d+2) = T^{k-1}(m)$$

から $T^{k-1}(m) = 1$.

逆に，$\{m : T^{k-1}(m) = 1, m \in \mathbb{N}\}$ の要素 $m = 2d+1, d \geqq 0$ をとり，$n = 2m = 4d+2 \in \mathbb{N}$ とおくと $T^k(n) = 1$.

$\{m : T^{k-1}(m) = 1, m \in \mathbb{N}\}$ の要素 $m = 2d, d \in \mathbb{N}$ をとり，$n = 2m = 4d+2 \in \mathbb{N}$ とおくと $T^k(n) = 1$.

したがって ①は成り立つ．

次に②を示す．

$\{n : T^k(n) = 1, n = 4d, d \in \mathbb{N}\}$ の要素 $n = 4d, d \geqq 1$ をとり，$m = n/4 = d \in \mathbb{N}$ とおくと

$$1 = T^k(n) = T^{k-1}(T(4d)) = T^{k-1}(2d) = T^{k-2}(T(2d)) = T^{k-2}(d)$$

から $T^{k-2}(m) = 1$.

逆に，$\{m : T^{k-2}(m) = 1, m \in \mathbb{N}\}$ の要素 $m \geqq 1$ をとり，$n = 4m \in \mathbb{N}$ とおくと $T^k(n) = 1$.

したがって ②は成り立つ．

① + ② から

$$\left|\{n : T^k(n) = 1, n \in \mathbb{N}\}\right| = \left|\{n : T^{k-1}(n) = 1, n \in \mathbb{N}\}\right| + \left|\{n : T^{k-2}(n) = 1, n \in \mathbb{N}\}\right|$$

すなわち $c_k = c_{k-1} + c_{k-2}$　$(k \geqq 3)$ が成り立つ．　■

問題 2　(Japan Mathematical Olympiad Finals 2016)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(yf(x) - x) = f(x)f(y) + 2x$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

解答

$$f(yf(x) - x) = f(x)f(y) + 2x \qquad \cdots\cdots ①$$

①で $x = y = 0$ とおくと $f(0) = f(0)^2$ から $f(0) = 0$ または $f(0) = 1$ となるので場合分けをする．

(1) $f(0) = 0$ の場合

①で $y = 0$ とおくと $f(-x) = 2x$ を得る．

この式で x のところを $-x$ で置き換えると

$$f(x) = -2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

が得られる．

このとき①の左辺と右辺は

$$\begin{aligned} f(yf(x) - x) &= f(-2xy - x) = -2(-2xy - x) = 4xy + 2x, \\ f(x)f(y) + 2x &= (-2x)(-2y) + 2x = 4xy + 2x \end{aligned}$$

となり等しいから①は成り立つ．

(2) $f(0) = 1$ の場合

$f(x) = 1$ の解について調べておく．

$f(a) = 1$ が成り立つと仮定する．

①で $x = y = a$ とおいた $f(a - a) = f(a)^2 + 2a$ から

$$f(0) = f(a)^2 + 2a \qquad 1 = 1 + 2a \qquad a = 0.$$

したがって，$f(a) = 1 \Longrightarrow a = 0$ がいえる．$f(0) = 1$ だから結局次のことが成り立つ．

$$f(x) = 1 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

①で $y = 0$ とおいた $f(-x) = f(x)f(0) + 2x$ から

$$f(-x) = f(x) + 2x \qquad \cdots\cdots ②$$

を得る．

①で y のところを $-y$ で置き換えると

$$f(-yf(x)-x)=f(x)f(-y)+2x \qquad \cdots\cdots ③$$

を得る．

②で x のところを $yf(x)+x$ で置き換えると

$$f(-yf(x)-x)=f(yf(x)+x)+2\left(yf(x)+x\right) \qquad \cdots\cdots ④$$

となる．

③で④と $f(-y)=f(y)+2y$ を使うと

$$f\left(yf(x)+x\right)+2\left(yf(x)+x\right)=f(x)\left(f(y)+2y\right)+2x$$

すなわち

$$f\left(yf(x)+x\right)=f(x)f(y) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．

① − ⑤ から

$$f\left(yf(x)-x\right)-f\left(yf(x)+x\right)=2x \qquad \cdots\cdots ⑥$$

が得られる．

$f(x)=0$ の解について調べておく．

$f(b)=0$ となる b が存在すると仮定する．

$f(0)=1$ だから $b \fallingdotseq 0$ で，①で $x=\dfrac{1}{2}, y=b$ とおくと

$$f\left(bf\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)f(b)+2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

$(*)$ を使うと

$$bf\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=0.$$

この式を満たす b が存在するための条件は，$f\left(\dfrac{1}{2}\right) \fallingdotseq 0$ で

$$b=\frac{1}{2f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

となる．

したがって $f(x)=0$ の解は高々 1 個である．

$f(x)=0$ を満たす x が存在する場合，このような x は 1 つしかないからこれを b とおく．
$\forall u, v \in \mathbb{R},\ \dfrac{u-v}{2} \fallingdotseq b$ に対して $f\left(\dfrac{u-v}{2}\right) \fallingdotseq 0$ なので

$$x=\frac{u-v}{2}, y=\frac{u+v}{2f\left(\frac{u-v}{2}\right)}$$

とおくと

$$yf(x)-x=\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}=v,\ yf(x)+x=\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}=u.$$

これらの式を使い⑥を書き直すと

$$f(v)-f(u)=u-v \qquad \forall u, v \in \mathbb{R},\ u-v \fallingdotseq 2b \qquad \cdots\cdots ⑦$$

となる．
$u-v=2b$ のときは $v-u=-2b \fallingdotseq 2b$ だから⑦を使うと

$$f(u)-f(v)=v-u \quad \text{すなわち} \quad f(v)-f(u)=u-v$$

となるから

$$f(v)-f(u)=u-v \qquad \forall u, v \in \mathbb{R},\ u-v=2b.$$

以上のことから

$$f(v)-f(u)=u-v \qquad \forall u, v \in \mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

が成り立つ．

$f(x)=0$ を満たす x が存在しない場合は，$\forall u, v \in \mathbb{R}$ に対して $f\left(\dfrac{u-v}{2}\right) \fallingdotseq 0$ なので

$$x=\frac{u-v}{2}, y=\frac{u+v}{2f\left(\frac{u-v}{2}\right)}$$

とおくことにより⑧を得る．
⑧を変形すると

$$f(u)+u=f(v)+v \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

となるから，この式で $u=x, v=0$ とおくと $f(x)+x=1$ すなわち

$$f(x)=1-x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

を得る．

このとき①の左辺と右辺は

$$\begin{aligned} f(yf(x)-x) &= f(y(1-x)-x) = 1-(y-xy-x) = 1+x-y+xy, \\ f(x)f(y)+2x &= (1-x)(1-y)+2x = 1+x-y+xy \end{aligned}$$

となり等しいから①は成り立つ．

(1)，(2) から解は

- $f(x) = -2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

と

- $f(x) = 1-x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 3 (IMO 2015)

Let $\mathbb{R}$ be the set of real numbers. Determine all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that satisfy the equation

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

for all real numbers x and y.

解答

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく.

①で $x = y = 0$ とおいた $f(f(0)) + f(0) = f(0)$ から

$$f(f(0)) = 0.$$

①で $x = 0$ とおくと

$$f(f(y)) + f(0) = f(y) + yf(0).$$

この式で $y = f(0)$ とおくと

$$f(\underbrace{f(f(0))}_{=0}) + f(0) = \underbrace{f(f(0))}_{=0} + f(0)^2.$$

$f(f(0)) = 0$ を使うと $2f(0) = f(0)^2$ から $f(0) \in \{0, 2\}$.

(1) $f(0) = 2$ の場合

$f(f(0)) = 0$ であったから $f(2) = 0$.

①で $y = 1$ とおくと

$$f(x + f(x + 1)) + f(x) = x + f(x + 1) + f(x)$$

から

$$f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1).$$

$z = x + f(x + 1)$ とおくと $f(z) = z$.

①で $x = 0$ とおくと

$$f(f(y)) + 2 = f(y) + 2y.$$

この式で $y = z$ とおくと $f(f(z)) + 2 = f(z) + 2z$.

$f(z) = z$ を使うと $z + 2 = z + 2z$ から $z = 1$ を得て

$$x + f(x + 1) = 1 \qquad f(x + 1) = 1 - x = 2 - (x + 1).$$

よって

$$f(x) = 2 - x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき①の左辺，右辺とも $2 + y - xy$ に等しくなり，①は成り立つ．

(2) $f(0) = 0$ の場合

①で $y = 0$ とおくと

$$f(x + f(x)) = x + f(x). \qquad \cdots\cdots ②$$

①で $y = 1$ とおいた

$$f(x + f(x+1)) + f(x) = x + f(x+1) + f(x)$$

から

$$f(x + f(x+1)) = x + f(x+1). \qquad \cdots\cdots ③$$

$u = x + f(x+1)$ とおくと $f(u) = u$.

③で $x = -1$ とおいて $f(-1) = -1$ を得る．また ①で $x = 1, y = -1$ とおいた $f(1) + f(-1) = 1 - f(1)$ から $f(1) = \dfrac{1 - f(-1)}{2} = 1$ を得る．

②で x のところを $x + 1$ で置き換えると

$$f(x + 1 + f(x+1)) = x + 1 + f(x+1)$$

すなわち

$$f(1 + u) = 1 + u.$$

①で $x = 1$ とおくと

$$f(1 + f(1+y)) + f(y) = 1 + f(1+y) + y.$$

この式で $y = u$ とおくと

$$f(1 + f(1+u)) + f(u) = 1 + f(1+u) + u.$$

$f(u) = u, f(1+u) = 1 + u$ を使うと $f(1 + (1+u)) + u = 1 + (1+u) + u$ から

$$f(2 + u) = 2 + u$$

を得る．

①で x のところを $x + 2$ で置き換え $y = -1$ とおくと

$$f(x + 2 + f(x+1)) + f(-x-2) = x + 2 + f(x+1) - f(x+2),$$

$$f(2+u)+f(-x-2)=2+u-f(x+2)$$

$f(2+u)=2+u$ を使うと

$$f(-(x+2))=-f(x+2) \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

よって

$$f(-x)=-f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

が成り立ち，$f(x)$ は奇関数である．

①で x のところを $-x$，y のところを $-y$ で置き換えると

$$\begin{aligned} f(-x+f(-x-y))+f(xy)&=-x+f(-x-y)-yf(-x),\\ f(-x-f(x+y))+f(xy)&=-x-f(x+y)+yf(x),\\ -f(x+f(x+y))+f(xy)&=-x-f(x+y)+yf(x). \end{aligned} \qquad \cdots\cdots ④$$

① + ④ から

$$f(xy)=yf(x) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

この式で $x=1$ とおくと $f(y)=yf(1)=y$ から

$$f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

このとき①の左辺，右辺とも $2x+y+xy$ に等しくなり，①は成り立つ．

以上のことから，解は

- $f(x)=2-x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

と

- $f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 4　(Baltic Way 2015)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the equation

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y))$$

for all real numbers x and y.

解答

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y)) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $x = y = 1$ とおいた $f(1) + f(1) = f(1) + f(1) + f(f(1))$ から

$$f(f(1)) = 0.$$

①で $x = 0, y = 1$ とおいた $f(0) = f(0) + f(0) + f(f(1))$ から

$$f(f(1)) = -f(0).$$

$f(f(1)) = 0$ だから $f(0) = 0$.

①で $x = 1, y = 0$ とおいた $f(0) = f(0) + f(1) + f(f(0))$ から

$$0 = f(1) + f(f(0)) \qquad 0 = f(1) + f(0) \qquad 0 = f(1).$$

よって，$f(1) = 0$ を得る．

①で $x = 0$ とおくと

$$yf(0) = f(0) + f(0 + f(f(y))$$

から

$$f(f(y)) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots②$$

これを使うと①は

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) \qquad \cdots\cdots①'$$

と書き直せる．

①$'$ で $y = 0$ とおくと $f(x^2) = 0$ を得るから

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \geqq 0. \qquad \cdots\cdots③$$

①$'$ で $y = -1$ とおくと

$$|x|f(-1) - f(x) = f(-x) + f(x^2).$$

$x \geqq 0$ と x の範囲を限定すると

$$xf(-1) - f(x) = f(-x) + f(x^2)$$
$$xf(-1) = f(-x) \qquad \forall x \geqq 0.$$

$k = f(-1)$ とおくと
$$f(x) = -kx \qquad \forall x \leqq 0.$$

②で $y = -1$ とおくと $f(f(-1)) = 0$ から $f(k) = 0$.
$k < 0$ とすると $f(k) = -k \cdot k = -k^2$ となるから $-k^2 = 0$ となり $k < 0$ に矛盾する.
よって $k \geqq 0$ でなければならない.
$k \geqq 0$ を定数として

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \geqq 0) \\ -kx & (x \leqq 0) \end{cases}$$

は①を満たすことを示す.
$x \geqq 0, y \geqq 0$ のとき ①の左辺と右辺ともに 0,
$x \geqq 0, y \leqq 0$ のとき ①の左辺は $x(-ky) = -kxy$，右辺は $-kxy + \underbrace{f(-ky)}_{=0} = -kxy$,
$x \leqq 0, y \geqq 0$ のとき ①の左辺は $y(-kx) = -kxy$，右辺は $-kxy + f(0) = -kxy$,
$x \leqq 0, y \leqq 0$ のとき ①の左辺は $(-x) \cdot (-ky) + y \cdot (-kx) = 0$，右辺は $f(-ky) = 0$
となり ①を満たす.

したがって，解は
$k \geqq 0$ を定数として

- $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \geqq 0) \\ -kx & (x \leqq 0) \end{cases}$

である. ■

問題 5　(EGMO 2014)

Determine all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying the condition

$$f\left(y^2+2xf(y)+f(x)^2\right)=(y+f(x))(x+f(y))$$

for all real numbers x and y.

解答

$$f\left(y^2+2xf(y)+f(x)^2\right)=(y+f(x))(x+f(y)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $y=-f(x)$ とおいた $f(f(x)^2+2xf(-f(x))+f(x)^2)=0$ から

$$f\left(2f(x)^2+2xf(-f(x))\right)=0. \qquad \cdots\cdots ②$$

この式から $f(t)=0$ となる実数 $t\in\mathbb{R}$ が存在する．

$f(p)=f(q)=0$ とする．

①で $y=p, x=q$ とおくと $f(p^2)=pq$.

①で $y=q, x=p$ とおくと $f(q^2)=pq$.

①で $x=y=p$ とおくと $f(p^2)=p^2$.

①で $x=y=q$ とおくと $f(q^2)=q^2$.

よって，$pq=p^2$ かつ $pq=q^2$.

$p\fallingdotseq q$ とすると

$pq=p^2$ から $p(q-p)=0$ ゆえに $p=0$.

$pq=q^2$ から $q(p-q)=0$ ゆえに $q=0$.

$p=q=0$ となり $p\fallingdotseq q$ に矛盾する．よって $p=q$ が成り立つ．

したがって

$$f(p)=f(q)=0 \Longrightarrow p=q.$$

$f(x)=0$ は実数解をもちしかもただ一つであることがわかったから，これを c とおくと

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=c.$$

②でこのことを使うと

$$2f(x)^2+2xf(-f(x))=c. \qquad \cdots\cdots ③$$

③で $x=c$ とおくと $2cf(0)=c$ から

$$c=0 \quad \text{または} \quad f(0)=\frac{1}{2}.$$

(1) $c=0$ の場合

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=0.$$

③は

$$f(x)^2+xf(-f(x))=0 \qquad \cdots\cdots ③'$$

となる．

③$'$ を用いて f が単射 (injective) であることを示す．
$f(p)=f(q)=r$ とする．
③$'$ で $x=p$ とおくと $r^2+pf(-r)=0$.
③$'$ で $x=q$ とおくと $r^2+qf(-r)=0$.
よって $pf(-r)=qf(-r)=$ から $f(-r)=0$ または $p=q$ が成り立つ．
$f(-r)=0$ のときは $-r=0$ すなわち $r=0$ となるから $f(p)=f(q)=0$.
これから $p=q=0$ となり $p=q$ である．
したがって f は単射 (injective) である．

① で $x=-f(y)$ とおくと $f\left(y^2-2f(y)^2+f\left(-f(y)\right)^2\right)=0$ より

$$y^2-2f(y)^2+f\left(-f(y)\right)^2=0.$$

この式で $y=x$ とおくと

$$x^2-2f(x)^2+f\left(-f(x)\right)^2=0. \qquad \cdots\cdots ④$$

この式の両辺に x^2 をかけると

$$x^4-2x^2f(x)^2+\left(xf\left(-f(x)\right)\right)^2=0.$$

③$'$ を使うと

$$x^4-2x^2f(x)^2+f(x)^4=0$$

から $\left(x^2-f(x)^2\right)^2=0$ すなわち $f(x)^2=x^2$ を得る．
よって

$$f(x)\in\{x,\,-x\} \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots (*)$$

$f(x)^2=x^2$ を使うと ① は次のように書き直せる．

$$f\left(y^2+2xf(y)+x^2\right)=(y+f(x))(x+f(y)) \qquad \cdots\cdots ①'$$

①$'$ で x と y を入れ換えると

$$f\left(x^2+2yf(x)+y^2\right)=(x+f(y))(y+f(x)) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

①$'$，⑤より

$$f\left(y^2+2xf(y)+x^2\right)=f\left(x^2+2yf(x)+y^2\right).$$

f は単射 (injective) だから

$$y^2+2xf(y)+x^2=x^2+2yf(x)+y^2.$$

よって

$$xf(y)=yf(x) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥で $y=1$ とおくと

$$f(x)=xf(1).$$

$(*)$ より $f(1)\in\{1,\,-1\}$ が成り立つことを使うと
$f(1)=1$ のとき

$$f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R},$$

$f(1)=-1$ のとき

$$f(x)=-x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これらは①を満たす．

(2) $f(0)=\dfrac{1}{2}$ の場合

③で $x=0$ とおくと $2f(0)^2=c$ となるので $c=\dfrac{1}{2}$ を得る．したがって③は次のように書き直せる．

$$2f(x)^2+2xf(-f(x))=\frac{1}{2}$$

から

$$f(x)^2+xf(-f(x))=\frac{1}{4}. \qquad \cdots\cdots ③''$$

$$f(x)=0\Longleftrightarrow x=c.$$

は

$$f(x)=0\Longleftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

となる．

③$''$ を用いて f が単射 (injective) であることを示す．

$f(p)=f(q)=r$ とする．

③$''$ で $x=p$ とおくと $r^2+pf(-r)=\dfrac{1}{2}$.

③$''$ で $x=q$ とおくと $r^2+qf(-r)=\dfrac{1}{2}$.

よって $pf(-r)=qf(-r)$ から $f(-r)=0$ または $p=q$ が成り立つ．

$f(-r)=0$ のときは $-r=\dfrac{1}{2}$ すなわち $r=-\dfrac{1}{2}$ となる．
$f(-r)=0$ を $r^2+pf(-r)=\dfrac{1}{2}$ に代入すると $r^2=\dfrac{1}{2}$ となり $r=-\dfrac{1}{2}$ に矛盾する．

よって $p=q$ となるから f は単射 (injective) である．

① で x と y を入れ換えると

$$f\left(x^2+2yf(x)+f(y)^2\right)=(x+f(y))(y+f(x)) \qquad \cdots\cdots ⑦$$

①，⑦より

$$f\left(y^2+2xf(y)+f(x)^2\right)=f\left(x^2+2yf(x)+f(y)^2\right).$$

f は単射 (injective) だから

$$y^2+2xf(y)+f(x)^2=x^2+2yf(x)+f(y)^2 \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑧で $y=0$ とおいた

$$2x\cdot\frac{1}{2}+f(x)^2=x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

から

$$f(x)^2=x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑧で $y=\dfrac{1}{2}$ とおき，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ を使うと

$$\frac{1}{4}+f(x)^2=x^2+f(x).$$

この式で⑨を使うと

$$\frac{1}{4}+x^2-x+\frac{1}{4}=x^2+f(x).$$

よって

$$f(x)=\frac{1}{2}-x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

このとき，①の左辺は

$$\begin{aligned} f\left(y^2+2xf(y)+f(x)^2\right) &= \frac{1}{2}-\left(y^2+2xf(y)+f(x)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}-\left(y^2+2x\left(\frac{1}{2}-y\right)+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}-\left(x^2-2xy+y^2\right) \\ &= \frac{1}{4}-(x-y)^2, \end{aligned}$$

右辺は

$$(y+f(x))(x+f(y))=\left(y+\frac{1}{2}-x\right)\left(x+\frac{1}{2}-y\right)=\frac{1}{4}-(x-y)^2$$

で等しくなる．

以上のことから解は

- $f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R},$
- $f(x)=-x \qquad \forall x\in\mathbb{R},$
- $f(x)=\dfrac{1}{2}-x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

[注 1]　①$'$ のあと，①$'$ を利用して次のように解くこともできる．
$f(1)\in\{1,-1\}$ だから $f(1)$ の値で場合分けをする．

(I) $f(1)=1$ の場合
①$'$ で $y=1$ とおくと

$$f\left((1+x)^2\right)=(1+f(x))(x+1). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$(*)$ から $f(\left(1+x)^2\right)\in\left\{(1+x)^2,-(1+x)^2\right\}$ が成り立つ．
$f\left((1+x_0)^2\right)=-(1+x_0)^2$ $(x_0\neq -1)$ となる x_0 が存在したとする．これを⑤で $x=x_0$ とおいたものに代入すると

$$-(1+x_0)^2=(1+f(x_0))(x_0+1).$$

$x_0\neq -1$ だから $-(x_0+1)=f(x_0)+1$ すなわち $f(x_0)=-x_0-2$.
これは $f(x_0)\in\{x_0,-x_0\}$ に矛盾する．
したがって

$$f\left((1+x)^2\right)=(1+x)^2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

が成り立つ．
これを⑤に代入すると

$$(1+x)^2 = (1+f(x)(x+1).$$

$x \fallingdotseq -1$ のとき $1+x = 1+f(x)$ すなわち

$$f(x) = x \qquad \forall x \fallingdotseq -1.$$

$f(-1) \in \{1,-1\}, f(1) = 1$ で f は injective だから $f(-1) = -1$ となるので

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(II) $f(1) = -1$ の場合
①$'$ で $y = 1$ とおくと

$$f((1-x)^2) = (1+f(x))(x-1). \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$f((1-x)^2) \in \left\{(1-x)^2, -(1-x)^2\right\}$ が成り立つ．
$f((1-x_0)^2) = (1-x_0)^2$ $(x_0 \fallingdotseq 1)$ となる x_0 が存在したとする．これを⑥で $x = x_0$ とおいたものに代入すると

$$(1-x_0)^2 = (1+f(x_0))(x_0-1).$$

$x_0 \fallingdotseq 1$ だから $x_0 - 1 = f(x_0) + 1$ すなわち $f(x_0) = x_0 - 2$.
これは $f(x_0) \in \{x_0, -x_0\}$ に矛盾する．
したがって

$$f((1-x)^2) = -(1-x)^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．
これを⑥に代入すると

$$-(1-x)^2 = (1+f(x)(x-1).$$

$x \fallingdotseq 1$ のとき $-(x-1) = 1+f(x)$ すなわち

$$f(x) = -x \qquad \forall x \fallingdotseq 1.$$

$f(1) = -1$ だから

$$f(x) = -x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[注 **2**]　$f(0) = \dfrac{1}{2}$ の場合は次のように解くこともできる．

③で $x=0$ とおくと $2f(0)^2 = c$ となるので $c = \dfrac{1}{2}$ を得る．したがって③は次のように書き直せる．

$$2f(x)^2 + 2xf(-f(x)) = \frac{1}{2}$$

から

$$f(x)^2 + xf(-f(x)) = \frac{1}{4}. \qquad \cdots\cdots ③''$$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = c.$$

は

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

となる．

③$''$ を用いて f が単射 (injective) であることを示す．

$f(p) = f(q) = r$ とする．

③$''$ で $x = p$ とおくと $r^2 + pf(-r) = \dfrac{1}{2}$.

③$''$ で $x = q$ とおくと $r^2 + qf(-r) = \dfrac{1}{2}$.

よって $pf(-r) = qf(-r)$ から $f(-r) = 0$ または $p = q$ が成り立つ．

$f(-r) = 0$ のときは $-r = \dfrac{1}{2}$ すなわち $r = -\dfrac{1}{2}$ となる．

$f(-r) = 0$ を $r^2 + pf(-r) = \dfrac{1}{2}$ に代入すると $r^2 = \dfrac{1}{2}$ となり $r = -\dfrac{1}{2}$ に矛盾する．

よって $p = q$ となるから f は単射 (injective) である．

①で $x = 0$ とおき，y のところを x で置き換えると

$$f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x). \qquad \cdots\cdots ⑦$$

①で $y = 0$ とおくと

$$f\left(x + f(x)^2\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x). \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦，⑧から

$$f\left(x + f(x)^2\right) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right).$$

f は単射 (injective) だから

$$x + f(x)^2 = x^2 + \frac{1}{4}$$

すなわち

$$f(x)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

を得る．よって

$$f(x)\in\left\{x-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-x\right\}\qquad\forall x\in\mathbb{R}.\qquad\cdots\cdots⑨$$

$f(x)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ を ③$''$ に代入すると

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+xf(-f(x))=\frac{1}{4},$$

$$xf(-f(x))=x-x^2.$$

$x\fallingdotseq 0$ のとき $f(-f(x))=1-x$ が成り立つ．よって

$$f(-f(x))=1-x\qquad\forall x\fallingdotseq 0\qquad\cdots\cdots⑩$$

$f(x_0)=x_0-\frac{1}{2}$ $\left(x_0\fallingdotseq 0,\ \frac{1}{2}\right)$ となる x_0 が存在したとする．

⑩で $x=x_0$ とおくと

$$f\left(\frac{1}{2}-x_0\right)=1-x_0.$$

これは $f\left(\frac{1}{2}-x_0\right)\in\left\{\left(\frac{1}{2}-x_0\right)-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-x_0\right)\right\}=\{-x_0,x_0\}$ に矛盾する．

したがって

$$f(x)=\frac{1}{2}-x\qquad\forall x\fallingdotseq 0,\frac{1}{2}.$$

$f(0)=\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ だから

$$f(x)=\frac{1}{2}-x\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$

問題 6 (European Mathematical Cup 2014)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$the following holds:

$$f(x^2)+f(2y^2)=(f(x+y)+f(y))(f(x-y)+f(y))$$

解答

$$f(x^2)+f(2y^2)=(f(x+y)+f(y))(f(x-y)+f(y)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で y のところを $-y$ で置き換えると

$$f(x^2)+f(2y^2)=(f(x-y)+f(-y))(f(x+y)+f(-y)) \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．

①，②の左辺は等しいから

$$(f(x+y)+f(y))(f(x-y)+f(y))=(f(x-y)+f(-y))(f(x+y)+f(-y)).$$

展開して整理すると

$$(f(y)-f(-y))\,(f(x+y)+f(x-y)+f(y)+f(-y))=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

と因数分解できる．

①で $x=y=0$ とおいた

$$2f(0)=2f(0)\cdot 2f(0)$$

から $f(0)=0$ または $f(0)=\dfrac{1}{2}$ であることがわかる．

(1) $f(0)=0$ の場合

$f(x)\equiv 0$ は①を満たすから，以下 $f(x)\not\equiv 0$ とする．

①で $y=0$ とおくと

$$f(x^2)=f(x)^2. \qquad \cdots\cdots ④$$

④から

$$f(x^2)=f(x)^2\geqq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

が成り立つから

$$f(x)\geqq 0 \qquad \forall x\geqq 0. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④で x のところを $-x$ で置き換えると，$f(x^2)=f(-x)^2$ となるから

$$f(-x)^2=f(x)^2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

が成り立つ．よって

$$f(-x) \in \{f(x), -f(x)\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

③を次のように変形する．

$$(f(y) - f(-y))\,(f(x+y) + f(x-y)) + f(y)^2 - f(-y)^2 = 0.$$

⑥を使うと

$$(f(y) - f(-y))\,(f(x+y) + f(x-y)) = 0. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

$f(x)$ が偶関数となること示す．

$f(-a) \fallingdotseq f(a)$ となる $a(\fallingdotseq 0)$ が存在したとする．

⑥から $f(-a) \in \{f(a), -f(a)\}$ が成り立つので $f(-a) = -f(a)$ となる．

$f(a) = 0$ だと $f(-a) = 0$ となり $f(-a) \fallingdotseq f(a)$ に矛盾するから $f(a) \fallingdotseq 0$ である．

また，$a > 0$ としても一般性を失わない．

⑦で $y = a$ とおくと　$(f(a) - f(-a))\,(f(x+a) + f(x-a)) = 0.$

$f(-a) = -f(a)$ を使うと　$2f(a)\,(f(x+a) + f(x-a)) = 0.$

$f(a) \fallingdotseq 0$ だから

$$f(x+a) + f(x-a) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

この式で x のところを $x + a$ で置き換えると

$$f(x+2a) + f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$x \geqq 0$ とすると⑤から $f(x+2a) \geqq 0$, $f(x) \geqq 0$ なので，⑧が成り立つのは $f(x+2a) = 0$ かつ $f(x) = 0$ のときである．よって

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \geqq 0. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑧で x のところを $x + 2a$ で置き換え，⑧を使うと

$$f(x+4a) = -f(x+2a) = f(x)$$

すなわち

$$f(x+4a) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．よって $f(x)$ は周期が $4a$ の周期関数なので，⑨を使うと

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

がいえる．これから $f(a)=f(-a)=0$ となり $f(-a) \fallingdotseq f(a)$ であることに矛盾する．
よって $f(-a) \fallingdotseq f(a)$ となる $a(\fallingdotseq 0)$ は存在しないから

$$f(-x)=f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑩$$

が成り立ち，$f(x)$ は偶関数である．
①で $x=0$ とおき⑩，⑥を使うと

$$f(2y^2)=2f(y)\cdot 2f(y)=4f(y)^2=4f(y^2)$$

が成り立つから

$$f(2x)=4f(x) \qquad \forall x \geqq 0.$$

$f(x)$ は偶関数だから

$$f(2x)=4f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑪$$

①を④，⑪を用いて書き直すと

$$\begin{aligned}
① &\iff f(x^2)+4f(y^2)=(f(x+y)+f(y))(f(x-y)+f(y)) \\
&\iff f(x^2)+4f(y^2)=f(x+y)f(x-y)+(f(x+y)+f(x-y))f(y)+f(y)^2 \\
&\iff f(x)^2+3f(y)^2=f(x+y)f(x-y)+(f(x+y)+f(x-y))f(y)
\end{aligned} \qquad \cdots\cdots ⑫$$

⑫で x と y を入れかえると

$$f(y)^2+3f(x)^2=f(y+x)f(y-x)+(f(y+x)+f(y-x))f(x).$$

$f(x)$ は偶関数だから

$$3f(x)^2+f(y)^2=f(x+y)f(x-y)+(f(x+y)+f(x-y))f(x). \qquad \cdots\cdots ⑬$$

⑬ − ⑫ から

$$2(f(x)+f(y))(f(x)-f(y))=(f(x+y)+f(x-y))(f(x)-f(y)).$$

よって

$$f(x)-f(y)=0 \quad \text{または} \quad 2(f(x)+f(y))=f(x+y)+f(x-y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑭$$

ある x, y について $2(f(x)+f(y))=f(x+y)+f(x-y)$ が成り立つとする．⑫から

$$\begin{aligned} f(x+y)f(x-y) &= f(x)^2+3f(y)^2-(f(x+y)+f(x-y))f(y) \\ &= f(x)^2+3f(y)^2-2(f(x)+f(y))f(y) \\ &= f(x)^2-2f(x)f(y)+f(y)^2 \\ &= (f(x)-f(y))^2. \end{aligned}$$

よって $f(x+y),\, f(x-y)$ は $t^2-2(f(x)+f(y))t+(f(x)-f(y))^2=0$ の解である．この 2 次方程式を解くと

$$t=f(x)+f(y)\pm 2\sqrt{f(x)f(y)}$$

となるから

$$\begin{aligned} \{f(x+y),\, f(x-y)\} &= \left\{f(x)+f(y)+2\sqrt{f(x)f(y)},\, f(x)+f(y)-2\sqrt{f(x)f(y)}\right\} \\ &= \left\{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}\right)^2,\, \left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

を得る．⑭より
任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x)=f(y)$$

または

$$\{f(x+y),\, f(x-y)\} = \left\{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}\right)^2,\, \left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}\right)^2\right\} \quad \cdots\cdots ⑮$$

が成り立つ．
⑮で x のところを $x+y$， y のところを $x-y$ で置き換えると
任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x+y)=f(x-y)$$

または

$$\{f(2x),\, f(2y)\} = \left\{\left(\sqrt{f(x+y)}+\sqrt{f(x-y)}\right)^2,\, \left(\sqrt{f(x+y)}-\sqrt{f(x-y)}\right)^2\right\}$$

が成り立つ．⑪を使うと
任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x+y)=f(x-y)$$

または

$$\{f(x),\, f(y)\} = \left\{ \left(\left(\sqrt{f(x+y)} + \sqrt{f(x-y)} \right) /2 \right)^2,\, \left(\left(\sqrt{f(x+y)} - \sqrt{f(x-y)} \right) /2 \right)^2 \right\} \qquad \cdots\cdots⑯$$

が成り立つ．

⑮，⑯を用いて

すべての x, y に対して

$$\{f(x+y),\, f(x-y)\} = \left\{ \left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)} \right)^2,\, \left(\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(y)} \right)^2 \right\} \quad \cdots\cdots⑰$$

が成り立つことを示す．

（ア）$f(x_0) = f(y_0)$ かつ $f(x_0+y_0) = f(x_0-y_0)$ の場合

⑫で $x = x_0, y = y_0$ とおいた

$$f(x_0)^2 + 3f(y_0)^2 = f(x_0+y_0)f(x_0-y_0) + (f(x_0+y_0) + f(x_0-y_0))f(y_0)$$

から

$$4f(x_0)^2 = f(x_0+y_0)^2 + 2f(x_0+y_0)f(x_0). \qquad \cdots\cdots⑱$$

⑫で $x = x_0 + y_0, y = x_0 - y_0$ とおくと

$$f(x_0+y_0)^2 + 3f(x_0-y_0)^2 = f(2x_0)f(2y_0) + (f(2x_0) + f(2y_0))f(x_0-y_0)$$

から

$$4f(x_0+y_0)^2 = 4f(x_0) \cdot 4f(y_0)2 + (4f(x_0) + 4f(y_0)) \cdot f(x_0-y_0)$$

$f(x_0) = f(y_0)$ かつ $f(x_0+y_0) = f(x_0-y_0)$ だから

$$f(x_0+y_0)^2 = 4f(x_0)^2 + 2f(x_0)f(x_0+y_0). \qquad \cdots\cdots⑲$$

⑱ + ⑲ から　$f(x_0)f(x_0+y_0) = 0.$

$f(x_0) = 0$ のとき⑱から $f(x_0+y_0) = 0.$

$f(x_0+y_0) = 0$ のとき⑱から $f(x_0) = 0.$

したがって $f(x_0) = f(y_0) = 0$ かつ $f(x_0+y_0) = f(x_0-y_0) = 0$ となり⑰は成り立つ．

（イ） $f(x_0)=f(y_0)$

かつ

$$\{f(x_0),\,f(y_0)\} = \left\{\left(\left(\sqrt{f(x_0+y_0)}+\sqrt{f(x_0-y_0)}\right)/2\right)^2,\,\left(\left(\sqrt{f(x_0+y_0)}-\sqrt{f(x_0-y_0)}\right)/2\right)^2\right\}$$

の場合

この 2 つの等式より

$$\left(\left(\sqrt{f(x_0+y_0)}+\sqrt{f(x_0-y_0)}\right)/2\right)^2 = \left(\left(\sqrt{f(x_0+y_0)}-\sqrt{f(x_0-y_0)}\right)/2\right)^2$$

が成り立つから　$\sqrt{f(x_0+y_0)}\cdot\sqrt{f(x_0-y_0)}=0$ すなわち

$$f(x_0+y_0)f(x_0-y_0)=0.$$

$f(x_0+y_0)=0$ または $f(x_0-y_0)=0$ となる．

$f(x_0+y_0)=0$ のとき，$f(x_0)=f(y_0)=\dfrac{f(x_0-y_0)}{4}$ となるから

$$\begin{aligned}\{f(x_0+y_0),f(x_0-y_0)\} &= \{0,4f(x_0)\}\\ &= \left\{\left(\sqrt{f(x_0)}-\sqrt{f(y_0)}\right)^2,\,\left(\sqrt{f(x_0)}+\sqrt{f(y_0)}\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

$f(x_0-y_0)=0$ のとき，$f(x_0)=f(y_0)=\dfrac{f(x_0+y_0)}{4}$ となるから

$$\begin{aligned}\{f(x_0+y_0),f(x_0-y_0)\} &= \{4f(x_0),0\}\\ &= \left\{\left(\sqrt{f(x_0)}+\sqrt{f(y_0)}\right)^2,\,\left(\sqrt{f(x_0)}-\sqrt{f(y_0)}\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

以上のことからすべての $x,y\in\mathbb{R}$ に対して⑰は成り立つ．

$g(x)=\sqrt{f(x)}$ とおき関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geqq 0}$ をつくる．

$f(0)=0, f(-x)=f(x), f(x^2)=f(x)^2, f(2x)=4f(x)$ は

$$g(0)=0, g(-x)=g(x), g(x^2)=g(x)^2, g(2x)=2g(x) \qquad \cdots\cdots(*)$$

となる．

⑰を g で書き直すと

$$\{g(x+y),g(x-y)\}=\{g(x)+g(y),|g(x)-g(y)|\} \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑰'$$

⑰$'$ より

$$g(x)+g(y)\in\{g(x+y),g(x-y)\}\qquad\forall x,y\in\mathbb{R}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}g\left(x^2+y^2\right)+g(2xy)&\in\left\{g\left(x^2+y^2+2xy\right),\ g\left(x^2+y^2-2xy\right)\right\}\\&=\left\{g\left((x+y)^2\right),\ g\left((x-y)^2\right)\right\}.\end{aligned}$$

$g(2xy)=2g(xy)$ を使うと

$$g\left(x^2+y^2\right)+2g(xy)\in\left\{g\left((x+y)^2\right),g\left((x-y)^2\right)\right\}\qquad\cdots\cdots⑱$$

を得る．

⑰$'$ より

$$\begin{aligned}g\left((x+y)^2\right)=(g(x+y))^2\in\left\{(g(x)+g(y))^2,(g(x)-g(y))^2\right\},\\g\left((x-y)^2\right)=(g(x-y))^2\in\left\{(g(x)+g(y))^2,(g(x)-g(y))^2\right\}\end{aligned}$$

が成り立ち，⑱を使うと

$$g\left(x^2+y^2\right)+2g(xy)\in\left\{(g(x)+g(y))^2,\ (g(x)-g(y))^2\right\}.\qquad\cdots\cdots⑲$$

⑰$'$ から

$$g\left(x^2+y^2\right)\in\left\{g\left(x^2\right)+g\left(y^2\right),\left|g\left(x^2\right)-g\left(y^2\right)\right|\right\}.$$

一般性を失うことなく　$g(x)\geqq g(y)$ と仮定できる．

このとき

$$\left|g\left(x^2\right)-g\left(y^2\right)\right|=\left|g(x)^2-g(y)^2\right|=g(x)^2-g(y)^2$$

だから

$$g\left(x^2+y^2\right)\in\left\{g\left(x^2\right)+g\left(y^2\right),g\left(x^2\right)-g\left(y^2\right)\right\}.$$

$g\left(x^2+y^2\right)=g\left(x^2\right)+g\left(y^2\right)$ のとき⑲は

$$\begin{aligned}&g(x)^2+g(y)^2+2g(xy)\\&\in\left\{g(x)^2+2g(x)g(y)+g(y)^2,\ g(x)^2-2g(x)g(y)+g(y)^2\right\}\end{aligned}$$

となるから　$g(xy)\in\{g(x)g(y),\ -g(x)g(y)\}$.

$g(t)\geqq 0$ だから $g(xy)=g(x)g(y)$ を得る．よって

$$g\left(x^2+y^2\right)=g\left(x^2\right)+g\left(y^2\right)\Longrightarrow g(xy)=g(x)g(y).\qquad\cdots\cdots⑳$$

$g\left(x^2+y^2\right)=g\left(x^2\right)-g\left(y^2\right)$ のとき⑲は

$$\begin{aligned}&g(x)^2-g(y)^2+2g(xy)\\&\in\left\{g(x)^2+2g(x)g(y)+g(y)^2, g(x)^2-2g(x)g(y)+g(y)^2\right\}\end{aligned}$$

となるから　$g(xy)\in\left\{g(x)g(y)+g(y)^2,-g(x)g(y)+g(y)^2\right\}$.
$-g(x)g(y)+g(y)^2=g(y)(-g(x)+g(y))\leqq 0$ だから

$$g(xy)=g(x)g(y)+g(y)^2$$

を得る．よって

$$g(x^2+y^2)=g(x^2)-g(y^2)\Longrightarrow g(xy)=g(x)g(y)+g(y)^2. \qquad \cdots\cdots ㉑$$

任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して　$g(a^2+b^2)=g(a^2)+g(b^2)$ が成り立つことを示す．
もしもある $a,b\in\mathbb{R}$ に対して　$g(a^2+b^2)\fallingdotseq g(a^2)+g(b^2)$ だと仮定すると，$g(a^2+b^2)=\left|g(a^2)-g(b^2)\right|$ が成り立つ．
$g(a)\geqq g(b)$ と仮定しても一般性を失わない．
$g\left(a^2+b^2\right)=g\left(a^2\right)-g\left(b^2\right)$ だから㉑より

$$g(ab)=g(a)g(b)+g(b)^2 \qquad \cdots\cdots ㉒$$

を得る．
$a'=2a, b'=\dfrac{1}{2}b$ とおくと，$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $g(2t)=2g(t)$ が成り立つから

$$g\left(a'\right)=g(2a)=2g(a), g\left(b'\right)=g\left(\frac{1}{2}b\right)=\frac{1}{2}bg(b).$$

ゆえに

$$g\left(a'\right)\geqq g(a)\geqq g(b)\geqq g\left(b'\right)$$

かつ

$$g\left(a'b'\right)=g(ab), g\left(a'\right)g\left(b'\right)=g(a)g(b)$$

が成り立つ．
$g\left(a'^2+b'^2\right)=g\left(a'^2\right)+g\left(b'^2\right)$ が成り立つときは⑳より $g\left(a'b'\right)=g\left(a'\right)g\left(b'\right)$ が成り立つから $g\left(a'\right)g\left(b'\right)=g(a)g(b)$ とあわせて

$$g(ab)=g(a)g(b) \qquad \cdots\cdots ㉓$$

㉒，㉓から $g(b)=0$ を得る．このとき

$$g\left(a^2+b^2\right)=g\left(a^2\right)-g\left(b^2\right)=g\left(a^2\right)=g\left(a^2\right)+g\left(b^2\right)$$

となり $g\left(a^2+b^2\right)\fallingdotseq g\left(a^2\right)+g\left(b^2\right)$ に矛盾する．
$g\left(a'^2+b'^2\right)=\left|g\left(a'^2\right)-g\left(b'^2\right)\right|=g\left(a'^2\right)-g\left(b'^2\right)$ が成り立つときは㉑より

$$g\left(a'b'\right)=g\left(a'\right)g\left(b'\right)+g\left(b'\right)^2$$

が成り立つから $g\left(a'\right)g\left(b'\right)=g(a)g(b), g\left(a'\right)g\left(b'\right)=g(a)g(b), g\left(b'\right)=\dfrac{1}{2}bg(b)$ とあわせて

$$g(ab)=g(a)g(b)+\frac{1}{4}g(b)^2. \qquad \cdots\cdots ㉔$$

㉒，㉔から $g(b)=0$ を得る．このとき

$$g\left(a^2+b^2\right)=g\left(a^2\right)-g\left(b^2\right)=g\left(a^2\right)=g\left(a^2\right)+g\left(b^2\right)$$

となり $g(a^2+b^2)\fallingdotseq g(a^2)+g(b^2)$ に矛盾する．
したがって 任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して　$g(a^2+b^2)=g(a^2)+g(b^2)$ が成り立つから次のことがいえる．

$$g(x+y)=g(x)+g(y) \qquad \forall x,y\geqq 0. \qquad \cdots\cdots ㉕$$

$g(x)$ は $[0,\infty)$ でコーシーの関数方程式をみたし，$\forall x\in\mathbb{R}$ に対して $g(x)\geqq 0$ を満たすから

$$g(x)=g(1)x \qquad \forall x\geqq 0$$

となる．
$g(x^2)=g(x)^2$ で $x=1$ とおくと $g(1)=g(1)^2$ となる．これを解くと $g(1)=0$ または $g(1)=1$ を得る．
$g(1)=0$ のとき，$g(x)=0 \quad \forall x\geqq 0$ となるが，$g(x)$ は偶関数なので

$$g(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

よって

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは $f(x)\not\equiv 0$ に矛盾する．
$g(1)=1$ のとき

$$g(x)=x \qquad \forall x\geqq 0$$

となるが，$g(x)$ は偶関数なので

$$g(x) = |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

よって

$$f(x) = x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき

$$\begin{aligned}
f(x^2) + f(2y^2) &= x^4 + 4y^4, \\
(f(x+y) + f(y))(f(x-y) + f(y)) &= \left((x+y)^2 + y^2\right)\left((x-y)^2 + y^2\right) \\
&= (x+y)^2(x-y)^2 + \left((x+y)^2 + (x-y)^2\right) y^2 + y^4 \\
&= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + (2x^2 + 2y^2)y^2 + y^4 \\
&= x^4 + 4y^4
\end{aligned}$$

となるから，①は成り立つ．

(2) $f(0) = \dfrac{1}{2}$ の場合①で $y = 0$ とおくと $f(x^2) + \dfrac{1}{2} = \left(f(x) + \dfrac{1}{2}\right)^2$ から

$$f(x^2) = f(x)^2 + f(x) - \frac{1}{4}. \qquad \cdots\cdots ㉖$$

㉖で x のところを $-x$ で置き換えると

$$f(x^2) = f(-x)^2 + f(-x) - \frac{1}{4}. \qquad \cdots\cdots ㉗$$

㉖ $-$ ㉗ から

$$(f(x) - f(-x))\,(f(x) + f(-x)) + f(x) - f(-x) = 0, \qquad \cdots\cdots ㉘$$

$$(f(x) - f(-x))\,(f(x) + f(-x) + 1) = 0.$$

よって

$$f(-x) \in \{f(x), -f(x) - 1\}\,. \qquad \cdots\cdots ㉙$$

$f(x)$ が偶関数となることを示す．
$f(-a) \fallingdotseq f(a)$ となる $a(\fallingdotseq 0)$ が存在したとすると㉙より

$$f(-a) = -f(a) - 1.$$

③を変形した

$$(f(y) - f(-y))\,(f(x+y) + f(x-y)) + (f(y) - f(-y))\,(f(y) + f(-y)) = 0$$

に㉘を使うと

$$(f(y)-f(-y))\,(f(x+y)+f(x-y))-(f(y)-f(-y))=0,$$
$$(f(y)-f(-y))\,(f(x+y)+f(x-y)-1)=0.$$

この式で $x=0, y=a$ とおくと

$$(f(a)-f(-a))\,(f(a)+f(-a)-1)=0.$$

$f(-a)=-f(a)-1$ を使うと $(2f(a)+1)\cdot(-2)=0$ から $f(a)=-\dfrac{1}{2}$ を得る．
$f(-a)$ の値は

$$f(-a)=-f(a)-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

となり $f(-a)=f(a)$. これは $f(-a)\fallingdotseq f(a)$ に矛盾する．
よって $f(x)$ は偶関数となる．
①で $x=0$ とおいた

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+f(2y^2)&=(f(y)+f(y))\,(f(-y)+f(y))\\&=4f(y)^2\end{aligned}$$

から

$$f(2x^2)=4f(x)^2-\frac{1}{2} \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ㉚$$

①で㉖，㉚を使うと

$$\begin{aligned}(f(x+y)+f(y))\,(f(x-y)+f(y))&=f(x^2)+f(2y^2)\\&=f(x)^2+f(x)-\frac{1}{4}+4f(y)^2-\frac{1}{2}\\&=f(x)^2+f(x)+4f(y)^2-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

から

$$(f(x+y)+f(y))\,(f(x-y)+f(y))=f(x)^2+f(x)+4f(y)^2-\frac{3}{4}.$$

この式で $y=x$ とおくと

$$(f(2x)+f(x))\left(\frac{1}{2}+f(x)\right)=5f(x)^2+f(x)-\frac{3}{4},$$
$$f(2x)\left(\frac{1}{2}+f(x)\right)+f(x)^2+\frac{1}{2}f(x)=5f(x)^2+f(x)-\frac{3}{4},$$

$$
\begin{aligned}
f(2x)\left(\frac{1}{2}+f(x)\right) &= 4f(x)^2+\frac{1}{2}f(x)-\frac{3}{4} \\
&= \left(4f(x)-\frac{3}{2}\right)\left(f(x)+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

よって $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ または $f(2x)=4f(x)-\dfrac{3}{2}$ が成り立つから

$$
f(x)\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{f(2x)+3/2}{4}\right\}\qquad \forall x\in\mathbb{R}.
$$

$f(x)\fallingdotseq-\dfrac{1}{2}$ とすると $f(2x)=4f(x)-\dfrac{3}{2}$ が成り立つ.

㉖から $f(x^2)+\dfrac{1}{2}=\left(f(x)+\dfrac{1}{2}\right)^2>0$ だから $f(x^2)\fallingdotseq-\dfrac{1}{2}$.

よって $f(2x^2)=4f(x^2)-\dfrac{3}{2}$ が成り立つから，㉖，㉚を使うと

$$
\begin{aligned}
4f(x)^2-\frac{1}{2} &= 4\left(f(x)^2+f(x)-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{2}, \\
f(x) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
f(x)\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\qquad \forall x\in\mathbb{R}.
$$

$f(x)^2=\dfrac{1}{4}$ を㉚で使うと

$$
f(2x^2)=4f(x)^2-\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
$$

よって

$$
f(x)=\frac{1}{2}\qquad \forall x\geqq 0.
$$

$f(x)$ は偶関数だから

$$
f(x)=\frac{1}{2}\qquad \forall x\in\mathbb{R}.
$$

これは①を満たす.

したがって解は

- $f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$,
- $f(x)=\dfrac{1}{2} \quad \forall x\in\mathbb{R}$,
- $f(x)=x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

である. ■

問題 7　(IMO Shortlist 2014)
Find all functions $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ such that

$$n^2+4f(n)=f(f(n))^2$$

for all $n\in\mathbb{Z}$.

解答
次の補題を用いる．
補題　a,b,c は整数で $a^2+4b=c^2$ を満たすならば
(i)　$b=0$
または
(ii) $|b|\geqq|a|-1,\ |b|\geqq|c|-1$
が成り立つ．
特に
$b>0$ ならば $|b|\geqq|a|+1$,　$b<0$ ならば $|b|\geqq|c|+1$
が成り立つ．
証明 $b\fallingdotseq 0$ とする．
$4b=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$ は 4 の倍数だから c と a の偶奇は一致する．

まず $(c+a)+(c-a)=2a$ は偶数だから $c+a$ と $c-a$ の偶奇は一致することに注意する．$(c+a)(c-a)$ は 4 の倍数だから $c+a$ と $c-a$ はともに偶数となる．よって c と a の偶奇は一致する．（素直に $(c,a)=(2l,2m),(2l,2m+1),(2l+1,2m),(2l+1,2m+1)$ の場合を考えてもよい.）

(1) $b\geqq 1$ のとき
$4b=(|c|+|a|)(|c|-|a|)\geqq 4$ から $|c|-|a|\geqq 1$.
$|c|$ と $|a|$ の偶奇が一致するから $|c|-|a|\geqq 2$.
これを使うと

$$4b=|c|^2-|a|^2\geqq(|a|+2)^2-|a|^2=4|a|+4$$

から

$$b\geqq|a|+1.$$

よって

$$b\geqq|a|+1\geqq|a|-1$$

から

$$|b| \geqq |a| - 1.$$

(2) $b \leqq -1$ のとき

$a^2 = c^2 - 4b \geqq 4$ から $|a| \geqq 2$ がいえる．

また $4b = (|c| + |a|)(|c| - |a|) \leqq -4$ から $|c| - |a| \leqq -1$.

$|c|$ と $|a|$ の偶奇が一致するから $|c| - |a| \leqq -2$ すなわち $|c| \leqq |a| - 2$

これを使うと

$$4b = |c|^2 - |a|^2 \leqq (|a| - 2)^2 - |a|^2 = -4\,|a| + 4$$

から

$$b \leqq -|a| + 1.$$

よって

$$-b \geqq |a| - 1$$

から

$$|b| \geqq |a| - 1.$$

(1)，(2) から $|b| \geqq |a| - 1$ が成り立つことが示された．

次に $|b| \geqq |c| - 1$ を示す．

$a^2 + 4b = c^2$ を $c^2 + 4(-b) = a^2$ と変形する．上の結果から $|-b| \geqq |c| - 1$ すなわち $|b| \geqq |c| - 1$ が成り立つ．

特に $-b > 0$ すなわち $b < 0$ のとき $|b| \geqq |c| + 1$ が成り立つ． □

$$n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

まず 次のことが成り立つことに注意したい．

$$f(u) = f(v) \Longrightarrow u = \pm v \qquad \cdots\cdots (*)$$

$f(u) = f(v)$ から $u^2 = f(f(u))^2 - 4f(u) = f(f(v))^2 - 4f(v) = v^2$. よって $u = \pm v$ を得る．

①で補題を使うと

$$f(n) = 0 \quad \text{または} \quad \Big[\, |f(n)| \geqq |n| - 1 \quad \text{かつ} \quad |f(n)| \geqq |f(f(n))| - 1 \,\Big] \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots ②$$

②で n のところを $f(n)$ で置き換えると

$$f(f(n))=0 \quad \text{または} \quad |f(f(n))| \geqq |f(n)|-1 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots ③$$

$f(n) \fallingdotseq 0$ かつ $f(f(n)) \fallingdotseq 0$ と仮定すると

$$|f(n)| \geqq |n|-1 \quad \text{かつ} \quad |f(n)| \geqq |f(f(n))|-1 \text{ かつ } \quad |f(f(n))| \geqq |f(n)|-1$$

が成り立つので

$$|f(n)|+1 \geqq |f(f(n))| \geqq |f(n)|-1.$$

よって $|f(f(n))| \in \{|f(n)|-1, |f(n)|, |f(n)|+1\}$.
したがって

$$f(n)=0 \quad \text{または} \quad |f(f(n))| \in \{0, |f(n)|-1, |f(n)|, |f(n)|+1\} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ.

(1) $f(m)=0$ の場合
①で $n=m$ とおいた $m^2+4f(m)=f(f(m))^2$ から $m^2=f(0)^2$.
よって $f(0)=\pm|m|$.
①で $n=0$ とおいた

$$4f(0)=f(f(0))^2 \geqq 0$$

から $f(0) \geqq 0$ である．よって $f(0)=|m|$ となる.
これを $4f(0)=f(f(0))^2$ に代入すると

$$f(|m|)^2=4|m|. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$m \geqq 0$ のとき ⑤は $f(m)^2=4m$ となる．$f(m)=0$ であったから $m=0$ を得る.
$m<0$ のとき ⑤は $f(-m)^2=-4m$ となる.
$m=-t^2$ $(t \geqq 1, t \in \mathbb{Z})$ とおける.
$f(0)=|m|$ から $f(0)=t^2$.
$f(m)=0$ から $f(-t^2)=0$.
$f(-m)^2=-4m$ から $\left(f\left(t^2\right)\right)^2=4t^2$.
よって $f(t^2) \in \{2t, -2t\}$.
①で $n=t^2$ とおいた $(t^2)^2+4f(t^2)=f\left(f(t^2)\right)^2$ から

$$(t^2)^2+8t=f(2t)^2 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

または

$$(t^2)^2 - 8t = f(-2t)^2 \qquad \cdots\cdots ⑥'$$

が成り立つ．

　$(t^2)^2 + 8t = f(2t)^2$ が成り立つ場合 $(b = 2t > 0)$

この式で補題を使うと

$$|2t| \geqq \left|t^2\right| + 1$$

から $t^2 - 2t + 1 \leqq 0$ を得る．よって $t = 1$ で $m = -1$.

$f(-t^2) = 0$ から $f(-1) = 0$.

⑥ に $t = 1$ を代入すると $9 = f(2)^2$ から $f(2) = \pm 3$.

①で $n = 2$ とおくと $4 + 4f(2) = f(f(2))^2 \geqq 0$ を満たさなければならないから $f(2) = 3$ を得る．

　$(t^2)^2 - 8t = f(-2t)^2$ が成り立つ場合 $(b = -2t < 0)$

この式で補題を使うと

$$|2t| \geqq \left|t^2\right| - 1$$

から $t^2 - 2t - 1 \leqq 0$ を得る．

$t \geqq 3$ のとき $t^2 - 2t = t(t-2) \geqq 3 \cdot (3-2) = 3 > 1$ だから $t^2 - 2t - 1 \leqq 0$ は成り立たない．

$t = 1, 2$ のとき 不等式 $t^2 - 2t - 1 \leqq 0$ は成り立つ．よって $t \in \{1, 2\}$.

$t = 2$ とすると $m = -4$ で $f(0) = 4$ となる，

$f(-t)^2 = 0$ から $f(-4) = 0$.

$f(t^2) = -2t$ から $f(4) = -4$.

⑥$'$ に $t = 2$ を代入すると成り立つ．

(2) $f(m) \fallingdotseq 0$ かつ $|f(f(m))| = |f(m)|$ の場合

①で $n = m$ とおいた

$$m^2 + 4f(m) = f(f(m))^2$$

から

$$m^2 + 4f(m) = f(m)^2. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

この式を

$$m^2 + 4 = (f(m) - 2)^2$$

と変形して補題を使う．$(a = m, b = 1 > 0, c = f(m) - 2)$

$$|1| \geqq |m| + 1$$

から $m=0$ を得る．これを ⑦に代入すると $4f(0)=f(0)^2$ から $f(0)\in\{0,4\}$.

$f(0)=f(m)\fallingdotseq 0$ だから $f(0)=4$ となる．

$|f(f(m))|=|f(m)|$ で $m=0$ とした $|f(f(0))|=|f(0)|$ は $|f(4)|=4$ となるから $f(4)\in\{4,-4\}$.

$f(0)=4$ だから $(*)$ を使うと $f(4)\fallingdotseq 4$ なので $f(4)=-4$ となる．

①で $n=4$ とおいた $16+4f(4)=f(f(4))^2$ は $0=f(-4)^2$ となるから $f(-4)=0$ を得る．

(3) $f(m)\fallingdotseq 0$ かつ $|f(f(m))|=|f(m)|-1$ の場合

①で $n=m$ とおいた
$$m^2+4f(m)=f(f(m))^2$$
から
$$m^2+4f(m)=(|f(m)|-1)^2=f(m)^2-2\,|f(m)|+1$$
すなわち
$$m^2+4f(m)=f(m)^2-2\,|f(m)|+1. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$f(m)>0$ のとき ⑧は
$$m^2=f(m)^2-6f(m)+1.$$
となる．この式を変形した
$$m^2+8=(f(m)-3)^2$$
に補題を使うと $(a=m, b=2>0, c=f(m)-3)$

$|2|\geqq|m|+1$ から $m\in\{-1,0,1\}$.

$m=0$ のとき これを $m^2+8=(f(m)-3)^2$ に代入して $f(0)$ を求めると $f(0)\notin\mathbb{Z}$ となり不適.

よって $m\in\{-1,1\}$.

$m^2=1$ を $m^2=f(m)^2-6f(m)+1$ に代入した $f(m)^2-6f(m)=0$ から $f(m)=6$ を得る．($\because\quad f(m)\fallingdotseq 0.$)

$f(m)=6$ を $|f(f(m))|=|f(m)|-1$ に代入して $|f(6)|=5$.

まとめると

$m=1, f(1)=6, |f(6)|=5$ または $m=-1, f(-1)=6, |f(6)|=5$.

$f(m)<0$ のとき ⑧は
$$m^2=f(m)^2-2f(m)+1=(f(m)-1)^2.$$

となる．これを解くと

$$f(m) = 1 \pm |m|.$$

$f(m) < 0$ より $f(m) = 1 - |m|$.

(4) $f(m) \fallingdotseq 0$ かつ $|f(f(m))| = |f(m)| + 1$ の場合

①で $n = m$ とおいた

$$m^2 + 4f(m) = f(f(m))^2$$

から

$$m^2 + 4f(m) = (|f(m)| + 1)^2 = f(m)^2 + 2|f(m)| + 1$$

すなわち

$$m^2 + 4f(m) = f(m)^2 + 2|f(m)| + 1. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$f(m) > 0$ のとき ⑨は

$$m^2 = f(m)^2 - 2f(m) + 1 = (f(m) - 1)^2$$

となる．これを解くと

$$f(m) = 1 \pm |m|.$$

$f(m) > 0$ より $f(m) = 1 + |m|$.

$f(m) < 0$ のとき ⑨は

$$m^2 = f(m)^2 - 6f(m) + 1$$

となる．この式を変形した

$$m^2 + 8 = (f(m) - 3)^2$$

に補題を使うと $(a = m, b = 2 > 0, c = f(m) - 3)$

$|2| \geqq |m| + 1$ から $m \in \{-1, 0, 1\}$.

$m = 0$ のとき これを $m^2 + 8 = (f(m) - 3)^2$ に代入して $f(0)$ を求めると $f(0) \notin \mathbb{Z}$ となり不適.

よって $m \in \{-1, 1\}$.

$m^2 = 1$ を $m^2 = f(m)^2 - 6f(m) + 1$ に代入した $f(m)^2 - 6f(m) = 0$ から $f(m) = 6$ を得る．($\because \quad f(m) \fallingdotseq 0$.)

$f(m) = 6$ を $|f(f(m))| = |f(m)| + 1$ に代入して $|f(6)| = 7$.

まとめると

$m = 1, f(1) = 6, |f(6)| = 7$ または $m = -1, f(-1) = 6, |f(6)| = 7$.

以上のことから

(1) $f(m)=0 \Longrightarrow m\in\{-4,-1,0\}$,

(2) $f(m)\fallingdotseq 0, |f(f(m))|=|f(m)| \Longrightarrow m=0, f(0)=4, f(4)=-4, f(-4)=0$,

(3) $f(m)>0, |f(f(m))|=|f(m)|-1 \Longrightarrow m\in\{-1,1\}$,

$f(m)<0, |f(f(m))|=|f(m)|-1 \Longrightarrow f(m)=1-|m|$,

(4) $f(m)>0, |f(f(m))|=|f(m)|+1 \Longrightarrow f(m)=1+|m|$,

$f(m)<0, |f(f(m))|=|f(m)|+1 \Longrightarrow m\in\{-1,1\}$.

また (1)〜(4) 等より

$$f(4)=-4 \Longleftrightarrow f(-4)=0$$

がいえる．

$f(4)=-4$ とする．①で $n=4$ とおいた $16+4\cdot f(4)=f(f(4))^2$ から $f(-4)^2=0$.
よって $f(-4)=0$
$f(-4)=0$ とする．①で $n=-4$ とおいた $16+4\cdot f(-4)=f(f(-4))^2$ から $f(0)^2=16$. よって $f(0)\in\{4,-4\}$
①で $n=-0$ とおくと $4f(0)=f(f(0))^2 \geqq 0$ から $f(0)\geqq 0$ なので $f(0)=4$.
$f(0)=4$ に対して 上記の (1)，(3)，(4) を満たさないから (2) を満たすので $f(4)=-4$.

対偶をとると

$$f(4)\fallingdotseq -4 \Longleftrightarrow f(-4)\fallingdotseq 0 \qquad \cdots\cdots(**)$$

同様にして

$$f(4)=-4 \Longleftrightarrow f(0)=4$$

もいえる．

以上のことから

任意の整数 $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-4,-1,0,1,4\}$ に対して $f(n)\in\{1+n,1-n\}$ $\cdots\cdots(\bigstar)$
が成り立つ．

$f(4)\fallingdotseq -4$ が成り立つならば
任意の整数 $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$ に対して $f(n)\in\{1+n,1-n\}$ $\cdots\cdots(\bigstar\bigstar)$
が成り立つ．

$(\bigstar)$ で $n=2$ とおくと $f(2)\in\{-1,3\}$ が成り立つので場合分けをする．

$f(2)=-1$ とすると矛盾が生じる．

①で $n=2$ とおいた $4+4f(2)=f(f(2))^2$ から $0=f(-1)^2$ すなわち $f(-1)=0$ を得る．
①で $n=-1$ とおいた $1+4f(-1)=f(f(-1))^2$ から $1=f(0)^2$ すなわち $f(0)\in\{1,-1\}$ を得る．
①で $n=0$ とおいた $4f(0)=f(f(0))^2\geqq 0$ から $f(0)\geqq 0$ なので $f(0)=1$ を得る．
$4f(0)=f(f(0))^2$ に $f(0)=1$ を代入すると $4=f(1)^2$ すなわち $f(1)\in\{2,-2\}$ を得る．
①で $n=1$ とおくと $1+4f(1)=f(f(1))^2$.
$f(1)=2$ ならば $9=f(2)^2$. これは $f(2)=-1$ に矛盾する．
$f(1)=-2$ ならば $-7=f(-2)^2$. これは $f(-2)\in\mathbb{Z}$ に矛盾する．

したがって $f(2)=3$ となる．
数学的帰納法で，m が 2 以上の整数のとき

$$f(m)=m+1 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

が成り立つことを示す．

(i) $m=2$ のとき $f(2)=3$ であることは上で示した．
(ii) $m=k(\geqq 2)$ のとき成り立つと仮定する．
①で $n=k$ とおくと

$$k^2+4f(k)=f(f(k))^2.$$

仮定を使うと

$$k^2+4(k+1)=f(k+1)^2 \qquad f(k+1)=(k+2)^2$$

から $f(k+1)\in\{k+2,-(k+2)\}$.
$k=3$ のとき $f(4)\in\{5,-5\}$ となり $f(4)\fallingdotseq -4$ なので (★★) が成り立つ．
$k\fallingdotseq 3$ ならば $k+1\fallingdotseq 4$ なので，(★★) から $f(k+1)\in\{1+(k+1),1-(k+1)\}$ が成り立つことを考慮して

$$f(k+1)=k+2$$

となり $n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より m が 2 以上の整数のとき $f(m)=m+1$ が成り立つ． $\square$

[注]　⑩より $f(4)=5$ で $f(4)\fallingdotseq -4$ なので (★★) が成り立つ．

(I) 任意の整数 $n<-1$ に対して $f(n)=1-n$ が成り立つ場合

①で $n=-1$ とおくと $1+4f(-1)=f(f(-1))^2$.

$l=f(-1)$ とおくと $1+4l=f(l)^2 \geqq 0$ で $l\geqq 0$.

$4l+1$ は平方数だから，$l=0,2,6,12,\ldots$ となる．

$l\geqq 6$ とすると⑩から $f(l)=l+1$ となるので，これを $1+4l=f(l)^2$ に代入すると $1+4l=(l+1)^2$.

$l^2-2l=0$ を解くと $l=0,2$. これは $l\geqq 6$ に矛盾する．

よって $l\in\{0,2\}$ となる．

$l=0$ のとき $\boldsymbol{f(-1)=0}$.

また $1+4l=f(l)^2$ から $f(0)^2=1$ すなわち $f(0)\in\{-1,1\}$.

①で $n=0$ とおくと $4f(0)=f(f(0))^2\geqq 0$.

$f(0)\geqq 0$ だから $\boldsymbol{f(0)=1}$.

これを $4f(0)=f(f(0))^2$ に代入して $f(1)^2=4$ すなわち $f(1)\in\{-2,2\}$.

①で $n=1$ とおくと $1+4f(1)=f(f(1))^2$.

$f(1)=-2$ ならば $-7=f(-2)^2$. これは $f(-2)\in\mathbb{Z}$ に矛盾する．

よって $\boldsymbol{f(1)=2}$.

以上のことから

- $f(x)=\begin{cases}1-x & (x\leqq -2)\\ 1+x & (x\geqq -1)\end{cases}$

となる．

$l=2$ のとき $\boldsymbol{f(-1)=2}$.

①で $n=1$ とおくと $1+4f(1)=f(f(1))^2$.

$l_1=f(1)$ とおくと $1+4l_1=f(l_1)^2$.

l のときと同様にして $f(1)=l_1\in\{0,2\}$.

$f(1)=0$ ならば $1+4f(1)=f(f(1))^2$. から $1=f(0)^2$ すなわち $f(0)\in\{-1,1\}$.

①で $n=0$ とおくと $4f(0)=f(f(0))^2\geqq 0$.

$f(0)\geqq 0$ だから $f(0)=1$.

これを $4f(0)=f(f(0))^2$ に代入して $f(1)^2=4$ すなわち $f(1)\in\{-2,2\}$.

これは $f(1)=0$ に矛盾する．

よって $\boldsymbol{f(1)=2}$.

①で $n=0$ とおくと $4f(0)=f(f(0))^2$.

$a=f(0)$ とおくと $4a=f(a)^2$.

$a \geqq 2$ と仮定すると⑩から $f(a)=a+1$ だから

$$4a=(a+1)^2 \qquad a^2-2a+1=0.$$

よって $a=1$ となり $a \geqq 2$ に矛盾する．$4a=f(a)^2 \geqq 0$ だから $a=0$ または $a=1$ となる．したがって

$$\boldsymbol{f(0) \in \{0,1\}}.$$

以上のことから

$f(0)=0$ のとき

- $f(x)=\begin{cases} 1-x & (x \leqq -1) \\ 0 & (x=0) \\ 1+x & (x \geqq 1) \end{cases}$

となる．

$f(0)=1$ のとき

- $f(x)=\begin{cases} 1-x & (x \leqq -1) \\ 1+x & (x \geqq 0) \end{cases}$

となる．

(II) ある $k<-1$ に対して $f(k)=k+1$ が成り立つ場合

任意の $n \in [k,-2]$ に対して

$$f(n)=n+1 \qquad \cdots\cdots ⑬$$

が成り立つことを示す．

$k=-2$ の場合は明らかに成り立つから $k<-2$ の場合を考える．

①で $n=k$ とおくと $k^2+4f(k)=f(f(k))^2$.

$f(k)=k+1$ を使うと

$$k^2+4(k+1)=f(k+1)^2 \qquad f(k+1)^2=(k+2)^2$$

から $f(k+1) \in \{k+2,-(k+2)\}$.

$k+1<-1$ だから (★★) より $f(k+1) \in \{(k+1)+1, 1-(k+1)\}$ も成り立つので $f(k+1)=k+2$ を得る．

$n=k+1$ のときも成り立つから，この操作を繰り返し行えばよい．

①で $n=-2$ とおくと $4+4f(-2)=f(f(-2))^2$.

$f(-2)=-1$ だから $0=f(-1)^2$ より $\boldsymbol{f(-1)=0}$.

①で $n=-1$ とおくと $1+4f(-1)=f(f(-1))^2$.

$f(-1)=0$ だから $1=f(0)^2$ より $f(0)\in\{-1,1\}$.

①で $n=0$ とおくと $4f(0)=f(f(0))^2\geqq 0$.

$f(0)\geqq 0$ だから $\boldsymbol{f(0)=1}$.

これを $4f(0)=f(f(0))^2$ に代入して $f(1)^2=4$ すなわち $f(1)\in\{-2,2\}$.

①で $n=1$ とおくと $1+4f(1)=f(f(1))^2$.

$f(1)=-2$ ならば $-7=f(-2)^2$. これは $f(-2)\in\mathbb{Z}$ に矛盾する.

よって $\boldsymbol{f(1)=2}$.

以上のことから

$\{k|f(k)=k+1, k\leqq -2\}\fallingdotseq\{z|z\in\mathbb{Z}, z\leqq -2\}$ のとき $\{k|f(k)=k+1, k\leqq -2\}$ の最小元を考えて これを k とする.

$x<k, x\in\mathbb{Z}$ のとき $f(x)\fallingdotseq x+1$ だから (★★) より $f(x)=1-x$ となる. また上で調べたことより $x\geqq k$ で $f(x)=x+1$ である.

$k\leqq -2$ を定数として

- $f(x)=\begin{cases}1-x & (x<k)\\ 1+x & (x\geqq k)\end{cases}$

となる.

$\{k|f(k)=k+1, k\leqq -2\}=\{z|z\in\mathbb{Z}, z\leqq -2\}$ のときは

- $f(x)=1+x \qquad \forall x\in\mathbb{Z}$

となる.

$f(x)=1+x$ の場合

①の左辺は $n^2+4(1+n)=(n+2)^2$, 右辺は $(f(1+n))^2=\big(1+(1+n)\big)^2=(n+2)^2$ で一致する.

- $f(x)=\begin{cases}1-x & (x\leqq -1)\\ 0 & (x=0)\\ 1+x & (x\geqq 1)\end{cases}$ の場合

$n\leqq -1$ のとき

①の左辺は $n^2+4(1-n)=(n-2)^2$, 右辺は $f\left(\underbrace{1-n}_{\geqq 2}\right)^2=\bigl(1+(1-n)\bigr)^2=(n-2)^2$

となり一致する．

$n=0$ のとき ①の左辺，右辺とも 0 で一致する．

$n\geqq 1$ のとき

①の左辺は $n^2+4(1+n)=(n+2)^2$, 右辺は $f\left(\underbrace{1+n}_{\geqq 2}\right)^2=\bigl(1+(1+n)\bigr)^2=(n+2)^2$

となり一致する．

$k\leqq -1$ を定数として

- $f(x)=\begin{cases}1-x & (x<k)\\ 1+x & (x\geqq k)\end{cases}$ の場合

$n<k$ のとき

①の左辺は $n^2+4(1-n)=(n-2)^2$, 右辺は $f\left(\underbrace{1-n}_{>1-k}\right)^2=\bigl(1+(1-n)\bigr)^2=(n-2)^2$

となり一致する．

$n\geqq k$ のとき

①の左辺は $n^2+4(1+n)=(n+2)^2$, 右辺は $f\left(\underbrace{1+n}_{\geqq 1+k>k}\right)^2=\bigl(1+(1+n)\bigr)^2=(n+2)^2$

となり一致する．

したがって，解は次の 3 組である．

- $f(x)=1+x \qquad \forall x\in\mathbb{Z}$,
- $f(x)=\begin{cases}1-x & (x\leqq -1)\\ 0 & (x=0)\\ 1+x & (x\geqq 1)\end{cases}$,

$k\leqq -1$ を定数として

- $f(x)=\begin{cases}1-x & (x<k)\\ 1+x & (x\geqq k)\end{cases}$. ■

問題 8　(Canada 2015)

Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $n \in \mathbb{N}$

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$$

解答

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $n = 1$ とおくと，$0 < f(1)f(f(1)) < 2$ を得る．$f(1)f(f(1))$ は正の整数だから $f(1)f(f(1)) = 1$ すなわち $f(1) = 1, f(f(1)) = 1$ となる．

ゆえに $f(1) = 1$ である．

数学的帰納法で

$$f(n) = n \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを示す．

(i) $n = 1$ のとき $f(1) = 1$ だから $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n \leqq k\,(k \geqq 1)$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する．

①で $n = k + 1$ とおくと

$$k^2 < f(k+1)f(f(k+1)) < (k+1)(k+2)$$

が成り立つから $m = f(k+1)$ とおくと

$$k^2 < mf(m) < (k+1)(k+2). \qquad \cdots\cdots ②$$

$m \leqq k$ とすると，仮定から $f(m) = m$ となる．これを②に代入すると

$$k^2 < m^2 < (k+1)(k+2).$$

$k^2 < m^2$ は $m \leqq k$ に矛盾する．

$m \geqq k + 2$ とすると②の $mf(m) < (k+1)(k+2)$ より

$$(k+2)f(m) \leqq mf(m) < (k+1)(k+2).$$

よって

$$f(m) < k + 1$$

すなわち

$$f(m) \leqq k$$

を得る．

$f(m) \leqq k$ だから仮定より $f(f(m)) = f(m)$ が成り立つ．

①で $n = m$ とおいた

$$(m-1)^2 < f(m)\underbrace{f(f(m))}_{=f(m)} < m^2 + m$$

から

$$(m-1)^2 < f(m)^2 < m^2 + m$$

を得る．

$(m-1)^2 < f(m)^2$ から

$$m - 1 < f(m).$$

$f(m) < k+1$ が成り立つので $m - 1 < f(m) < k + 1$.

この不等式から $m - 1 < k + 1$ すなわち $m < k + 2$ となり $m \geqq k + 2$ に矛盾する．

以上のことから $m = k + 1$ でなければならない．

よって $f(k+1) = k + 1$ となり $n = k + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) よりすべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ．

以上のことから

$$f(n) = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

これは①を満たす．

したがって解は

- $f(n) = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

である． ■

問題 9　(APMO 2015)

Let $S = \{2, 3, 4, \dots\}$ denote the set of integers that are greater than or equal to 2. Does there exit a function $f : S \to S$ such that for all $a, b \in S$ with $a \neq b$

$$f(a)f(b) = f\left(a^2b^2\right)$$

$1 \notin S$ であることに注意したい.

解答 任意の $b \in S$ をとる.

$a \neq b^6 (,\ a^2b^{12} \neq b^{10})$ のとき

$$\begin{aligned} f(a)f\left(b^6\right)f\left(b^{10}\right) &= f\left(a^2b^{12}\right)f\left(b^{10}\right) \\ &= f\left(a^4b^{24}b^{20}\right) = f\left(a^4b^{44}\right). \end{aligned}$$

$a \neq b^{10} (,\ a^2b^{20} \neq b^2)$ のとき

$$\begin{aligned} f(a)f\left(b^2\right)f\left(b^{10}\right) &= f(a)f\left(b^{10}\right)f\left(b^2\right) \\ &= f\left(a^2b^{20}\right)f\left(b^2\right) \\ &= f\left(a^4b^{40}b^4\right) = f\left(a^4b^{44}\right). \end{aligned}$$

したがって $a \neq b^6, a \neq b^{10}$ のとき $f(a)f\left(b^6\right)f\left(b^{10}\right) = f(a)f\left(b^2\right)f\left(b^{10}\right)$ すなわち

$$f\left(b^6\right) = f\left(b^2\right) \qquad \forall b \in S$$

が成り立つ.

$b^2 \neq b$ だから

$$f\left(b^6\right) = f\left(b^4 \cdot b^2\right) = f\left(b^2\right)f(b)$$

となるので $f\left(b^6\right) = f\left(b^2\right)$ に代入すると

$$f\left(b^2\right)f(b) = f\left(b^2\right).$$

よって $f(b) = 1$ となり $f(b) \in S$ に矛盾する.

したがって $f(a)f(b) = f\left(a^2b^2\right)$ を満たす関数 f は存在しない. ■

問題 10　(India 2015)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$

$$f\left(x^2+yf(x)\right)=xf(x+y)$$

解答

$$f\left(x^2+yf(x)\right)=xf(x+y) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

①で $x=y=0$ とおくと $f(0)=0$.

(1) $f(a)=0$ となる $a\neq 0$ が存在する場合

①で $x=a$ とおいた $f(a^2)=af(a+y)$ から

$$f(y+a)=\frac{f(a^2)}{a}.$$

よって

$$f(x)=\frac{f(a^2)}{a} \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

$f(x)$ は定数関数となるから

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たす.

(2) $f(x)=0$ となる x が 0 以外に存在しない場合

①で $y=-x$ とおいた $f(x^2-xf(x))=0$ から

$$x^2-xf(x)=0.$$

$x\neq 0$ ならば $f(x)=x$.

$f(0)=0$ だから

$$f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たす.

したがって解は

- $f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

と

- $f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である.　■

問題 11　(Zhautykov Olympiad 2015)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x, y\in\mathbb{R}$

$$f\left(x^3+y^3+xy\right)=x^2f(x)+y^2f(y)+f(xy)$$

解答

$$f\left(x^3+y^3+xy\right)=x^2f(x)+y^2f(y)+f(xy) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $y=0$ とおくと

$$f\left(x^3\right)=x^2f(x)+f(0).$$

この式で $x=1$ とおいた $f(1)=f(1)+f(0)$ から $f(0)=0$.

よって

$$f\left(x^3\right)=x^2f(x) \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．

①で $y=-x$ とおいた $f\left(-x^2\right)=x^2f(x)+x^2f(-x)+f\left(-x^2\right)$ から

$$x^2(f(-x)+f(x))=0.$$

$x\fallingdotseq 0$ のとき $f(-x)=-f(x)$.

$f(0)=0$ だから

$$f(-x)=-f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

すなわち $f(x)$ は奇関数となる．

①で②を使うと

$$f\left(x^3+y^3+xy\right)=f\left(x^3\right)+f\left(y^3\right)+f(xy) \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．

③で y のところを $-y$ で置き換えると

$$f\left(x^3-y^3-xy\right)=f\left(x^3\right)+f\left(-y^3\right)+f(-xy).$$

$f(x)$ は奇関数だから

$$f\left(x^3-y^3-xy\right)=f\left(x^3\right)-f\left(y^3\right)-f(xy). \qquad \cdots\cdots ④$$

③+④から

$$f\left(x^3+y^3+xy\right)+f\left(x^3-y^3-xy\right)=2f\left(x^3\right). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$\forall u, v \in \mathbb{R}$ に対して

$$x^3+y^3+xy=u, x^3-y^3-xy=v$$

とおくと

$u+v=2x^3, u-v=2\left(y^3+xy\right)$　すなわち　$x=\sqrt[3]{\dfrac{u+v}{2}}, y^3+\sqrt[3]{\dfrac{u+v}{2}}-\dfrac{u-v}{2}=0$

を満たすような実数 x, y が存在することを示す．

$a=\sqrt[3]{\dfrac{u+v}{2}}, b=-\dfrac{u-v}{2}$ とおくと $y^3+ay+b=0$ が実数解をもつことを示せばよく，これは y に関する 3 次方程式だから 少なくとも 1 つの実数解をもつことから分かる．

したがって，$x=\sqrt[3]{\dfrac{u+v}{2}}, y^3+\sqrt[3]{\dfrac{u+v}{2}}-\dfrac{u-v}{2}=0$ の実数解を y とおくと，⑤は次のように書き直せる．

$$f(u)+f(v)=2f\left(\frac{u+v}{2}\right) \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥で u, v のところをそれぞれ $2u, 2v$ で置き換えると

$$f(2u)+f(2v)=2f(u+v). \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑦で $v=0$ とおくと $f(2u)=2f(u)$ を得る．

これを用いて⑦を書き直すと $2f(u)+2f(v)=2f(u+v)$ すなわち

$$f(u+v)=f(u)+f(v) \qquad \forall u, v \in \mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

となる．

⑧で v のところを $-v$ で置き換え，$f(x)$ は奇関数であることを用いると

$$f(u-v)=f(u)+f(-v)=f(u)-f(v) \qquad \forall u, v \in \mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑧'$$

から

$$f(u-v)=f(u)-f(v)$$

②で x のところをそれぞれ $x+1$, $x-1$ で置き換えると

$$f\left((x+1)^3\right)=(x+1)^2f(x+1)=(x+1)^2\left(f(x)+f(1)\right). \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$$f\left((x-1)^3\right)=(x-1)^2f(x-1)=(x-1)^2\left(f(x)-f(1)\right). \qquad \cdots\cdots ⑩$$

⑨+⑩から

$$f\left((x+1)^3\right)+f\left((x-1)^3\right)=2(x^2+1)f(x)+4xf(1).$$

左辺は

$$\begin{aligned} f\left((x+1)^3\right)+f\left((x-1)^3\right) &= f\left((x+1)^3+(x-1)^3\right) \\ &= f\left(2x^3+6x\right) \\ &= 2f\left(x^3\right)+6f(x) \\ &\underset{②}{=} 2x^2f(x)+6f(x) \end{aligned}$$

となるから

$$(2x^2+6)f(x)=2(x^2+1)f(x)+4xf(1).$$

これから

$$f(x)=f(1)x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

を得る.

$c=f(1)$ とおいた $f(x)=cx$ は①を満たす.

したがって解は

c を定数として

- $f(x)=cx \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である. ■

問題 12　(ISI Entrance 2015)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| = 2\,|x - y|$$

解答

$$|f(x) - f(y)| = 2\,|x - y| \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

$\displaystyle\lim_{y \to x} |f(x) - f(y)| = \lim_{y \to x} 2\,|x - y| = 0$ となるから

$$\lim_{y \to x}\{f(x) - f(y)\} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{y \to x} f(y) = f(x).$$

よって $f(x)$ は連続関数である．

$g(x) = f(x) - f(0)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とおくと $g(x)$ は連続関数であって，$g(0) = 0$ かつ

$$|g(x) - g(y)| = 2\,|x - y|. \qquad \cdots\cdots ②$$

②で $y = 0$ とおくと $|g(x)| = 2\,|x|$. よって $g(x) \in \{2x, -2x\}$ を得る．

$g(x)$ は連続関数だから

(1)　$g(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$　または　(2)　$g(x) = -2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

または

(3)　$g(x) = 2\,|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$　または　(4)　$g(x) = -2\,|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

となる．

②で $y = -x$ とおくと

$$|g(x) - g(-x)| = 4\,|x|. \qquad \cdots\cdots ③$$

(3)，(4) のときは $g(x)$ は偶関数だから ③は $0 = 4\,|x|$ となり $x \fallingdotseq 0$ で成立しない．

(1)，(2) はともに①を満たす．

したがって 解は

c を定数として

- $f(x) = 2x + c \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

と

- $f(x) = -2x + c \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である．　■

問題 13　(Moldava TST 2015)

Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(mf(n)) = n + f(2015m)$$

解答

$$f(mf(n)) = n + f(2015m) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $m = 1$ とおくと

$$f(f(n)) = n + f(2015) \qquad \cdots\cdots ②$$

$f(p) = f(q) = r$ とする．①で $n = p,\, q$ とおくと

$$f(mr) = p + f(2015m),\ f(mr) = q + f(2015m).$$

$p + f(2015m) = q + f(2015m)$ から $p = q$ となるから f は単射 (injective) である．

①で n のところを $f(2015n)$ で置き換えると

$$f(mf(f(2015n))) = f(2015n) + f(2015m).$$

この式で m と n を置き換えると

$$f(nf(f(2015m))) = f(2015m) + f(2015n).$$

よって

$$f(mf(f(2015n))) = f(nf(f(2015m)))$$

を得る．f は injective だから

$$mf(f(2015n)) = nf(f(2015m)).$$

②を用いると

$$m(2015n + f(2015)) = n(2015m + f(2015))$$

から

$$(m - n)f(2015) = 0 \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

よって $f(2015) = 0$ となり $f(2015) \in \mathbb{N}$ に矛盾する．

したがって このような関数は存在しない．　■

問題 14　(Turkey TST 2015)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\left(x^2\right) + 4y^2 f(y) = (f(x-y) + y^2)(f(x+y) + f(y))$$

解答

$$f\left(x^2\right) + 4y^2 f(y) = (f(x-y) + y^2)(f(x+y) + f(y)) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

①で $y = 0$ とおくと

$$f\left(x^2\right) = f(x)(f(x) + f(0)). \qquad \cdots\cdots②$$

①で $x = 0$ とおいた

$$f(0) + 4y^2 f(y) = \left(f(-y) + y^2\right) \cdot 2f(y)$$

から

$$f(0) + 2y^2 f(y) = 2f(-y)f(y).$$

この式で $y = x$ とおくと

$$f(0) + 2x^2 f(x) = 2f(-x)f(x). \qquad \cdots\cdots③$$

③で x のところを $-x$ で置き換えると

$$f(0) + 2x^2 f(-x) = 2f(x)f(-x). \qquad \cdots\cdots④$$

③，④から

$$2x^2 f(-x) = 2x^2 f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$x \fallingdotseq 0$ ならば $f(-x) = f(x)$.

$f(-0) = f(0)$ だから

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

となり $f(x)$ は偶関数である.

②で $x = 0$ とおいた $f(0) = 2f(0)^2$ から $f(0) \in \{0,\ 1/2\}$.

②で $x = 1$ とおいた $f(1) = f(1)(f(1) + f(0))$ から $f(1) \in \{0, 1 - f(0)\}$.

よって

$f(0) = 0$ のとき $f(1) \in \{0, 1\}$，$f(0) = 1/2$ のとき $f(1) \in \{0, 1/2\}$.

③で $x = 1$ とおいた $f(0) + 2f(1) = 2f(1)f(-1)$ から $f(0) + 2f(1) = 2f(1)^2$.

$f(0)=1/2$ のとき この等式は $1/2+2f(1)=2f(1)^2$ となるが，$f(1)=0$ も $f(1)=1/2$ もこの式を満たさない．
よって $f(0)=0$ となる．したがって $f(0)=0$ かつ $f(1)\in\{0,1\}$. ②は

$$f\left(x^2\right)=f(x)^2 \qquad \cdots\cdots ②'$$

となる．③は

$$x^2 f(x)=f(x)^2 \qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ③'$$

となるから

$$f(x)\in\{0,x^2\} \qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

を得る．

(1) $\forall x$ に対して $f(x)=x^2$ の場合
これは①を満たすから解である．

(2) $f(a)\fallingdotseq a^2$ となる a が存在する場合
$f(0)=0$ だから $a\fallingdotseq 0$ である．また⑤で $x=a$ とおくと $f(a)\in\{0,a^2\}$ で $f(a)\fallingdotseq a^2$ だから $f(a)=0$ が成り立つ．
①で y のところを $-y$ で置き換えると

$$f\left(x^2\right)+4y^2f(-y)=(f(x+y)+y^2)(f(x-y)+f(-y)).$$

$f(x)$ は偶関数だから

$$f\left(x^2\right)+4y^2f(y)=\left(f(x+y)+y^2\right)(f(x-y)+f(y)). \qquad \cdots\cdots ⑥$$

①，⑥から

$$\left(f(x-y)+y^2\right)(f(x+y)+f(y))=\left(f(x+y)+y^2\right)(f(x-y)+f(y)).$$

変形すると

$$(f(x+y)-f(x-y))\left(f(y)-y^2\right)=0.$$

この式で $y=a$ とおくと $(f(x+a)-f(x-a))\left(f(a)-a^2\right)=0$.
$f(a)\fallingdotseq a^2$ だから

$$f(x+a)-f(x-a)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

を得る．x のところを $x+a$ で置き換えると

$$f(x+2a)-f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

③$'$ で x のところを $x+2a$ で置き換えると

$$(x+2a)^2 f(x+2a) = f(x+2a)^2.$$

⑦を使うと

$$(x+2a)^2 f(x) = f(x)^2.$$

③$'$ を使うと $(x+2a)^2 f(x) = x^2 f(x)$ から

$$a(x+a)f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$x \fallingdotseq -a$ ならば $f(x)=0$ すなわち

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \fallingdotseq -a.$$

$f(x)$ は偶関数で $f(a)=0$ より $f(-a)=f(a)=0$ だから

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である．

以上のことから解は

- $f(x) = x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

と

- $f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 15　(UASJMO 2015)

Find all functions $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ such that

$$f(x)+f(t)=f(y)+f(z)$$

for all rational numbers $x<y<z<t$ that form arithmetic progression . ($\mathbb{Q}$ is the set of all rational numbers.)

解答

$$f(x)+f(t)=f(y)+f(z) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

$d>0$ として x,y,z,t のところに $a,a+d,a+2d,a+3d$ を代入すると

$$f(a)+f(a+3d)=f(a+d)+f(a+2d). \qquad \cdots\cdots②$$

②で a のところを $a-d$ で置き換えると

$$f(a-d)+f(a+2d)=f(a)+f(a+d). \qquad \cdots\cdots③$$

②+③から

$$f(a-d)+f(a+3d)=2f(a+d).$$

$\forall u,v\in\mathbb{Q},u>v$ に対して $a=\dfrac{u+3v}{4}$, $d=\dfrac{u-v}{4}(>0)$ とおくと
$a+3d=u,a-d=v$ で，③は

$$f(u)+f(v)=2f\left(\frac{u+v}{2}\right) \qquad \forall u,v\,(u>v) \qquad \cdots\cdots④$$

と書き直せる．④は $u=v$ のとき成り立つ.

$u<v$ のときは ④から $f(v)+f(u)=2f\left(\dfrac{v+u}{2}\right)$ すなわち

$$f(u)+f(v)=2f\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

が成り立つことがわかる．したがって

$$f(u)+f(v)=2f\left(\frac{u+v}{2}\right) \qquad \forall u,v\in\mathbb{Q}. \qquad \cdots\cdots⑤$$

⑤で u のところを $2u$ で置き換え，$v=0$ とおくと

$$f(2u)+f(0)=2f\left(u\right). \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑤で u, v のところをそれぞれ $2u, 2v$ で置き換えると

$$f(2u) + f(2v) = 2f\left(u+v\right).$$

⑥を用いると

$$2f(u) - f(0) + 2f(v) - f(0) = 2f(u+v)$$

から

$$f(u+v) - f(0) = f(u) - f(0) + f(v) - f(0).$$

$g(x) = f(x) - f(0)$ とおくと

$$g(u+v) = g(u) + g(v) \qquad \forall u, v \in \mathbb{Q} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

が成り立つ．

数学的帰納法で

$\forall m \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{Q}$ に対して $g(mu) = mg(u)$ が示せる．
特に $\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $g(p) = pg(1)$ が成り立つ．

$\forall x \in \mathbb{Q}$ に対して $x = \dfrac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ とおけるから

$$g(p) = g\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = g(qx) = qg(x)$$

が成り立つ．よって

$$g(x) = \frac{1}{q}g(p) = \frac{p}{q}g(1) = xg(1)$$

より $g(x) = ax$ とおけるから $f(x) = ax + b$ でこれは①を満たす．

よって 解は

$a, b \in \mathbb{Q}$ を定数として

- $f(x) = ax + b \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$

である． ■

問題 16　(Baltic Way 2014)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x, y\in\mathbb{R}$

$$f(f(y))+f(x-y)=f(xf(y)-x)$$

解答

$$f(f(y))+f(x-y)=f(xf(y)-x) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $y=0$ とおくと

$$f(f(0))+f(x)=f(xf(0)-x). \qquad \cdots\cdots ②$$

②で $x=0$ とおいた $f(f(0))+f(0)=f(0)$ から $f(f(0))=0$.
このことを使うと②は次のように書き直せる．

$$f(x)=f(xf(0)-x). \qquad \cdots\cdots ②'$$

$f(0)=1$ ならば ②$'$ は

$$f(x)=f(xf(0)-x)=f(x-x)=f(0)=1$$

となるが，これは①を満たさない．
よって $f(0)\neq 1$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)\neq 1$ となることを示す．
$f(a)=1$ となる a があると仮定する．
①で $y=a$ とおいた

$$f(f(a))+f(x-a)=f(xf(a)-x)$$

から

$$f(1)+f(x-a)=f(x-x).$$

よって $f(x-a)=f(0)-f(1)$ となるから $f(x)$ は定数関数で，$f(x)=k$ を①に代入すると $k=0$ を得るから

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは $f(a)=1$ に矛盾する．
したがって $\forall x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)\neq 1$ となる．

$b=f(0)$ とおいた $f(f(0))=0$ から $f(b)=0$.
①で $x=0, y=b$ とおいた $f(f(b))+f(-b)=f(0)$ から $f(0)+f(-b)=f(0)$.

よって $f(-b)=0$.

①で $y=b$ とおいた $f(f(b))+f(x-b)=f(xf(b)-x)$ から $f(0)+f(x-b)=f(-x)$.

よって $b+f(x-b)=f(-x)$.

この式で $x=b$ とおいた $b+f(0)=f(-b)$ から $b+b=0$.

よって $b=0$ となり $f(0)=0$.

②$'$ から

$$f(-x)=f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

すなわち $f(x)$ は偶関数である.

$\forall x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)=0$ であることを示す.

$f(c)\fallingdotseq 0$ である $c\,(\fallingdotseq 0)$ があると仮定する.

$f(x)$ は偶関数だから

$$① \iff f(f(y))+f(x-y)=f(x-xf(y)).$$

$f(f(y))+f(x-y)=f(x-xf(y))$ で $x=\dfrac{c}{f(c)}, y=c$ とおくと $x-y=x-xf(y)$ を満たすから $f(f(c))=0$ を得る.

①で $y=c$ とおいた $f(f(c))+f(x-c)=f(xf(c)-x)$ から $f(x-c)=f(-x)$.

$f(x)$ は偶関数だから $f(x-c)=f(x)$.

この式で $x=c$ とおくと $f(c)=f(0)=0$. これは $f(c)\fallingdotseq 0$ に矛盾する.

したがって

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である.

以上のことから 解は

- $f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である. ■

問題 17　(Albania TST 2014)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$

$$f(x)f(y)=f(x+y)+xy$$

解答

$$f(x)f(y)=f(x+y)+xy \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

①で $x=y=0$ とおいた $f(0)^2=f(0)$ から $f(0)\in\{0,1\}$.

$f(0)=0$ ならば①で $y=0$ とおくと $f(x)f(0)=f(x)$ から

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは ①を満たさない.

よって $f(0)=1$.

①で $y=-x$ とおくと $f(x)f(-x)=f(0)-x^2$ から

$$f(x)f(-x)=1-x^2. \qquad \cdots\cdots①$$

②で $x=1$ とおくと $f(1)f(-1)=0$.

(1) $f(1)=0$ の場合

①で $y=1$ とおいた $f(x)f(1)=f(x+1)+x$ から $0=f(x+1)+x$.

よって $f(x+1)=-x=-(x+1)+1$ から

$$f(x)=1-x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である.

(2) $f(-1)=0$ の場合

①で $y=-1$ とおいた $f(x)f(-1)=f(x-1)-x$ から $0=f(x-1)-x$.

よって $f(x-1)=x=(x-1)+1$ から

$$f(x)=1+x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である.

以上のことから解は

- $f(x)=1-x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

と

- $f(x)=1+x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である. ■

問題 18　(Bulgaria 2014)

Find all functions $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that for all $x, y \in \mathbb{Q}^+$

$$f(xy) = f(x+y)(f(x)+f(y))$$

解 1

$$f(xy) = f(x+y)(f(x)+f(y)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

$a = f(1)$ とおく．

①で $x = y = 1$ とおくと $f(1) = f(2) \cdot 2f(1)$ から $f(2) = \dfrac{1}{2}$.

①で $x = 2, y = 1$ とおいた $f(2) = f(3) \cdot (f(2) + f(1))$ から

$$\frac{1}{2} = f(3) \cdot \left(\frac{1}{2} + a\right) \qquad f(3) = \frac{1}{2a+1}.$$

①で $x = 3, y = 1$ とおいた $f(3) = f(4) \cdot (f(3) + f(1))$ から

$$\frac{1}{2a+1} = f(4) \cdot \left(\frac{1}{2a+1} + a\right) \qquad f(4) = \frac{1}{2a^2+a+1}.$$

①で $x = 4, y = 1$ とおいた $f(4) = f(5) \cdot (f(4) + f(1))$ から

$$\frac{1}{2a^2+a+1} = f(5) \cdot \left(\frac{1}{2a^2+a+1} + a\right) \qquad f(5) = \frac{1}{2a^3+a^2+a+1}.$$

①で $x = 2, y = 3$ とおくと $f(6) = f(5) \cdot (f(2) + f(3))$.

①で $x = 5, y = 1$ とおくと $f(5) = f(6) \cdot (f(5) + f(1))$.

この 2 つの式から $f(6)$ を消去した $f(5) = f(5) \cdot (f(2) + f(3)) \cdot (f(5) + f(1))$ より

$$(f(2) + f(3)) \cdot (f(5) + f(1)) = 1,$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2a+1}\right)\left(\frac{1}{2a^3+a^2+a+1} + a\right) = 1,$$

$$\frac{2a+3}{2(2a+1)} \cdot \frac{2a^4+a^3+a^2+a+1}{2a^3+a^2+a+1} = 1,$$

$$(2a^4+a^3+a^2+a+1)(2a+3) = 2(2a^3+a^2+a+1)(2a+1),$$

$$4a^5+8a^4+5a^3+5a^2+5a+3 = 8a^4+8a^3+6a^2+6a+2,$$

$$4a^5-3a^3-a^2-a+1 = 0 \qquad (a-1)(a+1)(2a-1)(2a^2+a+1) = 0.$$

$a > 0$ だから $a \in \left\{1, \dfrac{1}{2}\right\}$.

(1) $a=1$ の場合

①で $x=n, y=1$ とおくと $f(n)=f(n+1)\left(f(n)+1\right)$.

両辺を $f(n)f(n+1)$ で割ると

$$\frac{1}{f(n+1)}=\frac{1}{f(n)}+1.$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{f(n)}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{f(1)}=1$，公差 1 の等差数列で

$$\frac{1}{f(n)}=1+(n-1)\cdot 1=n$$

から

$$f(n)=\frac{1}{n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}. \qquad \cdots\cdots ②$$

①で x のところを $x+n$ で置き換え，$y=1$ とおくと

$$f(x+n)=f(x+n+1)\left(f(x+n)+1\right).$$

両辺を $f(x+n)f(x+n+1)$ で割ると

$$\frac{1}{f(x+n+1)}=\frac{1}{f(x+n)}+1.$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{f(x+n)}\right\}_{n\geqq 0}$ は初項 $\dfrac{1}{f(x)}$，公差 1 の等差数列で

$$\frac{1}{f(x+n)}=\frac{1}{f(x)}+n\cdot 1$$

から

$$f(x+n)=\frac{f(x)}{nf(x)+1} \qquad \forall n\in\mathbb{Z}_{n\geqq 0}. \qquad \cdots\cdots ③$$

①で $y=n$ とおいた

$$f(nx)=f(x+n)\left(f(x)+f(n)\right)=\frac{f(x)}{nf(x)+1}\cdot\left(f(x)+\frac{1}{n}\right)=\frac{f(x)}{n}$$

から

$$f(nx)=\frac{f(x)}{n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}. \qquad \cdots\cdots ④$$

$\forall x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}^+$ に対して $f(p)=f\left(q\cdot\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{f\left(\dfrac{p}{q}\right)}{q}=\dfrac{f(x)}{q}$ が成り立つから

$$f(x)=qf(p)=\frac{q}{p}=\frac{1}{x}.$$

よって

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad \forall n\in\mathbb{Q}^{+}.$$

これは①を満たすから解である．

(2) $a=\dfrac{1}{2}$ の場合

①で $y=1$ とおくと

$$f(x)=f(x+1)\left(f(x)+\frac{1}{2}\right) \qquad f(x+1)=\frac{2f(x)}{2f(x)+1}.$$

この式で x のところを $x+1$ で置き換えると

$$f(x+2)=\frac{2f(x+1)}{2f(x+1)+1}=\frac{2\cdot\dfrac{2f(x)}{2f(x)+1}}{2\cdot\dfrac{2f(x)}{2f(x)+1}+1}=\frac{4f(x)}{6f(x)+1}.$$

数学的帰納法で

$$f(x+n)=\frac{2^n f(x)}{2(2^n-1)f(x)+1} \qquad \cdots\cdots⑤$$

が示せる．

⑤より

$$\lim_{n\to\infty}f(x+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n f(x)}{2(2^n-1)f(x)+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)f(x)+\frac{1}{2^n}}=\frac{f(x)}{2f(x)}=\frac{1}{2}.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}f(x+n)=\frac{1}{2} \qquad \forall x\in\mathbb{Q}^{+}.$$

この式で $x=1$ とおいた $\lim\limits_{n\to\infty}f(1+n)=\dfrac{1}{2}$ から

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\frac{1}{2}.$$

①で $y=n$ とおいた $f(nx)=f(x+n)\left(f(x)+f(n)\right)$ から

$$\lim_{n\to\infty}f(nx)=\lim_{n\to\infty}f(x+n)\left(f(x)+f(n)\right)=\frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{1}{2}\right).$$

この式で x のところを mx で置き換えると

$$\lim_{n\to\infty}f(mnx)=\frac{1}{2}\left(f(mx)+\frac{1}{2}\right).$$

ところで $k=mn$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} f(mnx) = \lim_{k\to\infty} f(kx) = \frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つので

$$\frac{1}{2}\left(f(mx)+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{1}{2}\right).$$

よって

$$f(mx) = f(x) \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

再び $m \to \infty$ とすると

$$\frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{1}{2}\right) = f(x)$$

から

$$f(x) = \frac{1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

これは①を満たすから解である.

以上のことから解は

- $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+$

と

- $f(x) = \dfrac{1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+$

である. ■

解 2

$$f(xy) = f(x+y)(f(x)+f(y)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく.

$a=f(1), t=f(x)$ とおく.

①で $y=1$ とおくと

$$f(x+1) = \frac{f(x)}{f(x)+a} = \frac{t}{t+a}. \qquad \cdots\cdots ②$$

②で $x=1$ とおくと $f(2) = \dfrac{f(1)}{f(1)+a} = \dfrac{a}{a+a} = \dfrac{1}{2}$.

②を用いると

$$f(x+2) = \frac{f(x+1)}{f(x+1)+a} = \frac{\dfrac{f(x)}{f(x)+a}}{\dfrac{f(x)}{f(x)+a}+a} = \frac{f(x)}{(1+a)f(x)+a^2} = \frac{t}{(1+a)t+a^2}.$$

数学的帰納法で

$$f(x+n)=\frac{f(x)}{(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})f(x)+a^n} \qquad \cdots\cdots③$$

が示せる．

①で $y=2$ とおくと

$$\begin{aligned}
f(2x)&=f(x+2)\left(f(x)+f(2)\right)\\
&=\frac{f(x)}{(1+a)f(x)+a^2}\cdot\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{f(x)\left(2f(x)+1\right)}{2\left((1+a)f(x)+a^2\right)}\\
&=\frac{t(2t+1)}{2\left((1+a)t+a^2\right)}.
\end{aligned}$$

これらの等式を用いて $f(2x+2)$ を 2 通りに表す．

$$\begin{aligned}
f(2x+2)&=f(2(x+1))\\
&=\frac{f(x+1)\left(2f(x+1)+1\right)}{2\left((1+a)f(x+1)+a^2\right)}\\
&=\frac{\dfrac{t}{t+a}\left(2\cdot\dfrac{t}{t+a}+1\right)}{2\left((1+a)\cdot\dfrac{t}{t+a}+a^2\right)}\\
&=\frac{t(3t+a)}{2(t+a)\left((1+a+a^2)t+a^3\right)}\\
f(2x+2)&=\frac{f(2x)}{(1+a)f(2x)+a^2}\\
&=\frac{\dfrac{t(2t+1)}{2\left((1+a)t+a^2\right)}}{(1+a)\cdot\dfrac{t(2t+1)}{2\left((1+a)t+a^2\right)}+a^2}\\
&=\frac{t(2t+1)}{2(1+a)t^2+(1+a+2a^2+2a^3)t+2a^4}
\end{aligned}$$

より

$$\frac{t(3t+a)}{2(t+a)\left((1+a+a^2)t+a^3\right)}=\frac{t(2t+1)}{2(1+a)t^2+(1+a+2a^2+2a^3)t+2a^4}$$

$$(3t+a)\left((2(1+a)t^2+(1+a+2a^2+2a^3)t+2a^4\right)=2(t+a)(2t+1)\left((1+a+a^2)t+a^3\right). \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

$f(2)=\dfrac{1}{2}$ より $x=2$ のとき $t=\dfrac{1}{2}$ だから

$$\left(\frac{3}{2}+a\right)\left(\frac{1+a}{2}+\frac{1+a+2a^2+2a^3}{2}+2a^4\right)=2\left(\frac{1}{2}+a\right)\cdot 2\cdot\left(\frac{1+a+a^2}{2}+a^3\right),$$

$$(2a^4+a^3+a^2+a+1)(2a+3)=2(2a^3+a^2+a+1)(2a+1),$$

$$4a^5+8a^4+5a^3+5a^2+5a+3=8a^4+8a^3+6a^2+6a+2,$$

$$4a^5-3a^3-a^2-a+1=0 \qquad (a-1)(a+1)(2a-1)(2a^2+a+1)=0.$$

$a>0$ だから $a\in\left\{1,\dfrac{1}{2}\right\}$.

(1) $a=\dfrac{1}{2}$ の場合

(★) に $a=\dfrac{1}{2}$ を代入する.

$$\left(3t+\frac{1}{2}\right)\left(3t^2+\frac{9}{4}t+\frac{1}{8}\right)=2\left(t+\frac{1}{2}\right)(2t+1)\left(\frac{7}{4}t+\frac{1}{8}\right)$$

$$(6t+1)(24t^2+18t+1)=2(2t+1)^2(14t+1)$$

$$32t^3+12t^2-12t-1=0 \qquad (2t-1)(16t^2+14t+1)=0.$$

$t>0$ だから $t=1/2$.

よって

$$f(x)=\frac{1}{2} \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である.

(2) $a=1$ の場合

(★) に $a=1$ を代入すると成り立つ.

③より

$$f(x+n)=\frac{f(x)}{nf(x)+1} \qquad \forall n\in\mathbb{Z}_{n\geqq 0}. \qquad \cdots\cdots④$$

①で $y=n$ とおいた

$$f(nx)=f(x+n)\left(f(x)+f(n)\right)=\frac{f(x)}{nf(x)+1}\cdot\left(f(x)+\frac{1}{n}\right)=\frac{f(x)}{n}$$

から

$$f(nx)=\frac{f(x)}{n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}. \qquad \cdots\cdots⑤$$

⑤で $x=1$ とおくと

$$f(n) = \frac{f(1)}{n} = \frac{1}{n}.$$

よって

$$f(n) = \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\forall x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ に対して

$$f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = \frac{f\left(\dfrac{p}{q}\right)}{q} = \frac{f(x)}{q}$$

が成り立つから

$$f(x) = qf(p) = \frac{q}{p} = \frac{1}{x}.$$

よって

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

これは①を満たすから解である.

以上のことから解は

- $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+$

と

- $f(x) = \dfrac{1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+$

である. ■

問題 19　(European Girls' Mathematical Olympiad 2014)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$

$$f\left(y^2+2xf(y)+f(x)^2\right)=(y+f(x))(x+f(y))$$

解答

$$f\left(y^2+2xf(y)+f(x)^2\right)=(y+f(x))(x+f(y)) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $x=y=0$ とおくと $f(f(0)^2)=f(0)^2$.

$a=f(0)$ とおくと $f(a^2)=a^2$.

①で $y=-f(x)$ とおくと

$$f\left(2f(x)^2+2xf\left(-f(x)\right)\right)=0. \qquad \cdots\cdots②$$

この式で $x=0$ とおくと $f(2a^2)=0$.

①で x と y を入れかえると

$$f\left(x^2+2yf(x)+f(y)^2\right)=(x+f(y))(y+f(x)). \qquad \cdots\cdots③$$

①，③より

$$f\left(y^2+2xf(y)+f(x)^2\right)=f\left(x^2+2yf(x)+f(y)^2\right). \qquad \cdots\cdots④$$

この式で $x=0$ とおくと

$$f\left(y^2+a^2\right)=f\left(2ay+f(y)^2\right). \qquad \cdots\cdots⑤$$

$f(2a^2)=0$ より $f(x)=0$ となる $x\in\mathbb{R}$ があるから $f(c)=0$ とする．

②で $x=c$ とおくと $f(2ac)=0$.

ここで $c\fallingdotseq 0$ と $c=0$ の場合に分けて考える．

(i) $c\fallingdotseq 0$ の場合

①で $y=c$ とおくと

$$f\left(c^2+f(x)^2\right)=(c+f(x))\,x. \qquad \cdots\cdots⑥$$

この式で $x=c$ とおくと $f(c^2)=c^2$.

⑥で $x=2a^2$ とおくと $f(c^2)=2a^2c$.

$f(c^2)=c^2$ を使うと $2a^2c=c^2$ から $c=2a^2$ を得る．よって

$$f(x)=0\Longleftrightarrow x=2a^2.$$

⑥で $x=2ac$ とおくと $f(c^2)=2ac^2$.
$f(c^2)=c^2$ を使うと $2ac^2=c^2$ から $a=1/2, c=1/2$ を得る．
よって

$$f(0)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

⑤は

$$f\left(y^2+\frac{1}{4}\right)=f\left(y+f(y)^2\right). \qquad \cdots\cdots ⑤'$$

⑥は

$$f\left(\frac{1}{4}+f(x)^2\right)=\left(\frac{1}{2}+f(x)\right)x \qquad \cdots\cdots ⑥'$$

となる．

次に f が単射 (injective) であることを示す．
$f(p)=f(q)=r$ とする．
⑥$'$ で $x=p$ とおいた $f\left(\frac{1}{4}+r^2\right)=\left(r+\frac{1}{2}\right)p,\ f\left(\frac{1}{4}+r^2\right)=\left(r+\frac{1}{2}\right)q$
から $\left(r+\frac{1}{2}\right)p=\left(r+\frac{1}{2}\right)q$.
よって $r=-\frac{1}{2}$ または $p=q$ となるから

$$f(p)=f(q) \Longrightarrow f(p)=f(q)=-\frac{1}{2} \text{ または } p=q \qquad \cdots\cdots (*)$$

$r=-\frac{1}{2}$ とすると $f(p)=f(q)=-\frac{1}{2}$.
①で $x=\frac{1}{2}$ とおくと

$$f\left(y^2+f(y)\right)=y\left(\frac{1}{2}+f(y)\right). \qquad \cdots\cdots ⑦$$

この式で $y=p$ とおくと $f\left(p^2-\frac{1}{2}\right)=p\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$ から $p^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
$p^2=1$ から $p=\pm 1$ を得る．同様にして $q=\pm 1$.
$p=-1$ すなわち $f(-1)=-\frac{1}{2}$ とする．
⑦で $y=-1$ とおくと $f\left(\frac{5}{4}\right)=\left(-1+\frac{1}{2}\right)f(-1)=\frac{1}{4}$. $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$ であったから
$f\left(\frac{5}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)$ なのに $f\left(\frac{5}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\fallingdotseq-\frac{1}{2}$ かつ $\frac{5}{4}\fallingdotseq\frac{1}{4}$ で $(*)$ に矛盾する．よって $p=1$ でなければならない．同様にして $q=1$ なので $p=q$ となる．

したがって f は単射 (injective) である．

⑤$'$ から

$$f\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=f\left(x+f(x)^2\right).$$

f は単射 (injective) だから $x^2+\dfrac{1}{4}=x+f(x)^2$ より $f(x)^2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

よって $f(x)\in\left\{x-\dfrac{1}{2},\ -x+\dfrac{1}{2}\right\}$.

また④から

$$f\left(y^2+2xf(y)+f(x)^2\right)=f\left(x^2+2yf(x)+f(y)^2\right).$$

f は単射 (injective) だから $y^2+2xf(y)+f(x)^2=x^2+2yf(x)+f(y)^2$.

この式で $y=\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{4}+f(x)^2=x^2+f(x)\qquad f(x)^2-f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\left(f(x)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\left(f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)=0.$$

よって $f(x)\in\left\{x+\dfrac{1}{2},\ -x+\dfrac{1}{2}\right\}$.

ところで $f(x)\in\left\{x-\dfrac{1}{2},\ -x+\dfrac{1}{2}\right\}$ であったから $f(x)=-x+\dfrac{1}{2}$ を得る．

よって

$$f(x)=-x+\frac{1}{2}\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である．

(ii) $c=0$ の場合 $f(0)=0$

①で $y=0$ とおくと

$$f\left(f(x)^2\right)=xf(x).\qquad\cdots\cdots⑧$$

①で $x=0$ とおいた $f\left(y^2\right)=yf(y)$ から

$$f\left(x^2\right)=xf(x).\qquad\cdots\cdots⑨$$

$f(0)=0$ より $f(x)=0$ となる x があるから，$f(d)=0$ とすると⑨より $f(d^2)=df(d)=0$.

①で $x=y=d$ とおいた

$$f\left(d^2+2df(d)+f(d)^2\right)=(d+f(d))(d+f(d))\qquad f(d^2)=d^2\qquad 0=d^2$$

から $d=0$ を得る.
したがって

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=0. \qquad \cdots\cdots ⑩$$

次に f が単射 (injective) であることを示す.
$f(p)=f(q)=r$ とする.
⑧で $x=p,q$ とおくと $f(r^2)=pr$, $f(r^2)=qr$ から $pr=qr$.
よって $p=q$ または $r=0$.
$r=0$ ならば $f(p)=0$ かつ $f(q)=0$ だから ⑩を使うと $p=0$ かつ $q=0$ すなわち $p=q$ となる.
したがって f は単射 (injective) である.
⑧, ⑨から $f\left(f(x)^2\right)=f\left(x^2\right)$.
f は単射 (injective) だから $f(x)^2=x^2$.
よって $f(x)\in\{x,-x\}$.
$f(x)^2=x^2$ を使って①を書き直すと

$$f\left(y^2+2xf(y)+x^2\right)=(y+f(x))(x+f(y)). \qquad \cdots\cdots ①'$$

①′ で x と y を入れかえると

$$f\left(x^2+2yf(x)+y^2\right)=(x+f(y))(y+f(x)). \qquad \cdots\cdots ⑪$$

①′, ⑪から $f\left(y^2+2xf(y)+x^2\right)=f\left(x^2+2yf(x)+y^2\right)$.
f は単射 (injective) だから $x^2+2yf(x)+y^2=x^2+2yf(x)+y^2$ すなわち

$$yf(x)=xf(y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

が成り立つ. この式で $y=1$ とおくと $f(x)=f(1)x$ を得る.
$f(x)\in\{x,-x\}$ だから
$f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
と
$f(x)=-x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
を得るが, これらは①を満たすから解である.

以上のことから次の 3 つの解をもつ.

- $f(x)=\dfrac{1}{2}-x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$,
- $f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$,
- $f(x)=-x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$. ■

問題 20　(Romanian District Olympiad 2014)

Find all functions $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ such that for all $m,n\in\mathbb{N}$

$$f\left(m+n\right)-1\,|\,f(m)+f(n)$$

and $n^2-f(n)$ is a square.

解答

$$f\left(m+n\right)-1\,|\,f(m)+f(n) \qquad \cdots\cdots①$$

$$n^2-f(n)\text{ は平方数である．} \qquad \cdots\cdots②$$

とおく．

②で $n=1$ のときを考えると $1-f(1)=a^2, a\in\mathbb{Z}$ とおける．よって $f(1)=1-a^2\in\mathbb{N}$ だから $a=0$ で $f(1)=1$ を得る．

②でから $n-f(n)=g(n)^2$, $g(n)\in[0,m-1]$ とおける．

①で $m=1$ とおくと $f\left(1+n\right)-1\,|\,f(1)+f(n)=1+f(n)$ から

$$1+f(n)\geqq f\left(1+n\right)-1.$$

この不等式を g で書き直すと

$$n^2-g(n)^2+1\geqq(n+1)^2-g(n+1)^2-1$$

$$g(n+1)^2\geqq g(n)^2+2n-1>g(n)^2.$$

ゆえに

$$g(n+1)>g(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N}. \qquad \cdots\cdots③$$

$g(2)\in[0,2-1]$ で $g(2)>g(1)=0$ だから $g(2)=1$.

$g(3)\in[0,3-1]$ で $g(3)>g(2)=1$ だから $g(3)=2$.

数学的帰納法で

$$g(n)=n-1 \qquad \forall n\in\mathbb{N} \qquad \cdots\cdots④$$

が成り立つことを示す．

(i) $n=1$ のときは上で示した．

(ii) $n=k(\geqq 1)$ のとき成り立つと仮定すると $g(k)=k-1$.

$g(k+1)\in[0,k]$ で $g(k+1)>g(k)=k-1$ だから $g(k+1)=k$. となり $n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より すべての自然数 n に対して ③ は成り立つ．

よって $f(n)=n^2-g(n)^2=n^2-(n-1)^2=2n-1$ から

$$f(n)=2n-1 \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

このとき $f(m+n)-1=2(m+n)-2$ は $f(m)+f(n)=2m-1+2n-1=2(m+n)-2$ を割り切るから ① は成り立つ．

また $n^2-f(n)=n^2-(2n-1)=(n-1)^2$ は平方数なので②は成り立つ．

したがって，解は

- $f(n)=2n-1 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

である． ■

問題 21　(Romanian District Olympiad 2014)

Find all functions $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ such that for all $x,y\in\mathbb{Q}$

$$f(x+3f(y))=f(x)+f(y)+2y$$

解答

$$f(x+3f(y))=f(x)+f(y)+2y \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく.

f は単射 (injective) であることを示す.

$f(p)=f(q)=r$ とする.

①で $y=p,q$ とおいた

$$f(x+3r)=f(x)+r+2p,\ f(x+3r)=f(x)+r+2q$$

から $f(x)+r+2p=f(x)+r+2q$ すなわち $p=q$ を得る.

①で $y=0$ とおくと $f(x+3f(0))=f(x)+f(0)$.

この式で $x=-3f(0)$ とおいた $f(0)=f(-3f(0))+f(0)$ から $f(-3f(0))=0$.

よって $f(a)=0$ となる $a\in\mathbb{Q}$ が存在する.

①で $y=a$ とおくと

$$f(x+3f(a))=f(x)+f(a)+2a \qquad f(x)=f(x)+2a.$$

ゆえに $a=0$.

よって

$$f(x)=0\Longleftrightarrow x=0$$

がいえた.

f は全射 (surjective) であることを示す.

①で x のところを $x-3f(x)$，y のところを x で置き換えると

$$f\left(x-3f(x)+3f(x)\right)=f\left(x-3f(x)\right)+f(x)+2x$$

から

$$f\left(x+3f(x)\right)=-2x.$$

$\forall t\in\mathbb{Q}$ に対して $x=-\dfrac{t}{2}$ とおくと $f\left(x+3f(x)\right)=t$.

よって f は全射 (surjective) である.
①で $x=0$ とおくと $f(3f(y))=f(y)+2y$.
これを使うと①は

$$f(x+3f(y))=f(x)+f(3f(y)) \qquad \cdots\cdots ①'$$

と書き直せる.

$\forall u,v\in\mathbb{Q}$ に対して $x=u, y=f^{-1}\left(\dfrac{v}{3}\right)$ とおくと $x+3f(y)=u+v$, $3f(y)=v$ で

$$f(u+v)=f(u)+f(v).$$

コーシーの関数方程式を満たすので $f(x)=kx$ となるから①に代入して

$$a(x+3ay)=ax+ay+2y \qquad 3a^2y=(a+2)y,$$

$$3a^2=a+2 \qquad (3a+2)(a-1)=0.$$

よって $a\in\left\{1,-\dfrac{2}{3}\right\}$ となるから
$f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
と
$f(x)=-\dfrac{2}{3}x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
を得る.

したがって 解は
- $f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

と
- $f(x)=-\dfrac{2}{3}x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である. ■

問題 22　(ELMO 2014)

Find all triples f, g, h of injective functions from the set of real numbers to itself satisfying

$$\begin{aligned} f(x+f(y)) &= g(x)+h(y) \\ g(x+g(y)) &= h(x)+f(y) \\ h(x+h(y)) &= f(x)+g(y) \end{aligned}$$

for all real numbers x and y. (We say a function F is injective if $F(a) \neqq F(b)$ for any distinct real numbers a and b .)

解答

$$f(x+f(y)) = g(x)+h(y) \qquad \cdots\cdots①$$
$$g(x+g(y)) = h(x)+f(y) \qquad \cdots\cdots②$$
$$h(x+h(y)) = f(x)+g(y) \qquad \cdots\cdots③$$

とおく．

①で x のところを $x+g(z)$ で置き換えた

$$\begin{aligned} f(x+g(z)+f(y)) &= g(x+g(z))+h(y) \\ &\underset{②}{=} h(x)+f(z)+h(y) \end{aligned}$$

から

$$f(x+g(z)+f(y)) = h(x)+h(y)+f(z). \qquad \cdots\cdots④$$

④で x と y を入れかえると

$$f(y+g(z)+f(x)) = h(y)+h(x)+f(z). \qquad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤から

$$f(x+g(z)+f(y)) = f(y+g(z)+f(x)).$$

f は単射 (injective) だから $x+g(z)+f(y) = y+g(z)+f(x)$ すなわち

$$f(x)-x = f(y)-y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．この式で $y=0$ とおくと $f(x)=x+f(0)$.

$c_1 = f(0)$ とおくと $f(x)=x+c_1$ となる．

同様にして $g(x) = x + c_2$, $h(x) = x + c_3$ を得るから，これらを①，②，③に代入すると

$$
\begin{aligned}
(x + y + c_1) + c_1 &= (x + c_2) + (y + c_3), \\
(x + y + c_2) + c_2 &= (x + c_3) + (y + c_1), \\
(x + y + c_3) + c_3 &= (x + c_1) + (y + c_2).
\end{aligned}
$$

よって

$$2c_1 = c_2 + c_3,\ 2c_2 = c_3 + c_1,\ 2c_3 = c_1 + c_2$$

より $c_1 = c_2 = c_3$ が分かるので，求める (f, g, h) は

c を定数として

- $f(x) = x + c,\ g(x) = x + c,\ h(x) = x + c \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 23 (ELMO 2014 Shortlist)

Let $\mathbb{R}^*$ denote th set of nonzero reals. Find all functions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}^*$ with $x^2 + y \fallingdotseq 0$

$$f\left(x^2+y\right)+1=f\left(x^2+1\right)+\frac{f(xy)}{f(x)}$$

解答

$$f\left(x^2+y\right)+1=f\left(x^2+1\right)+\frac{f(xy)}{f(x)} \qquad \cdots\cdots ①$$

①で $x=-1$ とおくと

$$f(1+y)+1=f(2)+\frac{f(-y)}{f(-1)} \qquad \cdots\cdots ②$$

①で $x=1$ とおくと

$$f(1+y)+1=f(2)+\frac{f(y)}{f(1)} \qquad \cdots\cdots ③$$

③，④から

$$\frac{f(-y)}{f(-1)}=\frac{f(y)}{f(1)}.$$

よって

$$f(-y)=\frac{f(-1)}{f(1)}f(y). \qquad \cdots\cdots ④$$

④で y のところを $-y$ で置き換えると

$$f(y)=\frac{f(-1)}{f(1)}f(-y). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④ × ⑤ から $f(-1)^2=f(1)^2$．よって

$$f(-1)\in\{f(1),-f(1)\}.$$

(i) $f(-1)=f(1)$ の場合

④から

$$f(-y)=f(y). \qquad \cdots\cdots ④'$$

①で y のところを $-y$ で置き換え，②$'$ を用いると

$$f\left(x^2-y\right)+1=f\left(x^2+1\right)+\frac{f(-xy)}{f(x)}=f\left(x^2+1\right)+\frac{f(xy)}{f(x)}.$$

この式と①を比較して $f\left(x^2+y\right)=f\left(x^2-y\right)$.
$y=x^2-1$ とおくと，$x \fallingdotseq 0, \pm 1, 2x^2 \fallingdotseq 1$ のとき $f(2x^2-1)=f(1)$.
この式は $x=0, \pm 1$ のときも成り立つから

$$f(2x^2-1)=f(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ 2x^2-1 \fallingdotseq 0.$$

$t=2x^2-1$ とおくと

$$f(t)=f(1) \qquad \forall t \in (0, \infty)$$

が成り立つ.
④$'$ より

$$f(t)=f(1) \qquad \forall t \in (-\infty, 0)$$

が成り立つから

$$f(x)=f(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

$f(1)=c$ とおくと $f(x)=c$ でこれは①を満たすから解である.

(ii) $f(-1)=-f(1)$ の場合
④から

$$f(-y)=-f(y). \qquad \cdots\cdots④''$$

$f(x+1)=f(x)+1$ と $f(2x)=2f(x)$ が成り立つことを示す.
③より

$$f\left(x+1\right)=\frac{f(x)}{f(1)}+f\left(2\right)-1. \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑥で x のところを $x+1$ で置き換えると

$$\begin{aligned} f\left(x+2\right) &= \frac{1}{f(1)}\left(\frac{f(x)}{f(1)}+f\left(2\right)-1\right)+f\left(2\right)-1 \\ &= \frac{f(x)}{f(1)^2}+\left(\frac{1}{f(1)}+1\right)(f\left(2\right)-1). \end{aligned}$$

この式で x のところを x^2-1 で置き換えると

$$f(x^2+1)=\frac{f(x^2-1)}{f(1)^2}+\frac{f(2)-1}{f(1)}. \qquad \cdots\cdots⑦$$

①で $y=-1$ とおくと

$$f(x^2-1)+1=f(x^2+1)+\frac{f(-x)}{f(x)}=f(x^2+1)+\frac{-f(x)}{f(x)}=f(x^2+1)-1.$$

よって

$$f(x^2+1)=f(x^2-1)+2. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑧を⑦に代入すると

$$f(x^2-1)+2=\frac{f(x^2-1)}{f(1)^2}+\frac{f(2)-1}{f(1)}.$$

$\dfrac{1}{f(1)^2}\fallingdotseq 1$ ならば $f(x^2-1)$ は定数関数となり，

$$f(t)=c \qquad \forall t\in(0,\infty)$$

が成り立つ．

④$''$ より

$$f(t)=-c \qquad \forall t\in(-\infty,0)$$

が成り立つ．

①で $x>0, y<-x^2$ ととると

$$f\left(x^2+y\right)+1=f\left(x^2+1\right)+\frac{f(xy)}{f(x)},$$

$$(-c)+1=c+\frac{-c}{c} \qquad c=1.$$

これは $\dfrac{1}{f(1)^2}\fallingdotseq 1$ に矛盾する．

したがって

$$\frac{1}{f(1)^2}=1,\ \frac{f(2)-1}{f(1)}=2 \quad \text{から} \quad f(1)=1, f(2)=2.$$

このとき⑥は

$$f(x+1)=f(x)+1 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

となる．

①で $y=2$ とおき⑨を使うと

$$f(x^2+2)+1=f(x^2+1)+\frac{f(2x)}{f(x)} \qquad f(x^2+1)+1+1=f(x^2+1)+\frac{f(2x)}{f(x)}.$$

よって

$$f(2x)=2f(x). \qquad \cdots\cdots ⑩$$

次に $f(x)=x$ を示す．

$x>0$ とする．①で x のところを $\sqrt{x}$ で置き換えると

$$f(x+y)+1=f(x+1)+\frac{f(\sqrt{x}y)}{f(\sqrt{x})}. \qquad \cdots\cdots ⑪$$

⑪で y のところを $-y$ で置き換えて $f(-\sqrt{x}y)=-f(\sqrt{x}y)$ を使うと

$$f(x-y)+1=f(x+1)-\frac{f(\sqrt{x}y)}{f(\sqrt{x})}. \qquad \cdots\cdots ⑫$$

⑪+⑫から

$$f(x+y)+f(x-y)+2=2f(x+1)=2f(x)+2=f(2x)+2.$$

よって

$$f(x+y)+f(x-y)=f(2x) \qquad \forall x>0, x\fallingdotseq \pm y.$$

$\forall u,v,u>v,u\fallingdotseq 0,v\fallingdotseq 0$ に対して

$x=\dfrac{u-v}{2}(>0), y=\dfrac{u+v}{2}$ とおくと $x+y=u, x-y=-v$ となるから

$$f(u)+f(-v)=f(u-v).$$

v のところを $-v$ で置き換えると

$$f(u)+f(v)=f(u+v) \qquad \forall u,v,u+v>0,u\fallingdotseq 0,v\fallingdotseq 0.$$

$u+v<0,u\fallingdotseq 0,v\fallingdotseq 0$ のとき $(-u)+(-v)>0,-u\fallingdotseq 0,-v\fallingdotseq 0$ だから

$$f(-u)+f(-v)=f(-u-v).$$

$f(x)$ は奇関数だから $-f(u)-f(v)=-f(u+v)$ すなわち $f(u)+f(v)=f(u+v)$ を得る．

よって

$$f(u)+f(v)=f(u+v) \qquad \forall u,v,u+v\fallingdotseq 0,u\fallingdotseq 0,v\fallingdotseq 0. \qquad \cdots\cdots ⑬$$

①から $f\left(x^2+y\right)-f\left(x^2+1\right)+1=\dfrac{f(xy)}{f(x)}$.

この式の左辺に⑬を使うと

$$f\left(x^2+y\right)-f\left(x^2+1\right)+1=f(y-1)+1$$

だから

$$f(y-1)+1=\frac{f(xy)}{f(x)}.$$

⑨で $x=y-1$ とおいた $f(y-1)+1=f(y)$ を使うと

$$f(y)=\frac{f(xy)}{f(x)}$$

から

$$f(xy)=f(x)f(y) \qquad \forall x,y, x>0, y \fallingdotseq -x^2, y \fallingdotseq 0,1.$$

$f(1)=1$ だから $y=1$ のとき $f(xy)=f(x)f(y)$ は成り立つ．
$y=-x^2\ (x>0)$ のとき $f\left(-x^3\right)=f(x)f\left(-x^2\right)$ を示す．

$$f\left(-x^3\right) \underset{④'}{=} -f\left(x^3\right)=-f(x)f\left(x^2\right)=f(x)\left(-f(x^2)\right)=f(x)f(-x^2).$$

よって $y=-x^2$ のとき $f(xy)=f(x)f(y)$ が成り立つ．
したがって

$$f(xy)=f(x)f(y) \qquad \forall x,y, x>0, y \fallingdotseq 0. \qquad \cdots\cdots ⑭$$

⑭で $y=x$ とおくと $f(x^2)=f(x)^2 \geqq 0$.
よって $f(x) \geqq 0 \qquad \forall x>0$.
$f(x)$ はコーシーの関数方程式を満たすから $f(x)=kx \quad (k \fallingdotseq 0)$ となる．これを①に代入して

$$\begin{aligned}
① &\iff k(x^2+y)+1=k(x^2+1)+\frac{kxy}{kx} \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^* \\
&\iff ky+1=k+y \qquad \forall y \in \mathbb{R}^* \\
&\iff k=1.
\end{aligned}$$

よって

$$f(x)=x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

これは①を満たす．

以上のことから解は

- $f(x)=c \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$

と

- $f(x)=x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$

である． ■

問題 24　(Britain 2014)

Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 2010$$

解答

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 2010 \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で n のところを $n+1$ で置き換えると

$$f(n+1) + f(n+2) = f(n+3)f(n+4) - 2010. \qquad \cdots\cdots ②$$

② − ① から

$$f(n+2) - f(n) = f(n+3)\left(f(n+4) - f(n+2)\right). \qquad \cdots\cdots ③$$

(1) $f(3) = f(1)$ の場合

$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して，$f(1) = f(3) = \cdots = f(2m+1)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $m = 1$ のとき $f(3) = f(1)$ は成り立っている．

(ii) $m = k$ のとき成り立つと仮定する．

③で $n = 2k-1$ とおいた

$$f(2k+2)\left(f(2k+3) - f(2k+1)\right) = f(2k+1) - f(2k-1) = 0$$

から $f(2k+3) - f(2k+1) = 0$.

$n = k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) から $\forall m \in \mathbb{N}$ に対して，$f(1) = f(3) = \cdots = f(2m+1)$ が成り立つ．

①で $n = 2m-1\,(m \geqq 1)$ とおいた

$$f(2m-1) + f(2m) = f(2m+1)f(2m+2) - 2010$$

から

$$f(1) + f(2m) = f(1)f(2m+2) - 2010.$$

$c = f(1)$ とおくと

$$cf(2m+2) - f(2m) = c + 2010. \qquad \cdots\cdots ④$$

- $c \fallingdotseq 1$ のとき

$\alpha = \dfrac{c+2010}{c-1}$ とおくと $f(2m+2) - \alpha = \dfrac{1}{c}\left(f(2m) - \alpha\right)$.
$\{f(2m) - \alpha\}$ は初項 $f(2) - \alpha$，公比 $\dfrac{1}{c}$ の等比数列で

$$f(2m) - \alpha = (f(2) - \alpha)\left(\frac{1}{c}\right)^{m-1} \qquad f(2m) = \alpha + \frac{f(2) - \alpha}{c^{m-1}}$$

$c \fallingdotseq 1$ より $c = f(1) > 1$ だから $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{f(2) - \alpha}{c^{m-1}} = 0$.
　$f(2) - \alpha = 0$ のとき

$$f(2m) = \alpha = \frac{c+2010}{c-1} = 1 + \frac{2011}{c-1}.$$

2011 は素数なので $c - 1 = 2011, 1$ から $c = 2012,\ 2$.
したがって $f(1) = 2012$ のとき $f(2m) = 2, f(1) = 2$ のとき $f(2m) = 2012$.
数列 $\{f(n)\}$ は

$$2012, 2, 2012, 2, 2012, 2, \ldots\ldots$$

または

$$2, 2012, 2, 2012, 2, 2012, \ldots\ldots$$

となる.
　$f(2) - \alpha \fallingdotseq 0$ のとき $\alpha + \dfrac{f(2) - \alpha}{c^{m-1}}$ が整数にならない m が存在するので $f(2m)$ が自然数であることに矛盾する.
　　$f(2) - \alpha > 0$ ならば，$l = [\alpha]$ とおくと $l \leqq \alpha < l + 1$ が成り立つから ϵ を $0 < \epsilon < l + 1 - \alpha$ となるようにとる.
　　$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{f(2) - \alpha}{c^{m-1}} = 0$ だから

$$\exists m_0, \forall m \geqq m_0\,, 0 < \frac{f(2) - \alpha}{c^{m-1}} < \epsilon.$$

　　よって $\forall m \geqq m_0$ に対して

$$l < \alpha + \frac{f(2) - \alpha}{c^{m-1}} < \alpha + \epsilon < l + 1$$

　　となり，$\alpha + \dfrac{f(2) - \alpha}{c^{m-1}}$ は整数にならない.
　　$f(2) - \alpha < 0$ のときも同様に示せる.

- $c=1$ のとき　$f(1)=1$
  ④から $f(2m+2)-f(2m)=2011.$
  数列 $\{f(2m)\}$ は初項 $f(2)$，公差 2011 の等差数列で
  $$f(2m)=f(2)+2011(m-1).$$
  $p=f(2)\,(\geqq 1)$ とおくと
  $$f(2m)=2011(m-1)+p.$$
  数列 $\{f(n)\}$ は
  $$1, p, 1, 2011+p, 1, 4022+p, 1, 6033+p, \ldots\ldots$$
  となる．

(2) $f(3)\fallingdotseq f(1)$ の場合

$$f(n+2)-f(n)=f(n+3)\left(f(n+4)-f(n+2)\right) \qquad \cdots\cdots③$$

を繰り返し用いると，$k\geqq 2$ として

$$\begin{aligned} f(n+2)-f(n) &= f(n+3)\left(f(n+4)-f(n+2)\right) \\ &= f(n+3)f(n+5)\left(f(n+6)-f(n+4)\right) \\ &= f(n+3)f(n+5)f(n+7)\left(f(n+8)-f(n+6)\right) \\ &= \ldots\ldots \\ &= f(n+3)f(n+5)f(n+7)\cdots f(n+2k-1) \\ &\quad \times\left(f(n+2k)-f(n+2k-2)\right). \end{aligned}$$

この式で $n=1$ とおくと

$$\begin{aligned} &f(3)-f(1) \\ &= f(4)f(6)f(8)\cdots f(2k)\left(f(2k+1)-f(2k-1)\right). \end{aligned}$$

$f(4), f(6), f(8), \cdots, f(2k)$ は $f(3)-f(1)$ の正の約数だから，ある $m(\geqq 2)$ に対して $f(2m)=1$ となる．
よって
$$f(2m)=f(2m+2)=\cdots=1.$$

①で $n=2m-1$ とおいた

$$f(2m-1)+f(2m)=f(2m+1)f(2m+2)-2010$$

から
$$f(2m-1)+1=f(2m+1)-2010 \qquad \cdots\cdots ④$$
①で $n=2m-2$ とおいた
$$f(2m-2)+f(2m-1)=f(2m)f(2m+1)-2010$$
から
$$f(2m-2)+f(2m-1)=f(2m+1)-2010 \qquad \cdots\cdots ⑤$$
⑤ $-$ ④ から $f(2m-2)=1$.
同様な操作を繰り返すと
$$f(2m-4)=\cdots=f(2)=1$$
を得る.

$f(2m+2)=f(2m)=\cdots=f(2m-2l)=1$, $(1 \leqq l \leqq m-2)$ がいえたとする.
①で $n=2m-2l-1$ とおいた
$$f(2m-2l-1)+f(2m-2l)=f(2m-2l+1)f(2m-2l+2)-2010$$
から
$$f(2m-2l-1)+1=f(2m-2l+1)-2010 \qquad \cdots\cdots ④'$$
①で $n=2m-2l-2$ とおいた
$$f(2m-2l-2)+f(2m-2l-1)=f(2m-2l)f(2m-2l+1)-2010$$
から
$$f(2m-2l-2)+f(2m-2l-1)=f(2m-2l+1)-2010 \qquad \cdots\cdots ⑤'$$
⑤$'$ $-$ ④$'$ から $f(2m-2l-2)=1$ がいえる.

したがって
$$f(2n)=1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
が成り立つ. ①で $n=2m$ とおいた
$$f(2m)+f(2m+1)=f(2m+2)f(2m+3)-2010$$
から
$$1+f(2m+1)=f(2m+3)-2010 \qquad f(2m+3)-f(2m+1)=2011.$$

数列 $\{f(2m-1)\}$ は初項 $f(1)$，公差 2011 の等差数列で

$$f(2m-1)=f(1)+2011(m-1).$$

$p=f(1)(\geqq 1)$ とおくと

$$f(2m-1)=2011(m-1)+p.$$

数列 $\{f(n)\}$ は

$$p,1,2011+p,1,4022+p,1,6033+p,1,\ldots\ldots$$

となる．

以上のことから
数列 $\{f(n)\}$ は

$$2012,2,2012,2,2012,2,\ldots\ldots$$

$$2,2012,2,2012,2,2012,\ldots\ldots$$

$$1,p,1,2011+p,1,4022+p,1,6033+p,\ldots\ldots$$

$$p,1,2011+p,1,4022+p,1,6033+p,1,\ldots\ldots$$

となる．これらは①を満たすことを示す．

$$f(n)+f(n+1)=f(n+2)f(n+3)-2010 \qquad \cdots\cdots①$$

は $n=2m$ のとき

$$f(2m)+f(2m+1)=f(2m+2)f(2m+3)-2010 \qquad \cdots\cdots①'$$

$n=2m+1$ のとき

$$f(2m+1)+f(2m+2)=f(2m+3)f(2m+4)-2010 \qquad \cdots\cdots①''$$

となるから，①$'$,①$''$ が成立することを示せばよい．

たとえば

$$1,p,1,2011+p,1,4022+p,1,6033+p,\ldots\ldots$$

のとき $f(2n-1=1,f(2n)=2011(n-1)+p$ だから
①$'$ の左辺は $f(2m)+f(2m+1)=2011(m-1)+p+1=2011m+p-2010$,
右辺は $f(2m+2)f(2m+3)-2010=2011m+p-2010$ となり一致する．

①$''$ の左辺は $f(2m+1)+f(2m+2)=1+2011m+p=2011m+p+1$,
右辺は $f(2m+3)f(2m+4)-2010=2011(m+1)+p-2010=2011m+p+1$ となり一致する．

他の場合も同様に ①$'$, ①$''$ を満たすことがわかる．

したがって　解は

$p \in \mathbb{N}$ として

- $2012, 2, 2012, 2, 2012, 2, \ldots\ldots$
- $2, 2012, 2, 2012, 2, 2012, \ldots\ldots$
- $1, p, 1, 2011+p, 1, 4022+p, 1, 6033+p, \ldots\ldots$
- $p, 1, 2011+p, 1, 4022+p, 1, 6033+p, 1, \ldots\ldots$

である．■

問題 25 (IMO Shortlist 2014)

Find all functions $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ such that for all $m,n\in\mathbb{N}$

$$m^2+f(n)\,|\,mf(m)+n$$

解答

$$m^2+f(n)\,|\,mf(m)+n \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $n=m$ とおくと $m^2+f(m)\,|\,mf(m)+m$ が成り立つから

$$m^2+f(m)\leqq mf(m)+m \qquad m(m-1)\leqq(m-1)f(m).$$

$m\geqq 2$ とすると $m\leqq f(m)$.

よって

$$m\leqq f(m) \qquad \forall m\geqq 2. \qquad \cdots\cdots ②$$

①で $m=n=2$ とおいた $4+f(2)\,|\,2f(2)+2$ から $2f(2)+2=p(4+f(2))$, $p\in\mathbb{N}$ とおける．この式を変形すると

$$(p-2)(f(2)+4)=-6 \qquad (2-p)(f(2)+4)=6.$$

$f(2)+4\geqq 5$ だから，$2-p$ はの正の約数で $2-p=1$ すなわち $p=1$ となる．よって $f(2)=2$.

①で $m=2$ とおくと $4+f(n)\,|\,2f(2)+n$ が成り立つから

$$4+f(n)\leqq 2f(2)+n=4+n.$$

よって

$$f(n)\leqq n \qquad \forall n\in\mathbb{N}. \qquad \cdots\cdots ③$$

②と③から

$$f(n)=n \qquad \forall n\geqq 2.$$

③で $n=1$ とおくと $f(1)\leqq 1$. ところが $f(1)\geqq 1$ だから $f(1)=1$ を得る．

以上のことから $f(n)=n$.

このとき $m^2+f(n)=m^2+n$, $mf(m)+n=m^2+n$ だから $m^2+f(n)\,|\,mf(m)+n$ は成り立つ

したがって 解は

- $f(n)=n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

である． ■

注　$f(n) \leqq n$ は次のように導くこともできる．

①で $m = f(n)$ とおくと $f(n)^2 + f(n) \mid f(n)f(f(n)) + n$ が成り立つから

$$f(n)f(f(n)) + n = p\left(f(n)^2 + f(n)\right),\, p \in \mathbb{N}$$

とかける．

$$n = f(n)\,(p(f(n)+1) - f(f(n)))$$

と変形できるので

$$f(n) \mid n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

がいえて，特に $f(n) \leqq n$.

問題 26 (Zhautykov Olympiad 2014)

Dos there exist a function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying the following conditions: for each real y there is a real x such that $f(x)=y$, and

$$f(f(x))=(x-1)f(x)+2$$

for all real x ?

解答

$$f(f(x))=(x-1)f(x)+2 \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $x=1$ とおくと

$$f(f(1))=2. \qquad \cdots\cdots②$$

f は全射 (surjective) だから $f(a)=0$ となる a が存在する．
①で $x=a$ とおいた $f(f(a))=(a-1)f(a)+2$ から

$$f(0)=2. \qquad \cdots\cdots③$$

①で $x=0$ とおいた $f(f(0))=(0-1)f(0)+2$ から

$$f(2)=0. \qquad \cdots\cdots④$$

①で $x=f(1)$ とおいた式と②，④を利用すると

$$\begin{aligned}0=f(2)=f(f(f(1)))&=(f(1)-1)f(f(1))+2\\&=(f(1)-1)f(f(1))+2\\&=(f(1)-1)\cdot 2+2.\end{aligned}$$

よって

$$f(1)=0. \qquad \cdots\cdots⑤$$

f は全射 (surjective) だから $f(b)=1$ となる b が存在する．

$$0=f(1)=f(f(b))=(b-1)f(b)+2=(b-1)\cdot 1+2=b+1$$

から $b=-1$.
よって

$$f(-1)=1. \qquad \cdots\cdots⑥$$

f は全射 (surjective) だから $f(c) = -1$ となる b が存在する.

$$1 = f(-1) = f(f(c)) = (c-1)f(c) + 2 = (c-1) \cdot (-1) + 2$$

から $c = 2$.

よって $f(2) = -1$.

これは ④ の $f(2) = 0$ に矛盾するから 条件を満たす関数は存在しない. ■

問題 27　(Iran 2014)

Find all continuous functions $f:\mathbb{R}^{\geq 0}\to\mathbb{R}^{\geq 0}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}^{\geq 0}$

$$f(xf(y))+f(f(y))=f(x)f(y)+2$$

解答

$$f(xf(y))+f(f(y))=f(x)f(y)+2 \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $y=0$ とおくと

$$f(xf(0))+f(f(0))=f(x)f(0)+2 \qquad \cdots\cdots ②$$

$f(0)=0$ ならば，②は $f(0)+f(0)=f(x)\cdot 0+2$ すなわち $0=2$ となり矛盾が生じるから $f(0)\fallingdotseq 0$.

$a=f(0)\fallingdotseq 0$ とおくと②は

$$f(ax)+f(a)=af(x)+2 \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．

③で $x=0$ とおくと

$$a+f(a)=a^2+2 \qquad f(a)=a^2-a+2.$$

③で $x=1$ とおくと

$$f(a)+f(a)=af(1)+2 \qquad f(1)=\frac{2f(a)-2}{a}=\frac{2a^2-2a+2}{a}.$$

①で $x=0$ とおいた $a+f(f(y))=af(y)+2$ から

$$f(f(x))=af(x)-a+2. \qquad \cdots\cdots ④$$

①で $x=1$ とおいた $f(f(y))+f(f(y))=f(1)f(y)+2$ から

$$2f(f(x))=f(1)f(x)+2. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④ $\times 2-$ ⑤ から

$$2af(x)-2a+4=f(1)f(x)+2 \qquad (2a-f(1))f(x)=2a-2,$$

$$\left(2a-\frac{2a^2-2a+2}{a}\right)f(x)=2a-2 \qquad \frac{2a-2}{a}f(x)=2a-2.$$

$a \fallingdotseq 1$ と仮定すると $f(x)=a$ となる．特に $x=a$ とおくと $f(a)=a$ から

$$a^2-a+2=a \qquad a^2-2a+2=0.$$

これを満たす実数 a は存在しない．
よって $a=1$ で

$$f(0)=1,\ f(1)=2.$$

⑤から

$$f(f(x))=f(x)+1. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥を用いて

$$f(m)=m+1 \qquad \forall m\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$$

であることを数学的帰納法で示す．

(i) $m=0,1$ のとき成り立つ．

(ii) $m=k\,(\geqq 1)$ のとき成り立つと仮定すると $f(k)=k+1$. ⑥で $x=k$ とおいた $f(f(k))=f(k)+1$ から $f(k+1)=(k+1)+1=k+2$.
$m=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より任意の $m\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$ に対して $f(m)=m+1$ が成り立つ．

$x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}^{\geq 0}$ のとき① で $y=q-1$ とおくと

$$f(xf(q-1))+f(f(q-1))=f(x)f(q-1)+2 \qquad f(qx)+f(q)=qf(x)+2$$

$$f(p)+q+1=qf(x)+2 \qquad p+1+q+1=qf(x)+2$$

$$f(x)=\frac{p}{q}+1=x+1.$$

よって

$$f(x)=x+1 \qquad \forall x\in\mathbb{Q}^{\geq 0}.$$

$f(x)$ は連続関数だから

$$f(x)=x+1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}^{\geq 0}.$$

これは①を満たす．

よって解は

- $f(x)=x+1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}^{\geq 0}$

である． ■

問題 28　(Iran TST 2014)

Find all functions $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}^+$

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right)+f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right)=f(y)$$

解答

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right)+f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right)=f(y) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

$\dfrac{x+1}{xf(y)}=y$ が成立するならば，$x+1=xyf(y)$ から $x(yf(y)-1)=1$ となるので $yf(y)-1>0$ でなければならない．

$yf(y)-1>0$ となる y が存在すると仮定する．

$x=\dfrac{1}{yf(y)-1}\ (>0)$ とおくと $\dfrac{x+1}{xf(y)}=y$ だから①より

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right)=0$$

となり $f\left(\dfrac{y}{f(x+1)}\right)>0$ に矛盾する．

よって，$\forall y\in\mathbb{R}^+$ に対して $yf(y)\leqq 1$ となるから

$$f(x)\leqq\frac{1}{x}\qquad\forall x\in\mathbb{R}^+. \qquad \cdots\cdots②$$

これを使うと①より

$$f(y)=f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right)+f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right)\leqq\frac{f(x+1)}{y}+\frac{x}{x+1}f(y)$$

となるから

$$yf(y)\leqq(x+1)f(x+1)\qquad\forall x,y\in\mathbb{R}^+. \qquad \cdots\cdots③$$

③で $y=2$ とおくと $2f(2)\leqq(x+1)f(x+1)$.

③で $x=1$ とおき，y のところを $x+1$ で置き換えると $(x+1)f(x+1)\leqq 2f(2)$.

よって　$(x+1)f(x+1)=2f(2)$.

$a=2f(2)$ とおくと

$$f(x)=\frac{a}{x}\qquad\forall x\in(1,\infty). \qquad \cdots\cdots④$$

①で y のところを $y+1$ で置き換えると

$$f\left(\frac{y+1}{f(x+1)}\right)+f\left(\frac{x+1}{xf(y+1)}\right)=f(y+1) \qquad \forall x,y\in R^+. \qquad \cdots\cdots⑤$$

$y+1>1$，$\dfrac{1}{f(x+1)}\geqq x+1>1$ だから $\dfrac{y+1}{f(x+1)}>1$,

また $\dfrac{1}{f(y)}>1$ が成り立つから $\dfrac{x+1}{xf(y+1)}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{f(y)}>1.$

したがって，⑤は

$$a\cdot\frac{f(x+1)}{y+1}+a\cdot\frac{x}{x+1}f(y+1)=f(y+1)$$

となる．この式に $f(x+1)=\dfrac{a}{x+1}, f(y+1)=\dfrac{a}{y+1}$ を代入すると

$$\frac{a^2}{(x+1)(y+1)}+\frac{a^2x}{(x+1)(y+1)}=\frac{a}{y+1}$$

$$\frac{a}{x+1}+\frac{ax}{x+1}=1 \qquad a=1.$$

よって

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad \forall x\in(1,\infty). \qquad \cdots\cdots⑥$$

①で $y=1$ とおくと

$$f\left(\frac{1}{f(x+1)}\right)+f\left(\frac{x+1}{xf(1)}\right)=f(1).$$

$\dfrac{1}{f(x+1)}>1, \dfrac{x+1}{xf(1)}>1$ だから⑥を使うと

$$f(x+1)+\frac{xf(1)}{x+1}=f(1) \qquad \frac{1}{x+1}+\frac{xf(1)}{x+1}=f(1).$$

ゆえに $f(1)=1$ となり

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad \forall x\in[1,\infty). \qquad \cdots\cdots⑥'$$

①で x のところを $\dfrac{1}{x}$ で置き換えると

$$f\left(\frac{y}{f\left(\frac{1}{x}+1\right)}\right)+f\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}f(y)}\right)=f(y) \qquad f\left(\frac{y}{f\left(\frac{1}{x}+1\right)}\right)+f\left(\frac{x+1}{f(y)}\right)=f(y).$$

$\dfrac{1}{x}+1>0, \dfrac{x+1}{f(y)}>1$ より

$$f\left(\frac{1}{x}+1\right)=\frac{x}{x+1},\ f\left(\frac{x+1}{f(y)}\right)=\frac{f(y)}{x+1}$$

なので

$$f\left(y\cdot\frac{x}{x+1}\right)+\frac{f(y)}{x+1}=f(y).$$

この式で $y=\dfrac{1}{x+1}$ とおくと

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{f\left(\frac{1}{x+1}\right)}{x+1}=f\left(\frac{1}{x+1}\right)\qquad f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x+1}f\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

x のところを $\dfrac{1}{x}$ で置き換えると

$$f(x)=\frac{1}{x+1}f\left(\frac{x}{x+1}\right)\qquad \forall x>0. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑦を用いて $(0,1]$ で $f(x)=\dfrac{1}{x}$ が成り立つことを示す．

このためには，$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$ で $f(x)=\dfrac{1}{x}$ が成り立つことを示せばよい．

$g(x)=\dfrac{x}{x+1}\ (x>0)$ とおくと $g'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ より $g(x)$ は増加関数である．

(i) $n=1$ のとき

$\forall t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ に対して $x=g^{-1}(t)\ \left(t=g(x)=\dfrac{x}{x+1}\right)$ とおくと

$x\geqq 1$ となるから $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

⑦から

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}f\left(\frac{x}{x+1}\right)\qquad f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{x+1}{x}.$$

よって

$$f(t)=\frac{1}{t}\qquad \forall t\in\left[\frac{1}{2},1\right).$$

$f(1)=1$ だから

$$f(t)=\frac{1}{t}\qquad \forall t\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

(ii) $n=m$ のとき成り立つと仮定する．

$\forall t \in \left[\dfrac{1}{m+2}, \dfrac{1}{m+1}\right]$ に対して $x = g^{-1}(t)$ $\left(t = g(x) = \dfrac{x}{x+1}\right)$ とおくと

$\dfrac{1}{m+1} \leqq x \leqq \dfrac{1}{m}$ となるから $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

⑦から

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} f\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x}.$$

よって

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad \forall t \in \left[\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1}\right].$$

(i)(，ii) よりすべての自然数 n に対して $\left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$ で $f(x) = \dfrac{1}{x}$ が成り立つ．

$(0,1]$ で $f(x) = \dfrac{1}{x}$ が成り立つことが示せたので，⑥とあわせて

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

を得る．

このとき① の左辺

$$\begin{aligned} f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) &= \frac{f(x+1)}{y} + \frac{xf(y)}{x+1} \\ &= \frac{1}{(x+1)y} + \frac{x}{(x+1)y} \\ &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

は右辺の $f(y)$ に等しい．

よって 解は

- $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

である． ■

問題 29　(Kazakhstan 2014)

Find all functions $f : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ such that for all $x, y, z \in \mathbb{Q}$

$$f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=f(0,x+y+z)$$

$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}=\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}\}$ で定義される．

解答

$$f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=f(0,x+y+z) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $x=y=z=0$ とおいた $3f(0,0)=f(0,0)$ から $f(0,0)=0$.
①で $y=z=0$ とおいた $f(x,0)+f(0,0)+f(0,x)=f(0,x)$ から $f(x,0)=0$.
①で $z=0$ とおいた $f(x,y)+\underbrace{f(y,0)}_{=0}+f(0,x)=f(0,x+y)$ から

$$f(x,y)=f(0,x+y)-f(0,x).$$

$g(x)=f(0,x)$ とおくと，$g(0)=f(0,0)=0$ かつ

$$f(x,y)=g(x+y)-g(x). \qquad \cdots\cdots ②$$

g を使って ① を書き直すと

$$g(x+y)-g(x)+g(y+z)-g(y)+g(z+x)-g(z)=g(x+y+z)-\underbrace{g(0)}_{=0}$$

から

$$g(x+y+z)+g(x)+g(y)+g(z)=g(x+y)+g(y+z)+g(z+x) \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．③で x のところを $(n+1)x$ で置き換え，$y=x, z=-x$ とおいた

$$g((n+1)x)+g((n+1)x)+g(x)+g(-x)=g((n+2)x)+g(0)+g(nx)$$

から

$$g((n+2)x)=2g((n+1)x)-g(nx)+g(x)+g(-x).$$

これを

$$g((n+2)x)-g((n+1)x)=g((n+1)x)-g(nx)+g(x)+g(-x)$$

と変形し，$b_n=g((n+1)x)-g(nx)$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n+g(x)+g(-x).$$

これから

$$b_n = b_0 + n\,(g(x)+g(-x)) = g(x) + n\,(g(x)+g(-x)) = (n+1)g(x) + ng(-x).$$

よって $n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} g(nx) &= g(0) + \sum_{k=0}^{n-1}(g((k+1)x) - g(kx)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}((k+1)g(x) + kg(-x)) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}g(x) + \frac{(n-1)n}{2}g(-x) \\ &= \frac{g(x)+g(-x)}{2}n^2 + \frac{g(x)-g(-x)}{2}n. \end{aligned}$$

これは $n=0$ のときも成り立つ．

よって

$$g(nx) = \frac{g(x)+g(-x)}{2}n^2 + \frac{g(x)-g(-x)}{2}n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \qquad \cdots\cdots ④$$

ここで $h_1(x) = \dfrac{g(x)+g(-x)}{2}$, $h_2(x) = \dfrac{g(x)-g(-x)}{2}$ とおくと，$h_1(x)$ は偶関数，$h_2(x)$ は奇関数で

$$g(nx) = n^2 h_1(x) + nh_2(x) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となる．

$g(-nx) = \dfrac{g(x)+g(-x)}{2}n^2 - \dfrac{g(x)-g(-x)}{2}n$ だから

$$h_1(nx) = \frac{g(nx)+g(-nx)}{2} = \frac{g(x)+g(-x)}{2}n^2 = n^2 h_1(x) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

$h_1(x)$ は偶関数だから

$$h_1(nx) = n^2 h_1(x) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特に $x=1$ とおくと

$$h_1(n) = n^2 h_1(1) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$h_2(nx) = \frac{g(nx)-g(-nx)}{2} = \frac{g(x)-g(-x)}{2}n = nh_2(x) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

$h_2(x)$ は奇関数だから

$$h_2(nx) = nh_2(x) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特に $x=1$ とおくと
$$h_2(n) = nh_2(1) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$
$\forall x \in \mathbb{Q}$ に対して $x = \dfrac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ とおける．

$h_1(qx) = q^2 h_1(x)$ から
$$h_1(x) = \frac{h_1(qx)}{q^2} = \frac{h_1(p)}{q^2} = \frac{p^2 h_1(1)}{q^2} = h_1(1)x^2.$$
同様にして $h_2(qx) = qh_2(x)$ から
$$h_2(x) = \frac{h_2(qx)}{q} = \frac{h_2(p)}{q} = \frac{ph_2(1)}{q} = h_2(1)x.$$
したがって，⑤で $n=1$ とおくと
$$g(x) = h_1(x) + h_2(x) = h_1(1)x^2 + h_2(1)x = ax^2 + bx \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$
を得るから
$$f(x,y) = g(x+y) - g(x) = a(x+y)^2 + b(x+y) - (ax^2 + bx) = ay^2 + 2axy + by.$$
よって
$$f(x,y) = ay^2 + 2axy + by \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$
このとき①の左辺は
$$\begin{aligned} f(x,y) + f(y,z) + f(z,x) &= ay^2 + 2axy + by + az^2 + 2ayz + bz + ax^2 + 2axz + bx \\ &= a(x+y+z)^2 + b(x+y+z) \end{aligned}$$
となり 右辺 $f(0, x+y+z)$ と等しくなる．

よって解は

$a, b \in \mathbb{Q}$ を定数として

- $f(x,y) = ay^2 + 2axy + by \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}$

である． ■

問題 30　(Korea 2014)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$

$$f(xf(x)+f(x)f(y)+y-1)=f(xf(x)+xy)+y-1$$

解答

$$f(xf(x)+f(x)f(y)+y-1)=f(xf(x)+xy)+y-1 \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $x=0$ おくと

$$f(f(0)f(y)+y-1)=f(0)+y-1 \qquad \cdots\cdots②$$

②で $y=1$ おくと

$$f(f(0)f(1))=f(0) \qquad \cdots\cdots③$$

(i) $f(0)=0$ の場合②から

$$f(y-1)=y-1 \qquad \forall y\in\mathbb{R}.$$

よって

$$f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である．

(ii) $f(0)\neq 0$ の場合

$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $y=t-f(0)+1$ とおくと②から $f(f(0)f(y)+y-1)=t$ となる．

よって f は全射 (surjective) である．

①で $y=0$ おくと

$$f(xf(x)+f(x)f(0)-1)=f(xf(x))-1 \qquad \cdots\cdots④$$

$f(a)=\dfrac{1}{f(0)}$ となる a が存在するから，④で $x=a$ とおくと

$$f(af(a)+\underbrace{f(a)f(0)-1}_{=0})=f(af(a))-1 \qquad f(af(a))=f(af(a))-1 \qquad 0=-1$$

となり矛盾が生じる．

(i)，(ii) から解は

- $f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である．■

問題 31　(Middle European Mathematical Olympiad 2014)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$

$$xf(y) + f(xf(y)) - xf(f(y)) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x+y)$$

解答

$$xf(y) + f(xf(y)) - xf(f(y)) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x+y) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $x = 1$ とおいた

$$f(y) + f(f(y)) - f(f(y)) - f(y) = 2 + f(y) - f(1+y)$$

から

$$f(y+1) = f(y) + 2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ②$$

②で $y = 0$ とおくと $f(1) = f(0) + 2$．$a = f(0), b = f(1)$ とおくと

$$b = a + 2.$$

①で $y = 1$ とおいた

$$xf(1) + f(xf(1)) - xf(f(1)) - f(x) = 2x + f(1) - f(x+1)$$

から

$$bx + f(bx) - f(b)x - f(x) = 2x + b - f(x+1)$$

$$(a+2)x + f(bx) - f(b)x - f(x) = 2x + a + 2 - (f(x) + 2)$$

$$f(bx) = f(b)x - ax + a. \qquad \cdots\cdots ③$$

(i) $b \fallingdotseq 0$ の場合

$bx = t$ とおくと③は

$$f(t) = f(b) \cdot \frac{t}{b} - a \cdot \frac{t}{b} + a = \frac{f(b) - a}{b} t + a$$

となる．t はすべての実数を取り得るから

$$f(x) = \frac{f(b) - a}{b} x + a \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$f(1)=b$ から

$$\frac{f(b)-a}{b}+a=b \qquad \frac{f(b)-a}{b}+a=a+2 \qquad \frac{f(b)-a}{b}=2.$$

よって

$$f(x)=2x+a \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots④$$

このとき，①の左辺は

$$\begin{aligned}
&xf(y)+f(xf(y))-xf(f(y))-f(xy)\\
&=x(2y+a)+2xf(y)+a-x(2f(y)+a)-(2xy+a)\\
&=x(2y+a)+2x(2y+a)+a-x(2(2y+a)+a)-(2xy+a)\\
&=0,
\end{aligned}$$

右辺は

$$2x+f(y)-f(x+y)=2x+2y+a-(2(x+y)+a)=0$$

となり一致する．

(ii) $b=0$ の場合 $f(1)=0$.

$b=a+2$ から $a=-2$ となり $f(0)=-2$.

②で $y=1$ とおくと $f(2)=f(1)+2=2$.

①で $y=2$ とおくと

$$xf(2)+f(xf(2))-xf(f(2))-f(2x)=2x+f(2)-f(x+2)$$

$$2x+f(2x)-xf(2)-f(2x)=2x+2-f(x+2)$$

よって $f(x+2)=2x+2=2(x+2)-2$ から $f(x)=2x-2$.

これは (i) で $a=-2$ の場合になっている．

(i)，(ii) から解は

a を定数として

- $f(x)=2x+a \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 32　(Middle European Mathematical Olympiad 2014)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$

$$xf(xy) + xyf(x) \geqq f(x^2)f(y) + x^2y$$

解答

$$xf(xy) + xyf(x) \geqq f(x^2)f(y) + x^2y \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $y = x$ とおいた

$$xf(x^2) + xf(x) \geqq f(x^2)f(x) + x^3$$

から

$$(f(x^2) - x^2)(x - f(x)) \geqq 0. \qquad \cdots\cdots②$$

②で $x = 0$ とおいた

$$f(0)(-f(0)) \geqq 0 \qquad f(0)^2 \leqq 0$$

から $f(0) = 0$.

②で $x = 1$ とおくと

$$(f(1) - 1)(1 - f(1)) \geqq 0 \qquad (f(1) - 1)^2 \leqq 0$$

から $f(1) = 1$.

$f(a) < a$ であるような $a > 0$ が存在したとする．

②で $x = a$ とおいた $(f(a^2) - a^2)(\underbrace{a - f(a)}_{>0}) \geqq 0$ から

$$f(a^2) - a^2 \geqq 0. \qquad \cdots\cdots③$$

①で $y = 1$ とおくと

$$2xf(x) \geqq f(x^2)f(1) + x^2 \qquad 2xf(x) \geqq f(x^2) + x^2.$$

この式を変形すると

$$(f(x) - x)^2 \leqq f(x)^2 - f(x^2). \qquad \cdots\cdots④$$

④で $x = a$ とおき③を使うと

$$(f(a) - a)^2 \leqq f(a)^2 - f(a^2) \leqq f(a)^2 - a^2 = (f(a) - a)(f(a) + a).$$

$f(a)-a<0$ だから $(f(a)-a)^2 \leqq (f(a)-a)(f(a)+a)$ の両辺を $f(a)-a\,(<0)$ で割ると $f(a)-a \geqq f(a)+a$ となる．よって $a \leqq 0$. これは $a>0$ に矛盾する．
したがって

$$\boldsymbol{f(x) \geqq x \qquad \forall x > 0}$$

が成り立つ．

$f(b)>b$ であるような $b>0$ が存在したとする．
①で $x=\sqrt{b}, y=\dfrac{1}{\sqrt{b}}$ とおくと

$$\sqrt{b}f(1)+f(\sqrt{b}) \geqq f(b)f\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)+\sqrt{b}$$

から

$$f(\sqrt{b}) \geqq f(b)f\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

$f(b)>b,\ f\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right) \geqq \dfrac{1}{\sqrt{b}}$ を使うと

$$f(\sqrt{b}) \geqq f(b)f\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) > b\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}$$

から

$$f(\sqrt{b}) > \sqrt{b}. \qquad \cdots\cdots⑤$$

②で $x=\sqrt{b}$ とおくと

$$(f(b)-b)\left(\sqrt{b}-f(\sqrt{b})\right) \geqq 0.$$

$f(b)-b>0$ より $\sqrt{b}-f(\sqrt{b}) \geqq 0$ すなわち $f(\sqrt{b}) \leqq \sqrt{b}$.
これは⑤に矛盾する．
よって

$$\boldsymbol{f(x) \leqq x \qquad \forall x > 0}.$$

$\forall x>0$ に対して $f(x) \geqq x$ でもあったから

$$\boldsymbol{f(x) = x \qquad \forall x > 0}.$$

$f(0)=0$ だから

$$\boldsymbol{f(x) = x \qquad \forall x \geqq 0}. \qquad \cdots\cdots(*)$$

次に $x<0$ のときの $f(x)$ について考える．
$x<0, y<0$ のとき①から

$$x \cdot xy + xyf(x) \geqq x^2 f(y) + x^2 y \qquad x(yf(x) - xf(y)) \geqq 0.$$

$x<0$ だから

$$yf(x) - xf(y) \leqq 0. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥で x と y を入れ換えると $xf(y) - yf(x) \leqq 0$ すなわち

$$yf(x) - xf(y) \geqq 0. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑥，⑦より

$$yf(x) - xf(y) = 0 \qquad \forall x<0, y<0. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑧で $y=-1$ とおくと $-f(x) - xf(-1) = 0$ から

$$f(x) = -f(-1)x \qquad \forall x<0.$$

$c = -f(-1)$ とおくと

$$f(x) = cx \qquad \forall x<0.$$

これを④ の $(f(x)-x)^2 \leqq f(x)^2 - f(x^2) \underset{(*)}{=} f(x)^2 - x^2$ に代入すると

$$(cx-x)^2 \leqq (cx)^2 - x^2 \qquad (c-1)^2x^2 \leqq (c^2-1)x^2.$$

$x<0$ だから

$$(c-1)^2 \leqq c^2 - 1 \qquad 1 \leqq c.$$

よって

$$f(x) = cx \qquad \forall x<0.$$

ただし $c \geqq 1$ とする．
　以上のことから

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ cx & (x<0) \end{cases}$$

ただし $c \geqq 1$ とする．
　これは①を満たすことを示す．
$x \geqq 0, y \geqq 0$ のとき①の左辺は

$$xf(xy) + xyf(x) = x \cdot xy + xy \cdot x = 2x^2y,$$

①の右辺は

$$f(x^2)f(y)+x^2y=x^2\cdot y+x^2y=2x^2y$$

となるから①で等号が成り立つ.

$x\geqq 0, y\leqq 0$ のとき①の左辺は

$$xf(xy)+xyf(x)=x\cdot cxy+xy\cdot x=(c+1)x^2y,$$

①の右辺は

$$f(x^2)f(y)+x^2y=x^2\cdot cy+x^2y=(c+1)x^2y$$

となるから①で等号が成り立つ.

$x\leqq 0, y\geqq 0$ のとき①の左辺は

$$xf(xy)+xyf(x)=x\cdot xy+xy\cdot cx=2cx^2y,$$

①の右辺は

$$f(x^2)f(y)+x^2y=x^2\cdot y+x^2y=2x^2y$$

$c\geqq 1, x^2y\geqq 0$ より $2cx^2y\geqq 2x^2y$ となるから①の不等式が成り立つ.

$x\leqq 0, y\leqq 0$ のとき①の左辺は

$$xf(xy)+xyf(x)=x\cdot xy+xy\cdot cx=(c+1)x^2y,$$

①の右辺は

$$f(x^2)f(y)+x^2y=x^2\cdot cy+x^2y=(c+1)x^2y$$

となるから①で等号が成り立つ.

したがって解は

$c\geqq 1$ を定数として

- $f(x)=\begin{cases} x & (x\geqq 0) \\ cx & (x<0) \end{cases}$

である. ■

問題 33　(Moldava TST 2014)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2xy$$

解答

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2xy \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $x=0$ とおいた $f(y)+f(0)=f(y)$ から $f(0)=0$.

①で $x=1$ とおいた $f(f(y)+y)+f(y+1)=f(1+y)+2y$ から

$$f(f(y)+y)=2y. \qquad \cdots\cdots②$$

$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して，②で $y=\dfrac{t}{2}$ とおくと $f(f(y)+y)=t$.

よって f は全射 (surjective) である．

$xf(y)+y=x+y \Longleftrightarrow x(f(y)-1)=0$ より $f(y)=1$ となる y を考える．

f は全射 (surjective) だから $f(a)=1$ となる a が存在する．

①で $y=a$ とおくと

$$f(xf(a)+a)+f(ax+x)=f(x+a)+2ax,$$

$$f(x+a)+f(ax+x)=f(x+a)+2ax.$$

よって

$$f((a+1)x)=2ax \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots③$$

$a=-1$ ならば③は $f(0)=-2x$ となり矛盾が生じるから $a\neq -1$ である．

$t=(a+1)x$ とおくと③は

$$f(t)=\frac{2a}{a+1}t$$

と書き直せる．

$a\neq -1$ なので $t=(a+1)x$ はすべての実数を取り得るから

$$f(x)=\frac{2a}{a+1}x \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots④$$

$f(a)=1$ より

$$\frac{2a^2}{a+1}=1 \qquad 2a^2-a-1=0 \qquad (2a+1)(a-1)=0.$$

よって $a=-\dfrac{1}{2}$ または $a=1$ となるから

$f(x)=-2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

と

$f(x)=x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

を得る．これらは①を満たす．

　したがって解は

- $f(x)=-2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

と

- $f(x)=x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 34　(Turkey TST 2014)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\left(f(y) + x^2 + 1\right) + 2x = y + (f(x+1))^2$$

解 1

$$f\left(f(y) + x^2 + 1\right) + 2x = y + (f(x+1))^2 \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $x = 0$ とおくと

$$f(f(y) + 1) = y + f(1)^2. \qquad \cdots\cdots②$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して，②で $y = t - f(1)^2$ とおくと $f(f(y) + 1) = t$.

よって f は全射 (surjective) である．

$f(p) = f(q) = r$ とする．②で $y = p, q$ とおいた

$$f(r+1) = p + f(1)^2,\ f(r+1) = q + f(1)^2$$

から $p + f(1)^2 = q + f(1)^2$ すなわち $p = q$ が成り立つ．

よって f は単射 (injective) である．

f は全射 (surjective) であるから $f(a) = 0, f(b) = 1$ となる a, b が存在する．

②で $y = a$ とおくと

$$f(f(a) + 1) = a + (f(1))^2 \qquad f(1) = a + f(1)^2.$$

よって

$$a = f(1) - f(1)^2. \qquad \cdots\cdots③$$

①で $x = f(1)$ とおくと

$$\begin{aligned} f\left(f(y) + f(1)^2 + 1\right) + 2f(1) &= y + (\underbrace{f(f(1) + 1)}_{=1+f(1)^2})^2 \\ &= y + \left(1 + f(1)^2\right)^2 \\ &= y + f(1)^4 + 2f(1)^2 + 1. \end{aligned}$$

よって

$$f\left(f(y) + f(1)^2 + 1\right) = y + f(1)^4 + 2f(1)^2 - 2f(1) + 1. \qquad \cdots\cdots④$$

②を使うと

$$f\left(\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{y+f(1)^2}+1\right)=f\left(\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{f(f(y)+1)}+1\right).$$

この式の右辺に，②で y のところを $f(y)+1$ で置き換えた式

$$f\left(f(f(y)+1)+1\right)=f(y)+1+f(1)^2$$

を使うと

$$f\left(y+f(1)^2+1\right)=f(y)+f(1)^2+1.$$

この式で y のところを $f(y)$ で置き換えると

$$f\left(f(y)+f(1)^2+1\right)=f(f(y))+f(1)^2+1. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤より

$$f(f(y))+f(1)^2+1=y+f(1)^4+2f(1)^2-2f(1)+1.$$

よって

$$f(f(y))=y+f(1)^4+f(1)^2-2f(1). \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥で $y=a$ とおいた

$$f(0)=a+f(1)^4+f(1)^2-2f(1)=f(1)-f(1)^2+f(1)^4+f(1)^2-2f(1)=f(1)^4-f(1)$$

から

$$f(0)=f(1)^4-f(1). \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑥で $y=b$ とおいた

$$f(1)=b+f(1)^4+f(1)^2-2f(1)$$

から

$$b=-f(1)^4-f(1)^2+3f(1). \qquad \cdots\cdots ⑧$$

②で $y=b$ とおいた

$$f(2)=b+f(1)^2=-f(1)^4+3f(1)$$

から

$$f(2)=-f(1)^4+3f(1). \qquad \cdots\cdots ⑨$$

①で $x=1$ とおいた

$$f(f(y)+2)+2=y+f(2)^2$$

から

$$f(f(y)+2)=y-2+\left(-f(1)^4+3f(1)\right)^2. \qquad \cdots\cdots⑩$$

①で $x=-1$ とおいた

$$f(f(y)+2)-2=y+f(0)^2$$

から

$$f(f(y)+2)=y+2+\left(f(1)^4-f(1)\right)^2. \qquad \cdots\cdots⑪$$

⑩，⑪から

$$y-2+\left(-f(1)^4+3f(1)\right)^2=y+2+\left(f(1)^4-f(1)\right)^2,$$

$$f(1)^5-2f(1)^2+1=0,$$

$$(f(1)-1)\left(f(1)^4+f(1)^3+f(1)^2-f(1)-1\right)=0. \qquad \cdots\cdots⑫$$

⑪で $y=a$ とおくと

$$f(2)=a+2+\left(f(1)^4-f(1)\right)^2=f(1)-f(1)^2+\left(f(1)^4-f(1)\right)^2$$

となるが，⑨を使うと

$$f(1)-f(1)^2+\left(f(1)^4-f(1)\right)^2=-f(1)^4+3f(1),$$

$$f(1)^8-2f(1)^5+f(1)^4-2f(1)+2-0,$$

$$(f(1)-1)\left(f(1)^7+f(1)^6+f(1)^5-f(1)^4-2\right)=0. \qquad \cdots\cdots⑬$$

$f(1)\fallingdotseq 1$ とすると，⑫，⑬から

$$f(1)^4+f(1)^3+f(1)^2-f(1)-1=0. \qquad \cdots\cdots⑭$$

$$f(1)^7+f(1)^6+f(1)^5-f(1)^4-2=0. \qquad \cdots\cdots⑮$$

⑮ $-$ ⑭ $\times f(1)^3$ から

$$f(1)^3=2$$

を得る．これを⑭に代入した $2f(1)+2+f(1)^2-f(1)-1=0$ から $f(1)^2+f(1)+1=0$ となる．$f(1)=\sqrt[3]{2}$ は $f(1)^2+f(1)+1=0$ を満たさないから，⑭, ⑮ を満たすは存在しない．

したがって，$\boldsymbol{f(1)=1}$ である．
このとき，③，⑧，⑦，⑨より $\boldsymbol{a=0, b=1, f(0)=0, f(2)=2}$ となる．
また，②は

$$f(f(y)+1)=y+1, \qquad \cdots\cdots ②'$$

⑥は

$$f(f(y))=y \qquad \cdots\cdots ⑥'$$

となる．

②′ で y のところを $f(y)$ で置き換えた式 $f(f(f(y))+1)=f(y)+1$ において ⑥′ を使うと

$$f(y+1)=f(y)+1 \qquad \cdots\cdots ⑯$$

となる．
②′ で $y=-1$ とおくと $f(f(-1)+1)=0=f(0)$．
f は単射 (injective) なので $f(-1)+1=0$ から $f(-1)=0$．

①で $y=-1$ とおくと

$$\begin{aligned} f\left(x^2\right)+2x &= -1+(f(x+1))^2 \\ &\underset{⑯}{=} -1+(f(x)+1)^2 \\ &= f(x)^2+2f(x). \end{aligned}$$

よって

$$f\left(x^2\right)+2x=f(x)^2+2f(x). \qquad \cdots\cdots ⑰$$

⑰で x のところを $f(x)$ で置き換えた式

$$f\left(f(x)^2\right)+2f(x)=f\left(f(x)\right)^2+2f(f(x))$$

で ⑥′ を使うと

$$f\left(f(x)^2\right)+2f(x)=x^2+2x. \qquad \cdots\cdots ⑱$$

①で $y=-1$ とおいた式 $f\left(x^2\right)+2x=-1+(f(x+1))^2$ を $(f(x+1))^2=f\left(x^2\right)+2x+1$ と変形し，①の右辺に使うと

$$f\left(f(y)+x^2+1\right)+2x=y+f\left(x^2\right)+2x+1.$$

この式で左辺に⑯を使うと

$$f\left(f(y)+x^2\right)+1+2x=y+f\left(x^2\right)+2x+1$$

から

$$f\left(f(y)+x^2\right)=y+f\left(x^2\right).$$

この式で y のところを $f(y)$ で置き換えた式 $f\left(f(f(y))+x^2\right)=f(y)+f(x^2)$ において⑥$'$ を使うと

$$f\left(y+x^2\right)=f(y)+f\left(x^2\right). \qquad \cdots\cdots ⑲$$

⑲で $y=-x^2$ とおくと $f\left(-x^2\right)+f\left(x^2\right)=0$ となるから

$$f(-x)=-f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑳$$

を得る．したがって，$f(x)$ は奇関数である．

⑱で x のところを $-x$ と置き換えた式

$$f\left(f(-x)^2\right)+2f(-x)=x^2-2x$$

において，⑳を使うと

$$x^2+2f(x)=f\left(f(x)^2\right)+2x. \qquad \cdots\cdots ㉑$$

⑱ $+$ ㉑ から

$$f(x)=x \qquad \forall y\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たす．

したがって解は

- $f(x)=x \qquad \forall y\in\mathbb{R}$

である． ■

解 2

$$f\left(f(y)+x^2+1\right)+2x=y+(f(x+1))^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．また，$a=f(0),b=f(1)$ とおく．

①で $x=0$ とおいた $f(f(y)+1)=y+f(1)^2$ から

$$y=f(f(y)+1)-b^2. \qquad \cdots\cdots ②$$

$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して，②で $y=t-b^2$ とおくと $f(f(y)+1)=t$.
よって f は全射 (surjective) である．

$f(p)=f(q)=r$ とする．②で $y=p,q$ とおいた

$$f(r+1)=p+b^2,\ f(r+1)=q+b^2$$

から $p+b^2=q+b^2$ すなわち $p=q$ が成り立つ．
よって f は単射 (injective) である．
　②を①に代入すると

$$f\left(f(y)+x^2+1\right)+2x+b^2=f(f(y)+1)+(f(x+1))^2 \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ③$$

f は全射 (surjective) だから, $\forall t\in\mathbb{R}$ に対して，$f(y)=t-1$ となる $y\in\mathbb{R}$ が存在するから，③は次のように書き直せる．

$$f\left(t+x^2\right)+2x+b^2=f(t)+(f(x+1))^2 \qquad \forall x,t\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ④$$

④で $t=0$ とおいた

$$f\left(x^2\right)+2x+b^2=f(0)+(f(x+1))^2$$

から

$$(f(x+1))^2=f\left(x^2\right)+2x+b^2-a. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

⑤を④に代入すると

$$f\left(t+x^2\right)+2x+b^2=f(t)+f\left(x^2\right)+2x+b^2-a,$$
$$f\left(t+x^2\right)=f(t)+f\left(x^2\right)-a.$$

よって

$$f(t+x)=f(t)+f(x)-a \qquad \forall x,t\in\mathbb{R}, x\geqq 0. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$x<0$ のときも $f(t+x)=f(t)+f(x)-a$ が成り立つことを示す．
⑥で $t=-x$ とおくと

$$f(0)=f(-x)+f(x)-a \qquad f(-x)+f(x)=2a.$$

これを使うと $x<0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)&=2a-f(-x)\\ &=2a-(f(t+x)+f(-x))+f(t+x)\\ &\underset{⑥}{=}2a-(f(t+x+(-x))+a)+f(t+x)\\ &=a-f(t)+f(t+x). \end{aligned}$$

よって $f(t+x)=f(t)+f(x)-a$ が成り立つから

$$f(t+x)=f(t)+f(x)-a \qquad \forall x,t\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑦で $x=y=1$ とおくと $f(2)=2f(1)-a=2b-a$.
⑤で $x=1$ とおくと $f(2)^2=f(1)+2+b^2-a=b^2+b+2-a$.
よって $(2b-a)^2=b^2+b+2-a$ から

$$(2b-a)^2+a=b^2+b+2. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑤で $x=-1$ とおいた $f(0)^2=f(1)-2+b^2-a=b^2+b-2-a$ から

$$a^2+a=b^2+b-2. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑧ $-$ ⑨ より

$$4b^2-4=4ab.$$

$b=0$ はこの等式を満たさないから，$b \fallingdotseq 0$ で

$$a=\frac{b^2-1}{b}=b-\frac{1}{b}.$$

$a=b-\dfrac{1}{b}$ を⑨に代入すると

$$\left(b-\frac{1}{b}\right)^2+b-\frac{1}{b}=b^2+b-2,$$

$$b^2+b-2+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b}=b^2+b-2.$$

よって

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b}=0$$

から $b=1$ を得る.
このとき，$a=b-\dfrac{1}{b}=0$ で，$\boldsymbol{a=0, b=1}$ すなわち

$$\boldsymbol{f(0)=0,\ f(1)=1}$$

となる.

これを使って⑤，⑦を書き直すと

$$(f(x+1))^2=f\left(x^2\right)+2x+1. \qquad \cdots\cdots ⑤'$$

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑦'$$

⑦$'$ で $y=-x$ とおいた $f(0)=f(x)+f(-x)$ から

$$f(-x)=-f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

すなわち，$f(x)$ は奇関数である．

⑦$'$ と $f(1)=1$ を使い ⑤$'$ を書き直すと

$$(f(x)+f(1))^2 = f\left(x^2\right)+2x+1,$$

$$(f(x)+1)^2 = f\left(x^2\right)+2x+1,$$

$$f(x)^2+2f(x)+1 = f\left(x^2\right)+2x+1$$

から

$$f\left(x^2\right) = f(x)^2+2f(x)-2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑩$$

⑩で x のところを $-x$ で置き換えると

$$f\left(x^2\right) = f(-x)^2+2f(-x)+2x.$$

$f(x)$ は奇関数だから

$$f\left(x^2\right) = f(x)^2-2f(x)+2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑪$$

⑩ $-$ ⑪ より

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

これは①を満たす．

したがって解は

- $f(x) = x \qquad \forall y \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 35　(USAMO 2014)

Find all functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that for all $x, y \in \mathbb{Z}$

$$xf(2f(y)-x)+y^2f(2x-f(y))=\frac{f(x)^2}{x}+f(yf(y))$$

解答

$$xf(2f(y)-x)+y^2f(2x-f(y))=\frac{f(x)^2}{x}+f(yf(y)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $y=0$ とおくと

$$xf(2f(0)-x)=\frac{f(x)^2}{x}+f(0). \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) $f(0)=0$ の場合

②は $xf(-x)=\dfrac{f(x)^2}{x}$ すなわち

$$x^2f(-x)=f(x)^2. \qquad \cdots\cdots ③$$

③で x のところを $-x$ で置き換えると

$$x^2f(x)=f(-x)^2. \qquad \cdots\cdots ④$$

③ $\times f(x)$，④ $\times f(-x)$ から

$$x^2f(x)f(-x)=f(x)^3,\ x^2f(x)f(-x)=f(-x)^3.$$

$f(x)^3=f(-x)^3$ から $f(x)=f(-x)$ すなわちは偶関数である．

このとき，③は

$$x^2f(x)=f(x)^2 \qquad \cdots\cdots ③'$$

となるから

$$f(x)\in\{0,x^2\} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．

⑤で $x=1$ とおくと $f(1)\in\{0,1\}$ となるから $f(1)$ の値で場合分けをする．

(i) $f(1)=1$ の場合

$f(a)=0$ となる $a\neq 0$ が存在したとする．

①で $y=a$ とおくと

$$xf(-x)+a^2f(2x)=\frac{f(x)^2}{x}+f(0) \qquad xf(x)+a^2f(2x)=\frac{f(x)^2}{x}.$$

③$'$ を使うと $xf(x)+a^2f(2x)=xf(x)$ から

$$f(2x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥から $f(2)=0$.
①で $x=2, y=1$ とおいた

$$2f(2f(1)-2)+f(4-f(1))=\frac{f(2)^2}{2}+f(f(1)) \qquad 2f(0)+f(3)=f(1)$$

から $f(3)=1$.
①で $x=3, y=2$ とおくと

$$3f(2f(2)-3)+4f(6-f(2))=\frac{f(3)^2}{3}+f(2f(2)),$$

$$3f(-3)+4f(6)=\frac{1}{3}+f(0).$$

⑥から $f(6)=0$ で $f(-3)=f(3)=1$ だから最後の式は $3=\dfrac{1}{3}$ となり矛盾が生じる.
したがって $f(a)=0$ となる $a\fallingdotseq 0$ は存在しないから，⑤より

$$f(x)=x^2 \qquad \forall x\in\mathbb{Z}.$$

このとき①の左辺は

$$\begin{aligned}xf(2f(y)-x)+y^2f(2x-f(y)) &= x(2y^2-x)^2+y^2(2x-y^2)^2\\ &= x(4y^4-4xy^2+x^2)+y^2(4x^2-4xy^2+y^4)\\ &= x^3+y^6,\end{aligned}$$

①の右辺は

$$\frac{f(x)^2}{x}+f(yf(y))=\frac{x^4}{x}+\left(y^3\right)^2=x^3+y^6$$

となり，①は成り立つ.

(ii) $f(1)=0$ の場合

①で $y=1$ とおくと

$$xf(-x)+f(2x)=\frac{f(x)^2}{x}+f(0) \qquad xf(x)+f(2x)=\frac{f(x)^2}{x}.$$

③$'$ を使うと $xf(x)+f(2x)=xf(x)$ から

$$f(2x)=0 \qquad \forall x \in \mathbb{Z} \qquad \cdots\cdots ⑥'$$

$f(b)=b^2$ となる $b \fallingdotseq 0$ が存在したとする．

⑥$'$ から b は奇数となる．

①で $y=b$ とおくと

$$xf(2f(b)-x)+b^2f(2x-f(b))=\frac{f(x)^2}{x}+f(bf(b)),$$

$$xf\left(2b^2-x\right)+b^2f\left(2x-b^2\right)=\frac{f(x)^2}{x}+f\left(b^3\right).$$

$x=2k,\ k\in\mathbb{Z}, k\fallingdotseq 0$ のとき ⑥$'$ を使うと

$$b^2f\left(4k-b^2\right)=f\left(b^3\right). \qquad \cdots\cdots ⑦$$

$f\left(b^3\right)\in\left\{0,(b^3)^2\right\}$ だから $f\left(b^3\right)=b^6$ のとき⑦は

$$b^2f\left(4k-b^2\right)=b^6 \qquad f\left(4k-b^2\right)=b^4.$$

また $f\left(4k-b^2\right)\in\{0,\ (4k-b^2)^2\}$ で $b\fallingdotseq 0$ だから $f\left(4k-b^2\right)\fallingdotseq 0$ で $f\left(4k-b^2\right)=\left(4k-b^2\right)^2$.

よって $\left(4k-b^2\right)^2=b^4 \qquad 4k-b^2=\pm b^2$.

$4k-b^2=b^2$ すなわち $b^2=2k$ のとき b は偶数となり奇数であることに矛盾する．

$4k-b^2=-b^2$ すなわち $k=0$ のとき $k\fallingdotseq 0$ に矛盾する．

したがって $f\left(b^3\right)=0$ となり $f\left(4k-b^2\right)=0$.

$b=2b_1+1, b_1\in\mathbb{Z}$ とおくと $4k-b^2=4(k-b_1^2-b_1-1)+3$ は 0 以外の任意の整数だから $f\left(4k-b^2\right)=0$ より

$$f(x)=0 \qquad \forall x\equiv 3 \pmod 4, x\fallingdotseq -b^2$$

を得る．これを使うと

$$f(x)=f(-x)=0 \qquad \forall -x\equiv 3 \pmod 4, -x\fallingdotseq -b^2$$

が成り立つので

$$f(x)=0 \qquad \forall x\equiv 1,\, x\equiv 3 \pmod 4), x\neq \pm b^2.$$

よって $\pm b^2$ を除くすべての奇数に対して $f(x)=0$ が成り立つ． $\cdots\cdots(*)$

b は奇数なので $b\neq\pm b^2$ のときは $(*)$ から $f(b)=0$ となり $f(b)=b^2(\neq 0)$ に矛盾する．

したがって $b\in\{b^2,-b^2\}$ で結局 $b\in\{1,-1\}$ となる．

$b=1$ のとき $f(b)=b^2$ から $f(1)=1$. ところで $f\left(b^3\right)=0$ であったから $f(1)=0$ となり $f(1)=1$ に矛盾する．

$b=-1$ のとき $f(b)=b^2$ から $f(-1)=1$. ところで $f\left(b^3\right)=0$ であったから $f(-1)=0$ となり $f(-1)=1$ に矛盾する．

したがって $f(b)=b^2$ となる $b\neq 0$ は存在しないから，⑤より

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{Z}.$$

このとき①は成り立つ．

(2) $f(0)\neq 0$ の場合

②で $x=2f(0)$ とおくと

$$2f(0)^2=\frac{f(2f(0))^2}{2f(0)}+f(0)$$

となるから，この式を変形すると

$$2(2f(0)-1)=\left(\frac{f(2f(0))}{f(0)}\right)^2. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑧の左辺は整数だから，⑧の右辺は整数となるが式の形から平方数となる．ところが⑧の左辺は $2\times$ 奇数 の形なので平方数にならないので矛盾が生じる．

したがって，この場合に解はない．

以上のことから解は

- $f(x)=x^2 \qquad \forall x\in\mathbb{Z}$

と

- $f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{Z}$

である． ■

問題 36　(Uzbekistan 2014)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$

$$f\left(x^3\right)+f\left(y^3\right)=(x+y)\left(f(x^2)+f(y^2)-f(xy)\right)$$

解答

$$f\left(x^3\right)+f\left(y^3\right)=(x+y)\left(f(x^2)+f(y^2)-f(xy)\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $x=y=0$ とおいた $2f(0)=0$ から $f(0)=0$.

①で $y=0$ とおくと

$$f(x^3)=xf(x^2). \qquad \cdots\cdots ②$$

①で $y=-x$ とおくと

$$f(x^3)+f(-x^3)=0 \qquad f(-x^3)=-f(x^3).$$

x^3 はすべての実数値を取り得るから

$$f(-x)=-f(x) \qquad \cdots\cdots ③$$

となり，$f(x)$ は奇関数である．

①で y のところを $-y$ で置き換えると

$$\begin{aligned} f\left(x^3\right)+f\left(-y^3\right)&=(x-y)\left(f(x^2)+f(y^2)-f(-xy)\right),\\ f\left(x^3\right)-f\left(y^3\right)&=(x-y)\left(f(x^2)+f(y^2)+f(xy)\right). \end{aligned} \qquad \cdots\cdots ④$$

① + ④ から

$$f(x^3)=xf(x^2)+xf(y^2)-yf(xy). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

②を使うと

$$xf(y^2)=yf(xy) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥で $y=1$ とおくと $xf(1)=f(x)$．$c=f(1)$ とおくと

$$f(x)=cx \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たす．したがって解は

- $f(x)=cx \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 36 と似た関数方程式が 1996 年に出題されている．

問題 37　(China 1996)

The function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfy

$$f\left(x^3+y^3\right)=(x+y)\left(f(x^2)-f(x)f(y)+f(y^2)\right),$$

for all real numbers x and y .

Prove that $f(1996x)=1996f(x)$ for every $x\in\mathbb{R}$.

解答

$$f\left(x^3+y^3\right)=(x+y)\left(f(x^2)-f(x)f(y)+f(y^2)\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $y=0$ とおくと

$$f(x^3)=xf(x)^2. \qquad \cdots\cdots ②$$

②で $x=0$ とおくと $f(0)=0$.

②で x のところを $\sqrt[3]{x}$ で置き換えた式

$$f(x)=\sqrt[3]{x}f\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

から

$$x\geqq 0\Longrightarrow f(x)\geqq 0,\ x\leqq 0\Longrightarrow f(x)\leqq 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことがわかる．

$F=\{k\in\mathbb{R}\,|\,f(kx)=kf(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}\}$ とおくと明らかに $1\in F$.

$k\in F$ のとき

$$kxf(x)^2\underset{②}{=}kf\left(x^3\right)\underset{k\in F}{=}f\left(kx^3\right)=f\left(\left(\sqrt[3]{k}x\right)^3\right)\underset{②}{=}\sqrt[3]{k}x\left(f(\sqrt[3]{k}x)\right)^2$$

から

$$\left(\sqrt[3]{k}\right)^2f\left(x\right)^2=f\left(\sqrt[3]{k}x\right)^2 \qquad \left(\sqrt[3]{k}f\left(x\right)\right)^2=f\left(\sqrt[3]{k}x\right)^2.$$

$(*)$ から

$$\sqrt[3]{k}f\left(x\right)=f\left(\sqrt[3]{k}x\right).$$

よって

$$\sqrt[3]{k}\in F. \qquad \cdots\cdots ④$$

次に $h,k\in F$ のとき $h+k\in F$ を示す．

$$
\begin{aligned}
f((h+k)x) &= f\left(\left(\sqrt[3]{hx}\right)^3+\left(\sqrt[3]{kx}\right)^3\right)\\
&\underset{①}{=} \left(\left(\sqrt[3]{hx}\right)+\left(\sqrt[3]{kx}\right)\right)\left(\underbrace{f\left(\sqrt[3]{hx}\right)^2-f\left(\sqrt[3]{hx}\right)f\left(\sqrt[3]{kx}\right)+f\left(\sqrt[3]{kx}\right)^2}_{f\left(\sqrt[3]{hx}\right)=\sqrt[3]{h}f\left(\sqrt[3]{x}\right),f\left(\sqrt[3]{kx}\right)=\sqrt[3]{k}f\left(\sqrt[3]{x}\right)}\right)\\
&= \left(\sqrt[3]{h}+\sqrt[3]{k}\right)\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{h^2}-\sqrt[3]{h}\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k^2}\right)f\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\\
&= (h+k)\sqrt[3]{x}f\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\\
&\underset{③}{=} (h+k)f(x).
\end{aligned}
$$

よって $h,k\in F$ のとき $h+k\in F$ が成り立つ．

$1\in F$ だから簡単な数学的帰納法で，すべての正の整数 n は $n\in F$ であることが示せる．

(i) $1\in F$ だから $n=1$ のときは成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると $1,k\in F$ だから $k+1\in F$ となる．
よって $n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) よりすべての正の整数 n は $n\in F$ である．

特に $1996\in F$ だから $f(1996x)=1996f(x)$ は成り立つ． ■

問題 38　(Balkan 2013)

Let S be the set of positive real numbers . Find all functions $f : S^3 \to S$ such that , for all positive real numbers x, y, z and k , the following three conditions are satisfied :

(a) $xf(x,y,z) = zf(z,y,x)$,

(b) $f(x,ky,k^2z) = kf(x,y,z)$

(c) $f(1,k,k+1) = k+1$

解 1 $x = k^2x_1, y = ky_1, z = z_1\ (k, x_1, y_1, z_1 > 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} kx_1f\left(k^2x_1, k^2y_1, k^2z_1\right) &= kx_1f\left(x, ky, k^2z\right) \\ &\underset{(b)}{=} k^2x_1f(x,y,z) = xf(x,y,z) \\ &\underset{(a)}{=} zf(z,y,x) = z_1f\left(z_1, ky_1, k^2x_1\right) \\ &\underset{(b)}{=} kz_1f(z_1,y_1,x_1) \\ &\underset{(a)}{=} kx_1f(x_1,y_1,z_1). \end{aligned}$$

よって $f\left(k^2x_1, k^2y_1, k^2z_1\right) = f(x_1,y_1,z_1)$ が成り立ち

$$f(ta,tb,tc) = f(a,b,c) \qquad \forall t,a,b,c > 0. \qquad \cdots\cdots ①$$

①で $t = \dfrac{1}{a}$ とおくと

$$f(a,b,c) = f\left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$$

この式で $kl = \dfrac{b}{a}, k^2(l+1) = \dfrac{c}{a}$ とおくと

$$\frac{c}{a} = k^2(l+1) = k \cdot kl + k^2 = k \cdot \frac{b}{a} + k^2 \qquad k^2 + \frac{b}{a}k - \frac{c}{a} = 0.$$

これを解くと $k = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$.

$k > 0$ だから

$$k = \frac{-b + \sqrt{b^2+4ac}}{2a}.$$

よって

$$\begin{aligned} f(a,b,c) = f\left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) &= f\left(1, kl, k^2(l+1)\right) \\ &\underset{(b)}{=} kf(1,l,l+1) \\ &\underset{(c)}{=} k(l+1) = k^2(l+1)\cdot\frac{1}{k} \\ &= \frac{c}{a}\cdot\frac{2a}{-b+\sqrt{b^2+4ac}} \\ &= \frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a} \end{aligned}$$

から解は

$$f(x,y,z) = \frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2x}. \qquad \blacksquare$$

解 2　$t, k > 0$ とする．$f\left(1, tk, t^2(k+1)\right) \underset{(b)}{=} tf(1,k,k+1) \underset{(c)}{=} t(k+1)$ より

$$f\left(1, tk, t^2(k+1)\right) = t(k+1). \qquad \cdots\cdots ①$$

$a = tk, b = t^2(k+1)$ とおく．$t = \dfrac{a}{k}$ を $b = t^2(k+1)$ に代入すると

$$b = \frac{a^2}{k^2}(k+1) \qquad bk^2 - a^2k - a^2 = 0.$$

$k > 0$ より

$$k = \frac{a\left(a+\sqrt{a^2+4b}\right)}{2b},\ t = \frac{a}{k} = \frac{\sqrt{a^2+4b}-a}{2}.$$

よって

$$f(1,a,b) = f\left(1, tk, t^2(k+1)\right) = tk + t = a + \frac{\sqrt{a^2+4b}-a}{2} = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

(a) で $x = 1, y = a, z = b$ とおくと

$$1\cdot f(1,a,b) = bf(b,a,1)$$

が成り立つので

$$f(b,a,1) = \frac{1}{b}\cdot f(1,a,b) = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}.$$

よって

$$f(b,a,1) = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}. \qquad \cdots\cdots ②$$

$x, y, z > 0$ に対して $k = \sqrt{z}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= f\left(x, \frac{y}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z}, 1 \cdot \left(\sqrt{z}\right)^2\right) = f\left(x, \frac{y}{\sqrt{z}} \cdot k, 1 \cdot k^2\right) \\
&\underset{(b)}{=} kf\left(x, \frac{y}{\sqrt{z}}, 1\right) \\
&\underset{②}{=} \sqrt{z} \cdot \frac{\dfrac{y}{\sqrt{z}} + \sqrt{\dfrac{y^2}{z} + 4x}}{2x} \\
&= \frac{y + \sqrt{y^2 + 4xz}}{2x}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
f(x,y,z) = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4xz}}{2x}. \qquad \blacksquare
$$

問題 39　(Benelux MO 2013)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$

$$f(x+y)+y\leqq f(f(f(x)))$$

解 1

$$f(x+y)+y\leqq f(f(f(x))) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $y=f(f(x))-x$ とおいた

$$f(f(f(x)))+f(f(x))-x\leqq f(f(f(x)))$$

から

$$f(f(x))\leqq x. \qquad \cdots\cdots ②$$

②で x のところを $f(x)$ で置き換えると

$$f(f(f(x)))\leqq f(x).$$

①とこの式から

$$f(x+y)+y\leqq f(f(f(x)))\leqq f(x).$$

よって

$$f(x+y)+y\leqq f(x). \qquad \cdots\cdots ③$$

③で y のところを $y-x$ で置き換えた $f(y)+y-x\leqq f(x)$ から

$$f(y)+y\leqq f(x)+x. \qquad \cdots\cdots ④$$

④で $x=1$ とおいた $f(y)+y\leqq f(1)+1$ から

$$f(x)+x\leqq f(1)+1. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④で $y=1$ とおくと

$$f(1)+1\leqq f(x)+x. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥から $f(x)+x=f(1)+1$ を得る． $a=f(1)+1$ とおくと

$$f(x)=-x+a \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

この式は①を満たす．したがって解は

- $f(x)=-x+a \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

解 2

$$f(x+y)+y \leqq f(f(f(x))) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $y=0$ とおくと

$$f(x) \leqq f(f(f(x))). \qquad \cdots\cdots ②$$

①で x のところを $f(x)$ で置き換え，$y=f(f(f(x)))-f(x)$ とおいた

$$f(f(f(f(x))))+f(f(f(x)))-f(x) \leqq f(f(f(f(x))))$$

から

$$f(f(f(x))) \leqq f(x). \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③より

$$f(f(f(x)))=f(x) \qquad \cdots\cdots ④$$

を得る．④を使うと①は

$$f(x+y)+y \leqq f(x) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となる．

⑤で $x=0$ とおいた $f(y)+y \leqq f(0)$ から

$$f(x)+x \leqq f(0). \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤で $y=-x$ とおいた $f(0)-x \leqq f(x)$ から

$$f(0) \leqq f(x)+x. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑥，⑦から $f(x)+x=f(0)$ を得る． $a=f(0)$ とおくと

$$f(x)=-x+a \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

この式は①を満たす．

したがって解は

- $f(x)=-x+a \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 40　(Baltic Way 2013)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$

$$f(xf(y)+y)+f(-f(x))=f(yf(x)-y)+y$$

解答

$$f(xf(y)+y)+f(-f(x))=f(yf(x)-y)+y \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

①で $x=0$ とおくと

$$f(y)+f(-f(0))=f(yf(0)-y)+y. \qquad \cdots\cdots②$$

②で $y=0$ とおいた $f(0)+f(-f(0))=f(0)$ から

$$f(-f(0))=0.$$

①で $y=0$ とおくと

$$f(xf(0))+f(-f(x))=f(0). \qquad \cdots\cdots③$$

$a=f(0)$ とおくと $f(-a)=0$ で②，③より

$$f(x)=f((a-1)x)+x. \qquad \cdots\cdots④$$

$$f(ax)+f(-f(x))=a. \qquad \cdots\cdots⑤$$

(1) $a=0$ の場合 $f(0)=0$

④，⑤はそれぞれ

$$f(x)=f(-x)+x \qquad \cdots\cdots④'$$

$$f(-f(x))=0 \qquad \cdots\cdots⑤'$$

となる.

⑤$'$ を使うと①は

$$f(xf(y)+y)=f(yf(x)-y)+y \qquad \cdots\cdots①'$$

となる.

①$'$ で $x=-1$ とおくと

$$f(-f(y)+y)=f(yf(-1)-y)+y.$$

④$'$ より $-f(y)+y=f(-y)$ が成り立つから

$$f(-f(y))=f(yf(-1)-y)+y$$

を得る．⑤$'$ を使うと

$$f(yf(-1)-y)+y=0. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$f(-1)=1$ のとき，⑥ は

$$0+y=0 \qquad \forall y\in\mathbb{R}$$

となり適さないので $f(-1)\fallingdotseq 1$ である．

$b=f(-1)-1\fallingdotseq 0$ とおくと，⑥は

$$f(by)=-y \qquad \forall y\in\mathbb{R}$$

となる．$x=by$ とおくと x はすべての実数値を取り得るから

$$f(x)=-\frac{x}{b} \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

$c=-\dfrac{1}{b}$ とおいた $f(x)=cx$ を ⑤$'$ に代入すると

$$-c^2x=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これから $c=0$ を得る．

よって $f(x)=0$ となるが，これは $f(-1)\fallingdotseq 1$ を満たさない．

(2) $a=1$ の場合 $f(0)=1, f(-1)=0$

④から

$$f(x)=f(0)+x \qquad f(x)=x+1.$$

よって

$$f(x)=x+1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

このとき①の左辺は

$$\begin{aligned} f(xf(y)+y)+f(-f(x)) &= xf(y)+y+1-f(x)+1 \\ &= x(y+1)+y+1-(x+1)+1 \\ &= xy+y+1, \end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned} f(yf(x)-y)+y &= yf(x)-y+y+1 \\ &= y(x+1)-y+y+1 \\ &= xy+y+1 \end{aligned}$$

となり，①は成り立つ．

(3) $a \fallingdotseq 0, 1$ の場合

④で $x = -\dfrac{a}{a-1}$ とおくと

$$f\left(-\frac{a}{a-1}\right) = f(-a) - -\frac{a}{a-1} = -\frac{a}{a-1}.$$

$c = -\dfrac{a}{a-1}$ とおくと $f(c) = c$.

①で $x = -a, y = c$ とおくと

$$f(-af(c) + c) + f(-f(-a)) = f(cf(-a) - c) + c,$$

$$f(-ac + c) + f(0) = f(-c) + c \qquad f(a) + a = f(-c) + c.$$

よって

$$f(-c) = f(a) + a - c. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

④で $x = \dfrac{a}{a-1}$ とおいた

$$f\left(\frac{a}{a-1}\right) = f(a) + \frac{a}{a-1}$$

から

$$f(-c) = f(a) - c. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦，⑧より $f(a) + a - c = f(a) - c$ が成り立ち $a = 0$ を得る．これは $a \fallingdotseq 0$ に矛盾する．

(1)，(2)，(3) から解は

- $f(x) = x + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 41　(Brazil 2013)

Find all injective functions $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ from the non-zero reals to the non-zero reals, such that

$$f(x+y)\left(f(x)+f(y)\right)=f(xy)$$

for all non-zero reals x, y such that $x+y \neq 0$.

解 1

$$f(x+y)(f(x)+f(y))=f(xy) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

$x>0$ とする．①で $y=1$ とおくと $f(x+1)(f(x)+f(1))=f(x)$.

$a=f(1)\neq 0$ とおくと

$$f(x+1)=\frac{f(x)}{f(x)+a}. \qquad \cdots\cdots②$$

②を使うと数学的帰納法で

$$f(x+n)=\frac{f(x)}{a^n+\left(\sum_{k=0}^{n-1}a^k\right)f(x)} \qquad \cdots\cdots③$$

が示せる．③で $x=1$ とおくと

$$f(n+1)=\frac{a}{a^n+\left(\sum_{k=0}^{n-1}a^k\right)a}=\frac{1}{a^{n-1}+\left(\sum_{k=0}^{n-1}a^k\right)}. \qquad \cdots\cdots④$$

(1) $|a|>1$ の場合

④から

$$f(n+1)=\frac{1}{a^{n-1}+\dfrac{a^n-1}{a-1}}=\frac{a-1}{2a^n-a^{n-1}-1}.$$

よって

$$f(n)=\frac{a-1}{2a^{n-1}-a^{n-2}-1} \quad (n \geqq 2).$$

この式は $n=1$ のときも成り立つから

$$f(n)=\frac{a-1}{2a^{n-1}-a^{n-2}-1} \qquad \forall n\in\mathbb{N} \qquad \cdots\cdots⑤$$

①で $x=y=n$ とおくと

$$2f(2n)f(n)=f\left(n^2\right). \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑤を使うと

$$
\begin{aligned}
&2\cdot\frac{a-1}{2a^{n-1}-a^{n-2}-1}\cdot\frac{a-1}{2a^{2n-1}-a^{2n-2}-1}\\
=&\frac{a-1}{2a^{n^2-1}-a^{n^2-2}-1}\\
&2\cdot\frac{a-1}{a^{n-1}\left(2-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^{n-1}}\right)}\cdot\frac{a-1}{a^{2n-1}\left(2-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^{2n-1}}\right)}\\
=&\frac{a-1}{a^{n^2-1}\left(2-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^{n^2-1}}\right)}\\
&2\cdot\frac{a-1}{\left(2-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^{n-1}}\right)}\cdot\frac{a-1}{\left(2-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^{2n-1}}\right)}\\
=&\frac{a-1}{a^{n^2-3n+1}\left(2-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^{n^2-1}}\right)}.
\end{aligned}
$$

最後の等式で $n\to\infty$ とすると

$$\text{左辺}\to 2\cdot\left(\frac{a-1}{2-\dfrac{1}{a}}\right)^2,\quad \text{右辺}\to 0$$

となるから

$$2\cdot\left(\frac{a-1}{2-\dfrac{1}{a}}\right)^2=0.$$

$|a|>1$ だからこの等式を満たす a は存在しない.

(2) $|a|<1$ の場合

この場合も⑤, ⑥は成り立つ.

⑤から

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{2a^{n-1}-a^{n-2}-1}=1-a.$$

⑥で $n\to\infty$ とすると

$$2(1-a)^2=1-a \qquad (a-1)(2a-1)=0.$$

よって $a=\dfrac{1}{2}$.

このとき⑤から $f(n)=\dfrac{1}{2}$ となり f が単射 (injectve) であることに矛盾する.

(3) $a=-1$ の場合

②から $f(x+1)=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$.

これを用いると

$$f(x+2)=\frac{f(x+1)}{f(x+1)-1}=\frac{\dfrac{f(x)}{f(x)-1}}{\dfrac{f(x)}{f(x)-1}-1}=f(x)$$

となり f が単射 (injectve) であることに矛盾する.

(4) $a=1$ の場合　$f(1)=1$

③から

$$f(x+n)=\frac{f(x)}{1+nf(x)}.$$

この式で $x=1$ とおくと

$$f(n+1)=\frac{1}{n+1}.$$

$f(1)=1$ なので

$$f(n)=\frac{1}{n}\qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

①で $y=n$ おくと

$$f(nx)=f(x+n)(f(x)+f(n))=\frac{f(x)}{1+nf(x)}\cdot\left(f(x)+\frac{1}{n}\right)=\frac{f(x)}{n}$$

よって

$$f(nx)=\frac{f(x)}{n}\qquad\cdots\cdots ⑦$$

①で $y=x$ とおくと $f(2x)\cdot 2f(x)=f\left(x^2\right)$. ⑦より $f(2x)=\dfrac{f(x)}{2}$ だから

$$\frac{f(x)}{2}\cdot 2f(x)=f\left(x^2\right)\qquad f(x)^2=f\left(x^2\right).$$

最後の式で x のところを $-x$ で置き換えた $f(-x)^2=f\left(x^2\right)$ とあわせて

$$f(x)^2=f(-x)^2\qquad f(-x)\in\{f(x),-f(x)\}.$$

f は単射 (injective) だから

$$f(-x)=-f(x)\qquad \forall x\neq 0.\qquad\cdots\cdots ⑧$$

$\forall x, y \fallingdotseq 0$ に対して $f(xy) = f(x)f(y)$ が成り立つことを示す．
まず $x, y > 0$ の場合を考える．①で y のところを ny で置き換えた

$$f(x+ny)(f(x)+f(ny)) = f(nxy)$$

から

$$f(x+ny) = \frac{f(nxy)}{f(x)+f(ny)} = \frac{\dfrac{f(xy)}{n}}{f(x)+\dfrac{f(y)}{n}} = \frac{f(xy)}{nf(x)+f(y)}.$$

よって

$$f(x+ny) = \frac{f(xy)}{nf(x)+f(y)}. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

①で x のところを $2nxy$，y のところを n^2y^2 で置き換えると

$$\begin{aligned} f(2nxy+n^2y^2) &= \frac{f(2n^3xy^3)}{f(2nxy)+f(n^2y^2)} \\ &= \frac{\dfrac{f(2xy^3)}{n^3}}{\dfrac{f(2xy)}{n}+\dfrac{f(y^2)}{n^2}} \\ &= \frac{f(2xy^3)}{n^2f(2x^3y)+nf(y^2)}. \end{aligned}$$

よって

$$f(2nxyx+n^2y^2) = \frac{f(2xy^3)}{n^2f(2x^3y)+nf(y^2)}. \qquad \cdots\cdots ⑩$$

①で x のところを $2nx^3y$，y のところを $n^2x^2y^2$ で置き換えると

$$\begin{aligned} f(2nx^3y+n^2y^2) &= \frac{f(2n^3x^5y^3)}{f(2nx^3y)+f(n^2x^2y^2)} \\ &= \frac{\dfrac{f(2x^5y^3)}{n^3}}{\dfrac{f(2x^3y)}{n}+\dfrac{f(x^2y^2)}{n^2}} \\ &= \frac{f(2x^5y^3)}{n^2f(2x^3y)+nf(x^2y^2)}. \end{aligned}$$

よって

$$f(2nx^3y+n^2y^2) = \frac{f(2x^5y^3)}{n^2f(2x^3y)+nf(x^2y^2)}. \qquad \cdots\cdots ⑪$$

①で x のところを x^2，y のところを $2nxy+n^2y^2$ で置き換えて⑩，⑪を用いると

$$\begin{aligned}
&f\left(x^2+2nxy+n^2y^2\right)\\
=&\frac{f(2nx^3y+n^2x^2y^2)}{f(x^2)+f(2nxy+n^2y^2)}\\
=&\frac{\dfrac{f(2x^5y^3)}{n^2f(2x^3y)+nf(x^2y^2)}}{f(x^2)+\dfrac{f(2xy^3)}{n^2f(2x^3y)+nf(y^2)}}\\
=&\frac{f(2x^5y^3)\left(nf(2xy)+f\left(y^2\right)\right)}{\left(nf(2x^3y)+f(x^2y^2)\right)\left(n^2f\left(x^2\right)f(2xy)+nf\left(x^2\right)f\left(y^2\right)+f\left(2xy^3\right)\right)}.
\end{aligned}$$

$f(x^2)=f(x)^2$ と⑨を用いると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})&=f\left(x^2+2nxy+n^2y^2\right)=f\left((x+ny)^2\right)\\
&=f(x+ny)^2\\
&=\left(\frac{f(xy)}{nf(x)+f(y)}\right)^2
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
&\frac{f(2x^5y^3)\left(nf(2xy)+f\left(y^2\right)\right)}{\left(nf(2x^3y)+f(x^2y^2)\right)\left(n^2f\left(x^2\right)f(2xy)+nf\left(x^2\right)f\left(y^2\right)+f\left(2xy^3\right)\right)}\\
=&\frac{f(xy)^2}{n^2f(x)^2+2nf(x)f(y)+f(y)^2}
\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
&f(2x^5y^3)\left(nf(2xy)+f\left(y^2\right)\right)\left(n^2f(x)^2+2nf(x)f(y)+f(y)^2\right)\\
=&f(xy)^2\left(nf(2x^3y)+f(x^2y^2)\right)\left(n^2f\left(x^2\right)f(2xy)+nf\left(x^2\right)f\left(y^2\right)+f\left(2xy^3\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots(\bigstar)$$

が成り立つ．

$(\bigstar)$ は任意の自然数 n について成り立ち，両辺は n についての 3 次式だから n についての恒等式となる．

n^3 の係数を比較すると

$$f\left(2x^5y^3\right)f\left(2xy\right)f\left(x\right)^2=f\left(xy\right)^2f\left(2x^3y\right)f\left(x^2\right)f\left(2xy\right)$$

から

$$f\left(2x^5y^3\right)=f\left(2x^3y\right)f\left(x^2y^2\right).$$

⑦を使うと $\dfrac{f\left(x^5y^3\right)}{2} = \dfrac{f\left(x^3y\right)}{2} f\left(x^2y^2\right)$ となるから

$$f\left(x^5y^3\right) = f\left(x^3y\right) f\left(x^2y^2\right) \qquad \forall x, y > 0. \qquad \cdots\cdots ⑫$$

$\forall u, v > 0$ に対して $x = \sqrt[4]{\dfrac{u^3}{v}}, y = \sqrt[4]{\dfrac{v^3}{u^2}}$ とおくと $u = x^3y, v = x^2y^2, uv = x^5y^3$ なので⑫から

$$f(uv) = f(u)f(v) \qquad \forall u, v > 0.$$

$f(x)$ は奇関数だから

$$f(xy) = f(x)f(y) \qquad \forall x, y \fallingdotseq 0 \qquad \cdots\cdots ⑬$$

を得る．

①，⑬から

$$f(x+y)\left(f(x)+f(y)\right) = f(xy) = f(x)f(y).$$

両辺を $f(x+y)f(x)f(y)$ で割ると

$$\frac{1}{f(x+y)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}$$

を得る．$F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ とおくと

$$F(x+y) = F(x) + F(y) \quad \forall x, y \fallingdotseq 0. \qquad \cdots\cdots (*)$$

また $f\left(x^2\right) = f(x)^2 > 0$ から $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$ なので

$$F(x) > 0 \qquad \forall x > 0$$

が成り立つ．

コーシーの関数方程式を満たし，$(*)$ が成立するから $F(x) = kx$ となる．

$F(1) = \dfrac{1}{f(1)} = 1$ より $k = 1$.

よって

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

このとき

$$f(x+y)\left(f(x)+f(y)\right) = \frac{1}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{xy} = f(xy)$$

となり①は成り立つ．

(1)，(2)，(3)，(4) から解は

- $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$

である． ■

解 2

$$f(x+y)(f(x)+f(y)) = f(xy) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $x=y=1$ とおいた $f(2)\cdot 2f(1) = f(1)$ から $f(2) = \dfrac{1}{2}$.

①で $x=y=-1$ とおくと

$$2f(-2)f(-1) = f(1). \qquad \cdots\cdots ②$$

①で $x=-1, y=2$ とおいた $f(1)\left(f(-1)+f(2)\right) = f(-2)$ から

$$f(1)\left(f(-1)+\frac{1}{2}\right) = f(-2). \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③からを消去すると

$$f(1)\left(f(-1)+\frac{1}{2}\right) = \frac{f(1)}{2f(-1)} \qquad 2f(-1)^2+f(-1)-1=0,$$

$$\left(2f(-1)-1\right)\left(f(-1)+1\right)=0 \qquad f(-1)\in\left\{\frac{1}{2},-1\right\}.$$

f は単射 (injective) で $f(2)=\dfrac{1}{2}$ だから $f(-1)\neq\dfrac{1}{2}$．よって $f(-1)=-1$.

$g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ を $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ で定義する．①を g で書き直すと

$$g(x+y)g(x)g(y) = g(xy)\left(g(x)+g(y)\right) \qquad \cdots\cdots ①'$$

で $g(-1)=-1$, $g(2)=2$.

①′ で $y=1$ とおいた $g(x+1)g(x)g(1) = g(x)\left(g(x)+g(1)\right)$ から

$$g(x+1) = \frac{g(x)}{g(1)}+1. \qquad \cdots\cdots ④$$

①′ で $y=-1$ とおいた $g(x-1)g(x)g(-1) = g(-x)\left(g(x)+g(-1)\right)$ から

$$-g(x-1)g(x) = g(-x)\left(g(x)-1\right). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④で x のところを $x-1$ で置き換えると $g(x-1)=g(1)\left(g(x)-1\right)\neq 0$ でこの式を⑤の左辺に代入した $-g(1)\left(g(x)-1\right)g(x) = g(-x)\left(g(x)-1\right)$ から

$$g(-x) = -g(1)g(x) \qquad \forall x\neq 0,1. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥で x のところを $-x$ で置き換えると

$$g(x) = -g(1)g(-x) \qquad \forall x \neq 0, -1. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑥ × ⑦ から $1 = g(1)^2$ すなわち $g(1) \in \{1, -1\}$.
g は単射 (injective) で $g(-1) = -1$ だから $g(1) \neq -1$．よって $g(1) = 1$.
⑥は

$$g(-x) = -g(x) \qquad \forall x \neq 0, 1$$

となる．
この式は $x = 1$ のときも成り立つから

$$g(-x) = -g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

④は

$$g(x+1) = g(x) + 1 \qquad \forall x \neq -1, 0.$$

また，この式を使うと，$g(-1) = -1, g(1) = 1$ だから

$$g(n) = n \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

が得られる．
数学的帰納法を使うと，$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して

$$g(x+n) = g(x) + n \qquad \forall x \neq -n, 0 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

が得られる．
$x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ のとき，①$'$ で $x = q$ とおき y のところを x で置き換えると

$$g(q+x)g(q)g(x) = g(qx)\left(g(q) + g(x)\right) \qquad \left(g(x) + q\right) q \cdot g(x) = p\left(q + g(x)\right).$$

よって $g(x) = \dfrac{p}{q} = x$ から

$$g(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^*.$$

①$'$ で $y = n \in \mathbb{Z}^*$ とおいた $g(x+n)g(x)g(n) = g(nx)\left(g(x) + g(n)\right)$ から

$$\left(g(x) + g(n)\right) g(x) n = g(nx)\left(g(x) + g(n)\right)$$

よって

$$g(nx) = ng(x) \qquad \cdots\cdots ⑩$$

$r=\dfrac{p_1}{q_1}\in\mathbb{Q}^*$ のとき

$$q_1 g(x+r) \underset{⑩}{=} g(q_1x+q_1r)=g(q_1x+p_1) \underset{⑨}{=} g(q_1x)+p_1 \underset{⑩}{=} q_1g(x)+p_1$$

から

$$g(x+r)=\frac{q_1g(x)+p_1}{q_1}=g(x)+r.$$

よって $r\in\mathbb{Q}^*$ のとき

$$g(x+r)=g(x)+r \qquad \forall x \fallingdotseq -r,0 \qquad \cdots\cdots ⑪$$

が成り立つ．

①$'$ で $y=x$ おくと

$$g(2x)g(x)^2=g\left(x^2\right)\cdot 2g(x),$$

$$2g(x)\cdot g(x)^2=g\left(x^2\right)\cdot 2g(x).$$

よって $g\left(x^2\right)=g(x)^2$ を得るから

$$g(x)\geqq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}^* \qquad \cdots\cdots ⑫$$

が成り立つ．

$$g(x)=x \qquad \forall x>0$$

が成り立つことを示す．

$g(x)<x$ とすると $g(x)<r<x$ となる有理数 r が存在する．このとき⑪，⑫を使うと

$$r>g(x)=\underbrace{g(x-r)}_{\geqq 0}+r\geqq r$$

となり矛盾が生じる．

$g(x)>x$ とすると $g(x)>r>x$ となる有理数 r が存在する．このとき⑪，⑫を使うと

$$r<g(x)=g(x-r)+r=\underbrace{-g(r-x)}_{\leqq 0}+r\leqq r$$

となり矛盾が生じる．

したがって

$$g(x)=x \qquad \forall x>0$$

がいえた.

$f(x)$ は奇関数だから

$$g(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

がいえる.

これは ①$'$ を満たす.

したがって解は

- $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$

である. ■

問題 42　(ELMO Shortlist 2013)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)+f(y)=f(x+y)$$

and

$$f\left(x^{2013}\right)=f(x)^{2013}$$

解答

$$f(x)+f(y)=f(x+y) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$f\left(x^{2013}\right)=f(x)^{2013} \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく．

②で $x=1$ とおいた $f(1)=f(1)^{2013}$ から

$$f(1)\in\{0,1,-1\}.$$

①から

$$f(qx)=qf(x) \qquad \forall q\in\mathbb{Q},\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

②で x のところを $x+q$ で置き換えると $f\left((x+q)^{2013}\right)=f(x+q)^{2013}$.

$$\begin{aligned}
&(\text{左辺})\\
&=f\left((x+q)^{2013}\right)\\
&=f\left(x^{2013}+2013x^{2012}q+{}_{2013}\mathrm{C}_2x^{2011}q^2+\cdots+{}_{2013}\mathrm{C}_rx^{2013-r}q^r+\cdots+q^{2013}\right)\\
&=f(x)^{2013}+2013qf(x)^{2012}+{}_{2013}\mathrm{C}_2q^2f(x)^{2011}+\cdots\\
&\qquad\qquad+{}_{2013}\mathrm{C}_rq^rf(x)^{2013-r}+\cdots+q^{2013}f(1), \qquad \cdots\cdots ④\\
&(\text{右辺})\\
&=f(x+q)^{2013}\\
&=(f(x)+f(q))^{2013}\\
&=f(x)^{2013}+2013f(x)^{2012}f(q)+{}_{2013}\mathrm{C}_2f(x)^{2011}f\left(q^2\right)+\cdots\\
&\qquad\qquad+{}_{2013}\mathrm{C}_rf(x)^{2013-r}f\left(q^r\right)+\cdots+f\left(q^{2013}\right)\\
&=f(x)^{2013}+2013qf(1)f(x)^{2012}+{}_{2013}\mathrm{C}_2q^2f\left(1\right)f(x)^{2011}+\cdots\\
&\qquad\qquad+{}_{2013}\mathrm{C}_rq^rf\left(1\right)f(x)^{2013-r}+\cdots+q^{2013}f\left(1\right)^{2013}. \qquad \cdots\cdots ⑤
\end{aligned}$$

④ = ⑤ から得られる等式

$$\begin{aligned} & f(x)^{2013}+2013qf(x)^{2012}+{}_{2013}\mathrm{C}_2 q^2 f(x)^{2011}+\cdots \\ & \qquad +{}_{2013}\mathrm{C}_r q^r f(x)^{2013-r}+\cdots+q^{2013}f(1) \\ = {} & f(x)^{2013}+2013qf(1)f(x)^{2012}+{}_{2013}\mathrm{C}_2 q^2 f(1)\,f(x)^{2011}+\cdots \\ & \qquad +{}_{2013}\mathrm{C}_r q^r f(1)\,f(x)^{2013-r}+\cdots+q^{2013}\underbrace{f(1)^{2013}}_{=f(1)} \end{aligned}$$

において，x を固定すると，q は任意の有理数だから q についての恒等式である．
係数を比較すると ${}_{2013}\mathrm{C}_s f\left(x^{2013-s}\right)={}_{2013}\mathrm{C}_s f(1)\,f(x)^{2013-s}$ $(1 \leqq s \leqq 2012)$ から

$$f\left(x^{2013-s}\right)=f(1)\,f(x)^{2013-s} \quad (1 \leqq s \leqq 2012). \qquad \cdots\cdots ⑥$$

(1) $f(1)=0$ の場合

⑥から

$$f\left(x^{2013-s}\right)=0 \quad (1 \leqq s \leqq 2012).$$

$s=2012$ のときを考えると　$f(x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ を得る．

これは①，②を満たす．

(2) $f(1)=1$ の場合

⑥から

$$f\left(x^{2013-s}\right)=f(x)^{2013-s} \quad (1 \leqq s \leqq 2012).$$

$s=2011$ のときを考えると

$$f\left(x^2\right)=f(x)^2 \geqq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

となるから

$$f(x) \geqq 0 \qquad \forall x \geqq 0.$$

③で $x=1$ とおくと

$$f(q)=q \qquad \forall q \in \mathbb{Q}$$

が成り立つ．

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h(h>0)$ に対して①より $f(x+h)=f(x)+f(h)$ が成り立つから

$$f(x+h)-f(x)=f(h) \geqq 0 \qquad f(x+h) \geqq f(x).$$

よって $f(x)$ は非減少関数である．

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して，$p_n \leqq x \leqq q_n$, $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = x$ を満たす有理数列 $\{p_n\}$,$\{q_n\}$ をとると $f(x)$ は非減少関数であるから

$$p_n = f(p_n) \leqq f(x) \leqq f(q_n) = q_n.$$

この式で $n \to \infty$ とすると

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

を得る．

これは①，②を満たす．

(3) $f(1) = -1$ の場合

⑥から

$$f\left(x^{2013-s}\right) = (-1)^s f(x)^{2013-s} \quad (1 \leqq s \leqq 2012).$$

$s = 2011$ のときを考えると　$f\left(x^2\right) = -f(x)^2 \leqq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ となるから

$$f(x) \leqq 0 \qquad \forall x \geqq 0.$$

ここで $g(x) = -f(x)$ とおくと，（2）と同様にして $g(x) = x$ を得るから

$$f(x) = -x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

がいえる．

これは①，②を満たす．

(1)，(2)，(3) から解は次の 3 つとなる．

- $f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$
- $f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R},$
- $f(x) = -x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$ ■

問題 43　(Austrian Federal Competition 2013)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying following conditions:

(a)　$f(x)\geqq 0$ for all $x\in\mathbb{R}$

(b)　For $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ with $ab+bc+cd=0$, equality $f(a-b)+f(c-d)=f(a)+f(b+c)+f(d)$ holds.

解 1　(b) で $a=b=c=d=0$ とおいた $2f(0)=3f(0)$ から $f(0)=0$.
(b) で $a=b=c=0$ とおいた $f(0)+f(-d)=f(0)+f(0)+f(d)$ から $f(-d)=f(d)$.
よって $f(x)$ は偶関数である.

$z=-a, x=b, y=c, t=-d$ とおくと $ab+bc+cd=0$ は $(-z)\cdot x+x\cdot+y\cdot(-t)=0$ すなわち

$$xz+yt=xy \qquad \cdots\cdots ①$$

となり，（b）の等式は $f(-z-x)+f(y+t)=f(-z)+f(x+y)+f(-t)$ すなわち

$$f(x+z)+f(y+t)=f(z)+f(t)+f(x+y) \qquad \cdots\cdots ②$$

となる.

$y=x, t=x-z$ とおくと $xz+yt=xz+x(x-z)=x^2=xy$ となり①が成り立つので，②より

$$f(x+z)+f(2x-z)=f(z)+f(x-z)+f(2x). \qquad \cdots\cdots ③$$

③で $z=-x$ とおいた $f(0)+f(3x)=f(-x)+f(2x)+f(2x)$ から

$$f(3x)=2f(2x)+f(x). \qquad \cdots\cdots ④$$

③で $z=-2x$ とおくと

$$f(-x)+f(4x)=f(-2x)+f(3x)+f(2x) \qquad f(x)+f(4x)=f(2x)+f(3x)+f(2x)$$

よって

$$\begin{aligned} f(4x) &= 2f(2x)+\underbrace{f(3x)-f(x)}_{=2f(2x)} \\ &= 2f(2x)+2f(2x) \\ &= 4f(2x) \end{aligned}$$

から

$$f(2x)=4f(x). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

⑤を使うと④は

$$f(3x) = 9f(x) \qquad \cdots\cdots ④'$$

となる．

数学的帰納法で

$$f(nx) = n^2 f(x) \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを示す．

(i) $n = 1, 2, 3$ のとき成り立つ．

(ii) $n \leqq k\,(k \geqq 3)$ のとき成り立つと仮定する．

③で $z = kx$ とおくと

$$\begin{aligned}
f\left((k+1)x\right) + f\left(-(k-2)x\right) &= f\left(kx\right) + f\left(-(k-1)x\right) + f\left(2x\right) \\
f\left((k+1)x\right) + f\left((k-2)x\right) &= f\left(kx\right) + f\left((k-1)x\right) + f\left(2x\right) \\
f\left((k+1)x\right) + (k-2)^2 f\left(x\right) &= k^2 f\left(x\right) + (k-1)^2 f\left(x\right) + 4f\left(x\right).
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
f\left((k+1)x\right) &= \left(k^2 + (k-1)^2 - (k-2)^2 + 4\right) f(x) \\
&= (k^2 + 2k + 1) f(x) \\
&= (k+1)^2 f(x)
\end{aligned}$$

となり $n = k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) よりすべての自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ．

$\forall x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}\,(q > 0)$ に対して $f\left(q \cdot \dfrac{p}{q}\right) = q^2 f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ だから

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q^2} f(p) = \frac{1}{q^2} \cdot p^2 f(1) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 f(1) = x^2 f(1).$$

よって

$$f(x) = x^2 f(1) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

②で $t = \dfrac{xy - xz}{y}$ とおくと

$$f(x+z) + f\left(y + \frac{xy - xz}{y}\right) = f(z) + f\left(\frac{xy - xz}{y}\right) + f(x+y). \qquad \cdots\cdots ⑦$$

$y + \dfrac{xy - xz}{y} = -\dfrac{xy - xz}{y} \Longleftrightarrow y^2 + 2xy - 2xz = 0$ である．

$\forall x, z > 0$ に対して $y^2 + 2xy - 2xz = 0$ の正の解を y とおく．
すなわち $y = -x + \sqrt{x^2 + 2xz}$ とおくと $f\left(y + \dfrac{xy - xz}{y}\right) = f\left(\dfrac{xy - xz}{y}\right)$ が成り立つから，⑦は

$$f(x+z) = f(x+y) + f(z)$$

となり (a) から $f(x+z) - f(z) = f(x+y) \geqq 0$.
よって $f(x)$ は $(0, \infty)$ で非減少関数である．

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して，$p_n \leqq x \leqq q_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = x$ を満たす有理数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ をとると $f(x)$ は非減少関数であるから

$$p_n^2 f(1) = f(p_n) \leqq f(x) \leqq f(q_n) = q_n^2 f(1).$$

この式で $n \to \infty$ とすると

$$f(x) = x^2 f(1) \qquad \forall x > 0$$

を得る．

$f(x)$ は偶関数だから $x < 0$ のときも

$$f(x) = f(-x) = (-x)^2 f(1) = x^2 f(1)$$

となり

$$f(x) = x^2 f(1) \qquad \forall x \fallingdotseq 0.$$

$f(0) = 0$ より

$$f(x) = x^2 f(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$k = f(1) \geqq 0$ とおくと，$k \geqq 0$ で

$$f(x) = kx^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき (a) は成り立ち，(b) については

$$\begin{aligned}
f(a-b) + f(c-d) &= k\left((a-b)^2 + (c-d)^2\right) \\
&= k\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\underbrace{(-ab-cd)}_{=bc}\right) \\
&= k\left(a^2 + (b+c)^2 + c^2 + d^2\right) \\
&= f(a) + f(b+c) + f(d)
\end{aligned}$$

より成り立つ.

したがって解は

$k\,(\geqq 0)$ を定数として

- $f(x) = kx^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である. ■

解 2 (b) で $a=b=c=d=0$ とおいた $2f(0)=3f(0)$ から $f(0)=0$.
(b) で $a=b=c=0$ とおいた $f(0)+f(-d)=f(0)+f(0)+f(d)$ から $f(-d)=f(d)$.
よって $f(x)$ は偶関数である.

$c \fallingdotseq 0$ とする. $ab+bc+cd=0$ から $d=-\dfrac{ab}{c}-b$.

$a-b=b+c$ になるように $a=2b+c$ とおくと $d=-\dfrac{(2b+c)b}{c}-b=-\dfrac{2b^2}{c}-2b$.
$k=\dfrac{b}{c}$ とおくと

$$a=2b+c=2ck+c=2k(c+1),\quad d=-\frac{2b^2}{c}-2b=-2ck^2-2ck=-2ck(k+1).$$

これらを (b) の等式に代入すると

$$f\left((2k^2+2k+1)c\right)=f\left((2k+1)c\right)+f\left(-2k(k+1)c\right)$$

から

$$f\left((2k^2+2k+1)c\right)=f\left((2k+1)c\right)+f\left(2k(k+1)c\right). \qquad \cdots\cdots ①$$

$\forall x,y\,(xy \fallingdotseq 0)$ に対して $x=(2k+1)c, y=2k(k+1)c$ を満たす $k,c\,(c \fallingdotseq 0)$ が存在するかどうかを調べる.

$x \fallingdotseq 0, y \fallingdotseq 0$ から $k \fallingdotseq 0, -\dfrac{1}{2}-1$ でこのとき

$$\frac{y}{x}=\frac{2k^2+2k}{2k+1}.$$

$t=\dfrac{y}{x}$ とおくと

$$2k^2+2(1-t)k-t=0. \qquad \cdots\cdots ②$$

$f_1(k)=2k^2+2(1-t)k-t$ とおくと

$$f_1(0)=-t \fallingdotseq 0,\ f_1\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2} \fallingdotseq 0,\ f_1(-1)=t \fallingdotseq 0,$$

$$\frac{D}{4}=(1-t)^2+2t=t^2+1>0.$$

したがって ②は $0, -\dfrac{1}{2} - 1$ 以外の異なる 2 つの実数解をもつ．

この実数解の一つを k_0 とし $c = \dfrac{x}{2k_0+1}$ とおくと

$$y = \frac{2k_0^2+2k_0}{2k_0+1}x_0 = \frac{2k_0^2+2k_0}{2k_0+1}(2k_0+1)c = \left(2k_0^2+2k_0\right)c$$

で

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (2k_0+1)^2c^2 + \left(2k_0^2+2k_0\right)^2 c^2 \\ &= \left(2k_0^2+2k_0+1\right)c^2. \end{aligned}$$

よって

$$2k_0^2+2k_0+1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

$f(x)$ は偶関数だから $f\left(2k_0^2+2k_0+1\right) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. よって①から

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)+f(y) \qquad \forall x, y\,(xy \neq 0) \qquad \cdots\cdots ③$$

$y=0$ のとき $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f\left(|x|\right) \underset{f\text{ は偶関数}}{=} f(x)+f(0) = f(x)+f(y)$.
$x=0$ のときも同様にして $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)+f(y)$ が成り立つから

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)+f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ④$$

④と (a) から

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - f(x) = f(y) \geqq 0.$$

$\forall x \geqq 0, \forall h > 0$ に対して $\sqrt{x^2+y^2} = x+h$ とおくと $x^2+y^2 = (x+h)^2 = x^2+2hx+h^2$ から $y = \sqrt{2hx+h^2} > 0$ となるので

$$f\left(x+h\right) - f(x) = f(y) \geqq 0.$$

よって $f(x)$ は $[0, \infty)$ で非減少関数である．
　$g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ を $g(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$ で定義すると，④より

$$g\left(x^2+y^2\right) = g\left(x^2\right) + g\left(y^2\right)$$

すなわち

$$g(x+y) = g(x)+g(y) \qquad \forall x, y \geqq 0.$$

また $g(0)=0$ で $g(x)$ は $[0,\infty)$ で非減少関数である．

g はコーシーの関数方程式を満たし，$g(x)$ は $[0,\infty)$ で非減少関数であるから，$\forall x \geqq 0$ に対して $g(x)=kx$ すなわち

$$f(x)=kx^2 \qquad \forall x \geqq 0$$

となる．

$f(x)$ は偶関数だから $x<0$ のとき

$$f(x)=f(-x)=k(-x)^2=kx^2.$$

よって

$$f(x)=kx^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$k=f(1)\geqq 0$ より $k \geqq 0$ である．

このとき (a) は成り立ち，(b) については

$$\begin{aligned}
f(a-b)+f(c-d) &= k\left((a-b)^2+(c-d)^2\right) \\
&= k\left(a^2+b^2+c^2+d^2+2\underbrace{(-ab-cd)}_{=bc}\right) \\
&= k\left(a^2+(b+c)^2+c^2+d^2\right) \\
&= f(a)+f(b+c)+f(d)
\end{aligned}$$

より成り立つ．

したがって解は

$k\,(\geqq 0)$ を定数として

- $f(x)=kx^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 44　(Austrian Federal Competition 2013)

Let k be an integer. Determine all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ with $f(0)=0$ and

$$f\left(x^k y^k\right) = xyf(x)f(y) \quad \text{for}\, x, y \neq 0$$

解答

$$f\left(x^k y^k\right) = xyf(x)f(y) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $x=y=1$ とおいた $f(1)=f(1)^2$ から

$$f(1)\in\{0,1\}. \qquad \cdots\cdots ②$$

①で $x=y=-1$ とおくと

$$f(1)=f(-1)^2. \qquad \cdots\cdots ③$$

①で $x=1, y=-1$ とおいた $f\left((-1)^k\right) = -f(1)f(-1) \underset{③}{=} -f(-1)^3$ から

$$f\left((-1)^k\right) = -f(-1)^3. \qquad \cdots\cdots ④$$

①で $y=x$ とおくと

$$f\left(x^{2k}\right) = (xf(x))^2. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

①で $y=1$ とおくと

$$f\left(x^k\right) = xf(x)f(1). \qquad \cdots\cdots ⑥$$

(1) k が奇数の場合

④から

$$f(-1) = -f(-1)^3 \qquad f(-1)\left(f(-1)^2+1\right)=0.$$

よって $f(-1)=0$. これを使うと③から $f(1)=0$.

⑥から $f\left(x^k\right)=0$. x^k はすべての実数値を取り得るから

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たす．

(2) k が偶数で $f(1)=0$ の場合

③から $f(-1)=0$.

⑥から $f\left(x^k\right)=0$. x^k は 0 以上のすべての実数値を取り得るから

$$f(x)=0 \qquad \forall x \geqq 0.$$

⑤から

$$0 = f\left(x^{2k}\right) = (xf(x))^2 \qquad xf(x) = 0.$$

$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) = 0$ となるが $f(0) = 0$ だから

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(3) k が偶数で $f(1) = 1$ の場合

④から

$$f(1) = -f(-1)^3 \qquad 1 = -f(-1)^3 \qquad f(-1) = -1.$$

⑥から

$$f\left(x^k\right) = xf(x). \qquad \cdots\cdots ⑥'$$

⑥$'$ を使うと

$$f\left(x^k y^k\right) = f\left((xy)^k\right) = xyf\left(xy\right).$$

また①より $f\left(x^k y^k\right) = xyf(x)f(y)$ だから

$$xyf(xy) = xyf(x)f(y)$$

が成り立つ．$xy \fallingdotseq 0$ だから

$$f(xy) = f(x)f(y) \qquad \forall x, y(xy \fallingdotseq 0).$$

$f(0) = 0$ だからこの等式は $x = 0$ または $y = 0$ のときも成り立つので

$$f(xy) = f(x)f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

$f(a) = 0$ となる $a \fallingdotseq 0$ が存在すれば，⑦で $x = a, y = \dfrac{1}{a}$ とおくと

$$f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a)f\left(\frac{1}{a}\right) \qquad f(1) = 0$$

となり $f(1) = 1$ に矛盾する．

したがって

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦で $y = x^{k-1}$ とおくと $f\left(x^k\right) = f(x)f\left(x^{k-1}\right)$.

左辺に ⑥$'$ を用いると $xf\left(x\right) = f(x)f\left(x^{k-1}\right)$.

⑧より $x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) \fallingdotseq 0$ だから

$$f\left(x^{k-1}\right) = x \qquad \forall x \fallingdotseq 0.$$

$f(0)=0$ だからこの等式は $x=0$ のときも成り立つ．
よって
$$f\left(x^{k-1}\right)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$
$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $x=t^{\frac{1}{k-1}}$ $\left(x^{k-1}=t\right)$ とおくと $f(t)=t^{\frac{1}{k-1}}$．
よって
$$f(x)=x^{\frac{1}{k-1}} \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

このとき
$$f\left(x^k y^k\right)=x^{\frac{k}{k-1}}\cdot y^{\frac{k}{k-1}}=x\cdot x^{\frac{1}{k-1}}\cdot y\cdot y^{\frac{1}{k-1}}=xyf(x)f(y)$$
となり①は成り立つ．

(1)，(2)，(3) より解は

- $f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

と

- k は偶数で，
  $f(x)=x^{\frac{1}{k-1}} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 45　(IMO 2013)

Let $\mathbb{Q}_{>0}$ be the set of all positive rational numbers. Let $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ be a function satisfying three conditions:

(i)　for all $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, $f(x)f(y) \geqq f(xy)$;
(ii)　for all $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, $f(x+y) \geqq f(x) + f(y)$;
(iii)　there exists a rational number $a > 1$ such that $f(a) = a$.

Prove that $f(x) = x$ for all $x \in \mathbb{Q}_{>0}$

解答　(i) で $x = 1, y = a$ とおくと

$$f(1)f(a) \geqq f(a) \qquad f(1) \cdot a \geqq a.$$

$a > 1$ だから $f(1) \geqq 1$.
数学的帰納法で

$$f(n) \geqq n \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示す.

(1) $n = 1$ のときは成り立つ.

(2) n のとき成り立つと仮定する. (ii) で $x = n, y = 1$ とおくと

$$f(n+1) = f(n) + f(1) \geqq n + 1$$

となり $n+1$ のときも成り立つ.

(1), (2) からすべての自然数 n について $f(n) \geqq n$ が成り立つ.
$p, q \in \mathbb{N}$ のとき (i) と①を使うと

$$f\left(\frac{p}{q}\right) f(q) \geqq f(p) \geqq p > 0$$

から

$$f\left(\frac{p}{q}\right) > 0 \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

よって

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}_{>0}.$$

これと (ii) を使うと $\forall x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して

$$f(x+y)-f(x)=f(y)>0 \qquad f(x+y)>f(x).$$

したがって $f(x)$ は狭義の増加関数である．

(i) で $x=y=a$ とおくと $f(a^2) \leqq f(a)^2 = a^2$ だから帰納的に

$$f\left(a^k\right) \leqq a^k \quad k \in \mathbb{N} \qquad \cdots\cdots②$$

がいえる．

また (ii) で $x=y=a$ とおくと $f(2a) \geqq 2f(a) = 2a$ だから帰納的に

$$f\left(ka\right) \geqq ka \quad k \in \mathbb{N} \qquad \cdots\cdots③$$

がいえる．

同様にして (ii) で $y=x$ とおくと $f(2x) \geqq 2f(x)$ だから帰納的に

$$f\left(kx\right) \geqq kf(x) \quad k \in \mathbb{N} \qquad \cdots\cdots④$$

がいえる．

$$f(ka)=ka \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \cdots\cdots(*)$$

であることを示す．

もしも $f(la)>la$ となる $l \in \mathbb{N}$ が存在したとする．$\alpha = f(la)-la>0$ とおく．

$m \in \mathbb{N}$ とすると

$$f(mla) \geqq mf(la) = m(\alpha + la) = mla + m\alpha.$$

m を $m\alpha > a$ となるようにとると

$m \in \mathbb{N}$, $m > \dfrac{a}{\alpha}$ のとき

$$f(mla) \geqq mla + m\alpha = mla + a. \qquad \cdots\cdots⑤$$

$a>1$ だから $\left[a^k\right] > ml$ が成り立つような $k \in \mathbb{N}$ が存在する．

(ii) から

$$\begin{aligned}
a^{k+1} &\underset{②}{\geqq} f\left(a^{k+1}\right) = f\left(a^k \cdot a\right) \\
&\underset{a^k \cdot a \geqq [a^k] \cdot a,\ f \text{ は増加関数}}{\geqq} f\left(\left[a^k\right] \cdot a\right) = f\left(\left(\left[a^k\right] - ml\right)a + mla\right) \\
&\underset{③,⑤}{\geqq} \left(\left[a^k\right] - ml\right)a + mla + a \\
&= \left[a^k\right]a + a.
\end{aligned}$$

よって $a^{k+1} \geqq \left[a^k\right] a + a$ から $a^k \geqq \left[a^k\right] + 1$ すなわち $\left[a^k\right] \leqq a^k - 1$.
これは $a^k - 1 < \left[a^k\right]$ に矛盾する.
よっては $(*)$ 成り立つ.
　$a = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{>0}$ とおくと

$$f\left(k \cdot \frac{p}{q}\right) = k \cdot \frac{p}{q} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

k のところを qk で置き換えると

$$f(kp) = kp \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(ii) を繰り返し使うと

$$\begin{aligned} kp = f(kp) &= f(k + (p-1)k) \\ &\geqq f(k) + f((p-1)k) = f(k) + f(k + (p-2)k) \\ &\geqq f(k) + f(k) + f((p-2)k) = f(k) + f((p-2)k) \\ &\geqq \cdots\cdots \\ &\geqq pf(k) \end{aligned}$$

から $f(k) \leqq k$ を得る.
$f(k) \geqq k$ であったから

$$f(k) = k \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

　$\forall x \in \mathbb{Q}_{>0}, \forall n \in \mathbb{N}$ に対して，(i) で $y = n$ とおき⑤を使うと $f(x)f(n) \geqq f(nx)$ から $nf(x) \geqq f(nx)$ を得る.
④より $f(nx) \geqq nf(x)$ であったから

$$f(nx) = nf(x) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}_{>0}, \forall n \in \mathbb{N} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

　$\forall x = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して，⑥より $f(r) = f\left(s \cdot \dfrac{r}{s}\right) = sf\left(\dfrac{r}{s}\right) = sf(x)$ が成り立つので

$$f(x) = \frac{1}{s} f(r) = \frac{r}{s} = x.$$

よって

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{Q}_{>0}. \qquad ■$$

問題 46　(IMO Shortlist 2013)

Let $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ be the set of all non-negative integers. Find all the functions $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ satisfying the relation

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1$$

for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

解答　$h(x)$ に対して $h^n(x)$ を次のように定義しておく.

$h^0(x) = x$, $h^1(x) = h(x)$. $n \geqq 1$ のとき $h^{n+1}(x) = h\left(h^n(x)\right)$.

$$f^3(n) = f(n+1) + 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく.

①より

$$f^4(n) = f\left(f^3(n)\right) = f\left(f(n+1)+1\right) \qquad f^4(n) + 1 = f\left(f(n+1)+1\right) + 1.$$

①で n のところを $f(n+1)$ で置き換えると

$$f^3\left(f(n+1)\right) = f\left(f(n+1)+1\right) + 1 \qquad f^4\left(n+1\right) = f\left(f(n+1)+1\right) + 1.$$

よって

$$f^4\left(n+1\right) = f^4(n) + 1$$

から

$$f^4\left(n+1\right) - f^4(n) = 1. \qquad \cdots\cdots ②$$

②から $f^4(n) = f^4(0) + n. c = f^4(0)$ とおくと

$$f^4(n) = n + c \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad \cdots\cdots ③$$

これから f^4 の値域は $\{c, c+1, c+2, \dots\}$ となる.

③より

$$f^5(n) = f\left(f^4(n)\right) = f(n+c).$$

③で n のところを $f(n)$ で置き換えると

$$f^5(n) = f(n) + c.$$

よって

$$f(n+c) = f(n) + c \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \qquad \cdots\cdots ④$$

③を使い f が単射（injective）であることを示す．
$f(m)=f(n)$ と仮定すると $f^4(m)=f^4(n)$ で $f^4(m)=m+c, f^4(n)=n+c$ から $m+c=n+c$ ゆえに $m=n$.

R_i を $f^i\ (i \geqq 0)$ の値域とすると，f^0 は恒等関数 $f^0(x)=x$ だから $R_0=\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で，明らかに

$$R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq R_4 \supseteq \dots$$

で

$$R_4=\{c, c+1, c+2, \dots\}.$$

$S_i=R_{i-1} \setminus R_i\ (i \geqq 1)$ とおくと $S_i\ (i \leqq 4)$ は有限集合となる． $\cdots\cdots$⑤

$R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq R_4 \supseteq \dots$ で $\mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus R_4=\{0,1,2,\dots,c-1\}$ が有限集合だから $i \leqq 4$ のとき，$S_i=R_{i-1} \setminus R_i \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus R_4$ より $S_i\ (i \leqq 4)$ は有限集合である．

一方，f は単射 (injective) だから

$$n \in S_i \Longleftrightarrow f(n) \in S_{i+1}$$

が成り立つ．

$n \in S_i \Longrightarrow f(n) \in S_{i+1}$ の証明
$n \in S_i$ とすると $n \in R_{i-1}$，$n \notin R_i$.
$n \in R_{i-1}$ から $f^{i-1}(m_1)=n, m_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となる m_1 があるから $f(n)=f^i(m_1) \in R_i$.
もしも $f(n) \in R_{i+1}$ が成り立つとすれば $f(n)=f^{i+1}(m_2)$ となる m_2 がある．f は単射 (injective) だから $n=f^i(m_2) \in R_i$ となり ,$n \notin R_i$ に矛盾する．よって $f(n) \notin R_{i+1}$.
したがって $f(n) \in R_i \setminus R_{i+1}=S_{i+1}$.

$f(n) \in S_{i+1} \Longrightarrow n \in S_i$ の証明
$f(n) \in S_{i+1}=R_i \setminus R_{i+1}$ とすると $f(n) \in R_i$, $f(n) \notin R_{i+1}$.
$f(n) \in R_i$ から $f(n)=f^i(m_1)$ となる m_1 がある．f は単射 (injective) だから $n=f^{i-1}(m_1) \in R_{i-1}$.
もしも $n \in R_i$ が成り立つとすれば $n=f^i(m_2), m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となる m_2 があるから $f(n)=f^{i+1}(m_2) \in R_{i+1}$ となり $f(n) \notin R_{i+1}$ に矛盾する．よって $n \notin R_i$.
したがって $n \in R_{i-1} \setminus R_i=S_i$.

f が単射 (injective) であることと⑥を用いると，f の定義域を S_i に限定した関数 $f_{s_i}: S_i \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を考えると f_{s_i} は全単射 (bijective) になる． ……⑦

f_{s_i} が単射 (injective) であることは f が単射 (injective) であることからわかる．
f_{s_i} が全射 (surjective) であることを示すには⑥を使えばよい．
$\forall t \in S_{i+1} = R_i \setminus R_{i+1}$ に対して $t = f^i(m), m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となる m がある．$t = f^i(m) = f\left(f^{i-1}(m)\right)$ と変形して $n = f^{i-1}(m)$ とおけば $t = f(n)$ となる．
$f(n) = t \in S_{i+1}$ だから⑥より $n \in S_i$.
よって $t = f_{S_i}(n), n \in S_i$ となり f_{s_i} は全射 (surjective) である．

⑦から $\boldsymbol{|S_1| = |S_2| = |S_3| = |S_4|}$ が成り立つからこれらの値を $\boldsymbol{k}$ とおく．
$S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$ だから $c = 4k$ である．
$0 \in R_3$ と仮定すると $f^3(m) = 0$ となる $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があり，①より

$$0 = f^3(m) = f(m+1) + 1 \qquad f(m+1) = -1 < 0$$

となり $f(m+1) \geqq 0$ に矛盾する．
よって $0 \notin R_3$ となるから

$$0 \in R_0 \setminus R_3 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

がいえる．したがって $k \geqq 1$ $(c \geqq 4)$ である．

$R_0 \setminus R_3 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ の要素に b ついて調べる．
$0 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ で次の 3 つの条件の少なくとも 1 つは満たす． ……⑧
(I) $b = 0$
(II) $b = f(0) + 1$
(III) $b - 1 \in S_1$
(I)，(II)，(III) のすべてを満たさなければ
$b \neq 0$ かつ $b \neq f(0) + 1$ かつ $b - 1 \notin S_1$ が成り立つ．
$b \neq 0$ から $b \geqq 1$ で $b - 1 \notin S_1$ と $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$ から $b - 1 \in S_2 \cup S_3 \cup S_4$ となる．よって $f(n) = b - 1, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となる n がある．$n = 0$ だと $f(0) = b - 1$ で $b \neq f(0) + 1$ に矛盾するから $n \geqq 1$ となる．
①で n のところを $n - 1\,(\geqq 0)$ で置き換えると

$$f^3(n-1) = f(n) + 1 = b - 1 + 1 = b.$$

これから $b \in R_3$ となり $b \in R_0 \setminus R_3 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ に矛盾する．

$S_1 \cup S_2 \cup S_3$ の最大の要素を b_M とすると高々 $0, f(0)+1, b_M$ の 3 個しか $S_2 \cup S_3$ の要素にならない.

b_M から始めて $b_M - 1, b_M - 2, \ldots, 1, 0$ と考えていく.

⑧より高々 3 個の $b_M, f(0)+1, 0$ を除き残りはすべて S_1 に属する.

よって

$$3k = |S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |(S_1 \cup S_2) \cup S_3| \leqq k + 3$$

から

$$3k \leqq k + 3 \qquad k = 1.$$

よって $k = 1$, $c = 4$ となるから $f^4(0) = 4, S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

$$f^3(n) = f(n+1) + 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

③, ④は

$$f^4(n) = n + 4 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad \cdots\cdots ③$$

$$f(n+4) = f(n) + 4 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad \cdots\cdots ④$$

となる. ④から

$$f(n+4k) = f(n) + 4k \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad \cdots\cdots ④'$$

が成り立つから $f(0), f(1), f(2), f(3)$ の値によって $f(n)$ の値が決定されることがわかる.

ある $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して

$$S_1 = \{a\}, S_2 = \{f(a)\}, S_3 = \{f^2(a)\}, S_4 = \{f^3(a)\}$$

が成り立つ.

次のことを示しておく.

$$f(n) \neq n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad \cdots\cdots (\bigstar 1)$$

もしも $f(n) = n$ が成り立つならば

$$f^4(n) = f^3(f(n)) = f^3(n) = f^2(f(n)) = f^2(n) = f(f(n)) = f(n) = n.$$

③より $f^4(n) = n + 4$ だから $f^4(n) = n$ に矛盾する.

(1) $a=0$ の場合

$\{0, f(0), f^2(0), f^3(0)\} = \{0,1,2,3\}$ から $\{f(0), f^2(0), f^3(0)\} = \{1,2,3\}$.

(i) $f^3(0)=1$ のとき

$f(1) = f\left(f^3(0)\right) = f^4(0) = 4$ から $f(1)=4$.

①で $n=0$ とおいた $1 = f^3(0) = f(1)+1$ から $f(1)=0$ となり $f(1)=4$ に矛盾する.

(ii) $f^3(0)=2$ のとき

①で $n=0$ とおいた $2 = f^3(0) = f(1)+1$ から $f(1)=1$ となるが $f(1) \fallingdotseq 1$ に矛盾する.

(iii) $f^3(0)=3$ のとき①で $n=0$ とおいた $3 = f^3(0) = f(1)+1$ から $f(1)=2$.

$4 = f^4(0) = f\left(f^3(0)\right) = f(3)$ から $f(3)=4$.

$f(0) \geqq 1$, $f(0) \fallingdotseq f(1)=2$, $f(0) \fallingdotseq f^3(0)=3$ だから $f(0)=1$.

よって $f^2(0)=2$.

$f(2)$ の値は $f(2) = f\left(f^2(0)\right) = f^3(0) = 3$.

したがって

$$f(0)=1, f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4$$

と ④ から

$$f(n)=n+1 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

これは①を満たす.

(2) $a=2$ の場合

$\{2, f(2), f^2(2), f^3(2)\} = \{0,1,2,3\}$ から $\{f(2), f^2(2), f^3(2)\} = \{0,1,3\}$.

①で $n=2$ とおいた $f^3(2) = f(3)+1 \geqq 1$ から $f^3(2) \geqq 1$.

(i) $f^3(2)=1$ のとき $\{f(2), f^2(2)\} = \{0,3\}$.

$1 = f^3(2) = f(3)+1$ から $f(3)=0$.

$f(1) = f\left(f^3(2)\right) = f^4(2) = 2+4 = 6$ から $f(1)=6$.

f は単射 (injective) だから $f(2) \fallingdotseq 0 = f(3)$ なので $f(2)=3, f^2(2)=0$.

このとき

$$f(0) = f\left(f^2(2)\right) = f^3(2) = f(3)+1 = 1.$$

よって

$$f(0)=1, f(1)=6, f(2)=3, f(3)=0.$$

④$'$ から

$$f(n)=\begin{cases} n+1 & n\equiv 0 \pmod 4 \\ n+5 & n\equiv 1 \pmod 4 \\ n+1 & n\equiv 2 \pmod 4 \\ n-3 & n\equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

を得る．これは①を満たすことを示す．
$n=4k(k\in\in\mathbb{Z}_{\geqq 0})$ のとき

$$f(f(f(n)))=f(f(n+1))=f(n+6)=n+7=(n+6)+1=f(n+1)+1.$$

$n=4k+1(k\in\in\mathbb{Z}_{\geqq 0})$ のとき

$$f(f(f(n)))=f(f(n+5))=f(n+6)=n+3=(n+2)+1=f(n+1)+1.$$

$n=4k+2(k\in\in\mathbb{Z}_{\geqq 0})$ のとき

$$f(f(f(n)))=f(f(n+1))=f(n-2)=n+1=(n-2)+1=f(n+1)+1.$$

$n=4k+3(k\in\in\mathbb{Z}_{\geqq 0})$ のとき

$$f(f(f(n)))=f(f(n-3))=f(n-2))=n+3=(n+2)+1=f(n+1)+1.$$

(ii) $f^3(2)=3$ のとき $\{f(2),f^2(2)\}=\{0,1\}$.

$3=f^3(2)=f(3)+1$ から $f(3)=2$.
また $f(3)=f\left(f^3(2)\right)=f^4(2)=2+4=6$ となり $f(3)=2$ に矛盾する．

(3) $a=1$ の場合
$\{1,f(1),f^2(1),f^3(1)\}=\{0,1,2,3\}$ から $\{f(1),f^2(1),f^3(1)\}=\{0,2,3\}$.
①で $n=1$ とおくと

$$f^3(1)=f(2)+1. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑨から $f^3(1)=f(2)+1\geqq 1$ となるが $f^3(1)\fallingdotseq 1$ だから $f^3(1)\geqq 2$.

(i) $f^3(1)=2$ のとき
⑨から $f(2)=1$.
$f^4(1)=f\left(f^3(1)\right)=f(2)=1$.
ところで③から $f^4(1)=1+4=5$ となり $f^4(1)=1$ に矛盾する．

(ii) $f^3(1) = 3$ のとき

⑨から $f(2) = 2$. これは $f(2) \fallingdotseq 2$ に矛盾する.

(4) $a = 3$ の場合

$\{3, f(3), f^2(3), f^3(3)\} = \{0, 1, 2, 3\}$ から $\{f(3), f^2(3), f^3(3)\} = \{0, 1, 2\}$.

①で $n = 3$ とおくと

$$f^3(3) = f(4) + 1. \qquad \cdots\cdots ⑩$$

⑩から $f^3(3) = f(4) + 1 \geqq 1$ となるが $f^3(3) \leqq 2$ だから $1 \leqq f^3(3) \leqq 2$.

(i) $f^3(3) = 1$ のとき

⑩から $f(4) = 0$.

④で $n = 0$ とおくと $0 = f(4) = f(0) + 4$ から $f(0) = -4 < 0$ となり不適.

(ii) $f^3(3) = 2$ のとき

⑩から $f(4) = 1$.

④で $n = 0$ とおくと $1 = f(4) = f(0) + 4$ から $f(0) = -3 < 0$ となり不適.

(1), (2), (3), (4) から解は

- $f(n) = n + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

と

- $f(n) = \begin{cases} n+1 & n \equiv 0 \pmod 4 \\ n+5 & n \equiv 1 \pmod 4 \\ n+1 & n \equiv 2 \pmod 4 \\ n-3 & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$

である. ■

問題 47　(IMO Shortlist 2013)

Determine all functions $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$ satisfying

$$f\left(\frac{f(x)+a}{b}\right)=f\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

for all $x\in\mathbb{Q}, a\in\mathbb{Z}$, and $b\in\mathbb{Z}_{>0}$. (Here, $\mathbb{Z}_{>0}$ denote the set of positive integers.)

解答　まず

- $c\in\mathbb{Z}$ を定数として　$f(x)=c \qquad \forall x\in\mathbb{Q}$,
- $f(x)=\lfloor x\rfloor \qquad \forall x\in\mathbb{Q}$,
- $f(x)=\lceil x\rceil \qquad \forall x\in\mathbb{Q}$

は解になっていることを示す．

$f(x)=c$ は明らかに関数方程式を満たす．

$\forall(x,a,b)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{>0}$ に対して $q=\left\lfloor\dfrac{x+a}{b}\right\rfloor$ とおくと

$$q\leqq\frac{x+a}{b}<q+1 \qquad qb\leqq x+a<q(b+1).$$

よって

$$bq\leqq\lfloor x+a\rfloor<b(q+1) \qquad bq\leqq\lfloor x\rfloor+a<b(q+1)$$

から

$$q\leqq\frac{\lfloor x\rfloor+a}{b}<q+1 \qquad \left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor+a}{b}\right\rfloor=q.$$

したがって

$$\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor+a}{b}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x+a}{b}\right\rfloor$$

となるから床関数 $f(x)=\lfloor x\rfloor$ は関数方程式 $f\left(\dfrac{f(x)+a}{b}\right)=f\left(\dfrac{x+a}{b}\right)$ を満たす．

同様にして，$\forall(x,a,b)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{>0}$ に対して $q+1=\left\lceil\dfrac{x+a}{b}\right\rceil$ とおくと

$$q<\frac{x+a}{b}\leqq q+1 \qquad qb<x+a\leqq q(b+1).$$

よって

$$bq<\lceil x+a\rceil\leqq b(q+1) \qquad bq<\lceil x\rceil+a\leqq b(q+1)$$

から

$$q<\frac{\lceil x\rceil+a}{b}\leqq q+1 \qquad \left\lceil\frac{\lceil x\rceil+a}{b}\right\rceil=q+1.$$

したがって

$$\left\lceil \frac{\lceil x \rceil + a}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{x+a}{b} \right\rceil$$

となるから天井関数 $f(x) = \lceil x \rceil$ は関数方程式 $f\left(\dfrac{f(x)+a}{b}\right) = f\left(\dfrac{x+a}{b}\right)$ を満たす.

$$f\left(\frac{f(x)+a}{b}\right) = f\left(\frac{x+a}{b}\right) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

①で $x = 0$ とおくと

$$f\left(\frac{a}{b} + \frac{f(0)}{b}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right). \qquad \cdots\cdots②$$

(1) $f(0) > 0$ の場合

②で a のところを $f(0)a$，b のところを $f(0)b\,(>0)$ で置き換えると

$$f\left(\frac{f(0)a}{f(0)b} + \frac{f(0)}{f(0)b}\right) = f\left(\frac{f(0)a}{f(0)b}\right)$$

から

$$f\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right). \qquad \cdots\cdots③$$

$x = \dfrac{p}{q}, y = \dfrac{r}{q}, q > 0, p < r$ に対して，③を繰り返し用いると

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q} + \frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q} + \frac{2}{q}\right) = \cdots = f\left(\frac{p}{q} + \frac{r-p}{q}\right) = f\left(\frac{r}{q}\right)$$

より

$$f(x) = f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}, x < y$$

が成り立つ．この等式は $x = y$ のときは明らかに成り立つから

$$f(x) = f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

よって k を正の整数として

$$f(x) = k \qquad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

これは①を満たす.

(2) $f(0) < 0$ の場合

②で a のところを $-f(0)a$，b のところを $-f(0)b\,(>0)$ で置き換えると

$$f\left(\frac{-f(0)a}{-f(0)b}+\frac{f(0)}{-f(0)b}\right)=f\left(\frac{-f(0)a}{-f(0)b}\right)$$

から

$$f\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{b}\right)=f\left(\frac{a}{b}\right). \qquad \cdots\cdots③'$$

$x=\dfrac{p}{q}, y=\dfrac{r}{q}, q>0, p>r$ に対して，③$'$ を繰り返し用いると

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)=f\left(\frac{p}{q}-\frac{2}{q}\right)=\cdots=f\left(\frac{p}{q}-\frac{r-p}{q}\right)=f\left(\frac{r}{q}\right)$$

より

$$f(x)=f(y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{Q}, x>y$$

が成り立つ．この等式は $x=y$ のときは明らかに成り立つから

$$f(x)=f(y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

よって k を負の整数として

$$f(x)=k \qquad \forall x\in\mathbb{Q}.$$

これは①を満たす．

(3) $f(0)=0$ の場合

$f(d)=0$ となる $d\fallingdotseq 0, d\in\mathbb{Z}$ が存在する場合

①で $x=d$ とおくと

$$f\left(\frac{f(d)+a}{b}\right)=f\left(\frac{d+a}{b}\right) \qquad f\left(\frac{a}{b}\right)=f\left(\frac{a}{b}+\frac{d}{b}\right) \qquad \cdots\cdots③''$$

$d>0$ のとき，③$''$ で a のところを da，b のところを $db(>0)$ で置き換えると

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=f\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{b}\right)$$

となり (1) と同様にして

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{Q}$$

を得る．

$d<0$ のときも

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{Q}$$

を得る．

以下 $f(d)=0$ となる $d \neq 0, d \in \mathbb{Z}$ が存在しない場合を考えることにする．
すなわち

$$f(a)=0,\ a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a=0. \qquad \cdots\cdots(*)$$

$f(x)=f(y)=r, x, y \in \mathbb{Z}$ とする．
①で $a=-x, b=1$ とおくと

$$f(f(y)-x)=f(0)=0 \qquad f(r-x)=0.$$

①で x のところを y で置き換え，$a=-x, b=1$ とおくと

$$f(f(y)-x)=f(y-x) \qquad \underbrace{f(r-x)}_{=0}=f(y-x).$$

よって $f(y-x)=0$ で $(*)$ から $y-x=0$ すなわち $y=x$ となる．
したがって

$$f(x)=f(y),\ x, y \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x=y. \qquad \cdots\cdots④$$

①で $b=1$ とおくと $f(f(x)+a)=f(x+a)$.
$\forall x \in \mathbb{Z}$ に対して，④が使えて $f(x)+a=x+a$ となるから

$$f(x)=x \qquad \forall x \in \mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots⑤$$

$x \in \mathbb{Q}$ のときは①で $b=1$ とおくと

$$f(f(x)+a)=f(x+a).$$

$f(x)+a \in \mathbb{Z}$ だから⑤を使うと $f(f(x)+a)=f(x)+a$ なので

$$f(x)+a=f(x+a) \qquad \forall x \in \mathbb{Q} \qquad \cdots\cdots⑥$$

を得る．a は整数だから，区間 $[0,1)$ において $f(x)$ の値が定まれば，区間 $[a, a+1)$ における値は決まるので，区間 $[0,1)$ に限定して考える．

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) \in \{0,1\}$ を示す．
$f\left(\dfrac{1}{2}\right)>\dfrac{1}{2}$ のとき，①で $x=\dfrac{1}{2}, a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-1, b=2f\left(\dfrac{1}{2}\right)-1(>0)$ とおくと

$$f\left(\frac{f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})-1}{2f(\frac{1}{2})-1}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{2}+f(\frac{1}{2})-1}{2f(\frac{1}{2})-1}\right) \qquad f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

⑤より $f(1)=1$ だから $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) < \dfrac{1}{2}$ のとき，①で $x = \dfrac{1}{2}, a = -f\left(\dfrac{1}{2}\right) - 1, b = 1 - 2f\left(\dfrac{1}{2}\right) (> 0)$ とおくと

$$f\left(\frac{f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})}{1 - 2f(\frac{1}{2})}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{2} - f(\frac{1}{2})}{1 - 2f(\frac{1}{2})}\right) \qquad f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$f(0) = 0$ だから $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0.$

よって $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \in \{0, 1\}$ が成り立つ．

①で $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q > 0, a = p, = q + 1$，$n = f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ とおくと

$$f\left(\frac{f\left(\frac{p}{q}\right) + a}{q + 1}\right) = f\left(\frac{\frac{p}{q} + p}{q + 1}\right) \qquad f\left(\frac{n + p}{q + 1}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) = n.$$

①で $x = \dfrac{n + p}{q + 1}, a = n + p, = q + 2$ とおくと

$$f\left(\frac{n + n + p}{q + 2}\right) = f\left(\frac{\frac{n + p}{q + 1} + n + p}{q + 2}\right) \qquad f\left(\frac{2n + p}{q + 2}\right) = f\left(\frac{n + p}{q + 1}\right) = n.$$

これを繰り返すと

$$f\left(\frac{zn + p}{q + z}\right) = n \qquad \forall z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑦を使うと

$\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q > 0$, $n = f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ のとき

$\forall M \in \mathbb{Z}, M \neq 0, \forall z \geqq 0$ に対して $\dfrac{zn + p}{q + z} \neq n - M$ が成り立つ．

$\dfrac{zn + p}{q + z} = n - M$ が成りたつような $M \in \mathbb{Z}, M \neq 0, z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在したとすると

$$f\left(\frac{zn + p}{q + z}\right) = f(n - M) = n - M.$$

ところで $f\left(\dfrac{zn + p}{q + z}\right) = n$ だから $n - M = n$ すなわち $M = 0$ となり $M = 0$ に矛盾する．

$\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q > 0$, $n = f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ のとき

$\forall M \in \mathbb{Z}, M \neq 0$ に対して $\dfrac{(n - M)q - p}{M}$ は非負の整数にはならない． $\cdots\cdots(*)$

$\forall M \in \mathbb{Z}, M \neq 0, \forall z \geqq 0$ に対して $\dfrac{zn+p}{q+z} \neq n-M$ が成り立つから

$$\frac{zn+p}{q+z} \neq n-M \qquad nz+p \neq (n-M)q+(n-M)z \qquad (n-M)q-p \neq Mz.$$

よって

$$\frac{(n-M)q-p}{M} \neq z \qquad \forall z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

したがって，$\forall M \in \mathbb{Z}, M \neq 0$ に対して $\dfrac{(n-M)q-p}{M}$ は非負の整数にはならない．

$0 < x < 1, x = \dfrac{p}{q}, q > 0, n = f(x) = f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ とおくと $0 < p < q$ となる．

$(*)$ で $M = -1$ とおくと

$$\frac{(n+1)q-p}{-1} < 0 \qquad (n+1)q > p \qquad n+1 > \frac{p}{q} > 1 \qquad n \geqq 0.$$

$(*)$ で $M = 1$ とおくと

$$\frac{(n-1)q-p}{1} < 0 \qquad (n-1)q < p1 > \frac{p}{q} > n-1 \qquad n \leqq 1.$$

よって $0 \leqq n \leqq 1$ から $n \in \{0, 1\}$.

したがって，$0 < x < 1, x \in \mathbb{Q}$ のとき $f(x) \in \{0, 1\}$.

(i) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ の場合

$f(x) = 1$ となる $x\,(0 < x < 1)$ が存在したとする．

①で x のところを $2x$ で置き換え，$a = 0, b = 2$ とすると

$$f\left(\frac{f(2x)}{2}\right) = f(x) = 1$$

⑥から $f(2x) \in \{0, 1, 2\}$ であるが $f(2x) \neq 0, 1$.

$0 < 2x < 1$ のときは $f(2x) \in \{0, 1\}$，$2x = 1$ のときは $f(2x) = 1$.

$1 < 2x < 2$ のときは⑥より

$$f(2x) = f(1+2x-1) = f(1) + f(2x-1) = 1 + f(2x-1).$$

$0 < 2x-1 < 1$ から $f(2x-1) \in \{0, 1\}$ なので $f(2x) \in \{1, 2\}$.

よって $f(2x) \in \{0, 1, 2\}$.

$f(2x)=0$ のときは $f\left(\dfrac{f(2x)}{2}\right)=f(0)=0$ で $f\left(\dfrac{f(2x)}{2}\right)=1$ に矛盾する．

$f(2x)=1$ のときは $f\left(\dfrac{f(2x)}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ で $f\left(\dfrac{f(2x)}{2}\right)=1$ に矛盾する．

よって $f(2x)=2$ で $f(2x)=2$ となるのは $2x>1$ のときである．
また，$2=f(2x)=f(1+2x-1)=f(1)+f(2x-1)=1+f(2x-1)$ から

$$f(2x-1)=1.$$

$x_1=2x-1\,(>0)$ に対してこの操作を行い，この議論を繰り返し行うと

$$x\to x_1=2x-1\to x_2=2x_1-1\to x_3=2x_2-1\to\ldots\to x_n\to\ldots$$

となる．$x_{n+1}=2x_n-1,\ x_0=x$ から $x_n=(2^n)x-(2^n-1)$.
n を十分大きくとると $x_n=(2^n)x-(2^n-1)<0$ となり $x_n>0$ に矛盾する．
よって $f(x)=1$ となる $x(0<x<1)$ は存在しないので

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{Q},\ 0\leqq x<1.$$

⑥を使うと一般的には

$$f(x)=\lfloor x\rfloor \qquad \forall x\in\mathbb{Q}.$$

(ii) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$ の場合

$f(x)=0$ となる $x\,(0<x<1)$ が存在したとする．
①で x のところを $2x$ で置き換え，$a=0,b=2$ とすると

$$f\left(\frac{f(2x)}{2}\right)=f(x)=0$$

⑥から $f(2x)\in\{0,1,2\}$ であるが $f(2x)\risingdotseq 1,2$.

$f(2x)=1$ のときは $f\left(\dfrac{f(2x)}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$ で $f\left(\dfrac{f(2x)}{2}\right)=0$ に矛盾する．

$f(2x)=2$ のときは $f\left(\dfrac{f(2x)}{2}\right)=f(1)=1$ で $f\left(\dfrac{f(2x)}{2}\right)=0$ に矛盾する．

よって $f(2x)=0$ で $f(2x)=0$ となるのは $0<2x<1$ のときである．
$x_1=2x\,(0<x_1<1)$ に対してこの操作を行い，この議論を繰り返し行うと

$$x\to x_1=2x\to x_2=2x_1\to x_3=2x_2\to\ldots\to x_n\to\ldots$$

となる．$x_{n+1}=2x_n,\, x_0=x$ から $x_n=2^n x$.

$x_n=2^n x\to\infty\ (n\to\infty)$ から，n を十分大きくとると $x_n\geqq 1$ となり $0<x_n<1$ に矛盾する．

よって $f(x)=0$ となる $x\,(0<x<1)$ は存在しないので

$$f(x)=1 \qquad \forall x\in\mathbb{Q},\ 0\leqq x<1.$$

⑥を使うと一般的には

$$f(x)=\lceil x\rceil \qquad \forall x\in\mathbb{Q}.$$

以上のことから解は

- $c\in\mathbb{Z}$ を定数として
  $f(x)=c \qquad \forall x\in\mathbb{Q},$
- $f(x)=\lfloor x\rfloor \qquad \forall x\in\mathbb{Q},$
- $f(x)=\lceil x\rceil \qquad \forall x\in\mathbb{Q}$

の 3 つである．■

問題 48　(India TST 2013)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$

$$f(x(1+y))=f(x)(1+f(y))$$

解答

$$f(x(1+y))=f(x)(1+f(y)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①でとおくと $f(0)=f(0)(1+f(y))$.

$f(0)\fallingdotseq 0$ のとき $1=1+f(y)$ から

$$f(y)=0 \quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

これは $f(0)\fallingdotseq 0$ に矛盾する．

よって $f(0)=0$.

①で $y=-1$ とおいた $f(0)=f(x)(1+f(-1))$ から

$$(1+f(-1))f(x)=0. \qquad \cdots\cdots ②$$

$1+f(-1)\fallingdotseq 0$ のとき

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である．

$1+f(-1)=0$ のとき $f(-1)=-1$.

①で $x=1$ とおくと

$$f((1+y))=f(1)(1+f(y)). \qquad \cdots\cdots ③$$

①で $x=-1$ とおくと

$$f(-1-y)=f(-1)(1+f(y)) \qquad f(-1-y)=-1-f(y).$$

よって

$$f(x)+f(-1-x)=1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ④$$

①で $x=-2, y=1$ とおくと $f(-4)=f(-2)(1+f(-1))$.

④でとおくと $f(-2)=-(1+f(1))$ だから

$$f(-4)=f(-2)(1+f(-1))=-(1+f(1))^2.$$

④で $x=3$ とおくと $f(-4)=-1-f(3)$.
①で $x=1, y=2$ とおくと $f(3)=f(1)(1+f(2))$.
③で $y=1$ とおくと $f(2)=f(1)(1+f(1))$ となるので

$$f(3)=f(1)(1+f(2))=f(1)\left(1+f(1)(1+f(1))\right)=f(1)+f(1)^2+f(1)^3.$$
$$f(4)=-1-f(3)=-1-f(1)-f(1)^2-f(1)^3.$$

よって $f(-4)=-(1+f(1))^2$ より

$$-1-f(1)-f(1)^2-f(1)^3=-(1+f(1))^2,$$
$$1+f(1)+f(1)^2+f(1)^3=(1+f(1))^2.$$

よって

$$f(1)^3-f(1)=0$$

から

$$f(1)\in\{-1,0,1\}.$$

(1) $f(1)=-1$ の場合
①で $y=1$ とおいた $f(2x)=f(x)(1+f(1))=0$ から

$$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは $f(1)=-1$ に矛盾する.

(2) $f(1)=0$ の場合
①で $x=1$ とおいた $f(y+1)=f(1)(1+f(y))=0$ から

$$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である.

(3) $f(1)=1$ の場合
③から

$$f(1+y)=1+f(y). \qquad \cdots\cdots ③'$$

①で ③$'$ を用いると

$$f(x(1+y))=f(x)(1+f(y))=f(x)f(1+y).$$

y のところを $y-1$ で置き換えると

$$f(xy)=f(x)f(y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

①で ⑤ を用いると

$$f(x(1+y))=f(x)(1+f(y))=f(x)+f(x)f(y)=f(x)+f(xy).$$

よって

$$f(x+xy)=f(x)+f(xy) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

$\forall u,v\in\mathbb{R}\,(u\fallingdotseq 0)$ に対して，$x=u, y=\dfrac{v}{u}$ とおくと $xy=v$ で

$$f(u+v)=f(u)+f(v) \qquad \forall u,v\in\mathbb{R}\,(u\fallingdotseq 0)$$

$u=0$ のときは $f(0)=0$ だから $f(v)=f(0)+f(v)$ が成り立つから

$$f(u+v)=f(u)+f(v) \qquad \forall u,v\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤から $f\left(x^2\right)=f(x)^2\geqq 0$ から

$$f(x)\geqq 0 \qquad \forall x\geqq 0.$$

f はコーシーの関数方程式を満たし，$\forall x\geqq 0$ に対して $f(x)\geqq 0$ が成り立つので $f(x)=cx$ となる．$f(1)=1$ から $c=1$. よって

$$f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である．

以上のことから解は

- $f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

と

- $f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 49　(Iran 2013)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that $f(0)\in\mathbb{Q}$ and

$$f\left(x+f(y)^2\right)=f(x+y)^2.$$

解答

$$f\left(x+f(y)^2\right)=f(x+y)^2 \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $y=0$ とおくと $f\left(x+f(0)^2\right)=f(x)^2$.

$a=f(0)^2$ とおくと

$$f(x+a)=f(x)^2. \qquad \cdots\cdots②$$

②より $f(x+a)=f(x)^2\geqq 0$ がいえるから

$$f(x+a)\geqq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

よって

$$f(x)\geqq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots③$$

①で $x=0$ とおくと

$$f\left(f(y)^2\right)=f(y)^2. \qquad \cdots\cdots④$$

①で y のところを $f(y+a)$ で置き換えると

$$f\left(x+f\left(f(y+a)\right)^2\right)=f\left(x+f(y+a)\right)^2. \qquad \cdots\cdots(*1)$$

ここで

$$\begin{aligned} f\left(x+f\left(f(y+a)\right)^2\right) &\underset{②}{=} f\left(x+f\left(f(y)^2\right)^2\right) \\ &\underset{④}{=} f\left(x+\left(f(y)^2\right)^2\right) \\ &= f\left(x+f(y)^4\right). \end{aligned}$$

①で y のところを $y+a$ で置き換えると

$$f\left(x+f(y+a)^2\right)=f(x+y+a)^2. \qquad \cdots\cdots(*2)$$

この式で②を使うと

$$f\left(x+f(y+a)^2\right)=f\left(x+\left(f(y)^2\right)^2\right)=f\left(x+f(y)^4\right)$$

したがって $(*1)$，$(*2)$ の左辺は等しいから

$$f\left(x+f(y+a)\right)^2=f(x+y+a)^2.$$

③より

$$f\left(x+f(y+a)\right)=f(x+y+a).$$

この式で y のところを $y-a$ で置き換えると

$$f\left(x+f(y)\right)=f(x+y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

⑤で $x=0$ とおくと

$$f(f(y))=f(y) \qquad \forall y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤で $y=0$ とおくと

$$f(x+f(0))=f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

②で x のところを $x+a$ で置き換えると

$$f(x+2a)=f(x+a)^2=\left(f(x)^2\right)^2=f(x)^{2^2}.$$

数学的帰納法を使うと

$$f(x+na)=f(x)^{2^n} \qquad n\in\mathbb{N}. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$f(0)\in\mathbb{Q}$ より $f(0)=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}, q>0$ とおくと $a=\dfrac{p^2}{q^2}$ となる．
⑧で n のところを nq^2 で置き換えると

$$f\left(x+np^2\right)=f(x)^{2^{nq^2}}. \qquad \cdots\cdots (*3)$$

⑦から

$$f(x+mf(0))=f(x) \qquad \forall m\in\mathbb{Z}$$

が成り立つ．

$m=0$ のときは明らかに成り立つので，数学的帰納法ですべての自然数 n に対して

$$f(x+nf(0))=f(x),\ f(x-nf(0))=f(x)$$

が成立することを示す．

(I) $n=1$ のとき⑦から $f(x+f(0))=f(x)$.
⑦で x のところを $x-f(0)$ と置き換えた式 $f(x)=f(x-f(0))$ から
$f(x-f(0))=f(x)$ は成り立つ．

(II) $n=k$ のとき成り立つと仮定する．

⑦で x のところを $x+kf(0)$ と置き換えると

$$f(x+kf(0)+f(0))=f(x+kf(0))=f(x)$$

から

$$f(x+kf(0)+f(0))=f(x).$$

⑦で x のところを $x-(k+1)f(0)$ と置き換えると

$$f(x-kf(0))=f(x-(k+1)f(0)).$$

仮定から $f(x-(k+1)f(0))=f(x-kf(0))=f(x)$ すなわち

$$f(x-(k+1)f(0))=f(x).$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(I)，(II) よりすべての自然数 n に対して

$$f(x+nf(0))=f(x),\, f(x-nf(0))=f(x)$$

が成立する．

この式で m のところを npq で置き換えると

$$f\left(x+np^2\right)=f(x). \qquad \cdots\cdots(*4)$$

$(*3)$，$(*4)$ より

$$f(x)=f(x)^{2^{nq^2}}. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$f(x)\geqq 0$ であったので

(i) $f(x)>1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)^{2^{nq^2}}=\infty$ となり⑨は成り立たない．

(ii) $0\leqq f(x)<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)^{2^{nq^2}}=0$ だから，⑨で $n\to\infty$ とすると $f(x)=0$ を得る．

(iii) $f(x)=1$ のとき⑨は成り立つ．

以上のことから

$$\boldsymbol{f(x)\in\{0,1\} \qquad \forall x\in R.}$$

⑤で x のところを $f(x)$ で置き換えるた

$$f(f(x)+f(y)) = f(f(x)+y) \underset{⑤}{=} f(x+y)$$

から

$$f(f(x)+f(y)) = f(x+y). \qquad \cdots\cdots ⑩$$

この式から $f(x{+}y)$ の値は $f(0{+}0), f(1{+}0) = f(0{+}1), f(1{+}1)$ すなわち $f(0), f(1), f(2)$ の値で決まることがわかる.

(1) $f(0) = 0$ の場合

⑤で $y = -x$ とおくと

$$f(x+f(-x)) = 0. \qquad \cdots\cdots ⑪$$

⑪で $x = -2$ とおくと $f(-2+f(2)) = 0$.

$f(2) = 0$ となる.

$f(2) = 1$ とすると $f(-2+f(2)) = 0$ から $f(-1) = 0$.

⑪で $x = 1$ とおいた $f(1+f(-1)) = 0$ から $f(1) = 0$.

$$f(2) = f(1+1) \underset{⑩}{=} f(f(1)+f(1)) = f(0) = 0$$

となり, $f(2) = 1$ に矛盾する.

$f(1) = 0$ となる.

$f(1) = 1$ とすると

$$1 = f\,(1) = f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \underset{⑩}{=} f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(2f\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ だと上の等式は $1 = f\left(2f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(0) = 0$ となり矛盾が生じる.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ だと上の等式は $1 = f\left(2f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(2) = 0$ となり矛盾が生じる.

したがって

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

これは①を満たす.

(2) $f(0) = 1$ の場合

①から

$$f(x+1) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑦'$$

⑦′ で $x = 0, 1$ とおくと $f(1) = 1, f(2) = 1$.

したがって

$$f(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

これは①を満たす.

以上のことから解は

- $f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

と

- $f(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である. ■

問題 50　(Iran TST 2013)

Find all functions $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that f is increasing and also:

(i)　$f(f(x)+2g(x)+3f(y)) = g(x)+2f(x)+3g(y)$

(ii)　$g(f(x)+y+g(y)) = 2x-g(x)+f(y)+y$

解答　f は増加関数だから $h(x)=f(x)+x$ は増加関数となり単射 (injective) である．
(i) は

$$h(f(x)+2g(x)+3f(y)) = 3g(x)+3f(x)+3f(y)+3g(y) \qquad \cdots\cdots ①$$

と書き直せる．①で x と y を入れ換えると

$$h(f(y)+2g(y)+3f(x)) = 3g(y)+3f(y)+3f(x)+3g(x) \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．①と②から

$$h(f(x)+2g(x)+3f(y)) = h(f(y)+2g(y)+3f(x)).$$

h は単射 (injective) だから

$$f(x)+2g(x)+3f(y) = f(y)+2g(y)+3f(x)$$

から

$$f(x)-g(x) = f(y)-g(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

$y=1, c=f(1)-g(1)$ とおくと

$$f(x)-g(x) = c \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+. \qquad \cdots\cdots ③$$

(ii) で $y=x$ とおいた

$$g(f(x)+x+g(x)) = 2x-g(x)+f(x)+x = 3x+c$$

から

$$g(f(x)+x+g(x)) = 3x+c \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+. \qquad \cdots\cdots ④$$

④より $g(x)$ は c より大きい値がとれる．
$f(x)=g(x)+c$ より $f(x)$ は $2c$ より大きい値がとれる．
③を使い (i) を f で書き直すと

$$f\left(f(x)+2(f(x)-c)+3f(y)\right) = f(x)-c+2f(x)+3(f(y)-c),$$

$$f\left(3f(x)+3f(y)-2c\right)=3f(x)+3f(y)-4c=(3f(x)+3f(y)-2c)-2c.$$

$3f(x)>6c, 3f(y)>6c$ より $3f(x)+3f(y)-2c>10c$ より $3f(x)+3f(y)-2c$ は $10c$ より大きい値がとれるから

$$f(x)=x-2c \qquad \forall x>10c. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$g(x)=f(x)-c=x-3c$ から

$$g(x)=x-3c \qquad \forall x>10c. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$x>10c$ のとき，これらを (ii) に代入すると

$$g(x-2c+y+y-3c)=2x-(x-3c)+(y-2c)+y \qquad g(x+2y-5c)=x+2y+c,$$

$$x+2y-5c-3c=x+2y+c \qquad c=0.$$

よって

$$f(x)=x, g(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}^+$$

これは (i) を満たすから解である．

したがって解は

- $f(x)=x,\ g(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}^+$

である． ■

問題 51　(Japan 2013)

Find all functions $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ such that the equality

$$f(m)+f(n)=f(mn)+f(m+n+mn)$$

holds for all $m,n\in\mathbb{Z}$

解答

$$f(m)+f(n)=f(mn)+f(m+n+mn) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $n=-1$ とおいた $f(m)+f(-1)=f(-m)+f(-1)$ から

$$f(-m)=f(m) \qquad \forall m\in\mathbb{Z} \qquad \cdots\cdots ②$$

となり f が偶関数である．

①で $n=1$ とおいた $f(m)+f(1)=f(m)+f(2m+1)$ から

$$f(2m+1)=f(1) \qquad \forall m\in\mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots ③$$

①で $n=2l+1, l\in\mathbb{Z}$ とおいた

$$f(m)+f(2l+1)=f((2l+1)m)+f(m+2l+1+m(2l+1))$$

から

$$f(m)+f(1)=f((2l+1)m)+f(m+2l+1+m(2l+1)). \qquad \cdots\cdots (*)$$

ここで $m+2l+1+m(2l+1)=2m(2l+1)+2l+1$ は奇数だから③より

$$f(m+2l+1+m(2l+1))=f(1)$$

なので $(*)$ は

$$f(m)+f(1)=f((2l+1)m)+f(1)$$

すなわち

$$f((2l+1)m)=f(m) \qquad \forall\, l,m\in\mathbb{Z} \qquad \cdots\cdots ④$$

となる．

任意の 0 でない整数は，非負整数 p と奇数 $2l+1$ を用いて $2^p(2l+1)$ と表せるので，④で $m=2^p$ とおくと

$$f(2^p(2l+1))=f(2^p).$$

したがって $f(2^p)\,(p=0,1,2,\dots)$ および $f(0)$ の値が定まれば，すべての整数 n について $f(n)$ の値が決定する．

④で $m=2$ とおくと

$$f(4l+2)=f(2) \qquad \forall\, l\in\mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

①で $n=-m$ とおいた $f(m)+f(-m)=f\left(m^2\right)+f\left(m^2\right)$ から

$$f\left(m^2\right)=f(m) \qquad \forall m\in\mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

①で $n=-2$ とおくと

$$f(m)+f(-2)=f(-2m)+f(-m-2).$$

f は偶関数だから

$$f(m)+f(2)=f(2m)+f(m+2). \qquad \cdots\cdots ⑦$$

数学的帰納法で

$$f(2^n)=f(2) \qquad \forall n\in\mathbb{N}. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

が成り立つことを示す．

(i) $n=1$ のとき明らかに成り立つ．
$n=2$ のときは⑥で $m=2$ とおくと $f(4)=f(2)$ となり⑧は成り立つ．

(ii) $n=k\,(k\geqq 2)$ のとき⑧が成り立つと仮定する．
⑦で $m=2^k$ とおくと

$$f\left(2^{k+1}\right)=f\left(2^k\right)+f(2)-f\left(2^k+2\right).$$

仮定から $f\left(2^k\right)=f(2)$.
⑤を使うと

$$f\left(2^k+2\right)=f\left(4\cdot 2^{k-2}+2\right)=f(2)$$

だから

$$f\left(2^{k+1}\right)=f\left(2^k\right)+f(2)-f\left(2^k+2\right)=f(2)+f(2)-f(2)=f(2).$$

よっての $n=k+1$ ときも⑧は成り立つ．

(i)，(ii) よりすべての自然数 n について⑧は成り立つ．

以上のことから，任意の実数 c_1, c_2 に対して

$$f(n) = \begin{cases} c_1 & (n \text{ が偶数}) \\ c_2 & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \quad \cdots\cdots (*)$$

を得る．

(∗) で表される関数 f は①を満たすことを示す．

m, n がともに偶数のとき，$m, n, mn, m+n+mn$ はすべて偶数だから①の左辺と右辺は $2c_1$ となり一致する．

m, n がともに奇数のとき，$m, n, mn, m+n+mn$ はすべて奇数だから①の左辺と右辺は $2c_2$ となり一致する．

m, n の偶奇が異なるとき，mn は偶数で $m+n+mn$ は奇数だから①の左辺と右辺は $c_1 + c_2$ となり一致する．

よって (∗) で表される関数 f は①を満たす．

以上のことから解は

任意の実数 c_1, c_2 に対して

- $f(n) = \begin{cases} c_1 & (n \text{ が偶数}) \\ c_2 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$

である． ■

問題 52 (Korea 2013)

Find all functions $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ such that for all $m,n\in\mathbb{N}$

$$f(mn)=\mathrm{lcm}(m,\,n)\cdot\gcd(f(m),\,f(n))$$

解答

$$f(mn)=\mathrm{lcm}(m,\,n)\cdot\gcd(f(m),\,f(n)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $n=1$ とおくと $f(m)=m\,\gcd(f(m),\,f(1))$.

$a=f(1)$ とおくと

$$f(m)=m\,\gcd(f(m),\,a). \qquad \cdots\cdots ②$$

②で m のところを ma で置き換えると

$$f(ma)=ma\,\gcd(f(ma),\,a). \qquad \cdots\cdots ③$$

③から $a\,|\,f(ma)$ が成り立つので $\gcd(f(ma),\,a)=a$ となる．よって③は

$$f(ma)=ma\cdot a=ma^2$$

すなわち

$$f(ma)=ma^2 \qquad \cdots\cdots ④$$

となる．

①で n のところを na で置き換えると

$$f(mna)=\mathrm{lcm}(m,\,na)\cdot\gcd(f(m),\,f(na)).$$

④と $\mathrm{lcm}(m,\,n)\cdot\gcd(m,\,n)=mn$ を使うと

$$mna^2=\frac{mna}{\gcd(m,\,na)}\cdot\gcd(f(m),\,na^2)$$

から

$$\gcd(f(m),\,na^2)=a\,\gcd(m,\,na). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

⑤より $a\,|\,\gcd(f(m),\,na^2)$ が成り立つことから $a\,|\,f(m)$ がいえて

$$\gcd(f(m),\,a)=a. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥を使うと②から

$$f(m)=ma \qquad \forall m\in\mathbb{N}.$$

よって
$$f(x) = ax \qquad \forall x \in \mathbb{N}.$$
このとき
$$\begin{aligned} f(mn) = amn &= a \ \mathrm{lcm}(m,\, n) \cdot \gcd(m,\, n) \\ &= \mathrm{lcm}(m,\, n) \cdot \gcd(ma,\, na) \\ &= \mathrm{lcm}(m,\, n) \cdot \gcd(f(m),\, f(n)) \end{aligned}$$
となり①を満たす.

　よって解は

- $f(x) = ax \qquad \forall x \in \mathbb{N}$

である. ■

問題 53　(Middle European Mathematical Olympiad 2013)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all $x,y\in\mathbb{R}$

$$f(xf(x)+2y)=f\left(x^2\right)+f(y)+x+y-1$$

解 1

$$f(xf(x)+2y)=f\left(x^2\right)+f(y)+x+y-1 \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $x=y=0$ とおいた $f(0)=f(0)+f(0)-1$ から $f(0)=1$.
①で $y=0$ とおいた $f(xf(x))=f\left(x^2\right)+f(0)+x-1$ から

$$f(xf(x))=f(x^2)+x. \qquad \cdots\cdots②$$

①で $y=-xf(x)$ とおいた

$$f(-xf(x))=f\left(x^2\right)+f(-xf(x))+x-xf(x)-1$$

から

$$f\left(x^2\right)=xf(x)-x+1. \qquad \cdots\cdots③$$

②，③から

$$f(xf(x))=xf(x)+1. \qquad \cdots\cdots④$$

($z=xf(x)$ とおくと $f(z)=z+1$ となり $f(x)=x+1$ は①を満たすことがわかる．)
$f(x)=g(x)+x+1$ とおくと①は

$$\begin{aligned}&g\left(x(g(x)+x+1)+2y\right)+x(v)+2y+1\\&=g\left(x^2\right)+x^2+1+(g(y)+y+1)+x+y-1\end{aligned}$$

すなわち

$$g\left(xg(x)+x^2+x+2y\right)+xg(x)=g\left(x^2\right)+g(y). \qquad \cdots\cdots⑤$$

$xg(x)+x^2+x+2y=y$ を満たすように $y=-xg(x)-x^2-x$ とおくと，⑤は

$$g\left(x^2\right)=xg(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑥で x のところを $-x$ で置き換えると

$$g\left(x^2\right)=-xg(-x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots⑦$$

⑥，⑦から

$$xg(x)=-xg(-x)$$

$x \fallingdotseq 0$ のとき $g(-x)=-g(x)$.
$g(0)=0$ だから上の等式は $x=0$ のときも成り立つ.
よって

$$g(-x)=-g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

すなわち g は奇関数である.
⑤，⑥から

$$g\left(xg(x)+x^2+x+2y\right)=g(y). \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑨で $x=0$ とおくと

$$g(2y)=g(y). \qquad \cdots\cdots ⑩$$

⑥で x のところを $2x$ で置き換えた

$$g\left((2x)^2\right)=2xg(2x) \underset{⑩}{=} 2xg(x)$$

から

$$g\left(4x^2\right)=2xg(x). \qquad \cdots\cdots ⑪$$

また⑩を使うと

$$g\left(4x^2\right)=g\left(2x^2\right)=g\left(x^2\right) \underset{⑥}{=} xg(x)$$

となるから，⑪より

$$2xg(x)=xg(x) \qquad xg(x)=0.$$

$x \fallingdotseq 0$ のとき $g(x)=0$.
$g(0)=0$ だから上の等式は $x=0$ のときも成り立つ.
よって

$$g(x)=0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

これは⑤を満たす.

したがって解は
- $f(x)=x+1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である. ■

解 2

$$f(xf(x)+2y)=f\left(x^2\right)+f(y)+x+y-1 \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

①で $x=y=0$ とおいた $f(0)=f(0)+f(0)-1$ から $f(0)=1$.

①で $y=-xf(x)$ とおいた

$$f(-xf(x))=f\left(x^2\right)+f(-xf(x))+x-xf(x)-1$$

から

$$f\left(x^2\right)=xf(x)-x+1. \qquad \cdots\cdots②$$

①で $x=0$ とおいた $f(2y)=f(y)+y$ から

$$f(2x)=f(x)+x. \qquad \cdots\cdots③$$

③で x のところを $2x$ で置き換えた $f(4x)=f(2x)+2x=f(x)+3x$ から

$$f(4x)=f(x)+3x.$$

この式で x のところを x^2 で置き換えると

$$f\left(4x^2\right)=f\left(x^2\right)+3x^2\underset{②}{=}xf(x)-x+1+3x^2$$

すなわち

$$f\left(4x^2\right)=xf(x)+3x^2-x+1. \qquad \cdots\cdots④$$

ところで②を用いると

$$\begin{aligned}f\left(4x^2\right)&=f\left((2x)^2\right)\\&\underset{②}{=}2xf(2x)-2x+1\\&\underset{③}{=}2x(f(x)+x)-2x+1\\&=2xf(x)+2x^2-2x+1\end{aligned}$$

から

$$f\left(4x^2\right)=2xf(x)+2x^2-2x+1. \qquad \cdots\cdots⑤$$

④, ⑤より

$$xf(x)+3x^2-x+1=2xf(x)+2x^2-2x+1$$

すなわち
$$xf(x) = x^2 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) = x + 1$ だから
$$f(x) = x + 1 \qquad \forall x \fallingdotseq 0.$$
$f(0) = 1$ だから上の等式は $x = 0$ のときも成り立つ.
よって
$$f(x) = x + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
このとき
$$f(xf(x) + 2y) = xf(x) + 2y + 1 = x(x + 1) + 2y + 1 = x^2 + x + 2y + 1,$$
$$f\left(x^2\right) + f(y) + x + y - 1 = x^2 + 1 + y + 1 + x + y - 1 = x^2 + x + 2y + 1$$
となり①を満たす.

したがって解は
- $f(x) = x + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である. ■

問題 54　(Romania 2013)

Find all injective functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ that satisfy :

$$|f(x) - f(y)| \leqq |x - y|$$

for any $x, y \in \mathbb{Z}$

解答

$$|f(x) - f(y)| \leqq |x - y| \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

$g(x) = f(x) - f(0)$ とおくと g は単射 (injective) で①から

$$|g(x) - g(y)| \leqq |x - y|\,. \qquad \cdots\cdots②$$

また $g(0) = 0$ である．

②で $y = 0$ とおくと

$$|g(x)| \leqq |x|\,. \qquad \cdots\cdots③$$

③で $x = 1$ とおいた $|g(1)| \leqq 1$ から $g(1) \in \{-1, 0, 1\}$.

$g(0) = 0$ で g は単射 (injective) であることから $g(1) \fallingdotseq 0$.

よって

$$g(1) \in \{-1, 1\}.$$

(1) $g(1) = 1$ のとき数学的帰納法で

$$g(n) = n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \qquad \cdots\cdots④$$

が成り立つことを示す．

(i) $n = 0, 1$ のとき④は成り立つ．

(ii) $n = k, k+1\,(k \geqq 0)$ のとき④が成り立つと仮定する．

②で $x = k+2, y = k+1$ とおくと

$$|g(k+2) - g(k+1)| \leqq 1$$

$$g(k+2) - g(k+1) \in \{-1, 0, 1\}.$$

g は単射 (injective) なので $g(k+2) - g(k+1) \fallingdotseq 0$ だから

$$g(k+2) - g(k+1) \in \{-1, 1\}.$$

$g(k+2)-g(k+1)=-1$ だとすると $g(k+2)=g(k+1)-1=(k+1)-1=k$ となる．しかし g は単射 (injective) なので $g(k+2) \fallingdotseq g(k)=k$ に矛盾する．

よって $g(k+2)-g(k+1)=1$ で $g(k+2)=g(k+1)+1=(k+1)+1=k+2$ となり $n=k+2$ のときも④は成り立つ．

(i)，(ii) より④はすべての非負の整数 n に対して成り立つ．

次に数学的帰納法で

$$g(-n)=-n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

を示す．

(i) $n=0$ のとき $g(0)=0$ だから⑤は成り立つ．

$n=-1$ のとき

③で $x=-1$ とおいた $|g(-1)| \leqq 1$ から $g(-1) \in \{-1,0,1\}$.

$g(0)=0, g(1)=1$ で g は単射 (injective) であることから $g(-1) \fallingdotseq 0,1$.

よって $g(-1)=-1$ となり，$n=-1$ のとき⑤は成り立つ．

(ii) $n=k,k+1\,(k \geqq 0)$ のとき⑤が成り立つと仮定する．

②で $x=-(k+2), y=-(k+1)$ とおくと

$$|g(k+2)-g(k+1)| \leqq 1$$

$$g(-(k+2))-g(-(k+1)) \in \{-1,0,1\}.$$

g は単射 (injective) なので $g(-(k+2))-g(-(k+1)) \fallingdotseq 0$ だから

$$g(-(k+2))-g(-(k+1)) \in \{-1,1\}.$$

$g(-(k+2))-g(-(k+1))=1$ だとすると

$$g(-(k+2))=g(-(k+1))+1=-(k+1)+1=-k$$

となる．しかし g は単射 (injective) なので $g(-(k+2)) \fallingdotseq g(-k)=-k$ に矛盾する．

よって $g(-(k+2))-g(-(k+1))=-1$ で

$$g(-(k+2))=g(-(k+1))-1=-(k+1)-1=-(k+2)$$

となり $n=k+2$ のときも⑤は成り立つ．

(i)，(ii) より⑤はすべての非負の整数 n に対して成り立つ．

以上のことから

$$g(n)=n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

よって

$$f(n) = n + f(0) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

任意の $c \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f(x) = x + c \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

は①を満たすから解である．

(2) $g(1) = -1$ のとき

$h(x) = -g(x)$ とおくと h は単射 (injective) で $h(0) = 0, h(1) = 1$ を満たし，

$$|h(x) - h(y)| \leqq |x - y| \qquad \cdots\cdots ②'$$

が成り立つので，(1) の結果から $h(n) = n, g(n) = -n, f(n) = f(0) - n$ を得る．

よって

$$f(n) = -n + f(0) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

任意の $c \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f(x) = -x + c \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

は①を満たすから解である．

(1)，(2) から解は

$c \in \mathbb{Z}$ を任意の定数として

- $f(x) = x + c \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$

と

- $f(x) = -x + c \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$

である． ■

問題 55　(Romania 2013)

Determine continuous functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$(a^2+ab+b^2)\int_a^b f(x)\,dx = 3\int_a^b x^2 f(x)\,dx,$$

for every $a, b \in \mathbb{R}$

解答

$$(a^2+ab+b^2)\int_a^b f(x)\,dx = 3\int_a^b x^2 f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $a = 0$ とおくと

$$b^2\int_0^b f(x)\,dx = 3\int_0^b x^2 f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ②$$

$f(x)$ は連続関数だから，$\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_0^b x^2 f(x)\,dx$ は b で微分可能である．
②の両辺を b で微分した

$$2b\int_0^b f(x)\,dx + b^2 f(b) = 3b^2 f(b)$$

から

$$b\int_0^b f(x)\,dx = b^2.$$

$b \neq 0$ のとき

$$\int_0^b f(x)\,dx = bf(b). \qquad \cdots\cdots ③$$

③を変形すると

$$f(b) = \frac{\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx}{b}. \qquad \cdots\cdots ③'$$

$b \neq 0$ のとき，③$'$ の右辺は微分可能だから，$f(b)$ は $b \neq 0$ で微分可能である．③の両辺を b で微分した $f(b) = f(b) + f'(b)$ から

$$f'(b) = 0 \qquad \forall b \in \mathbb{R}, b \neq 0.$$

よって

$$f(x) = c \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

$f(x)$ は連続関数だから

$$f(x) = c \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき

$$\begin{aligned}
(a^2+ab+b^2)\int_a^b f(x)\,dx &= c(a^2+ab+b^2)\left[x\right]_a^b \\
&= c(a^2+ab+b^2)(b-a) \\
&= c\left(b^3-a^3\right), \\
3\int_a^b x^2 f(x)\,dx &= 3c\int_a^b x^2\,dx \\
&= c\left[x^3\right]_a^b \\
&= c\left(b^3-a^3\right)
\end{aligned}$$

となり①は成り立つ.

よって解は

c を任意の実数として

- $f(x) = c \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である. ■

問題 56　(Romania TST 2013)

Determine all injective functions defined on the set of positive integers into itself satisfying condition : If S is a finite set of positive integers such that $\sum_{s\in S}\frac{1}{s}$ is an integer , then $\sum_{s\in S}\frac{1}{f(s)}$ is also an interger.

解答　$S=\{1\}$ とすると $\sum_{s\in S}=1$ は整数だから $\sum_{s\in S}\frac{1}{f(s)}=\frac{1}{f(1)}$ は正の整数となる．よって，$\boldsymbol{f(1)=1}$.
$\forall n \geqq 2$ に対して

$$S_1=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=1,$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{n+1}=1$$

だから

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{f(i(i+1))}+\frac{1}{f(n)},\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(i(i+1))}+\frac{1}{f(n+1)}$$

はともに整数となる．差をとると

$$\frac{1}{f(n(n+1))}+\frac{1}{f(n+1)}-\frac{1}{f(n)}$$

は整数となる．
f は単射 (injective) だから，$f(1)=1$ より

$$f(n)\geqq 2 \qquad \forall n\geqq 2$$

となる．これを使うと

$$-\frac{1}{2}=0+0-\frac{1}{2}<\frac{1}{f(n(n+1))}+\frac{1}{f(n+1)}-\frac{1}{f(n)}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1.$$

よって $\frac{1}{f(n(n+1))}+\frac{1}{f(n+1)}-\frac{1}{f(n)}=0$ から

$$\frac{1}{f(n(n+1))}+\frac{1}{f(n+1)}=\frac{1}{f(n)} \qquad \forall n\geqq 2. \qquad \cdots\cdots ①$$

①から

$$\frac{1}{f(n(n+1))}=\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(n+1)}=\frac{f(n+1)-f(n)}{f(n+1)f(n)}>0.$$

よって $f(n+1)-f(n)>0$ となり $f(n)$ は $n \geqq 2$ のとき増加関数である.
$f(n) \geqq 2\,(n \geqq 2)$ で $f(1)=1$ だから
$f(n)$ は $n \geqq 1$ のとき増加関数である. $\cdots\cdots$②
$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=1$ だから $\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\dfrac{1}{f(6)}$ は整数である.
$f(n) \geqq 2\,(n \geqq 2)$ で $f(1)=1$ を使うと

$$0<\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(6)} \leqq \frac{3}{2}$$

だから

$$\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(6)}=1.$$

②から $2 \leqq f(2)<f(3)<f(6)$ だから

$$\frac{3}{f(2)}>\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(6)}=1 \qquad \frac{3}{f(2)}>1 \qquad 3>f(2) \geqq 2.$$

よって $\boldsymbol{f(2)=2}$, $\dfrac{1}{f(3)}+\dfrac{1}{f(6)}=\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{2}{f(3)}>\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(6)}=\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{f(3)}>\frac{1}{2} \qquad 4>f(3)>f(2)=2.$$

よって $\boldsymbol{f(3)=3, f(6)=6.}$
②を使うと $\boldsymbol{f(4)=4, f(5)=5}$ を得る.

数学的帰納法で, すべての自然数 n に対して

$$f(n)=n \qquad \cdots\cdots③$$

が成り立つことを示す.

(i) $n=1,2,3,4$ のとき③は成り立つ.
(ii) $n \leqq k\,(k \geqq 4)$ のとき③が成り立つと仮定する.
①で $n=k-2$ とおくと

$$\frac{1}{f(k-2)(k-1)}=\frac{1}{f(k-2)}-\frac{1}{f(k-1)}.$$

仮定から $f(k-1)=k-1, f(k-2)=k-2$ が成り立つので

$$\frac{1}{f(k-2)(k-1)}=\frac{1}{f(k-2)}-\frac{1}{f(k-1)}=\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}=\frac{1}{(k-2)(k-1)}.$$

よって

$$f((k-2)(k-1))=(k-2)(k-1). \qquad \cdots\cdots④$$

$k \geqq 4$ のとき

$$(k-2)(k-1)-(k+1)=k^2-4k+1=k(k-4)+1>1>0$$

より $(k-2)(k-1)>(k+1)$ が成り立つ．

$f(4)=4,\ f((k-2)(k-1))=(k-2)(k-1)$ と②から

$$\begin{array}{ccccccccc} \underbrace{f(4)}_{=4} & < & f(5) < f(6) & < & \cdots\cdots < f((k-2)(k-1)-1) & < & \underbrace{f((k-2)(k-1))}_{=(k-2)(k-1)} \\ 4 & < \ 5 \ < & 6 & < & \cdots\cdots < (k-2)(k-1)-1 & & < (k-2)(k-1) \end{array}$$

したがって，$4<m<(k-2)(k-1)$ を満たす $m=5,6,\ldots,(k-2)(k-1)-1$ に対して $f(m)=m$ となる．

特に $m=k+1$ のとき $f(k+1)=k+1$ となるから $n=k+1$ のときも③は成り立つ．

(i)，(ii) よりすべての自然数 n に対して③が成り立つ．

③のとき，$\displaystyle\sum_{s\in S}\frac{1}{s}$ が整数ならば，$\displaystyle\sum_{s\in S}\frac{1}{f(s)}=\sum_{s\in S}\frac{1}{s}$ は整数となる．

よって解は

- $f(n)=n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

である． ■

問題 57　(Pan African 2013)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(y) + f(x+y) = xy$$

解答

$$f(x)f(y) + f(x+y) = xy \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $y = 0$ とおいた $f(x)f(0) + f(x) = 0$ から

$$(f(0)+1)f(x) = 0.$$

$f(0) + 1 \fallingdotseq 0$ だとすると

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

となるが，これは①を満たさない．

よって $f(0) = -1$.

①で $y = -x$ とおいた $f(x)f(-x) + f(0) = -x^2$ から

$$f(x)f(-x) = -x^2 + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots②$$

②で $x = 1$ とおいた $f(1)f(-1) = 0$ から $f(1) = 0$ または $f(-1) = 0$ となる．

(1) $f(1) = 0$ の場合

①で $y = 1$ とおいた $f(x)f(1) + f(x+1) = x$ から

$$f(x+1) = x = (x+1) - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

よって

$$f(x) = x - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき

$$\begin{aligned} f(x)f(y) + f(x+y) &= (x-1)(y-1) + (x+y) - 1 \\ &= xy - (x+y) + 1 + (x+y) - 1 \\ &= xy \end{aligned}$$

となり①は成り立つ．

(2) $f(-1)=0$ の場合

①で $y=-1$ とおくと $f(x)f(-1)+f(x-1)=-x$ から

$$f(x-1)=-x=-(x-1)-1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

よって

$$f(x)=-x-1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

このとき

$$\begin{aligned}f(x)f(y)+f(x+y)&=(-x-1)(-y-1)-(x+y)-1\\&=xy+(x+y)+1-(x+y)-1\\&=xy\end{aligned}$$

となり①は成り立つ.

(1), (2) より解は

- $f(x)=x-1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

と

- $f(x)=-x-1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である. ■

問題 58　(Stars of Mathematics 2013)

Given a (fixed) positive integer N , Solve the function equation

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R},\quad f(2k)=2f(k)\,\text{and}\,f(N-k)=f(k),\,\text{for all}\,k\in\mathbb{Z}$$

解答

$$f(2k)=2f(k) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$f(N-k)=f(k) \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく．

N が奇数の場合

l を奇数とすると，②より

$$\begin{aligned}f(l)=f(\underbrace{N-l}_{\text{偶数}})&\underset{①}{=}2f\left(\frac{N-l}{2}\right)=2f\left(N-\frac{N+l}{2}\right)\\&\underset{②}{=}2f\left(\frac{N+l}{2}\right)\\&\underset{①}{=}f(N+l)\\&\underset{②}{=}f(-l).\end{aligned}$$

よって

$$f(-l)=f(l) \qquad \forall l\in\mathbb{Z},\, l\,\text{は奇数}. \qquad \cdots\cdots ③$$

任意の $a\in\mathbb{Z}$ は $a=2^b l$, $l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, l : 奇数 の形にかけるから，①を繰り返し使うと

$$f(a)=f\left(2^b l\right)=2^b f(l),\, f(-a)=f\left(2^b\cdot(-l)\right)=2^b f(-l).$$

③を使うと

$$f(-a)=f(a) \qquad \forall a\in\mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots ④$$

④を使うと $f(k)=f(N-k)=f(-(N-k))=f(k-N)$ から

$$f(k)=f(k-N).$$

k のところを $k+N$ で置き換えると

$$f(k+N)=f(k) \qquad \forall k\in\mathbb{Z}.$$

よって f は周期 N(奇数) をもつ周期関数である．　　$\cdots\cdots(*)$

N が偶数の場合

$$\begin{aligned} f(k) = f(N-k) &\underset{①}{=} \frac{1}{2} f(2(N-k)) = \frac{1}{2} f(N-(2k-N)) \\ &\underset{②}{=} \frac{1}{2} f(2k-N) = \frac{1}{2} f\left(2\left(k - \frac{N}{2}\right)\right) \\ &\underset{①}{=} \frac{1}{2} \cdot 2f\left(k - \frac{N}{2}\right). \end{aligned}$$

よって

$$f(k) = f\left(k - \frac{N}{2}\right) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

k のところを $k + \dfrac{N}{2}$ で置き換えると

$$f\left(k + \frac{N}{2}\right) = f(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

よって f は周期 $N_1 = \dfrac{N}{2}$ をもつ周期関数である．
N_1 が偶数のときは

$$2f(k) = f(2k) = f(2k + N_1) = f\left(2\left(k + \frac{N_1}{2}\right)\right) = 2f\left(k + \frac{N_1}{2}\right)$$

f は周期 $N_2 = \dfrac{N_1}{2}$ をもつ周期関数である．
N_2 が偶数のときは同じ操作を繰り返すことにより，f は周期 p(p は奇数) をもつ周期関数であることがいえる．

以上のことから，f は周期 $p \in \mathbb{N}$(p は奇数) をもつ周期関数であるとすると

$$f(k+p) = f(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2 と p は互いに素だから，オイラーの定理より

$$\boldsymbol{2^{\varphi(p)} - 1 \equiv 0 \pmod{p}}$$

が成り立つので，任意の整数 a に対して

$$f\left(a \cdot 2^{\varphi(p)}\right) = f\left(a + a\left(\underbrace{2^{\varphi(p)} - 1}_{p\text{ の倍数}}\right)\right) = f(a).$$

また

$$f\left(a \cdot 2^{\varphi(p)}\right) = 2^{\varphi(p)} f(a)$$

でもあるから
$$f(a) = 2^{\varphi(p)} f(a).$$
よって
$$f(a) = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{Z}.$$
これは①，②を満たすから解は

- $f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$

である． ■

[注] オイラーの定理 a と m が互いに素ならば
$$\boldsymbol{a^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}}$$
が成り立つ．

問題 59　(USA TSTST 2013)

Find all functions $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ that satisfy the equation

$$f^{abc-a}(abc)+f^{abc-b}(abc)+f^{abc-c}(abc)=a+b+c$$

for all $a,b,c \geqq 2$. (Here $f^1(n)=f(n)$ and $f^k(n)=f\left(f^{k-1}(n)\right)$ for every integer k greater than 1.)

解 1

$$f^{abc-a}(abc)+f^{abc-b}(abc)+f^{abc-c}(abc)=a+b+c \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

(1) $f^{x^2-x}\left(x^2\right)=x \qquad \forall x \geqq 2$ を示す.

①で $a=b=c=x$ とおいた $3f^{x^3-x}\left(x^3\right)=3x$ から

$$f^{x^3-x}\left(x^3\right)=x \qquad \forall x \geqq 2 \qquad \cdots\cdots②$$

②で x のところを x^3 で置き換えると

$$f^{x^9-x^3}\left(x^9\right)=x^3 \qquad \forall x \geqq 2.$$

よって

$$f^{x^9-x}\left(x^9\right)=f^{x^3-x}\left(f^{x^9-x^3}\left(x^9\right)\right)=f^{x^3-x}\left(x^3\right)=x$$

から

$$f^{x^9-x}\left(x^9\right)=x \qquad \forall x \geqq 2.$$

①で $a=x, b=x^3, c=x^5$ とおいた

$$\underbrace{f^{x^9-x}\left(x^9\right)}_{=x}+\underbrace{f^{x^9-x^3}\left(x^9\right)}_{=x^3}+f^{x^9-x^5}\left(x^9\right)=x+x^3+x^5$$

から

$$f^{x^9-x^5}\left(x^9\right)=x^5 \qquad \forall x \geqq 2.$$

①で $a=x^5, b=x^3, c=x^2$ とおいた

$$\underbrace{f^{x^9-x^5}\left(x^9\right)}_{=x^5}+2f^{x^9-x^2}\left(x^9\right)=x^5+2x^2$$

から

$$f^{x^9-x^2}\left(x^9\right)=x^2 \qquad \forall x \geqq 2.$$

よって

$$f^{x^2-x}\left(x^2\right)=f^{x^2-x}\left(f^{x^9-x^2}\left(x^9\right)\right)=f^{x^9-x}\left(x^9\right)=x$$

となり

$$f^{x^2-x}\left(x^2\right)=x \qquad \forall x \geqq 2.$$

(2) $f^{ab-a}(ab)+f^{ab-b}(ab)=a+b \qquad \forall a,b \geqq 2$ を示す．

①で $c=ab,\ a,b \geqq 2$ とおくと

$$f^{a^2b^2-a}\left(a^2b^2\right)+f^{a^2b^2-b}\left(a^2b^2\right)+f^{a^2b^2-c}\left(a^2b^2\right)=a+b+ab.$$

(1) から $f^{a^2b^2-b}(a^2b^2)=ab$ となるので

$$f^{a^2b^2-a}\left(a^2b^2\right)+f^{a^2b^2-c}\left(a^2b^2\right)=a+b. \qquad \cdots\cdots③$$

ところで

$$f^{ab-a}(ab)=f^{ab-a}\left(f^{a^2b^2-b}\left(a^2b^2\right)\right)=f^{a^2b^2-a}\left(a^2b^2\right)$$

だから

$$f^{ab-a}(ab)=f^{a^2b^2-a}\left(a^2b^2\right)$$

が成り立つ．この式で a と b を交換すると

$$f^{ab-b}(ab)=f^{a^2b^2-b}\left(a^2b^2\right).$$

これらの式を使うと③は

$$f^{ab-a}(ab)+f^{ab-b}(ab)=a+b \qquad \forall a,b \geqq 2$$

となる．

(3) $f^{abc-a}(abc)-a+f^{abc-b}(abc)-b=f^{abc-ab}(abc)-ab \quad \forall a,b,c \geqq 2$ を示す．

(2) で a のところを ab，b のところを c で置き換えると

$$f^{abc-ab}(abc)+f^{abc-c}(abc)=ab+c.$$

①でこれを使うと

$$f^{abc-a}(abc)-a+f^{abc-b}(abc)-b=c-f^{abc-a}(abc)=f^{abc-ab}(abc)-ab.$$

(4) $\forall n \geqq 2, \forall a_1, a_2, \ldots, a_n \geqq 2, p = a_1 a_2 \ldots a_n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f^{p-a_i}(p) - a_i \right) = 0 \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 2$ のときは（2）から成り立つ．

$n = 3$ のときは①から成り立つ．

(ii) $n = k - 1\,(k \geqq 3)$ のとき成り立つと仮定する．

$a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1}, a_k \geqq 2$ に対して $p = a_1 a_2 \cdots a_k$ とおく．

仮定から $a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1}a_k\,(\geqq 2)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{k-2} \left(f^{p-a_i}(p) - a_i \right) + f^{p-a_{k-1}a_k}(p) - a_{k-1}a_k = 0. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

(3) で $a = a_{k-1}a_k, b = a_k, c = \dfrac{p}{a_{k-1}a_k}$ とおくと

$$f^{p-a_{k-1}}(p) - a_{k-1} + f^{p-a_k}(p) - a_k = f^{p-a_{k-1}-a_k}(p) - a_{k-1}a_k$$

が成り立つから，⑤は

$$\sum_{i=1}^{k-2} \left(f^{p-a_i}(p) - a_i \right) + f^{p-a_{k-1}}(p) - a_{k-1} + f^{p-a_k}(p) - a_k = 0$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{k} \left(f^{p-a_i}(p) - a_i \right) = 0$$

となり，$n = k$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) から 2 以上の自然数 n に対して④は成り立つ．

(5) $\forall x \geqq 3$ に対して $f(x) = x - 1$ が成り立つこと示す．

$\forall r \geqq 1$ に対して，（4）で $a_1 = x, a_2 = x, \ldots, a_r = x, a_{r+1} = x - 1\,(\geqq 2)$ とおくと

$$r f^{x^r(x-1)-x}\left(x^r(x-1)\right) + f^{x^r(x-1)-(x-1)}\left(x^r(x-1)\right) = rx + (x-1).$$

$x_r = f^{x^r(x-1)-x}\left(x^r(x-1)\right)$ とおくと，この方程式は

$$rx + f(x_r) = r + (x-1) \qquad \cdots\cdots ⑥$$

となる．

$\forall r > x$ に対して

$$rx_r < rx_r + f(x_r) = rx + (x-1) < rx + r = r(x+1)$$

から $x_r < x+1$ すなわち $x_r \leqq x$.
r は $r > x$ を満たしていればよいから，無限個の $r = x+1, x+2, \ldots$ に対して $x_r \in \{1, 2, \ldots, x\}$ であるから，ある $y \leqq x$ が存在して $x_r = y$ となる $r > x$ は無限個ある.
⑥から

$$ry + f(y) = rx + (x-1) \qquad \cdots\cdots ⑦$$

を満たす $r > x$ は無限個ある.
⑦を変形すると

$$r(y-x) = (x-1) - f(y).$$

$y - x \neq 0$ だとこれを満たす r は 1 個しかないから

$$y - x = 0 \quad \text{かつ} \quad (x-1) - f(y) = 0$$

となる．y を消去すると

$$f(x) = x - 1 \qquad \forall x \geqq 3.$$

したがって

$$\begin{cases} f(1), f(2) \text{ は任意の自然数} \\ f(n) = n - 1 \qquad \forall n \geqq 3 \end{cases}$$

となり，これは①を満たすことを示す.
$n \geqq 3$ のとき $f(n) = n - 1$ だから

$$f^k(n) = n - k \quad \forall k \geqq 1.$$

これを使うと

$$\begin{aligned} & f^{abc-a}(abc) + f^{abc-b}(abc) + f^{abc-c}(abc) \\ &= abc - (abc - a) + abc - (abc - b) + abc - (abc - c) \\ &= a + b + c \end{aligned}$$

が成り立つから，解は

- $\begin{cases} f(1), f(2) \text{ は任意の自然数} \\ f(n) = n - 1 \qquad \forall n \geqq 3 \end{cases}$

である. ■

解 2

$$f^{abc-a}(abc)+f^{abc-b}(abc)+f^{abc-c}(abc)=a+b+c \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

(1) $\forall t \geqq 2$ に対して $f^{t^2-t}\left(t^2\right)=t$ を示す．(解 1 の（1）参照．)

(2) $t=abc$ とおくと $f^{t-a}(t)-a+f^{t-b}(t)-b+f^{t-c}(t)-c=f^{t-ab}(t)-ab$ が成り立つ．

①から

$$f^{t-a}(t)+f^{t-b}(t)+f^{t-c}(t)=a+b+c. \qquad \cdots\cdots ②$$

①で a のところを ab，b を t で置き換えると

$$f^{t^2-ab}\left(t^2\right)+\underbrace{f^{t^2-t}\left(t^2\right)}_{=t}+f^{t^2-c}\left(t^2\right)=ab+t+c,$$

$$f^{t^2-ab}\left(t^2\right)+t+f^{t^2-c}\left(t^2\right)=ab+t+c,$$

$$f^{t^2-ab}\left(t^2\right)+f^{t^2-c}\left(t^2\right)=ab+c.$$

この式と②から

$$\begin{aligned}
&f^{t-a}(t)-a+f^{t-b}(t)-b\\
&=c-f^{t-c}(t)\\
&=f^{t^2-ab}\left(t^2\right)+f^{t^2-c}\left(t^2\right)-ab-f^{t-c}(t)\\
&=f^{t-ab}\left(\underbrace{f^{t^2-t}\left(t^2\right)}_{=t}\right)+f^{t-c}\left(\underbrace{f^{t^2-t}\left(t^2\right)}_{=t}\right)-ab-f^{t-c}(t)\\
&=f^{t-ab}(t)+f^{t-c}(t)-ab-f^{t-c}(t)\\
&=f^{t-ab}(t)-ab.
\end{aligned}$$

ゆえに，$t=abc$ とおくと

$$f^{t-a}(t)-a+f^{t-b}(t)-b+f^{t-c}(t)-c=f^{t-ab}(t)-ab. \qquad \cdots\cdots ③$$

(3) $p>q>\max(a,b), p, q$ は素数として，$s=a^pb^q, t=s^2$ とおくと

$$p\left(f^{t-a}(t)-a\right)+q\left(f^{t-a}(t)-a\right)=f^{t-s}(t)-s=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．

③から $d,e,f \geqq 2$ のとき $t=def$ とおくと

$$\left(f^{t-de}(t)-de\right)-\left(f^{t-e}(t)-e\right)=f^{t-d}(t)-d \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．

$p > q > \max(a,b), p,q$ は素数として，$s=a^p b^q, t=s^2$ だから，$d=a, e=a^{p-1}b^q, f=a^p b^q$ として⑤を用いると

$$\left(f^{t-a^p b^q}(t)-a^p b^q\right)-\left(f^{t-a^{p-1}b^q}(t)-a^{p-1}b^q\right)=f^{t-a}(t)-a.$$

$d=a, e=a^{p-2}b^q, f=a^{p+1}b^q$ として⑤を用いると

$$\left(f^{t-a^{p-1}b^q}(t)-a^{p-1}b^q\right)-\left(f^{t-a^{p-2}b^q}(t)-a^{p-2}b^q\right)=f^{t-a}(t)-a.$$

$d=a, e=a^{p-3}b^q, f=a^{p+2}b^q$ として⑤を用いると

$$\left(f^{t-a^{p-2}b^q}(t)-a^{p-2}b^q\right)-\left(f^{t-a^{p-3}b^q}(t)-a^{p-3}b^q\right)=f^{t-a}(t)-a.$$

$$\cdots\cdots$$

$d=a, e=b^q, f=a^{2p-1}b^q$ として⑤を用いると

$$\left(f^{t-ab^q}(t)-ab^q\right)-\left(f^{t-b^q}(t)-a^{p-3}b^q\right)=f^{t-a}(t)-a.$$

$d=b, e=b^{q-1}, f=a^{2p}b^q$ として⑤を用いると

$$\left(f^{t-b^q}(t)-b^q\right)-\left(f^{t-b^{q-1}}(t)-b^{q-1}\right)=f^{t-b}(t)-b.$$

$$\cdots\cdots$$

$d=b, e=b, f=a^{2p}b^{2q-2}$ として⑤を用いると

$$\left(f^{t-b^2}(t)-b^2\right)-\left(f^{t-b}(t)-b\right)=f^{t-b}(t)-b.$$

これらの等式の辺々を加えると

$$\left(f^{t-a^p b^q}(t)-a^p b^q\right)-\left(f^{t-b}(t)-b\right)=p\left(f^{t-a}(t)-a\right)+(q-1)\left(f^{t-b}(t)-b\right)$$

すなわち

$$\begin{aligned}
p\left(f^{t-a}(t)-a\right)+q\left(f^{t-b}(t)-b\right) &= f^{t-a^p b^q}(t)-a^p b^q \\
&= f^{t-s}(t)-s=\underbrace{f^{s^2-s}(s^2)}_{=s}-s \\
&= s-s=0.
\end{aligned}$$

(4) から
$$p\left(f^{t-a}(t)-a\right)+q\left(f^{t-a}(t)-a\right)=0$$
で p と q は互いに素だから
$$p\,|\,f^{t-b}(t)-b \quad \text{かつ} \quad q\,|\,f^{t-a}(t)-a.$$
p,q は $p>q>\max(a,b)$ を満たす任意の素数だから
$$f^{t-b}(t)-b=0 \quad \text{かつ} \quad f^{t-a}(t)-a=0 \qquad \forall a,b \geqq 2.$$
ただし，$t=a^pb^q$.
特に $a=n, b=n+1$ とおくと
$$f^{t-n}(t)=n,\ f^{t-(n+1)}(t)=n+1.$$
これらから
$$n=f^{t-n}(t)=f\left(f^{t-n-1}(t)\right)=f(n+1)$$
すなわち
$$f(n+1)=n \qquad \forall n \geqq 2.$$
したがって
$$\begin{cases} f(1), f(2) \text{ は任意の自然数} \\ f(n)=n-1 \qquad \forall n \geqq 3 \end{cases}$$
となり，これは①を満たすことを示す.
$n \geqq 3$ のとき $f(n)=n-1$ だから，$\forall k \geqq 1$ に対して $f^k(n)=n-k$ が成り立つ.
これを使うと
$$\begin{aligned} &f^{abc-a}(abc)+f^{abc-b}(abc)+f^{abc-c}(abc) \\ =&\,abc-(abc-a)+abc-(abc-b)+abc-(abc-c) \\ =&\,a+b+c \end{aligned}$$
から，①が成り立つ.

したがって，解は

- $\begin{cases} f(1), f(2) \text{ は任意の自然数} \\ f(n)=n-1 \qquad \forall n \geqq 3 \end{cases}$

である. ■

問題 60　(Turkey TST 2013)

Determine all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ such that for all real numbers x, y the following conditions hold:

(i)　$f(x^2)=f(x)^2-2xf(x)$

(ii)　$f(-x)=f(x-1)$

(iii)　$1<x<y \Longrightarrow f(x)<f(y)$

解答　(i) で $x=0$ とおくと $f(0)=f(0)^2$ で $f(0)>0$ だから $f(0)=1$.
(i) で x のところを $-x$ で置き換えると

$$f(x^2)=f(-x)^2+2xf(-x).$$

(i) を使うと

$$f(x)^2-2xf(x)=f(-x)^2+2xf(-x),$$
$$(f(x)-f(-x))(f(x)+f(-x))=2x(f(x)+f(-x)).$$

$f(x)+f(-x)>0$ だから

$$f(x)-f(-x)=2x,$$
$$f(-x)=f(x)-2x. \qquad \cdots\cdots ①$$

$f(-x)>0$ だから

$$f(x)>2x \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ②$$

(i) と ① より

$$f(x)=f(-x-1)=f(-(x+1)) \underset{①}{=} f(x+1)-2(x+1).$$

よって

$$f(x+1)=f(x)+2x+2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ③$$

$\forall m\in\mathbb{Z}$ に対して

$$f(x+m)=f(x)+2mx+m^2+m \qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つことを示す.

$m=0$ のときは明らかに④は成り立つから，数学的帰納法で n が自然数のとき

$$f(x+n)=f(x)+2nx+n^2+n \quad かつ \quad f(x-n)=f(x)-2nx+n^2-n$$

が成り立つことを示せばよい.

(1) $n=1$ のとき

③から $f(x+1)=f(x)+2x+2$ は成り立つ．

③での x ところを $x-1$ で置き換えると $f(x)=f(x-1)+2(x-1)+2$ すなわち

$$f(x-1)=f(x)-2x \qquad \cdots\cdots(*)$$

を得る．

(2) $n=k$ のとき成り立つと仮定する．

③での x ところを $x+k$ で置き換えると

$$\begin{aligned} f(x+k+1) &= f(x+k)+2(x+k)+2 \\ &= f(x)+2kx+k^2+k+2x+2k+2 \\ &= f(x)+2(k+1)x+(k+1)^2+(k+1). \end{aligned}$$

$(*)$ での x ところを $x-k$ で置き換えると

$$\begin{aligned} f(x-k-1) &= f(x-k)-2(x-k) \\ &= f(x)-2kx+k^2-k-2x+2k \\ &= f(x)-2(k+1)x+(k+1)^2-(k+1). \end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも成り立つ．

(1)，(2) よりすべての自然数 n に対して

$$f(x+n)=f(x)+2nx+n^2+n \quad \text{かつ} \quad f(x-n)=f(x)-2nx+n^2-n$$

が成り立つ．

$x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}, q>0$ とおくと

$$\begin{aligned} f\left((x+q)^2\right) &= f\left(x^2+2qx+q^2\right) \\ &= f\left(x^2+2p+q^2\right) \\ &\underset{④}{=} f\left(x^2\right)+2\left(2p+q^2\right)x^2+\left(2p+q^2\right)^2+\left(2p+q^2\right) \\ &= f(x)^2-2xf(x)+2\left(2p+q^2\right)x^2+\left(2p+q^2\right)^2+\left(2p+q^2\right). \end{aligned}$$

また (i) を用いると

$$\begin{aligned}
f\left((x+q)^2\right) &= f(x+q)^2 - 2(x+q)f(x+q) \\
&= f(x+q)(f(x+q)-2(x+q)) \\
&= \left(f(x)+2qx+q^2+q\right)\left(f(x)+2qx+q^2+q-2x-2q\right) \\
&= \left(f(x)+2p+q^2+q\right)\left(f(x)-2x+2p+q^2-q\right) \\
&= f(x)^2-2xf(x)+2(2p+q^2)f(x)-2(2p+q^2)x-\underbrace{2qx}_{=2p}+\left(2p+q^2\right)^2-q^2 \\
&= f(x)^2-2xf(x)+2(2p+q^2)f(x)-2(2p+q^2)x+\left(2p+q^2\right)^2-\left(2p+q^2\right)
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
&f(x)^2-2xf(x)+2\left(2p+q^2\right)x^2+\left(2p+q^2\right)^2+\left(2p+q^2\right) \\
=\ & f(x)^2-2xf(x)+2(2p+q^2)f(x)-2(2p+q^2)x+\left(2p+q^2\right)^2-\left(2p+q^2\right).
\end{aligned}$$

p と q は互いに素であるから $2p+q^2 \fallingdotseq 0$ なので

$$f(x) = x^2+x+1 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

を得る．

次に

$$f(x) = x^2+x+1 \qquad \forall x \in \{-\infty,-1\} \cup \{1,\infty\} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つことを示す．

$x > 1, x \in \mathbb{R}$ のとき $1 < r_n \leqq x \leqq s_n$ で $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n = x$ となる有理数列 $\{r_n\}, \{s_n\}$ をとると (iii) より

$$r_n{}^2+r_n+1 = f(r_n) \leqq f(x) \leqq f(s_n) = s_n{}^2+s_n+1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(r_n{}^2+r_n+1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(s_n{}^2+s_n+1\right) = x^2+x+1$$

だから

$$f(x) = x^2+x+1 \qquad \forall x > 1.$$

$x > 1$ のとき①から

$$f(-x) = f(x)-2x = x^2+x+1-2x = (-x)^2+(-x)+1.$$

よって

$$f(x) = x^2+x+1 \qquad \forall x < -1.$$

最後に

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

を示す．

$x > 0$ のとき (ii) から

$$f(x) = f(\underbrace{-x-1}_{<-1}) = (-x-1)^2 + (x-1) + 1 = x^2 + x + 1$$

すなわち

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \forall x > 0. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$x < 0$ のとき ③ で x のところを $x-1$ で置き換えると

$$f(x) = f(\underbrace{x-1}_{<-1}) + 2x = (x-1)^2 + (x-1) + 1 = x^2 + x + 1$$

すなわち

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \forall x < 0. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑥，⑦と $f(0) = 1$ から

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき

$$\begin{aligned} f(x)^2 - 2xf(x) &= \left(x^2 + x + 1\right)^2 - 2x\left(x^2 + x + 1\right) \\ &= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) \\ &= x^4 + x^2 + 1 = f\left(x^2\right), \end{aligned}$$

$$f(x-1) = (x-1)^2 + (x-1) + 1 = x^2 - x + 1 = f(-x),$$

$1 < x < y$ のとき

$$f(y) - f(x) = y^2 + y + 1 - \left(x^2 + x + 1\right) = (y-x)(y+x+1) > 0$$

から $f(x) < f(y)$ となり，(i)，(ii)，(iii) が成り立つ．

よって解は

- $f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 61　(Vietnam 2013)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ that satisfies $f(0)=0, f(1)=2013$ and

$$(x-y)\left(f\left(f(x)^2\right)-f\left(f(y)^2\right)\right)=(f(x)-f(y))\left(f(x)^2-f(y)^2\right)$$

Note: $f(x)^2=(f(x))^2$

解答

$$(x-y)\left(f\left(f(x)^2\right)-f\left(f(y)^2\right)\right)=(f(x)-f(y))\left(f(x)^2-f(y)^2\right) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $y=0$ とおいた $x\left(f\left(f(x)^2\right)\right)=f(x)f(x)^2$ から

$$x\left(f\left(f(x)^2\right)\right)=f(x)^3. \qquad \cdots\cdots②$$

①を変形することを考える．①の左辺を展開すると

$$\begin{aligned}&xf\left(f(x)^2\right)+yf\left(f(y)^2\right)-xf\left(f(y)^2\right)-yf\left(f(x)^2\right)\\ =&f(x)^3+f(y)^3-f(x)f(y)^2-f(x)^2f(y).\end{aligned}$$

②を使うと

$$xf\left(f(y)^2\right)+yf\left(f(x)^2\right)=f(x)f(y)^2+f(x)^2f(y). \qquad \cdots\cdots③$$

②を使うと

$$y^2f(x)^3=xy^2f\left(f(x)^2\right),\, x^2f(y)^3=x^2yf\left(f(y)^2\right)$$

が成り立つから，辺々を加えると

$$\begin{aligned}x^2f(y)^3+y^2f(x)^3&=xy\left[xf\left(f(y)^2\right)+yf\left(f(x)^2\right)\right]\\ &\underset{③}{=}xy\cdot f(x)f(y)(f(x)+f(y)).\end{aligned}$$

よって

$$x^2f(y)^3+y^2f(x)^3=xyf(x)f(y)(f(x)+f(y)). \qquad \cdots\cdots④$$

④で $y=1$ とおくと

$$x^2\cdot 2013^3+f(x)^3=xf(x)\cdot 2013(f(x)+2013),$$

$$f(x)^3-2013xf(x)^2-2013^2xf(x)+2013^3x^2=0,$$

$$f(x)^2(f(x)-2013x)-2013^2x(f(x)-2013x)=0,$$

$$\left(f(x)-2013x\right)\left(f(x)^2-2013^2x\right)=0,$$

$x<0$ のときは $f(x)^2-2013^2x>0$ だから $f(x)-2013x=0$ すなわち

$$f(x)=2013x \qquad \forall x<0.$$

$x>0$ のときは

$$f(x)\in\left\{2013x, 2013\sqrt{x}, -2013\sqrt{x}\right\}. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$x>0$ のときも $f(x)=2013x$ が成り立つことを示したい．そのために，$b>0, b\fallingdotseq 1$ で $f(b)\in\left\{2013\sqrt{b}, -2013\sqrt{b}\right\}$ となる b が存在すると仮定して矛盾を導く．

(1) $f(b)=-2013\sqrt{b}$ の場合

②で $x=b$ とおいた $x\left(f\left(f(b)^2\right)\right)=f(b)^3=-2013^3b\sqrt{b}$ から

$$f\left(2013^2b\right)=-2013^3\sqrt{b}.$$

⑤で $x=2013^2b$ とおくと

$$f\left(2013^2b\right)\in\left\{2013^3b, 2013^2\sqrt{b}, -2013^2\sqrt{b}\right\}$$

だから

$$-2013^3\sqrt{b}=-2013^2\sqrt{b}$$

が成立しなければならないが，$b>0$ なので不可能である．

(2) $f(b)=2013\sqrt{b}$ の場合

②で $x=b$ とおいた $x\left(f\left(f(b)^2\right)\right)=f(b)^3=2013^3b\sqrt{b}$ から

$$f\left(2013^2b\right)=2013^3\sqrt{b}.$$

⑤で $x=2013^2b$ とおくと

$$f\left(2013^2b\right)\in\left\{2013^3b, 2013^2\sqrt{b}, -2013^2\sqrt{b}\right\}$$

となるが

$$2013^3\sqrt{b}\fallingdotseq 2013^2\sqrt{b}, -2013^2\sqrt{b}$$

だから

$$2013^3\sqrt{b}=2013^3b$$

が成立しなければならない．

この式から $b=\sqrt{b}$ となり $b=0$ または $b=1$ を得るが，$b>0, b\fallingdotseq 1$ に矛盾する．

よって

$$f(x) = 2013x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq 1.$$

$f(0) = 0, f(1) = 2013$ だから

$$f(x) = 2013x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x \geqq 0.$$

$x <$ のとき $f(x) = 2013x$ であったから

$$f(x) = 2013x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき

$$\begin{aligned}
(x-y)\left(f\left(f(x)^2\right) - f\left(f(y)^2\right)\right) &= (x-y)\left(f\left(2013^2x^2\right) - f\left(2013^2y^2\right)\right) \\
&= (x-y)\left(2013^3x^2 - 2013^3y^2\right) \\
&= 2013^3(x-y)(x^2-y^2), \\
(f(x)-f(y))\left(f(x)^2 - f(y)^2\right) &= (2013x - 2013y)\left(2013^2x^2 - 2013^2y^2\right) \\
&= 2013^3(x-y)(x^2-y^2)
\end{aligned}$$

となり①は成り立つ.

よって解は

- $f(x) = 2013x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である. ■

問題 62　(Uzbekistan 2013)

Find all functions $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ such that

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+t)+f(t+x)+f(x+z)+f(y+t)\geqq 6f(x-3y+5z+7t)$$

for all $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$

解答

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+t)+f(t+x)+f(x+z)+f(y+t)\geqq 6f(x-3y+5z+7t) \quad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $y=z=t=0$ とおいた $f(x)+f(0)+f(0)+f(x)+f(x)+f(0)\geqq 6f(x)$ から

$$f(x)\leqq f(0) \qquad \forall x\in\mathbb{Q}. \qquad \cdots\cdots ②$$

①で x のところを $\dfrac{x}{2}$ で置き換え，$y=\dfrac{x}{2}, z=-\dfrac{x}{2}, t=\dfrac{x}{2}$ とおいた

$$f(x)+f(0)+f(0)+f(x)+f(0)+f(x)\geqq 6f\left(\frac{x}{2}-\frac{3x}{2}-\frac{5x}{2}+\frac{7x}{2}\right)=6f(0)$$

から

$$f(x)\geqq f(0) \qquad \forall x\in\mathbb{Q}. \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③から

$$f(x)=f(0) \qquad \forall x\in\mathbb{Q}.$$

このとき，①は成り立つ．

よって解は

c を任意の有理数として

- $f(x)=c \qquad \forall x\in\mathbb{Q}$

である．■

問題 63　(Albania 2012)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$f\left(x^3\right)+f\left(y^3\right)=(x+y)f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right)-f\left(xy\right)$$

for all $x\in\mathbb{R}$

解答

$$f\left(x^3\right)+f\left(y^3\right)=(x+y)f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right)-f\left(xy\right) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $x=y=0$ とおいた $2f(0)=f(0)-f(0)$ から $f(0)=0$.

①で $y=0$ とおいた $f\left(x^3\right)+f(0)=xf\left(x^2\right)+f(0)-f(0)$ から

$$f\left(x^3\right)=xf\left(x^2\right) \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots②$$

①で $x=0$ とおくと $f(0)+f\left(y^3\right)=yf(0)+f\left(y^2\right)-f(0)$ から $f\left(y^3\right)=f\left(y^2\right)$

すなわち

$$f\left(x^3\right)=f\left(x^2\right) \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots③$$

②，③から

$$xf\left(x^2\right)=f\left(x^2\right) \qquad (x-1)f\left(x^2\right)=0.$$

$x\fallingdotseq 1$ のとき

$$f\left(x^2\right)=0. \qquad \cdots\cdots④$$

④で $x=-1$ とおくと $f(1)=0$.

よって

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}, x\geqq 0. \qquad \cdots\cdots⑤$$

$x<0$ のとき $t=\sqrt[3]{x}\,(<0)$ とおくと $x=t^3$ で②を使うと

$$f(x)=f(t^3)\underset{②}{=}tf\left(t^2\right)\underset{⑤}{=}t\cdot 0=0.$$

よって

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}, x<0. \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑤，⑥より

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たす．

よって解は

- $f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 64　(Albania TST 2012)

Let $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ be a function such that:

$$x, y > 0 \qquad f\,(x + f(y)) = yf(xy + 1)$$

a) Show that $(y-1)(f(y)-1) \leqq 0$

b) Find all functions that require the given condition.

解答

$$f\,(x + f(y)) = yf(xy + 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

a) $y = 1$ のとき $(y-1)(f(y)-1) = 0$ となり不等式は成り立つ．

$y \fallingdotseq 1$ のとき，もしも $(y-1)(f(y)-1) > 0$ となる $y > 0, y \fallingdotseq 1$ が存在するならば，①で $x = \dfrac{f(y)-1}{y-1}\ (>0)$ とおくと

$$f\left(\frac{f(y)-1}{y-1} + f(y)\right) = yf\left(\frac{f(y)-1}{y-1}\right) \cdot y + 1,$$

$$f\left(\frac{yf(y)-1}{y-1}\right) = yf\left(\frac{yf(y)-1}{y-1}\right).$$

よって，$y = 1$ を得る．これは $(y-1)(f(y)-1) > 0$ に矛盾するから

$$(y-1)(f(y)-1) \leqq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

b) (a) から，$\forall z \in \mathbb{R}^+$ に対して $(z-1)(f(z)-1) \leqq 0$ が成り立つから

$$\left.\begin{array}{lll} z > 1 & \text{のとき} & f(z) \leqq 1 \\ 0 < z < 1 & \text{のとき} & f(z) \geqq 1 \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(*)$$

を得る．

$z > 1$ の場合 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ となることを示す．

①で $x = \dfrac{z-1}{z}, y = z$ とおくと

$$f\left(\frac{z-1}{z} + f(z)\right) = zf\left(\frac{z-1}{z} \cdot z + 1\right) \qquad f\left(\frac{z-1}{z} + f(z)\right) = zf(z).$$

この式を変形すると

$$zf(z) = f\left(\frac{z-1}{z} + f(z)\right) = f\left(1 - \frac{1}{z} + f(z)\right).$$

$f(z)-\dfrac{1}{z}<0$ のとき $0<1-\dfrac{1}{z}+f(z)<1$ だから，$(*)$ より

$$f\left(1-\frac{1}{z}+f(z)\right) \geqq 1.$$

よって

$$zf(z) \geqq 1 \qquad f(z)-\frac{1}{z} \geqq 0.$$

これは $f(z)-\dfrac{1}{z}<0$ に矛盾する．

$f(z)-\dfrac{1}{z}>0$ のとき $1-\dfrac{1}{z}+f(z)>1$ だから，$(*)$ より

$$f\left(1-\frac{1}{z}+f(z)\right) \leqq 1.$$

よって

$$zf(z) \leqq 1 \qquad f(z)-\frac{1}{z} \leqq 0.$$

これは $f(z)-\dfrac{1}{z}>0$ に矛盾する．

したがって

$$f(z)=\frac{1}{z} \qquad \forall z>1. \qquad \cdots\cdots②$$

$x, y>0$ のとき，$xy+1>1$ だから②より $f(xy+1)=\dfrac{1}{xy+1}$ である．これを①に使うと

$$f(x+f(y))=\frac{y}{xy+1} \qquad \forall x, y>0. \qquad \cdots\cdots③$$

③で $x=1$ とおくと

$$f(1+f(y))=\frac{y}{y+1}.$$

$1+f(y)>1$ なので $f(1+f(y))=\dfrac{1}{1+f(y)}$ が成り立ち

$$\frac{1}{1+f(y)}=\frac{y}{xy+1} \qquad 1+f(y)=\frac{y+1}{y}.$$

よって

$$f(y)=\frac{1}{y} \qquad \forall y>0$$

から

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{+}.$$

このとき，$\forall x, y > 0$ に対して

$$f\left(x+f(y)\right) = f\left(x+\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{xy+1}{y}\right) = \frac{y}{xy+1} = yf(xy+1)$$

となり①を満たす，

よって解は

- $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{+}$

である． ■

問題 65　(Balkan 2012)

Let $\mathbb{Z}^+$ be the set of positive integers. Find all functions $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ such that the following conditions both hold:

(i) $f(n!) = f(n)!$ for every positive integer n,

(ii) $m - n$ divides $f(m) - f(n)$ whenever m and n are different positive integers.

解答

$$f(n!) = f(n)! \qquad \cdots\cdots ①$$

$$m - n \mid f(m) - f(n) \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく.

①で $n = 1$ とおくと $f(1) = f(1!) = f(1)!$.

①で $n = 2$ とおくと $f(2) = f(2!) = f(2)!$.

$m! = m\,(m \in \mathbb{Z}^+)$ を満たすのは $m \in \{1, 2\}$ のみである.

$m \geqq 3$ のときは $m! = m(m-1)(m-2)! \geqq m \cdot 2 > m$.

$m = 1, 2$ のとき $m! = m$ は成り立つ.

よって

$$f(1) \in \{1, 2\},\ f(2) \in \{1, 2\}$$

が成り立つ.

②から

$$n \cdot n! = (n+1)! - n! \mid f((n+1)!) - f(n!) \underset{①}{=} f(n+1)! - f(n)!.$$

よって

$$n \cdot n! \mid f(n+1)! - f(n)!. \qquad \cdots\cdots ③$$

ある $k\,(\geqq 2) \in \mathbb{Z}^+$ に対して $f(k) = 1$ が成り立つならば

$$f(n) = 1 \qquad \forall n \geqq k \qquad \cdots\cdots ④$$

となることを数学的帰納法で示す.

(i) $n = k$ のときは成り立つ.

(ii) $n = m\,(\geqq k)$ のとき成り立つと仮定すると

$$m \cdot m! = (m+1)! - m! \mid f((m+1)!) - f(m!) = f(m+1)! - f(m)! = f(m+1)! - 1$$

から

$$f(m+1)! \equiv 1 \pmod{m \cdot m!}.$$

$l = f(m+1)$ とおくと $l\,! \equiv 1 \pmod{m \cdot m!}$.

$l \geqq 2$ と仮定する.

$2 \leqq l < m$ のとき，$l\,! \mid m \cdot m!$ と $l\,! \equiv 1 \pmod{m \cdot m!}$ から $l\,! \equiv 1 \pmod{l\,!}$ となるが，これは $l\,! \equiv 0 \pmod{l\,!}$ に矛盾する.

$m \leqq l$ のとき，$l\,! \equiv 1 \pmod{m \cdot m!}$ から $l\,! \equiv 1 \pmod{m!}$ となるが，これは $l\,! \equiv 0 \pmod{m!}$ に矛盾する.

よって $l = 1$ すなわち $f(m+1) = 1$ となり $n = m+1$ のときも成り立つ.

(i)，(ii) より k 以上のすべての自然数 n に対して④が成り立つ.

(1) $f(1) = 1, f(2) = 1$ の場合

④から

$$f(n) = 1 \quad \forall n \geqq 2$$

となり

$$f(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

これは (i)，(ii) を満たすから解である.

(2) $f(1) = 2, f(2) = 1$ の場合

④から

$$f(n) = 1 \quad \forall n \geqq 2$$

となる.

②から

$$3 - 1 \mid f(3) - f(1) = 1 - 2 = -1$$

となるが $2 \nmid -1$ に矛盾する.

(3) $f(1) = 1, f(2) = 2$ の場合

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ に対して

$$f(n) = n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となることを数学的帰納法で示す.

(i) $n=1,2$ のとき⑤は成り立つ．

(ii) $n=k\,(k \geqq 2)$ のとき⑤が成り立つと仮定する．

③から

$$k\cdot k! = (k+1)!-k! \mid f((k+1)!)-f(k!) = f(k+1)!-\underbrace{f(k)}_{=k}! = f(k+1)!-k!.$$

よって

$$f(k+1)! \equiv k! \pmod{k\cdot k!}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥を使い

$$f(k+1) < 2k$$

を示す．

$f(k+1) \geqq 2k$ とすると $f(k+1)! \equiv 0 \pmod{k\cdot k!}$ だから，⑥より $k! \equiv 0 \pmod{k\cdot k!}$ となる．この式は $k \geqq 2$ だから成り立たない．

よって $f(k+1) < 2k$ が成り立つ．

②より $k=(k+1)-1 \mid f(k+1)-f(1) = f(k+1)-1$ が成り立つから

$$f(k+1) \equiv 1 \pmod{k}.$$

$f(k+1) < 2k$ だから

$$f(k+1) \in \{1, k+1\}.$$

$f(k+1)=1$ だとすると

$$k\cdot k! = (k+1)!-k! \mid f((k+1)!)-f(k!) = f(k+1)!-f(k)! = f(k+1)!-k! = 1-k!$$

は成立しない．

よって $f(k+1)=k+1$ となり $n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) よりすべての自然数について⑤は成り立つ．

よって

$$f(n)=n \qquad \forall n \in \mathbb{R}^+.$$

これは (i)，(ii) を満たすから解である．

(4) $f(1)=2, f(2)=2$ の場合

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ に対して

$$f(n)=2 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

となることを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1,2$ のとき⑦は成り立つ．

(ii) $n=k\,(k \geqq 2)$ のとき⑦が成り立つと仮定する．

③から

$$k \cdot k! = (k+1)! - k! \mid f((k+1)!) - f(k!) = f(k+1)! - \underbrace{f(k)}_{=2}! = f(k+1)! - 2.$$

よって

$$f(k+1)! \equiv 2 \pmod{k \cdot k!}. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑧を使い

$$f(k+1) < 2k$$

を示す．

$f(k+1) \geqq 2k$ とすると $f(k+1)! \equiv 0 \pmod{k \cdot k!}$ だから，⑧より

$$2 \equiv 0 \pmod{k \cdot k!}$$

となる．この式は $k \geqq 2$ だから成り立たない．

よって $f(k+1) < 2k$ が成り立つ．

②より

$$k = (k+1) - 1 \mid f(k+1) - f(1) = f(k+1) - 2,$$
$$k-1 = (k+1) - 2 \mid f(k+1) - f(2) = f(k+1) - 2$$

が成り立つから

$$f(k+1) \equiv 2 \pmod{k(k-1)}.$$

$f(k+1) < 2k$ だから $f(k+1) = 2$ となり $n = k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) よりすべての自然数について⑦は成り立つ．

よって

$$f(n) = 2 \qquad \forall n \in \mathbb{R}^+.$$

これは (i)，(ii) を満たすから解である．

以上のことから解は次の 3 つである．

- $f(n) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{R}^+,$
- $f(n) = 2 \qquad \forall n \in \mathbb{R}^+,$
- $f(n) = n \qquad \forall n \in \mathbb{R}^+.$ ■

問題 66　(Baltic Way 2012)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ for which

$$f(x+y)=f(x-y)+f(f(1-xy))$$

hold for all real numbers x and y

解答

$$f(x+y)=f(x-y)+f(f(1-xy)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $y=0$ とおいた $f(x)=f(x)+f(f(1))$ から

$$f(f(1))=0. \qquad \cdots\cdots ②$$

①で $x=0$ とおいた $f(y)=f(-y)+f(f(1)) \underset{②}{=} f(-y)$ から

$$f(-x)=f(x)\forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ③$$

したがって f は偶関数である．

①で $y=1$ とおくと

$$f(x+1)=f(x-1)+f(f(1-x)). \qquad \cdots\cdots ④$$

④で x のところを $x+1$ で置き換えると

$$f(x+2)=f(x)+f(f(-x)).$$

f は偶関数だから

$$f(x+2)=f(x)+f(f(x)). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④で x のところを $1-x$ で置き換えると

$$f(2-x)=f(-x)+f(f(x)).$$

f は偶関数だから

$$f(x-2)=f(x)+f(f(x)). \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥から

$$f(x+2)=f(x-2). \qquad \cdots\cdots ⑦$$

①で $y=2$ とおくと

$$f(x+2)=f(x-2)+f(f(1-2x)).$$

⑦を使うと

$$f(f(1-2x))=0.$$

$1-2x$ はすべての実数値を取り得るから

$$f(f(x))=0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑧を使うと①は

$$f(x+y)=f(x-y)$$

と書き直せる．この式で $y=x$ とおくと

$$f(2x)=f(0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$2x$ はすべての実数値を取り得るから

$$f(x)=f(0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$c=f(0)$ とおき，$f(x)=c$ を代入すると $c=0$ を得る．
これは①を満たす．

したがって解は

- $f(x)=0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 67　(Brazil 2012)

Find all surjective functions $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ such that

$$2xf(f(x)) = f(x)\,(x + f(f(x)))$$

for all $x > 0$

解答

$$2xf(f(x)) = f(x)\,(x + f(f(x))) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

f は単射 (injective) であることを示す．

$f(p) = f(q) = r > 0$ とする．①で $x = p$ とおくと

$$2pf(r) = r(p + f(r)). \qquad \cdots\cdots②$$

①で $x = q$ とおくと

$$2qf(r) = r(q + f(r)). \qquad \cdots\cdots③$$

② − ③ から

$$2(p - q)f(r) = r(p - q).$$

よって $p = q$ または $f(r) = \dfrac{r}{2}$ となる．

$f(r) = \dfrac{r}{2}$ が成り立つとする．これを②に代入すると

$$2p \cdot \frac{r}{2} = r\left(p + \frac{r}{2}\right)$$

から $k^2 = 0$ すなわち $k = 0$ となるが，$k > 0$ に矛盾する．

よって $p = q$ となり f は単射 (injective) である．

f は全射 (surjective) であるから f は全単射 (bijective) である．

$x > 0$ を固定し，$a_n = \dfrac{1}{f^n(x)} > 0\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおく．ただし，$f^0(x) = x$，$n \geqq 1$ のとき $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$ とする．

$$\begin{aligned} ① &\iff \frac{2x}{f(x)} = \frac{x + f(f(x))}{f(f(x))} = 1 + \frac{x}{f(f(x))} \\ &\iff \frac{2}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{f(f(x))} \\ &\iff \frac{2}{f(x)} = \frac{1}{f^0(x)} + \frac{1}{f(f(x))}. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{2}{f(x)} = \frac{1}{f^0(x)} + \frac{1}{f(f(x))} \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．

④で x のところを $f^{n-1}(x)$ で置き換えた

$$\frac{2}{f^n(x)} = \frac{1}{f^{n-1}(x)} + \frac{1}{f^{n+1}(x)} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

から

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

すなわち

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

を得る．⑥を変形すると

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

この式から

$$a_n = a_0 + n(a_1 - a_0) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が成り立つことがわかる．

$a_1 - a_0 < 0$ のとき，n を十分大きくとると $a_n < 0$ となり $a_n > 0$ に矛盾する．

よって

$$a_1 - a_0 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

が成り立つ．

f は全単射 (bijective) だから f の逆関数 f^{-1} を用いて

$$f^{-n}(x) = f^{-1}\left(f^{-(n-1)}(x)\right) \qquad \forall n \geqq 1$$

で f^{-n} 定義する．

④で x のところを $f^{-n-1}(x)$ で置き換えると

$$\frac{2}{f^{-n}(x)} = \frac{1}{f^{-n-1}(x)} + \frac{1}{f^{-n+1}(x)}. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$b_n = \dfrac{1}{f^{-n}(x)} > 0\,(n = 0, 1, 2, \dots)$ とおくと

$$2b_n = b_{n+1} + b_{n-1}$$

すなわち

$$b_{n+1} = 2b_n - b_{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑨$$

を得る．上の議論と同様にして

$$b_1 - b_0 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

が成り立つ．

④で x のところを $f^{-1}(x)$ で置き換えると

$$\frac{2}{f^0(x)} = \frac{1}{f^{-1}(x)} + \frac{1}{f^1(x)}$$

すなわち $2a_0 = b_1 + a_1$ が成り立つ．
⑦または⑩で等号が成立しないと，⑦ + ⑩ から $a_1 + b_1 > a_0 + b_0 = 2a_0$ となり $2a_0 = b_1 + a_1$ に矛盾する．したがって $a_1 = a_0, b_1 = b_0$ となる．

$a_1 = a_0$ より $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x}$ すなわち

$$f(x) = x \qquad \forall x > 0$$

を得る．このとき

$$2xf(f(x)) = 2xf(x) = 2x^2,\ f(x)\,(x + f(f(x))) = x(x + f(x)) = x(x + x) = 2x^2$$

なので①は成り立つ．

よって解は

- $f(x) = x \qquad \forall x > 0$

である．■

問題 68　(China TST 2012)

$\mathbb{N}$ being a given integer, find all functions $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, such that for all integers x, y we have

$$f(x+y+f(y)) = f(x)+ny$$

解答

$$f(x+y+f(y)) = f(x)+ny \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

(1) $n=0$ の場合①は

$$f(x+y+f(y)) = f(x) \qquad \cdots\cdots ①'$$

となる．

任意の $y\in\mathbb{Z}$ に対して $y+f(y)=0$ のとき ①$'$ は成り立つので，

$$f(x)=-x \qquad \forall x\in\mathbb{Z}$$

は解である．

以下 $y+f(y)\fallingdotseq 0$ となる $y\in\mathbb{Z}$ が存在する場合を考える．

$c\in\mathbb{Z}$ を $f(c)+c\fallingdotseq 0$ となるものとする．①$'$ で $y=c$ とおくと

$$f(x+c+f(c)) = f(c) \qquad \forall x\in\mathbb{Z}$$

$f(c)+c\,(\fallingdotseq 0)$ は f の周期となるから，T を最小の正の周期とする．(整数の範囲で周期を考えているから最小の正の周期は存在する．)

$f(x)$ の値は $\{0,1,2,\ldots,T-1\}$ に対する値 $\{f(0),f(1),f(2),\ldots,f(T-1)\}$ によって決まる．

$0\leqq r\leqq T-1$ に対して $r=T-i$ とおくと

r	0	1	2	$\ldots$	$T-1$
i	T	$T-1$	$T-2$	$\ldots$	1

①$'$ で $y=T-i$ とおいた $f\,(x+T-i+f(T-i))=f(x)$ から

$$f\,(x+f(T-i)-i) = f(x). \qquad \cdots\cdots ②$$

$f(T-i)-i$ はで割り切れることを示す．

$f(T-i)-i$ が割り切れない $i\,(1\leqq i\leqq T)$ が存在したとする．

$$f(T-i)-i = Tq+r',\ 0<r'\leqq T-1$$

とおけるから，これを②に代入すると

$$f(x+Tq+r')=f(x) \qquad f(x+r')=f(x).$$

$r'(>0)$ は $f(x)$ の周期で $0<r' \leqq T-1$ だから T の最小性に矛盾する．
したがって $f(T-i)-i$ は割り切れるから

$$f(T-i)-i=Tq \quad (q\in\mathbb{Z})$$

とおける．この式を書き直すと $f(r)=Tq+(T-r)=T(q+1)-r$ から

$$f(x)=-x+Tg_x$$

g_x は $x\,(0\leqq x\leqq T-1)$ によって決まる整数である．また，$c+f(c)\fallingdotseq 0$ となる $c\in\mathbb{Z}$ が存在するから，$g_0,g_1,g_2,\ldots,g_{T-1}$ のなかに 0 でないものが存在する．
$g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ を
$x\in\{0,1,2,\ldots,T-1\}$ のとき，$g(x)=g_x$ とし，$g(x+mT)=g(x)+m \quad m\in\mathbb{Z}$ で定義域を $\mathbb{Z}$ まで拡張したものとすると

$$f(x)=-x+Tg(x) \qquad \forall x\in\mathbb{Z}$$

とかける．ただし，$g(0),g(1),g(2),\ldots,g(T-1)$ のなかに 0 でないものが存在する．

このとき

$$f(x+T)=-(x+T)+Tg(x+T)=-(x+T)+T(g(x)+1)=-x+Tg(x)=f(x)$$

が成り立ち，$y+f(y)=Tg(y)$ だから

$$f(x+y+f(y))=f(x+Tg(y))=f(x)$$

となり，①$'$ を満たす．

最初に見つけた解 $f(x)=-x$ は $g(0),g(1),g(2),\ldots,g(T-1)$ がすべて 0 の場合になっている．

(2) $n\fallingdotseq 0$ の場合
f は単射 (injective) である．
$f(p)=f(q)=r\,(p,q\in\mathbb{Z})$ とする．
①で $x=p, y=q$ とおくと $f(p+q+r)=r+nq$.
①で $x=q, y=p$ とおくと $f(q+p+r)=r+np$.

よって $r+nq=r+np$ かつ $n \fallingdotseq 0$ から $p=q$ となるので f は単射 (injective) である.
①で $x=y=0$ とおくと $f(f(0))=f(0)$. $a=f(0)$ とおくと $f(a)=a$.
①で $x=a, y=0$ とおいた

$$f(a+f(0))=f(a) \qquad f(2a)=f(a)=a$$

から $f(2a)=a$.
①で $x=0, y=a$ とおくと

$$f(a+f(a))=f(0)+na \qquad \underbrace{f(2a)}_{=a}=(n+1)a \qquad a=(n+1)a.$$

$a=(n+1)a$ と $n \fallingdotseq 0$ から $a=0$.
よって $f(0)=0$.
①で $x=0$ とおくと

$$f(y+f(y))=ny \qquad \cdots\cdots②$$

②で $y=x+f(x)$ とおくと

$$f\left(x+f(x)+\underbrace{f(x+f(x))}_{=nx}\right)=n(x+f(x)) \qquad f(x+f(x)+nx)=n(x+f(x)).$$

よって

$$f(nx+x+f(x))=n(x+f(x)). \qquad \cdots\cdots③$$

①で x のところを nx，y のところを x で置き換えると

$$f(nx+x+f(x))=f(nx)+nx.$$

これを③に使うと $f(nx)+nx=nx+nf(x)$ から

$$f(nx)=nf(x) \qquad \forall x \in \mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots④$$

次に $d_m=(m+1+f(m+1))-(m+f(m))$ $(m \in \mathbb{Z})$ とおくと，d_m は定数となることを示す.
①で $x=0, y=m+1$ とおいた

$$f\,(m+1+f(m+1))=n(m+1). \qquad \cdots\cdots⑤$$

①で $x=d_m, y=m$ とおくと

$$f\left(\underbrace{d_m+m+f(m)}_{=m+1+f(m+1)}\right)=f(d_m)+nm$$

から

$$f\left(m+1+f(m+1)\right)=f(d_m)+nm. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥より $f(d_m)+nm=n(m+1)$ すなわち

$$f(d_m)=n \qquad \forall m\in\mathbb{Z}.$$

$f(d_m)=n$, $f(d_1)=n$ から $f(d_m)=f(d_1)$ で, f は単射 (injective) なので．$d_m=d_1$ を得る．この式は任意の整数 m に対して成り立つから，d_m は定数である．

$$m+1+f(m+1)-(m+f(m))=d_1$$

から容易に

$$m+f(m)=0+f(0)+md_1=md_1$$

すなわち

$$f(m)=(d_1-1)m \qquad m\in\mathbb{Z}.$$

したがって

$$f(x)=cx \qquad x\in\mathbb{Z}$$

を得る．これを①に代入すると

$$f(x+y+f(y))=f(x)+ny,$$

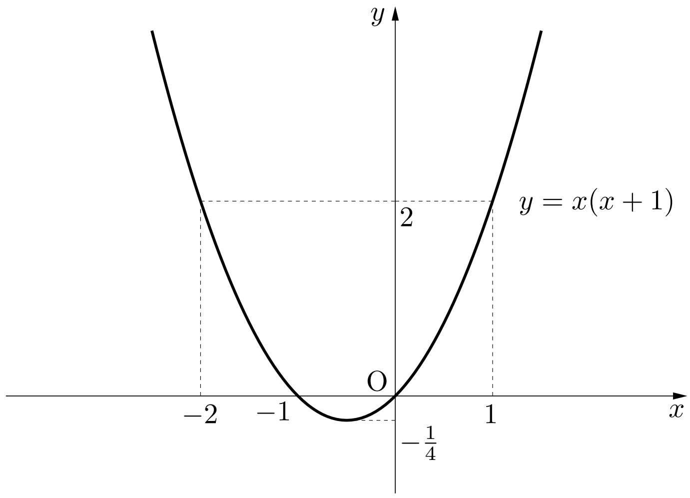
$$f(x+y+cy)=cx+ny,$$

$$c(x+y+cy)=cx+ny,$$

$$c(c+1)y=ny.$$

これが任意の整数 y に対して成り立つのは $n=c(c+1)$ のときである．

$y=x(x+1)$ のグラフを考えて



$n<0$ のとき解はない.

$n>0$ で $n \fallingdotseq c(c+1)$, $c \in \mathbb{Z}$ のとき解はない.

$n>0$ で $n=c(c+1)$, $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0,-1\}$ のとき解は $f(x)=cx$.

以上のことから，解は

- $n=0$ のとき $T \in \mathbb{Z}^{+}$，$g:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を

$$g(x+mT)=g(x)+m \quad m \in \mathbb{Z}$$

で定義される関数とするとき

$f(x)=-x+Tg(x) \qquad \forall x \in \mathbb{Z},$

- $n>0$ で $n=c(c+1)$, $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0,-1\}$ のとき

$f(x)=cx \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$

となる.

（これ以外のときは解はない.） ■

問題 69　(Czech-Polish-Slovak 2012)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying

$$f(x+f(y))-f(x)=(x+f(y))^4-x^4$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$

解答

$$f(x+f(y))-f(x)=(x+f(y))^4-x^4 \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

$a=f(0)$ とおく．①で $x=-f(y)$ とおいた $f(0)-f(-f(y))=-f(y)^4$ から

$$f(-f(x))=f(x)^4+a. \qquad \cdots\cdots②$$

①で x のところを $-f(x)$ で置き換えると

$$f(-f(x)+f(y))-f(-f(x))=(-f(x)+f(y))^4-f(x)^4.$$

②を使うと

$$f(-f(x)+f(y))-\bigl(f(x)^4+a\bigr)=(-f(x)+f(y))^4-f(x)^4$$

から

$$f(-f(x)+f(y))=(-f(x)+f(y))^4+a.$$

x と y を入れ換えると

$$f(f(x)-f(y))=(f(x)-f(y))^4+a. \qquad \cdots\cdots③$$

$f(x)=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$ は解であるから，以下 $f(x)\not\equiv 0$ とする．

$f(u)\fallingdotseq 0$ となる u が存在するから $v=f(u)$ とおく．

$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $t=(x+v)^4-x^4$ は少なくとも一つの実数解をもつことを示す．

$g(x)=(x+v)^4-x^4$ とおくと

$$g(x)=4vx^3+6v^2x^2+4v^3x+v^4$$

は $v\fallingdotseq 0$ より 3 次関数なので $g(x)=t$ は少なくとも一つの実数解をもつ．

①で $y=u$ とおくと $f(x+f(u))-f(x)=(x+f(u))^4-x^4$ から

$$f(x+v)-f(x)=(x+v)^4-x^4.$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $t=(x+v)^4-x^4$ を満たす実数 x を α とおくと $t=(\alpha+v)^4-\alpha^4$ で

$$f(\alpha+v)-f(\alpha)=t.$$

$x_1=\alpha+v, x_2=\alpha$ とおくことにより，
$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $t=f(x_1)-f(x_2)$ となる x_1, x_2 が存在する．
③で $x=x_1, y=x_2$ とおいた $f(f(x_1)-f(x_2))=(f(x_1)-f(x_2))^4+a$ から

$$f(t)=t^4+a \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

よって

$$f(x)=x^4+a \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき

$$f(x+f(y))-f(x)=(x+f(y))^4+a-\left(x^4+a\right)=(x+f(y))^4-x^4$$

となり①は成り立つ．

したがって，解は

a を定数として

- $f(x)=x^4+a \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 70 (European Girl's Mathematical Olympiad 2012)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(yf(x+y)+f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$

解答

$$f(yf(x+y)+f(x)) = 4x + 2yf(x+y) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $y = 0$ とおくと

$$f(f(x)) = 4x. \qquad \cdots\cdots②$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $x = \dfrac{t}{4}$ とおくと $f(f(x))) = t$ だから f は全射 (surjective) である．

$f(p) = f(q) = r$ とおくと②で $x = p, q$ とおくと $f(r) = 4p, f(r) = 4q$ から $p = q$ となるので f は単射 (injective) である．

したがって，f は全単射 (bijective) である．

②で $x = 0$ とおくと

$$f(f(0)) = 0. \qquad \cdots\cdots③$$

①で $y = -x$ とおくと

$$f(-xf(0) + f(x)) = 4x - 2xf(0).$$

f は全射 (surjective) だから $f(a) = 0$ となる a がある．

③から $f(f(0)) = 0 = f(a)$. f は単射 (injective) だから

$$f(0) = a. \qquad \cdots\cdots④$$

②で $x = a$ とおいた $f(f(a)) = 4a$ から

$$f(0) = 4a. \qquad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤から $4a = a$ すなわち $a = 0$ を得る．

よって

$$f(a) = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

①で $x=0$ とおいた $f(yf(y)+f(0))=2yf(y)$ から

$$f(yf(y))=2yf(y) \qquad \cdots\cdots⑥$$

②で $x=1$ とおくと $f(f(1))=4$.
⑥で $y=1$ とおくと $f(f(1))=2f(1)$ だから $2f(1)=4$ すなわち $f(1)=2$ を得る.
②で $x=1$ とおくと $f(f(1))=4$ だから $f(2)=4$ を得る.
①で $y=1-x$ とおくと

$$f((1-x)f(1)+f(x))=4x+2(1-x)f(1),$$
$$f(2(1-x)+f(x))=4x+4(1-x),$$
$$f(2(1-x)+f(x))=4,$$
$$f(2(1-x)+f(x))=f(2).$$

f は単射 (injective) だから $2(1-x)+f(x)=2$ より

$$f(x)=2x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

このとき

$$f(yf(x+y)+f(x))=2(yf(x+y)+f(x))=2(yf(x+y)+2x)=4x+2yf(x+y)$$

となり①を満たす.

よって解は
- $f(x)=2x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である. ■

問題 71　(ELMO Shortlist 2012)

Find all functions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(x)f(y)f(x+y) = f(xy)(f(x)+f(y))$$

for all $x, y \in \mathbb{Q}$

解答

$$f(x)f(y)f(x+y) = f(xy)(f(x)+f(y)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $x = y = 0$ とおくと $f(0)^3 = 2f(0)^2$ から

$$f(0) \in \{0, 2\}.$$

(1) $f(0) = 2$ の場合

①で $x = 0$ とおくと

$$f(0)f(y)^2 = f(0)(f(0)+f(y)) \qquad f(y)^2 = 2 + f(y) \qquad (f(y)+1)(f(y)-2) = 0.$$

よって

$$f(y) \in \{-1, 2\} \qquad \forall y \in \mathbb{Q}.$$

このことから

$$f(y) \neq 0 \qquad \forall y \in \mathbb{Q}$$

がいえる．

$\forall z \in \mathbb{Q}, z \neq 1$ に対して，①で $x = z, y = \dfrac{z}{z-1}$ とおいた

$$f(z)f\left(\frac{z}{z-1}\right)f\left(\frac{z^2}{z-1}\right) = f\left(\frac{z^2}{z-1}\right)\left(f(z)+f\left(\frac{z}{z-1}\right)\right)$$

から

$$f(z)f\left(\frac{z}{z-1}\right) = f(z) + f\left(\frac{z}{z-1}\right).$$

$f(z), f\left(\dfrac{z}{z-1}\right) \in \{-1, 2\}$ だから，この等式が成り立つのは

$$f(z) = f\left(\frac{z}{z-1}\right) = 2$$

のときである．

よって

$$f(x) = 2 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}, x \neq 1.$$

①で $x=y=\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$f\left(\frac{1}{2}\right)^2 f(1)=f\left(\frac{1}{4}\right)2f\left(\frac{1}{2}\right) \qquad 4f(1)=8$$

から $f(1)=2$.
したがって

$$f(x)=2 \qquad \forall x\in\mathbb{Q}.$$

これは①を満たす.

(2) $f(0)=0$ の場合

①で $x=y=1$ とおいた $f(1)^2f(2)=f(1)\cdot 2f(1)$ から $f(1)=0$ または $f(2)=2$ となる.

(i) $f(1)=0$ の場合

①で $x=1$ とおくと

$$f(1)f(y)f(1+y)=f(y)(f(1)+f(y)) \qquad f(y)^2=0 \qquad f(y)=0.$$

よって

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{Q}.$$

これは①を満たす.

(ii) $f(2)=2$ の場合

$S=\{x\in\mathbb{Q}\,|\,f(x)=0\}$, $T=\mathbb{Q}\setminus S$ とおくと，$0\in S, 2\in T$.
$s\in S, t\in T$ のとき，①で $x=s, y=t$ とおいた

$$f(s)f(t)f(s+t)=f(st)(f(s)+f(t))$$

から

$$0=f(st)f(t).$$

$f(t)\fallingdotseq 0$ だから $f(st)=0$ すなわち $st\in S$.

次に，$t_1,t_2\in T$ のとき $\dfrac{t_1}{t_2}\in T$ であることを示す.

$\dfrac{t_1}{t_2}\in S$ だとすると $t_1=\dfrac{t_1}{t_2}\cdot t_2\in S$ となり，$t_1\in S$ に矛盾する.

特に $1=\dfrac{t_1}{t_1}\in T$ だから $\dfrac{1}{t_2}\in T$ で

$$t_1t_2=\frac{t_1}{\frac{1}{t_2}}\in T$$

がいえる．
以上のことから，$0 \in S, 1 \in T, 2 \in T$ で，
$s \in S, t \in T \Longrightarrow st \in S$,
$t_1 \in T, t_2 \in T \Longrightarrow t_1t_2 \in T, \dfrac{t_1}{t_2} \in T$.
$\boldsymbol{c = f(1)}$ とおくと $1 \in T$ から $f(1) \neq 0$ なので $c \neq 0$.
①で $y = 1$ とおくと $f(x)f(1)f(x+1) = f(x)(f(x) + f(1))$ から

$$cf(x)f(x+1) = f(x)(f(x) + c).$$

よって

$$f(x) = 0 \quad \text{または} \quad f(x+1) = 1 + \frac{f(x)}{c} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．
　$\boldsymbol{c \in \{-2, -1, 1, 2\}}$ であることを示す．
$c \neq -2$ と仮定する．
$f(2) = 2 \neq 0$ だから②で $x = 2$ とおくと

$$f(3) = 1 + \frac{f(2)}{c} = \frac{c+2}{c}.$$

$c \neq -2$ より $f(3) \neq 0$ だから②で $x = 3$ とおくと

$$f(4) = 1 + \frac{f(3)}{c} = 1 + \frac{1 + \frac{2}{c}}{c} = 1 + \frac{1}{c} + \frac{2}{c^2} = \frac{c^2 + c + 2}{c^2}.$$

$f(4) \neq 0$ だから②で $x = 4$ とおくと

$$f(5) = 1 + \frac{f(4)}{c} = 1 + \frac{1 + \frac{1}{c} + \frac{2}{c^2}}{c} = 1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{c^3} = \frac{c^3 + c^2 + c + 2}{c^3}.$$

$f(5) = 0$ だとする．①で $x = 2, y = 3$ とおくと

$$f(2)f(3)f(5) = f(6)(f(2) + f(3)) \qquad 0 = f(6)\left(3 + \frac{2}{c}\right).$$

よって $c = -\dfrac{2}{3}$ または $f(6) = 0$ となる．
$2, 3 \in T$ より $6 = 2 \cdot 3 \in T$ だから $f(6) \neq 0$.
このことから，$c = -\dfrac{2}{3}$ でこのとき $c^3 + c^2 + c + 2 = c^2(\underbrace{c+1}_{>0}) + (\underbrace{c+2}_{>0}) > 0$
だから $f(5) = \dfrac{c^3 + c^2 + c + 2}{c^3} \neq 0$ となり $f(5) = 0$ に矛盾する．

したがって $f(5) \neq 0$ だから②で $x=5$ とおくと

$$f(6)=1+\frac{f(5)}{c}=1+\frac{1+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{2}{c^3}}{c}=1+\frac{1}{c}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^3}+\frac{2}{c^4}.$$

①で $x=2, y=3$ とおくと

$$f(2)f(3)f(5)=f(6)(f(2)+f(3)).$$

この式に今まで求めた $f(2), f(3), f(5), f(6)$ を代入すると

$$2\left(1+\frac{2}{c}\right)\left(1+\frac{1}{c}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{c^3}\right)=\left(1+\frac{1}{c}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^3}+\frac{2}{c^4}\right)\left(2+1+\frac{2}{c}\right).$$

$d=\dfrac{1}{c}$ とおくと

$$2(2d+1)\left(2d^3+d^2+d+1\right)=\left(2d^4+d^3+d^2+d+1\right)(2d+3),$$

$$2\left(4d^4+4d^3+3d^2+3d+1\right)=4d^5+8d^4+5d^3+5d^2+5d+3,$$

$$4d^5-3d^3-d^2-d+1=0 \qquad (d-1)(d+1)(2d-1)\left(2d^2+d+1\right)=0.$$

よって $d=\pm 1, \dfrac{1}{2}$ から $c=\pm 1, 2$.
$c=-2$ の場合も含めて $c \in \{-2,-1,1,2\}$ となる．
(a) $c=2$ の場合　　$(f(0)=0, f(2)=2, f(1)=2.)$

②は

$$f(x)=0 \quad \text{または} \quad f(x+1)=1+\frac{f(x)}{2} \qquad \cdots\cdots(*1)$$

となる．数学的帰納法で

$$f(n)=2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

が示せる．これから，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \in T$ となる．$m, n \in \mathbb{N}$ のとき $m, n \in T$ だから $\dfrac{m}{n} \in T$ より $f\left(\dfrac{m}{n}\right) \neq 0$.
よって

$$f(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+. \qquad \cdots\cdots ③$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}^+$ とする．③より $f(x) \neq 0, f(x+1) \neq 0$ だから $(*1)$ を使うと

$$f(x+2)=1+\frac{f(x+1)}{2}=1+\frac{1+\dfrac{f(x)}{2}}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{f(x)}{2^2}$$

となり，数学的帰納法で

$$\begin{aligned} f(x+n) &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{f(x)}{2^n} \\ &= \frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}+\frac{f(x)}{2^n} \\ &= 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{f(x)}{2^n} \end{aligned}$$

すなわち

$$f(x+n) = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{f(x)}{2^n} \qquad \forall x>0, \forall n\in\mathbb{N} \qquad \cdots\cdots ④$$

が示せる．

$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ とし，④で $x=\dfrac{m}{n}$ とおくと

$$f\left(\frac{m}{n}+n\right) = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2^n}f\left(\frac{m}{n}\right). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

①で $x=\dfrac{m}{n}, y=n$ とおいた

$$f\left(\frac{m}{n}\right)\underbrace{f(n)}_{=2}f\left(\frac{m}{n}+n\right) = \underbrace{f(m)}_{=2}\left(f\left(\frac{m}{n}\right)+\underbrace{f(n)}_{=2}\right)$$

から

$$f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(\frac{m}{n}+n\right) = f\left(\frac{m}{n}\right)+2.$$

$\alpha = f\left(\dfrac{m}{n}\right)$ とおき⑤を使うと

$$\alpha\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{\alpha}{2^n}\right) = \alpha+2 \qquad \alpha^2+\left(2^n-2\right)\alpha-2\cdot 2^n = 0,$$

$$\left(\alpha-2\right)\left(\alpha+2^n\right) = 0.$$

よって $\alpha \in \{2, -2^n\}$.

$\alpha = -2^n$ だとすると $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = -2^n$.

④で n のところを $2n$ で置き換えると

$$f(x+2n) = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+\frac{f(x)}{2^{2n}}.$$

この式で $x=\dfrac{m}{n}$ とおいた

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{m}{n}+2n\right) &= 2-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{f\left(\frac{m}{n}\right)}{2^{2n}} \\
&= 2-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{-2^n}{2^{2n}} \\
&= 2-\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{1}{2^n}
\end{aligned}
$$

から

$$f\left(\frac{m}{n}+2n\right)=2-\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{1}{2^n}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

①で $x=2n, y=\dfrac{m}{n}$ とおいた

$$f(2n)f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(2n+\frac{m}{n}\right)=f(2m)\left(f(2n)+f\left(\frac{m}{n}\right)\right)$$

から

$$2\cdot\alpha\cdot f\left(2n+\frac{m}{n}\right)=2\left(2+\alpha\right).$$

よって

$$f\left(2n+\frac{m}{n}\right)=\frac{2+\alpha}{\alpha}=1+\frac{2}{\alpha}=1+\frac{2}{-2^n}=1-\frac{1}{2^{n-1}}. \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑥，⑦から

$$2-\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^{n-1}} \qquad 2^{2n-1}+2^{n-1}-1=0.$$

$2^{2n-1}+2^{n-1}-1 \geqq 2^1+2^0-1=2>0$ だからこの方程式を満たす $n\in\mathbb{N}$ は存在しない．
したがって $\alpha=2$ で $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=2$ となるから

$$f(x)=2 \qquad \forall x\in\mathbb{Q}^+.$$

次に，$x\in\mathbb{Q}, x<0$ の場合を考える．
$(*1)$ で $x=-1$ とおいた

$$f(-1)=0 \quad \text{または} \quad \underbrace{f(0)}_{=0}=1+\frac{f(-1)}{2}$$

から $f(-1)\in\{0,-2\}$.

$f(-1) = -2$ だとする．①で $x = 2, y = -1$ とおいた

$$f(2)f(-1)f(1) = f(-2)(f(2) + f(-1)) \qquad 2 \cdot (-2) \cdot 2 = f(-2) \cdot (2 - 2)$$

から $-8 = 0$ となり矛盾が生じる．
よって $f(-1) = 0$ である．①で $y = -1$ とおくと

$$f(x)f(-1)f(x-1) = f(-x)(f(x) + f(-1)) \qquad 0 = f(x)f(-x).$$

$-x > 0$ から $f(-x) = 2$ なので $f(x) = 0$.
よって

$$f(x) = 0 \qquad \forall x < 0.$$

以上のことから

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

となる．
このとき，①を満たすことを示す．
x, y の少なくとも一つが 0 のときは $f(x)f(y) = 0, f(xy) = f(0) = 0$ だから，①は成り立つ．
x と y が異符号すなわち $xy < 0$ のときは $f(x)f(y) = 0, f(xy) = 0$ だから，①は成り立つ．
$x < 0, y < 0$ のときは $f(x)f(y) = 0 \cdot 0 = 0, f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$ だから，①は成り立つ．
$x > 0, y > 0$ のときは①の左辺と右辺はともに 8 となり①は成り立つ．

(b) $c = 1$ の場合　　$(f(0) = 0, f(2) = 2, f(1) = 1.)$
②は

$$f(x) = 0 \quad \text{または} \quad f(x+1) = 1 + f(x) \qquad \cdots\cdots(*2)$$

となる．数学的帰納法で

$$f(n) = n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が示せる．これから，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \in T$ となる．$m, n \in \mathbb{N}$ のとき $m, n \in T$ だから $\dfrac{m}{n} \in T$ より $f\left(\dfrac{m}{n}\right) \fallingdotseq 0$.
よって

$$f(x) \fallingdotseq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+. \qquad \cdots\cdots③'$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}^+$ とする．③$'$ より $f(x) \fallingdotseq 0, f(x+1) \fallingdotseq 0$ だから $(*2)$ を使うと

$$f(x+2) = 1 + f(x+1) = 1 + 1 + f(x) = 2 + f(x)$$

となり，数学的帰納法で

$$f(x+n) = f(x) + n \qquad \forall x \geqq 0, \forall n \in \mathbb{N} \qquad \cdots\cdots ④'$$

が示せる．

$\boldsymbol{m, n} \in \mathbb{N}$ とする．①で $x = \dfrac{m}{n}, y = n$ とおいた

$$f\left(\frac{m}{n}\right)\underbrace{f(n)}_{=n}f\left(\frac{m}{n}+n\right) = \underbrace{f(m)}_{=m}\left(f\left(\frac{m}{n}\right) + \underbrace{f(n)}_{=n}\right)$$

から

$$f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(\frac{m}{n}+n\right) = \frac{m}{n}f\left(\frac{m}{n}+n\right).$$

$f\left(\dfrac{m}{n}+n\right) \fallingdotseq 0$ だから

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

よって

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+$$

$f(0) = 0$ だから

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

次に，$x \in \mathbb{Q}, x < 0$ の場合を考える．

$(*1)$ で $x = -1$ とおくと

$$f(-1) = 0 \quad \text{または} \quad \underbrace{f(0)}_{=0} = 1 + f(-1)$$

から $f(-1) \in \{0, -1\}$.

$\boldsymbol{f(-1) = 0}$ のとき

①で $y = -1$ とおくと

$$f(x)f(-1)f(x-1) = f(-x)(f(x) + f(-1)) \qquad 0 = f(x)f(-x).$$

$-x > 0$ から $f(-x) = 2$ なので $f(x) = 0$.

よって

$$f(x) = 0 \qquad \forall x < 0.$$

以上のことから

$$f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x\leqq 0 \end{cases}$$

となる．

このとき，①を満たすことを示す．

x, y の少なくとも一つが 0 のときは $f(x)f(y)=0, f(xy)=f(0)=0$ だから，①は成り立つ．

x と y が異符号すなわち $xy<0$ のときは $f(x)f(y)=0, f(xy)=0$ だから，①は成り立つ．

$x<0, y<0$ のときは $f(x)f(y)=0\cdot 0=0, f(x)+f(y)=0+0=0$ だから，①は成り立つ．

$x>0, y>0$ のときは①の左辺と右辺はともに $xy(x+y)$ となり①は成り立つ．

$\boldsymbol{f(-1)=-1}$ **のとき**

数学的帰納法で

$$f(-n)=-n \qquad \forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が示せる．これから $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $-n\in T$ となる．

$m, n\in\mathbb{N}$ のとき $m, -n\in T$ だから $\dfrac{m}{-n}\in T$ より $f\left(\dfrac{m}{-n}\right)\fallingdotseq 0$.

よって

$$f(-x)\fallingdotseq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{Q}^{+}. \qquad\qquad \cdots\cdots ③''$$

③$'$ とあわせると

$$f(t)\fallingdotseq 0 \qquad \forall t\in\mathbb{Q}, t\fallingdotseq 0$$

だから，$(*2)$ から $t\fallingdotseq 0$ のとき $f(t+1)=f(t)+1$ が成り立つ．また $f(1)=1, f(0)=0$ だから

$$f(t+1)=f(t)+1 \qquad \forall t\in\mathbb{Q}$$

が成り立つ．

$f(x+1)=f(x)+1$ で x ところを $x-1$ で置き換えると $f(x-1)=f(x)-1$. この式を使うと

$$f(x-n)=f(x)-n \qquad \forall x\in\mathbb{Q}, \forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が示せる．

①で $x=-\dfrac{m}{n}, y=-n$ とおいた

$$f\left(-\frac{m}{n}\right)f(-n)f\left(-\frac{m}{n}-n\right)=f(m)\left(f\left(-\frac{m}{n}\right)+f(-n)\right)$$

より

$$f\left(-\frac{m}{n}\right)(-n)\left(f\left(-\frac{m}{n}\right)-n\right)=m\left(f\left(-\frac{m}{n}\right)-n\right).$$

$f\left(-\dfrac{m}{n}\right)-n=f\left(-\dfrac{m}{n}-n\right)\fallingdotseq 0$ だから $f\left(-\dfrac{m}{n}\right)=-\dfrac{m}{n}$.
よって

$$f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{Q}, x<0.$$

$x\geqq 0$ のとき $f(x)=x$ であったから

$$f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{Q}.$$

これは①を満たす.

(c) $c=-1$ の場合 $\qquad (f(0)=0, f(2)=2, f(1)=-1.)$

②は

$$f(x)=0 \quad \text{または} \quad f(x+1)=1-f(x) \qquad\qquad \cdots\cdots(*3)$$

となる.

$f(2)=2\fallingdotseq 0$ だから $(*3)$ で $x=2$ とおくと，$f(3)=1-f(2)=-1$.

$f(3)=-1\fallingdotseq 0$ だから $(*3)$ で $x=3$ とおくと，$f(4)=1-f(3)=2$.

$\cdots\cdots$

よって，$f(0)=0$,

$f(1)=f(3)=f(5)=\ldots\ldots(=-1)$, $f(2)=f(4)=f(6)=\ldots\ldots(=2)$.

これから $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $n\in T$ だから，$\forall m,n\in\mathbb{N}$ に対して $\dfrac{m}{n}\in T$ となり $f\left(\dfrac{m}{n}\right)\fallingdotseq 0$.

よって

$$f(x)\fallingdotseq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{Q}^+.$$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)\fallingdotseq 0, f\left(\dfrac{3}{2}\right)\fallingdotseq 0$ だから，$(*3)$ で $x=\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=1-f\left(\frac{3}{2}\right)=1-\left(1-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

また，①で $x=2, y=\dfrac{1}{2}$ とおいた

$$f(2)f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{5}{2}\right)=f(1)\left(f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

から

$$2\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)^2=(-1)\cdot\left(2+f\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$2f\left(\frac{1}{2}\right)^2+f\left(\frac{1}{2}\right)+2=0.$$

これを解くと $f\left(\frac{1}{2}\right)$ は虚数となり $f\left(\frac{1}{2}\right)\in\mathbb{R}$ に矛盾する．

(d) $c=-2$ の場合　　$(f(0)=0, f(2)=2, f(1)=-2.)$

②は

$$f(x)=0 \quad \text{または} \quad f(x+1)=1-\frac{f(x)}{2} \qquad \cdots\cdots(*4)$$

となる．

$f(2)=2\fallingdotseq 0$ だから，$(*4)$ で $x=2$ とおくと

$$f(3)=1-\frac{f(2)}{2}=0 \qquad f(3)=0.$$

$0\in S, 1\in T, 2\in T, 3\in S$ だから

$4=2\times 2\in T$ より $f(4)\fallingdotseq 0$.

$6=3\times 2\in S$ より $f(6)=0$.

$8=2\times 4\in T$ より $f(8)\fallingdotseq 0$.

①で x のところを 2，y のところを $x-2$ で置き換えた

$$f(2)f(x-2)f(x)=f(2(x-2))(f(2)+f(x-2))$$

から

$$2f(x-2)f(x)=f(2(x-2))(2+f(x-2)) \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑧で $x=6$ とおくと

$$2f(4)\underbrace{f(6)}_{=0}=f(8))(2+f(4)) \qquad 0=f(8))(2+f(4)).$$

$f(8)\fallingdotseq 0$ だから $f(4)=-2$. $f(4)=-2\fallingdotseq 0$ だから，$(*4)$ で $x=4$ とおくと

$$f(5)=1-\frac{f(4)}{2}=2 \qquad f(5)=2.$$

$x\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とすると

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=3m\\ -2 & x=3m+1\\ 2 & x=3m+2\end{cases}$$
となることを m に関する数学的帰納法で示す.

(i) $m=0,1$ のときは $f(0)=0, f(1)=-2, f(2)=2, f(3)=0, f(4)=-2, f(5)=2$ であるから成り立つ.

(ii) $m \leqq k\,(k \geqq 1)$ のとき成り立つと仮定する.

⑧で $x=3k+3$ とおいた

$$2f(3k+1)f(3k+3)=f(2(3k+1))(2+f(3k+1))$$

から

$$2\cdot(-2)\cdot f(3k+3)=f(2(3k+1))(2+(-2)) \qquad f(3k+3)=0.$$

①で $x=4, y=3k+2$ とおいた

$$f(4)f(3k+2)f(3k+6)=f(4(3k+2))(f(4)+f(3k+2))$$

から

$$(-2)\cdot 2\cdot f(3k+6)=f(4(3k+2))((-2)+2) \qquad f(3k+6)=0.$$

⑧で $x=3k+6$ とおいた

$$2f(3k+4)f(3k+6)=f(2(3k+4))(2+f(3k+4))$$

から

$$0=f(2(3k+4))(2+f(3k+4)).$$

①で $x=3k+2, y=2$ とおいた

$$f(3k+2)f(2)f(3k+4)=f(2(3k+2))(f(2)+f(3k+2))$$

から

$$2\cdot 2\cdot f(3k+4)=f(2(3k+2))(2+2) \qquad f(3k+4)=f(2(3k+2)).$$

$2\in T$ で $f(3k+2)=2 \fallingdotseq 0$ より $3k+2\in T$ だから $2(3k+2)\in T$ すなわち $f(2(3k+2)) \fallingdotseq 0$.

よって $f(3k+4)=f(2(3k+2))\fallingdotseq 0$ から $3k+4\in T$.
また，$2\in T$ だから $2(3k+4)\in T$ となるので

$$0=f(2(3k+4))(2+f(3k+4))$$

から $f(3k+4)=-2$.
$f(3k+4)=-2\fallingdotseq 0$ だから $(*4)$ で $x=3k+4$ とおくと

$$f(3k+5)=1-\frac{f(3k+4)}{2}=2.$$

以上のことから $m=k+1$ のときも成り立つ.
(i)，(ii) からすべての $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ について成り立つ.
このことから，p が素数で $p\fallingdotseq 3$ ならば $p\in T$ が成り立つ.
また，T は積と商に関して閉じているから，$m,n\in\mathbb{N}$ が 3 の倍数でないならば $\dfrac{m}{n}\in T$ すなわち $f\left(\dfrac{m}{n}\right)\fallingdotseq 0$ である.
$3\,|\,mn$ の場合を考える.
$3\,|\,m$, $\gcd(m,n)=1$ のとき，$m=3^k m'$, $k\in\mathbb{N}$, $3\nmid m'$ とおくと

$$\frac{m}{n}=\frac{3^k m'}{n}.$$

$3\nmid n$ で $\dfrac{m'}{n}\in T, 3^k\in S$ だから $\dfrac{m}{n}=3^k\cdot\dfrac{m'}{n}\in S$.
よって $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=0$.
同様に，$3\,|\,n$, $\gcd(m,n)=1$ のとき，$n=3^k n'$, $k\in\mathbb{N}$, $3\nmid n'$ とおくと

$$\frac{m}{n}=\frac{m}{3^k n'}.$$

$\dfrac{1}{3^k}\in T$ と仮定すると $3^k=\dfrac{1}{\frac{1}{3^k}}\in T$ となり $3^k\in S$ に矛盾するから，$\dfrac{1}{3^k}\in S$ である.
$3\nmid m$ で $\dfrac{m}{n'}\in T, \dfrac{1}{3^k}\in S$ だから $\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{3^k}\cdot\dfrac{m}{n'}\in S$.
よって $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=0$.
$m,n\in\mathbb{N}$ が 3 の倍数でないならば $f\left(\dfrac{m}{n}\right)\fallingdotseq 0$ であったが具体的な値を調べる.
$3\nmid mn$ のとき $3\,|\,m+2n$ または $3\,|\,m+n$ が成り立つ.

$m=3q_1+r_1,\ r_1\in\{-1,1\}, n=3q_2+r_2,\ r_2\in\{-1,1\}, q_1,q_2\in\mathbb{Z}$
とかける．

$r_1=r_2$ のとき $m+2n=3(q_1+2q_2+r_1)\equiv 0 \pmod 3$.

$r_1\neq r_2$ のとき $r_1+r_2=0$ だから $m+n=3(q_1+q_2)\equiv 0 \pmod 3$.

$m,n\in\mathbb{N}$, $\gcd(m,n)=1$, $3\nmid mn$ とする．

$3\,|\,m+2n$ のとき

⑧で $x=\dfrac{m}{n}+2$ とおくと

$$2f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(\frac{m+2n}{n}\right)=f\left(2\cdot\frac{m}{n}\right)\left(2+f\left(\frac{m}{n}\right)\right).$$

$3\,|\,m+2n$ より $f\left(\dfrac{m+2n}{n}\right)=0$ だから

$$f\left(2\cdot\frac{m}{n}\right)\left(2+f\left(\frac{m}{n}\right)\right)=0.$$

$\dfrac{m}{n}\in T, 2\in T$ より $2\cdot\dfrac{m}{n}\in T$ だから $f\left(2\cdot\dfrac{m}{n}\right)\neq 0$.
よって $2+f\left(\dfrac{m}{n}\right)=0$ から $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=-2$ を得る．

$3\,|\,m+n$ のとき

①で $y=1$ とおくと

$$f(x)f(1)f(x+1)=f(x)(f(x)+f(1)),$$
$$-2f(x)f(x+1)=f(x)(f(x)-2).$$

この式で $x=\dfrac{m}{n}$ とおくと

$$-2f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(\frac{m+n}{n}\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)\left(f\left(\frac{m}{n}\right)-2\right).$$

$f\left(\dfrac{m}{n}\right)\neq 0$, $f\left(\dfrac{m+n}{n}\right)=0$ だから $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=2$ を得る．

次に負の有理数のときの f の値を調べる．

$(*4)$ で $x=-1$ とおいた

$$f(-1)=0 \quad \text{または} \quad f(0)=1-\frac{f(-1)}{2}$$

から $f(-1)\in\{0,2\}$ となる．

$f(-1)=0$ のとき

$\boldsymbol{m,n}\in\mathbb{N}$**,** $\boldsymbol{3\nmid mn}$ **とする．**

$-1 \in S, \dfrac{m}{n} \in T$ だから $-\dfrac{m}{n} = (-1) \cdot \dfrac{m}{n} \in S$ すなわち $f\left(-\dfrac{m}{n}\right) = 0.$
よって

$$f(x) = 0 \qquad \forall x = -\frac{m}{n},\ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+,\ 3 \nmid mn. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$a \in N$ として，①で $x = -3a, y = 1$ とおいた

$$f(-3a)f(1)f(-3a+1) = f(3a)(f(-3a)+f(1))$$

から

$$-2f(-3a)f(-3a+1) = f(-3a)(f(-3a)-2).$$

$a > 0$ ならば，⑨から $f(-3a+1) = 0$ だから $f(-3a)(f(-3a)-2) = 0.$
よって

$$f(-3a) \in \{0, 2\}. \qquad \cdots\cdots ⑩$$

任意の負の有理数 $x = -\dfrac{p}{q},\ \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+,\ 3 \mid p,\ \gcd(p,q) = 1$ に対して

$$p = 3^k p',\ 3 \nmid p',\ k \in \mathbb{N}.$$

とおく．
①で $x = -3^k p',\ y = \dfrac{1}{q}$ とおくと

$$f\left(-3^k p'\right) f\left(\frac{1}{q}\right) f\left(-3^k p' + \frac{1}{q}\right) = f\left(-\frac{3^k p'}{q}\right)\left(f\left(-3^k p'\right) + f\left(\frac{1}{q}\right)\right) \qquad \cdots\cdots ⑪$$

①で $x = -3^k \cdot 2p',\ y = \dfrac{1}{2q}$ とおくと

$$\begin{aligned} &f\left(-3^k \cdot 2p'\right) f\left(\frac{1}{2q}\right) f\left(-3^k \cdot 2p' + \frac{1}{2q}\right) \\ &= f\left(-\frac{3^k p'}{q}\right)\left(f\left(-3^k \cdot 2p'\right) + f\left(\frac{1}{2q}\right)\right) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots ⑫$$

⑨から

$$f\left(-3^k p' + \frac{1}{q}\right) = f\left(-\frac{3^k p' q - 1}{q}\right) = 0,$$

$$f\left(-3^k \cdot 2p' + \frac{1}{2q}\right) = f\left(-\frac{3^k \cdot 4p' - 1}{2q}\right) = 0$$

だから，⑪，⑫ の左辺は 0 となる．

よって

$$f\left(-\frac{3^k p'}{q}\right)=0 \text{ または } f\left(-\frac{3^k p'}{q}\right)=-f\left(\frac{1}{q}\right),$$

$$f\left(-\frac{3^k p'}{q}\right)=0 \text{ または } f\left(-\frac{3^k\cdot 2p'}{q}\right)=-f\left(\frac{1}{2q}\right).$$

$3\,|\,p+2q$ のとき $f\left(\dfrac{1}{q}\right)=-2$ であるが $f\left(\dfrac{1}{2q}\right)=2$ となる．

$3\,|\,p+q$ のとき $f\left(\dfrac{1}{q}\right)=2$ である．

したがって，$f\left(\dfrac{1}{q}\right)$ と $f\left(\dfrac{1}{2q}\right)$ の少なくとも一つは 2 で，$f(-3a)\in\{0,2\}$ だから

$f\left(-\dfrac{3^k p'}{q}\right)=0$ すなわち

$$f\left(-\frac{p}{q}\right)=0 \qquad \forall\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}^+, 3\,|\,p,\ \gcd(p,q)=1 \qquad\cdots\cdots⑬$$

でなければならない．

$x=-\dfrac{p}{q},\ \dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}^+, 3\,|\,q,\ \gcd(p,q)=1$ のときは

①で $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)f\left(x+\frac{1}{x}\right)=f(1)\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

⑬から $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ で $f(1)=-2\neq 0$ だから $f(x)=0$.

よって

$$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{Q}, x<0.$$

$g:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ を次のように定義する．ただし，p と q は互いに素とする．

$$g\left(\frac{p}{q}\right)=\begin{cases}0 & 3\,|\,pq\\ -2 & 3\,|\,p+2q,\ \ 3\nmid pq\\ 2 & 3\,|\,p+q,\quad 3\nmid pq\end{cases}$$

とおくと

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x>0\\ 0 & x\leqq 0.\end{cases}$$

となる．
このとき，①を満たすことを示す．
x, y の少なくとも一つが 0 のときは $f(x)f(y)=0, f(xy)=f(0)=0$ だから，①は成り立つ．
x と y が異符号すなわち $xy<0$ のときは $f(x)f(y)=0, f(xy)=0$ だから，①は成り立つ．
$x<0, y<0$ のときは $f(x)f(y)=0\cdot 0=0, f(x)+f(y)=0+0=0$ だから，①は成り立つ．
$x>0, y>0$ のとき①が成り立つことを示す．

$x=\dfrac{p_1}{q_1},\ y=\dfrac{p_2}{q_2},\ \gcd(p_i, q_i)=1,\ \dfrac{p_i}{q_i}\in\mathbb{Q}^+\ (i=1,2,3,4)$ とする．
$x>0, y>0$ のとき $f(x)=g(x), f(y)=g(y)$ で $g(x)$ の値は次のように求まるのであった．
(I) $3\,|\,pq$ のとき $g\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$
(II) $3\nmid pq,\ 3\,|\,p+2q$ のとき $g\left(\dfrac{p}{q}\right)=-2$
(III) $3\nmid pq,\ 3\,|\,p+q$ のとき $g\left(\dfrac{p}{q}\right)=2$
⊙　x, y の一つが (I) 型で他のものが (II) 型か (III) 型の場合
$xy=\dfrac{p_1p_2}{q_1q_2}$ を既約分数にすると (I) 型になるから $f(xy)=0$.
$f(x)f(y)=0$ であったから①は成り立つ．
⊙　x, y がともに (I) 型の場合
$f(x)=f(y)=0$ だから①は成り立つ．
⊙　x, y がともに (II) 型の場合
$3\nmid p_iq_i,\ 3\,|\,p_i+2q_i\ (i=1,2)$ で $x+y=\dfrac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}$.

$$(p_1q_2+p_2q_1)+q_1q_2=(p_1+2q_1)q_2+(p_2+2q_2)q_1-3q_1q_2\equiv 0 \pmod 3,$$
$$p_1q_2+p_2q_1\equiv -q_1q_2\not\equiv 0 \pmod 3,\ q_1q_2\not\equiv 0 \pmod 3$$

だから $x+y$ を既約分数で表すと (III) 型となる．よって $f(x+y)=2$.
$xy=\dfrac{p_1p_2}{q_1q_2}$ において

$$\begin{aligned}&p_1p_2+2q_1q_2\\&=(p_1+2q_1)(p_2+2q_2)-2(p_1+2q_1)q_2-2(p_2+2q_2)q_1+6q_1q_2\\&\equiv 0 \pmod 3,\end{aligned}$$

$$p_1p_2 \not\equiv 0 \pmod 3,\ q_1q_2 \not\equiv 0 \pmod 3$$

だから xy を既約分数で表すと (II) 型となる．よって $f(xy) = -2$.
したがって，①の左辺, 右辺とも 8 となり，①は成り立つ.
⊙　x, y がともに (III) 型の場合
$3 \nmid p_iq_i,\ 3 \,|\, p_i + q_i\ (i = 1, 2)$ で $x + y = \dfrac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$.

$$(p_1q_2 + p_2q_1) + 2q_1q_2 = (p_1 + q_1)q_2 + (p_2 + q_2)q_1 \equiv 0 \pmod 3,$$

$$p_1q_2 + p_2q_1 \equiv -2q_1q_2 \not\equiv 0 \pmod 3,\ q_1q_2 \not\equiv 0 \pmod 3$$

だから $x + y$ を既約分数で表すと (II) 型となる．よって $f(x + y) = -2$.
$xy = \dfrac{p_1p_2}{q_1q_2}$ において

$$\begin{aligned}&p_1p_2 + 2q_1q_2\\&= (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) - (p_1 + q_1)q_2 - (p_2 + q_2)q_1 + 3q_1q_2\\&\equiv 0 \pmod 3,\end{aligned}$$

$$p_1p_2 \not\equiv 0 \pmod 3,\ q_1q_2 \not\equiv 0 \pmod 3$$

だから xy を既約分数で表すと (II) 型となる．よって $f(xy) = -2$.
したがって，①の左辺, 右辺とも -8 となり，①は成り立つ.
⊙　x, y の一つが (II) 型で他のものが (III) 型の場合
x が (II) 型で y が (III) 型としても一般性を失わない.
このとき，$f(x) + f(y) = (-2) + 2 = 0$.
$3 \nmid p_1q_1,\ 3 \nmid p_2q_2,\ 3 \,|\, p_1 + 2q_1,\ 3 \,|\, p_2 + q_2$ で $x + y = \dfrac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$.

$$p_1q_2 + p_2q_1 = (p_1 + 2q_1)q_2 + (p_2 + q_2)q_1 - 3q_1q_2 \equiv 0 \pmod 3,$$

$q_1q_2 \not\equiv 0 \pmod 3$ だから $x + y$ を既約分数で表すと (I) 型となる．よって $f(x + y) = 0$.
したがって，①の左辺, 右辺とも 0 となり，①は成り立つ.
$f(-1) = 2$ のとき
$-1 \in T$ で，T は積と商に関して閉じているから，$m, n \in \mathbb{N}$ が 3 の倍数でないならば $\dfrac{m}{n} \in T$ なので，$-\dfrac{m}{n} = (-1) \cdot \dfrac{m}{n} \in T$ すなわち $f\left(-\dfrac{m}{n}\right) \fallingdotseq 0$ である.
　$3 \,|\, mn$ の場合を考える.

$3\,|\,m$, $\gcd(m,n)=1$ のとき，$m=3^k m'$, $k\in\mathbb{N}$, $3\nmid m'$ とおくと

$$-\frac{m}{n}=-\frac{3^k m'}{n}.$$

$3\nmid n$ で $-\dfrac{m'}{n}\in T, 3^k\in S$ だから $-\dfrac{m}{n}=3^k\cdot\left(-\dfrac{m'}{n}\right)\in S.$
よって $f\left(-\dfrac{m}{n}\right)=0.$
同様に，$3\,|\,n$, $\gcd(m,n)=1$ のとき，$n=3^k n'$, $k\in\mathbb{N}$, $3\nmid n'$ とおくと

$$-\frac{m}{n}=-\frac{m}{3^k n'}.$$

$\dfrac{1}{3^k}\in T$ と仮定すると $3^k=\dfrac{1}{\frac{1}{3^k}}\in T$ となり $3^k\in S$ に矛盾するから，$\dfrac{1}{3^k}\in S$ である．
$3\nmid m$ で $-\dfrac{m}{n'}\in T, \dfrac{1}{3^k}\in S$ だから $-\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{3^k}\cdot\left(-\dfrac{m}{n'}\right)\in S.$
よって $f\left(-\dfrac{m}{n}\right)=0.$

$m,n\in\mathbb{N}$ が 3 の倍数でないならば $f\left(-\dfrac{m}{n}\right)\fallingdotseq 0$ であったが具体的な値を調べる．
$3\nmid mn$ のとき $3\nmid(-m)n$ だから $3\,|-m+2n$ または $3\,|-m+n$ が成り立つ．
$m,n\in\mathbb{N}$, $\gcd(m,n)=1$, $3\nmid mn$ とする．

$3\,|-m+2n$ のとき
⑧で $x=-\dfrac{m}{n}+2$ とおくと

$$2f\left(-\frac{m}{n}\right)f\left(\frac{-m+2n}{n}\right)=f\left(2\cdot\frac{-m}{n}\right)\left(2+f\left(\frac{-m}{n}\right)\right)$$

$3\,|-m+2n$ より $f\left(\dfrac{-m+2n}{n}\right)=0$ だから

$$f\left(2\cdot\frac{-m}{n}\right)\left(2+f\left(\frac{-m}{n}\right)\right)=0.$$

$\dfrac{-m}{n}\in T, 2\in T$ より $2\cdot\dfrac{-m}{n}\in T$ だから $f\left(2\cdot\dfrac{-m}{n}\right)\fallingdotseq 0.$
よって $2+f\left(\dfrac{-m}{n}\right)=0$ から $f\left(\dfrac{-m}{n}\right)=-2$ を得る．

$3\,|-m+n$ のとき
①で $y=1$ とおくと

$$f(x)f(1)f(x+1)=f(x)(f(x)+f(1)),$$

$$-2f(x)f(x+1) = f(x)(f(x)-2).$$

この式で $x = \dfrac{-m}{n}$ とおくと

$$-2f\left(\frac{-m}{n}\right)f\left(\frac{-m+n}{n}\right) = f\left(\frac{-m}{n}\right)\left(f\left(\frac{-m}{n}\right)-2\right).$$

$f\left(\dfrac{-m}{n}\right) \fallingdotseq 0$, $f\left(\dfrac{-m+n}{n}\right) = 0$ だから $f\left(\dfrac{-m}{n}\right) = 2$ を得る．

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 0 & 3 \mid pq \\ -2 & 3 \mid p+2q,\ \ 3 \nmid pq \\ 2 & 3 \mid p+q,\ \ \ 3 \nmid pq \end{cases}$$

とおくと

$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}.$

これは①を満たす．（$f(-1)=0$ のときと同様に示せる．）

$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．ただし，p と q は互いに素とする．

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 0 & 3 \mid pq \\ -2 & 3 \mid p+2q,\ \ 3 \mid pq \\ 2 & 3 \mid p+q,\ \ \ 3 \nmid pq \end{cases}$$

とおく．

解は

- $f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$,
- $f(x) = 2 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$,
- $f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$,
- $f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$,
- $f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0, \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0, \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} g(x) & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0. \end{cases}$

である． ■

問題 72　(Austrian Federal Competition for Advanced Student 2012)

Determine all functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfying the following property:
For each pair of integers m and n (not necessarily distinct), $\gcd(m, n)$ divides $f(m)+f(n)$.
Note : If $m, n \in \mathbb{Z}$, $\gcd(m, n) = \gcd(|m|, |n|)$ and $\gcd(m, 0) = m$

解答　$\gcd(m, n) \mid f(m) + f(n)$　$\cdots\cdots$①
とおく．

①で $m = 0$ とおいた　$\gcd(0, n) \mid f(0) + f(n)$ から

$$n \mid f(0) + f(n). \qquad \cdots\cdots ②$$

②で $n = 0$ とおいた $0 \mid 2f(0)$ から $f(0) = 0$.
これを使うと②は

$$n \mid f(n)$$

となる．
ゆえに

$$f(n) = ng(n).$$

ただし，g は $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ となる関数とする．

このとき，①は $\gcd(m, n) \mid mg(m) + ng(n)$ となるが，$\gcd(m, n) \mid m$, $\gcd(m, n) \mid n$ より $\gcd(m, n) \mid mg(m) + ng(n)$ は常に成り立つ．

したがって解は

g を $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ となる関数として

- $f(n) = ng(n)$

である．■

問題 73　(IMO 2012)

Find all functions $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ such that, for all integers a,b,c that satisfy $a+b+c=0$, the following equality holds:

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)$$

(Here $\mathbb{Z}$ denotes the set of integers.)

解答　$a+b+c=0$ のとき

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

$a=b=c=0$ とおくと①は $3f(0)^2=6f(0)^2$ となるから $f(0)=0$ を得る.

$c=0$ とおくと，$a+b=0$ のとき①は $f(a)^2+f(b)^2=2f(a)f(b)$ となるから

$$(f(a)-f(b))^2=0 \qquad f(a)=f(b).$$

すなわち

$$f(-a)=f(a) \qquad \forall a\in\mathbb{Z}$$

となり f は偶関数である.

$c=-(a+b)$ を①に代入した

$$f(a)^2+f(b)^2+f(a+b)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(a+b)+2f(a+b)f(a)$$

から

$$f(a)^2+f(b)^2+f(a+b)^2=2f(a)f(b)+2(f(a)+f(b))f(a+b) \qquad \forall a,b\in\mathbb{Z}.$$

これを変形すると

$$(f(a)-f(b))^2+f(a+b)^2=2(f(a)+f(b))f(a+b) \qquad \forall a,b\in\mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots②$$

②で $b=a$ とおいた $f(2a)^2=4f(a)f(2a)$ から

$$f(2a)\in\{0,4f(a)\}. \qquad \cdots\cdots③$$

③で $a=1$ とおくと

$$f(2)\in\{0,4f(1)\}. \qquad \cdots\cdots③'$$

(1) $f(2)=0$ の場合

②で $b=2$ とおくと

$$f(a)^2+f(a+2)^2=2f(a)f(a+2) \qquad (f(a+2)-f(a))^2=0.$$

よって

$$f(a+2)=f(a) \qquad \forall a\in\mathbb{Z}.$$

$f(x)$ は周期が 2 の周期関数となるから

a が偶数のとき $f(a)=f(0)=0.$

a が奇数のとき $f(a)=f(1)(=k).$

まとめると $k\in\mathbb{Z}$ を定数として

$$f(n)=\begin{cases}0 & n\text{ は偶数}\\ k & n\text{ は奇数}\end{cases}$$

となる．

これは①を満たす．なぜならば

$$\{f(a),f(b),f(c)\}=\{k,k,k\},\{k,k,0\},\{k,0,0\},\{0,0,0\}$$

のとき①が成り立つからである．

(2) $f(2)=4f(1)$ の場合

$d=f(1)$ とおくと $f(2)=4f(1)=4d$ だから $f(1)=1^2d, f(2)=2^2d$ となっている．

ある整数 m を用いて $f(a)=m^2d$ と表せたとする．

②で $b=1$ とおくと

$$(f(a)-f(1))^2+f(a+1)^2=2(f(a)+f(1))f(a+1),$$

$$\left(m^2d-d\right)^2+f(a+1)^2=2\left(m^2d+d\right)f(a+1),$$

$$f(a+1)^2-2\left(m^2+1\right)df(a+1)+\left(m^2-1\right)^2d^2=0,$$

$$\left(f(a+1)-(m+1)^2d\right)\left(f(a+1)-(m-1)^2d\right)=0.$$

よって

$$f(a+1)\in\left\{(m+1)^2d,\,(m-1)^2d\right\} \qquad \cdots\cdots④$$

②で $b=2$ とおくと

$$(f(a)-f(2))^2+f(a+2)^2=2(f(a)+f(2))f(a+2),$$

$$\left(m^2d-4d\right)^2+f(a+2)^2=2\left(m^2d+4d\right)f(a+2),$$

$$f(a+2)^2-2\left(m^2+4\right)df(a+2)+\left(m^2-4\right)^2d^2=0,$$

$$\left(f(a+2)-(m+2)^2d\right)\left(f(a+2)-(m-2)^2d\right)=0.$$

よって

$$f(a+2)\in\left\{(m+2)^2d,\,(m-2)^2d\right\} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$f(1)=1^2d, f(2)=2^2d$ だから④で $a=2, m=2$，⑤で $a=1, m=1$ とおくと

$$f(3)\in\{9d, d\}$$

となる．$d=0$ のときは (1) の $k=0$ の場合になるから，以下 $d\neq 0$ とする．

（ア）$f(3)=9d$ の場合

$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき

$$f(n)=n^2d \qquad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=0,1,2,3$ のとき⑥は成り立つ．

(ii) $m\leqq k\,(k\geqq 3)$ のとき成り立つと仮定する．

$f(k)=k^2d$ だから，④で $a=k, m=k$ とおくと

$$f(k+1)\in\left\{(k+1)^2d,\,(k-1)^2d\right\}.$$

$f(k-1)=(k-1)^2d$ だから，⑤で $a=k-1, m=k-1$ とおくと

$$f(k+1)\in\left\{(k+1)^2d,\,(k-3)^2d\right\}.$$

$k\geqq 3$ より $(k-1)^2d\neq(k-3)^2d$ なので $f(k+1)=(k+1)^2d.$

よって，$n=k+1$ のときも⑥は成り立つ．

(i)，(ii) より非負の整数 n に対して⑥は成り立つ．

$n\in\mathbb{Z}, n<0$ のときは，f が偶関数であることを用いると

$$f(n)=f(-n)=(-n)^2d=n^2d$$

となるから

$$f(n)=n^2d \qquad \forall n\in\mathbb{Z}.$$

このとき，①が成り立つことを示す．

$a+b+c=0$ のとき

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) = -2(ab+bc+ca) \\
a^4+b^4+c^4 &= \left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \\
&= 4(ab+bc+ca)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \\
&= 4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+8abc(a+b+c)-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \\
&= 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)
\end{aligned}
$$

となり，①は成り立つ．

（イ） $f(3)=d$ の場合　$(f(0)=0, f(1)=d, f(2)=4d, f(3)=d.)$

③で $a=2$ とおくと

$$f(4) \in \{0, 4f(2)\} = \{0, 16d\}.$$

$f(3)=d$ だから④で $a=3, m=1$ とおくと

$$f(4) \in \{0, 4d\}.$$

$d \neq 0$ だから $f(4)=0$ となる．

④で $a=4, m=0$ とおくと $f(5)=d$ となる．

⑤で $a=4, m=0$ とおくと $f(6)=4d$ となる．

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき

$$f(n)=\begin{cases} 0 & n=4m \\ d & n=4m+1 \\ 4d & n=4m+2 \\ d & n=4m+3 \end{cases}$$

となることを m に関する数学的帰納法で示す．

まず，次のことを示しておく．

$f(a)=m^2d$ が成り立つとき，$f(a+3) \in \left\{(m+1)^2d, (m-1)^2d\right\}$.

②で $b=3$ とおくと

$$(f(a)-f(3))^2+f(a+3)^2 = 2(f(a)+f(3))f(a+3),$$

$$\left(m^2d-d\right)^2+f(a+3)^2 = 2\left(m^2d+d\right)f(a+3),$$

$$f(a+3)^2-2\left(m^2+1\right)df(a+3)+\left(m^2-1\right)^2d^2=0,$$

$$\left(f(a+3)-(m+1)^2d\right)\left(f(a+3)-(m-1)^2d\right)=0.$$

よって

$$f(a+3) \in \left\{(m+1)^2 d, (m-1)^2 d\right\}. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

準備ができたので証明に入る．

(i) $m=0$ すなわち $n=0,1,2,3$ のとき成り立つ．

(ii) $m=l\,(l \geqq 0)$ のとき成り立つと仮定すると

$$f(4l)=0, f(4l+1)=f(4l+3)=d, f(4l+2)=4d.$$

$a=4l+3, m=1$ として④を用いると $f(4l+4) \in \{4d, 0\}$.

$a=4l+2, m=2$ として⑤を用いると $f(4l+4) \in \{16d, 0\}$.

よって $f(4l+4)=0$.

$a=4l+4, m=0$ として④を用いると $f(4l+5)=d$.

$a=4l+4, m=0$ として⑤を用いると $f(4l+6)=4d$.

$a=4l+4, m=0$ として⑦を用いると $f(4l+7)=d$.

$m=l+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) から非負の整数に対して成り立つ．

$m \in \mathbb{Z}, m<0$ に対しても

$$f(n)=\begin{cases} 0 & n=4m \\ d & n=4m+1 \\ 4d & n=4m+2 \\ d & n=4m+3 \end{cases}$$

が成り立つことは，f が偶関数であることを用いればよい．

$m \in \mathbb{Z}, m \leqq -1$ のとき

$$\begin{aligned} f(4m) &= f(-4m)=0, \\ f(4m+1) &= f(-4m-1)=f(4(-m-1)+3)=d, \\ f(4m+2) &= f(-4m-2)=f(4(-m-1)+2)=4d, \\ f(4m+3) &= f(-4m-3)=f(4(-m-1)+1)=d \end{aligned}$$

であるから負の整数のときも成り立つ．

よって $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f(n)=\begin{cases}0 & n=4m\\ d & n=4m+1\\ 4d & n=4m+2\\ d & n=4m+3\end{cases}$$

が成り立つ．

整理すると

$$f(n)=\begin{cases}0 & n\equiv 0 \pmod 4\\ d & n:\text{奇数}\\ 4d & n\equiv 2 \pmod 4\end{cases}$$

このとき，①を満たすことを示す．

この f は偶関数であるから, ②を満たすことを示せばよい．

すなわち

$$\begin{aligned}\{f(a),f(b)\}&=\{0,0\},\{d,d\},\{4d,4d\}\\&=\{0,d\},\{0,4d\},\{d,4d\}\end{aligned}$$

に対して②が成り立つことを示せばよい．

⊙　$\{f(a),f(b)\}=\{0,0\}$ のとき

$a\equiv 0 \pmod 4$, $b\equiv 0 \pmod 4$ より $a+b\equiv 0 \pmod 4$ だから $f(a+b)=0$.

よって②は成り立つ．

⊙　$\{f(a),f(b)\}=\{d,d\}$ のとき

a,b は奇数だから $a+b$ は偶数である．

$a+b\equiv 0 \pmod 4$ のとき $f(a+b)=0$ で，②の左辺，右辺とも 0 となり②は成り立つ．

$a+b\equiv 2 \pmod 4$ のとき $f(a+b)=4d$ で，②の左辺，右辺とも $16d^2$ となり②は成り立つ．

⊙　$\{f(a),f(b)\}=\{4d,4d\}$ のとき

$a\equiv 2 \pmod 4$, $b\equiv 2 \pmod 4$ より $a+b\equiv 0 \pmod 4$ だから $f(a+b)=0$.

よって②は成り立つ．

⊙　$\{f(a),f(b)\}=\{0,d\}$ のとき

$a\equiv 0 \pmod 4$, b は奇数としても一般性を失わない．

$a+b$ は奇数だから $f(a+b)=d$.

②の左辺，右辺とも $2d^2$ となり②は成り立つ．

$\odot$ $\{f(a), f(b)\} = \{0, 4d\}$ のとき

$a \equiv 0 \pmod 4$, $b \equiv 2 \pmod 4$ としても一般性を失わない.

$a + b \equiv 2 \pmod 4$ だから $f(a+b) = 4d$.

②の左辺，右辺とも $32d^2$ となり②は成り立つ.

$\odot$ $\{f(a), f(b)\} = \{d, 4d\}$ のとき

a は奇数，$b \equiv 2 \pmod 4$ としても一般性を失わない.

$a + b$ は奇数だから $f(a+b) = d$.

②の左辺，右辺とも $10d^2$ となり②は成り立つ.

したがって解は

- $k \in \mathbb{Z}$ を定数として

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ は偶数} \\ k & n \text{ は奇数} \end{cases}$$

と

- $d \in \mathbb{Z}$ を定数として

$$f(n) = n^2 d \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

と

- $d \in \mathbb{Z}$ を定数として

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \equiv 0 \pmod 4 \\ d & n : \text{奇数} \\ 4d & n \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

である. ■

問題 74　(IMO Shortlist 2012)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ that satisfy the conditions

$$f(1+xy)-f(x+y)=f(x)f(y)\quad\text{for all}\ \ x,y\in\mathbb{R},$$

and $f(-1)\fallingdotseq 0$.
(Here $\mathbb{Z}$ denotes the set of integers.)

解答

$$f(1+xy)-f(x+y)=f(x)f(y) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

①で $x=0$ とおくと

$$f(1)-f(y)=f(0)f(y) \qquad \cdots\cdots②$$

①で $x=1, y=-1$ とおくと $0=f(1)f(-1)$.
$f(-1)\fallingdotseq 0$ だから $\boldsymbol{f(1)=0}$.
これを②に使うと $-f(y)=f(0)f(y)$.
この式で $y=-1$ とおくと $-f(-1)=f(0)f(-1)$.
$f(-1)\fallingdotseq 0$ だから $\boldsymbol{f(0)=-1}$.

$c=f(-1)\fallingdotseq 0$ とおく.
①で $y=-1$ とおいた $f(1-x)-f(x-1)=f(x)f(-1)$ から

$$f(1-x)-f(x-1)=cf(x). \qquad \cdots\cdots③$$

③で x のところを $x+1$ で置き換えると

$$f(-x)-f(x)=cf(x+1). \qquad \cdots\cdots④$$

③で x のところを $x+2$ で置き換えると

$$f(-x-1)-f(x+1)=cf(x+2). \qquad \cdots\cdots⑤$$

③で x のところを $-x$ で置き換えると

$$f(x+1)-f(-x-1)=cf(-x). \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑥から $f(x+1)=f(-x-1)+cf(-x)$. ここで④，⑤を使うと

$$f(x+1)=f(x+1)+cf(x+2)+c(f(x)+cf(x+1)).$$

$c \neq 0$ だから
$$f(x+2)+cf(x+1)+f(x)=0.$$
この式を変形すると
$$f(x+2)=-cf(x+1)-f(x). \qquad \cdots\cdots ⑦$$
⑦ で $x=0$ とおくと
$$f(2)=-cf(1)-f(0)=1 \qquad f(2)=1.$$
⑦ で $x=1$ とおくと
$$f(3)=-cf(2)-f(1)=-c \qquad f(3)=-c.$$
⑦ で $x=2$ とおくと
$$f(4)=-cf(3)-f(2)=c^2-1 \qquad f(4)=c^2-1.$$
⑦ で $x=3$ とおくと
$$f(5)=-cf(4)-f(3)=-c\left(c^2-1\right)-(-c)=-c^3+2c \qquad f(5)=-c^3+2c.$$
①で $x=2, y=2$ とおくと $f(5)-f(4)=f(2)^2$.
この式に今まで求めたものを代入すると
$$-c^3+2c-\left(c^2-1\right)=1 \qquad c^3+c^2-2c=0 \qquad c(c-1)(c+2)=0.$$
$c \neq 0$ だから $c \in \{1,-2\}$.

(1) $c=1$ の場合 $\qquad (f(0)=-1, f(1)=0, f(-1)=1.)$

⑦は
$$f(x+2)=-f(x+1)-f(x) \qquad \cdots\cdots ⑦'$$
となる.

⑦$'$ で x のところを $x+1$ で置き換えると
$$\begin{aligned} f(x+3) &= -f(x+2)-f(x+1) \\ &= -(-f(x+1)-f(x))-f(x+1) \\ &= f(x) \end{aligned}$$
から
$$f(x+3)=f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$ は周期 3 の周期関数である．
①で y のところを $y+3$ で置き換えると

$$f(1+x(y+3))-f(x+y+3) = f(x)f(y+3) \qquad f(1+x(y+3))-f(x+y) = f(x)f(y).$$

①と比較して

$$f(1+x(y+3)) = f(1+xy).$$

この式で $y=-3$ とおくと

$$f(1) = f(1-3x) \qquad 0 = f(1-3x).$$

$1-3x$ はすべての実数値を取り得るから

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

これは $f(-1) \fallingdotseq 0$ に矛盾する．

(2) $c=-2$ の場合　　$(f(0)=-1, f(1)=0, f(-1)=-2.)$
⑦は

$$f(x)+f(x+2) = 2f(x+1) \qquad \cdots\cdots ⑦''$$

となる．
①で y のところを $y+2$ で置き換えると

$$f(1+x(y+1)) - f(x+y+1) = f(x)f(y+1) \qquad \cdots\cdots ⑧$$

①で y のところを $y+2$ で置き換えると

$$f(1+x(y+2)) - f(x+y+2) = f(x)f(y+2) \qquad \cdots\cdots ⑨$$

① + ⑨ から

$$\begin{aligned} &f(1+xy)+f(1+x(y+2)) - (\underline{f(x+y)+f(x+y+2)}) \\ &= f(x)(f(y)+f(y+2)). \end{aligned}$$

⑦$''$ で x のところを $x+y$ で置き換えると

$$\underline{f(x+y)+f(x+y+2)} = 2f(x+y+1),$$

⑦$''$ から

$$f(y)+f(y+2) = 2f(y+1)$$

となることを使うと

$$f(1+xy)+f(1+x(y+2))-2f(x+y+1)=2f(x)f(y+1).$$

右辺に⑧を用いた

$$\begin{aligned}&f(1+xy)+f(1+x(y+2))-2f(x+y+1)\\&=2(f(1+x(y+1))-f(x+y+1))\end{aligned}$$

を使うと

$$f(1+xy)+f(1+x(y+2))=2f(1+x(y+1)).$$

$\forall p,q\in\mathbb{R},\ p\fallingdotseq q$ に対して $x=\dfrac{q-p}{2}, y=\dfrac{2(p-1)}{q-p}$ とおくと

$$1+xy=p, 1+x(y+2)=q, 1+x(y+1)=\frac{p+q}{2}$$

となるから

$$f(p)+f(q)=2f\left(\frac{p+q}{2}\right)\qquad\forall p,q\in\mathbb{R},\ p\fallingdotseq q.$$

この式は $p=q$ のとき明らかに成り立つので

$$f(p)+f(q)=2f\left(\frac{p+q}{2}\right)\qquad\forall p,q\in\mathbb{R}.\qquad\cdots\cdots⑩$$

⑩で p のところを $2p$ で置き換え，$q=0$ とおいた

$$f(2p)+\underbrace{f(0)}_{=-1}=2f(p)$$

から

$$f(2p)=2f(p)+1.\qquad\cdots\cdots⑪$$

⑩で p,q をそれぞれ $2p,2q$ でき換えると $f(2p)+f(2q)=2f(p+q)$.
⑪を用いた

$$2f(p)+1+2f(q)+1=2f(p+q)$$

を使うと

$$f(p+q)=f(p)+f(q)+1.\qquad\cdots\cdots⑫$$

⑫を使って①を書き直す.

$$\begin{aligned}f(x)f(y)&=f(1+xy)-f(x+y)\\&=\underbrace{f(1)}_{=0}+f(xy)+1-(f(x)+f(y)+1)\\&=f(xy)-f(x)-f(y).\end{aligned}$$

よって
$$f(xy)+1=(f(x)+1)(f(y)+1). \qquad \cdots\cdots ⑬$$

$g(x)=f(x)+1$ とおくと⑫，⑬はそれぞれ
$$g(x+y)=g(x)+g(y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑫'$$
$$g(xy)=g(x)g(y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ⑬'$$

となる．
⑬$'$ で $y=x$ とおくと $g\left(x^2\right)=g(x)^2\geqq 0$ から
$$g(x)\geqq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}_{\geq 0}.$$

⑫$'$ から $g(-x)=-g(x)$ がいえて，$g(x-y)=g(x)-g(y)$ が成り立つ．
$x>y$ のとき $g(x)-g(y)=g(x-y)\geqq 0$ となり，g は非減少関数である．
g はコーシーの関数方程式を満たすから，$g(x)=kx$ とおける．$f(-1)=-2$ より $g(-1)=-1$ だから $k=1$.
よって $g(x)=x$ から
$$f(x)=x-1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

このとき
$$\begin{aligned} f(1+xy)-f(x+y)&=1+xy-1-(x+y-1)=xy-x-y+1\\ &=(x-1)(y-1)\\ &=f(x)f(y) \end{aligned}$$

となり①は成り立つ．

したがって解は
- $f(x)=x-1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 75　(India 2012)

Let $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ be a function satisfying $f(0) \neq 0, f(1) = 0$ and

(i) $f(xy) + f(x)f(y) = f(x) + f(y)$

(ii) $(f(x-y) - f(0))f(x)f(y) = 0$

for all $x, y \in \mathbb{Z}$, simultaneously.

(a)　Find the set of all possible values of the function f.

(b)　If $f(10) \neq 0$ and $f(2) = 0$, find the set of all integers n such that $f(n) \neq 0$.

解答

(a) (i) で $x = y = 0$ とおくと

$$f(0) + f(0)^2 = 2f(0) \qquad f(0)^2 = f(0).$$

$f(0) \neq 0$ だから $f(0) = 1$.

(ii) で $y = 0$ とおくと

$$(f(x) - f(0))f(x)f(0) = 0 \qquad (f(x) - 1)f(x) = 0.$$

よって，$f(x) \in \{0, 1\}$.

$f(1) = 0, f(0) = 1$ だから f は 0 と 1 を必ずとるから，f の値域は $\{0, 1\}$ である．

(b) $f(2) = 0$．$f(10) \neq 0$ だから (a) より $f(10) = 1$．

(i) で $x = 5, y = 2$ とおくと

$$f(10) + f(2)f(5) = f(2) + f(5) \qquad f(5) = 1.$$

(i) で $x = 2, y = 2$ とおくと

$$f(4) + f(2)^2 = 2f(2) \qquad f(4) = 0.$$

(ii) で $x = 5, y = 3$ とおくと

$$f(2) - f(0))f(5)f(3) = 0 \qquad (-1) \cdot 1 \cdot f(3) = 0 \qquad f(3) = 0.$$

(i) で $y = 5$ とおくと

$$f(5x) + f(x)f(5) = f(x) + f(5) \qquad f(5x) + f(x) - f(x) + 1.$$

よって

$$f(5x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

となり，x が 5 の倍数のとき $f(x)=1$ となる．

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\equiv 0 \pmod 5\\ 0 & x\not\equiv 0 \pmod 5\end{cases}$$

となることを示す．

$x\not\equiv 0 \pmod 5$ とすると $x=5q+r,\ 1\leqq r\leqq 4, q, r\in\mathbb{Z}$ とかける．

(ii) で $x=5q+r, y=5q$ とおくと

$$(f(r)-1)f(5q+r)\underbrace{f(5q)}_{=1}=0 \qquad (f(r)-1)f(5q+r)=0.$$

また $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ であったから $f(r)=0$ なので $f(5q+r)=0$.

すなわち

$$f(x)=0 \qquad x\not\equiv 0 \pmod 5.$$

したがって $f(n)\fallingdotseq 0$ となる n の集合は $\{n\,|\,n=5q, q\in\mathbb{Z}\}$ である． ■

問題 76　(Indonesia 2012)

Let $\mathbb{R}^+$ be the set of all positive real numbers.Show that ther is no function $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ satisfying

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\frac{1}{2012}$$

for all positive real numbers x and y.

解答

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\frac{1}{2012} \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

$g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2012}$ とおくと①は

$$g(x+y)=g(x)+g(y) \qquad \cdots\cdots②$$

と書き直せる．

簡単な数学的帰納法で

$$g(nx)=ng(x) \qquad \forall n\in\mathbb{N} \qquad \cdots\cdots③$$

が示せる．

③で $x=\dfrac{1}{n}$ とおいた $g(1)=ng\left(\dfrac{1}{n}\right)$ から

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{g(1)}{n}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{g(1)}{n}=0$ だから

$\exists N\in\mathbb{N};n>N\Longrightarrow\dfrac{g(1)}{n}<\dfrac{1}{2012}.$

この n に対して

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{g(1)}{n}<\frac{1}{2012} \qquad f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2012}<\frac{1}{2012}.$$

よって，$n>N$ のとき $f\left(\dfrac{1}{n}\right)<0$ となり $f\left(\dfrac{1}{n}\right)>0$ に矛盾する．

したがって，①を満たすような関数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ は存在しない． ■

問題 77　(IMO Training Camp 2012)

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function such that

$$f(x+y+xy) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$. Prove that f satisfies

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

解答

$$f(x+y+xy) = f(x) + f(y) + f(xy) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく.

①で $x = y = 0$ とおいた $f(0) = 3f(0)$ から $f(0) = 0$.

①で $y = -1$ とおいた $f(-1) = f(x) + f(-1) + f(-x)$ から $f(-x) = -f(x)$ となり $f(x)$ は奇関数である.

$x \fallingdotseq -1, y \fallingdotseq -1$ とする.

①で y のところを $\dfrac{y}{x+1}$ で置き換えると

$$f(x+y) = f(x) + f\left(\frac{y}{x+1}\right) + f\left(\frac{xy}{x+1}\right). \qquad \cdots\cdots ②$$

①で y のところを $-\dfrac{y}{x+1}$ で置き換えると

$$f(x-y) = f(x) + f\left(-\frac{y}{x+1}\right) + f\left(-\frac{xy}{x+1}\right).$$

$f(x)$ は奇関数だから

$$f(x-y) = f(x) - f\left(\frac{y}{x+1}\right) - f\left(\frac{xy}{x+1}\right). \qquad \cdots\cdots ③$$

② + ③ から

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x). \qquad \cdots\cdots ④$$

④で x と y を入れ換えると $f(x+y) + f(y-x) = 2f(y)$.

$f(x)$ は奇関数だから

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④ + ⑤ から

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y, x \fallingdotseq -1, y \fallingdotseq -1. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

すべての x, y について

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを示す．

$y \fallingdotseq 0$ のとき $y-1 \fallingdotseq -1$ だから⑥より

$$f(y) = f(1+(y-1)) = f(1) + f(y-1) = -f(-1) + f(y-1).$$

よって $f(-1+y) = f(-1) + f(y)$ となり $(*)$ は $x=-1, y \fallingdotseq 0$ のとき成り立つ．
$f(0) = 0$ より $f(-1+0) = f(-1) + f(0)$ だから $(*)$ は $x=-1, y=0$ のとき成り立つ．

以上のことから $x=-1$ かつ y が任意の実数のとき $(*)$ が成り立つ．
また，x と y を入れ換えることにより，$y = -1$ かつ x が任意の実数のとき $(*)$ が成り立つ．

よって，すべての x, y について $(*)$ が成り立つ． ■

問題 78 (IMO Training 2012)

Let $\mathbb{R}^+$ denote the set of all positive real numbers. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f(x) + f(y) \leqq \frac{f(x+y)}{2},\ \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geqq \frac{f(x+y)}{x+y},$$

for all $x, y \in \mathbb{R}+$.

解答

$$f(x) + f(y) \leqq \frac{f(x+y)}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geqq \frac{f(x+y)}{x+y} \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく．

①で $y = x$ とおいた $2f(x) \leqq \dfrac{f(2x)}{2}$ から $4f(x) \leqq f(2x)$.

②で $y = x$ とおいた $\dfrac{2f(x)}{x} \geqq \dfrac{f(2x)}{2x}$ から $4f(x) \geqq f(2x)$.

よって

$$f(2x) = 4f(x). \qquad \cdots\cdots ③$$

数学的帰納法で

$$f(2^n x) = 2^{2n} f(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \cdots\cdots ④$$

が示せる．

$g(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ とおくと④から

$$g(2^n x) = 2^n g(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．さらに一般的な

$$g(nx) = ng(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つことを示す．

②は

$$g(x) + g(y) \geqq g(x+y) \qquad \cdots\cdots ②'$$

と書き直すことができるから

$$ng(x) \geqq g(nx) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

が成り立つ.

$2^{m-1} \leqq n < 2^n$ となる $m \in \mathbb{N}$ を選ぶと

$$\begin{aligned} 2^m g(x) = g\left(2^m x\right) &\underset{⑤}{=} g\left(nx + (2^m - n)x\right) \\ &\leqq g(nx) + g\left((2^m - n)x\right) \\ &\leqq ng(x) + \left(2^m - n\right) g(x) \\ &= 2^m g(x). \end{aligned}$$

したがって $g(nx) = ng(x)$ でなければならない.

$g(x)$ は非増加であることを示す.

①で $y = 2x$ とおくと $2(f(x) + f(2x)) \leqq f(3x)$.

g に書き直すと $2(xg(x) + 2xg(2x)) \leqq 3xg(3x)$ から

$$2(g(x) + 2g(2x)) \leqq 3g(3x).$$

$g(nx) = ng(x)$ を使うと $2(g(x) + 4g(x)) \leqq 9g(x)$ から

$$g(x) \leqq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

②$'$ と⑧から

$$g(x+y) - g(x) \leqq g(y) \leqq 0 \qquad\qquad g(x+y) \leqq g(x) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

よって，$g(x)$ は非増加である.

$\forall \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ に対して，⑥で $x = \dfrac{m}{n}$ とおくと

$$g\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = ng\left(\frac{m}{n}\right) \qquad g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{g(m)}{n} = \frac{mg(1)}{n} = \frac{m}{n} g(1).$$

よって

$$g(x) = xg(1) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}^+. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$\forall x \in R^+$ に対して，$0 < p_n \leqq x \leqq q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} p_n = x$ を満たす有理数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ をとると，g は非増加だから

$$g(p_n) \geqq g(x) \geqq g(q_n) \qquad p_n g(1) \geqq g(x) \geqq q_n g(1).$$

$n \to \infty$ とすると

$$g(x) = xg(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

よって，$f(1) \leqq 0$ で

$$f(x) = f(1)x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

このとき，$a = f(1) \leqq 0$ として $f(x) = ax^2$ が①，②を満たすことを示す．

$$\begin{aligned}
2f(x) + 2f(y) - f(x+y) &= a\left(2x^2 + 2y^2 - (x+y)^2\right) \\
&= a\left(x^2 + y^2 - 2xy\right) \\
&= a(x-y)^2 \leqq 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} - \frac{f(x+y)}{x+y} = a\left(x + y - (x+y)\right) = 0$$

だから①，②を満たす．

したがって解は

$a \leqq 0$ を定数として

- $f(x) = ax^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

である． ■

問題 79　(Iran TST 2012)

The function $f:\mathbb{R}^{\geq 0}\to\mathbb{R}^{\geq 0}$ satisfying the following properties for all $a,b\in\mathbb{R}^{\geq 0}$:
a) $f(a)=0\Leftrightarrow a=0$
b) $f(ab)=f(a)f(b)$
c) $f(a+b)\leqq 2\max\{f(a),f(b)\}$.
Prove that for all $a,b\in\mathbb{R}^{\geq 0}$ we have $f(a+b)\leqq f(a)+f(b)$.

解答　次の補題を示しておく．

補題　$a_1+a_2+\cdots+a_m\ (m\in\mathbb{N})$ を 2 項ずつ組み合わせてかっこでくくり，最後にすべてをかっこでくくり終える最小の操作回数は $\lceil\log_2 m\rceil$ である．1 回の操作で，可能な限り 2 項ずつ組み合わせてかっこでくくってよいが，各項に対してかっこでくくるのは 1 回限りとする．

例　$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ の場合　　3 回

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\to(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+a_5\to((a_1+a_2)+(a_3+a_4))+a_5\to(((a_1+a_2)+(a_3+a_4))+a_5)$

表現を変えると，関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $f(a)+f(b)=f(a+b)$ を満たすとき，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_m)$ を $f(a_1+a_2+\cdots+a_m)$ と変形するための最小の回数である．

例　$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)+f(a_5)+f(a_6)$ の場合　　3 回

$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)+f(a_5)+f(a_6)\to f(a_1+a_2)+f(a_3+a_4)+f(a_5+a_6)\to f(a_1+a_2+a_3+a_4)+f(a_5+a_6)\to f(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)$

証明　⊙　$m=2^k$ のときは明らかに k 回である．

1 回で

$$\begin{aligned}&f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_m)\\&=f(a_1+a_2)+f(a_3+a_4)+\cdots+f(a_{2^{k-1}}+a_{2^k})\\&=\underbrace{f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_{2^{k-1}})}_{2^{k-1}}\end{aligned}$$

と $2^k/2=2^{k-1}$ 個にできるから，k 回で $f(a_1+a_2+\cdots+a_{2^k})$ とできる．

⊙　$2^k<m\leqq 2^{k+1}$ のときは $k+1=\lceil\log_2 m\rceil$ 回であることを示す．

$2^k<m\leqq 2^{k+1}$ のときは $k+1=\lceil\log_2 m\rceil$ 回以上必要で，$a_1,a_2,\ldots,a_m$ に 2^{k+1} 個のダミーをつけて 2^{k+1} 個で考えれば $k+1$ 回で可能である．

$k<\log_2<k+1$ より $k+1=\lceil\log_2 m\rceil$.

$k=2^{k+1}$ のときは $k+1$ 回であり $k+1=\log_2 m=\lceil\log_2 m\rceil$. □

b) で $a=b=1$ とおくと $f(1)=f(1)^2$.
a) から $f(1)\fallingdotseq 0$ なので $f(1)=1$.
b) で $b=a$ とおくと $f\left(a^2\right)=f(a)^2$.
よって，帰納的に

$$f\left(a^n\right)=f(a)^n \qquad n\in\mathbb{N} \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ.
c) で $b=a$ とおくと $f(2a)\leqq 2\max\{f(a),f(a)\}=2f(a)$ から

$$f(2a)\leqq 2f(a). \qquad \cdots\cdots①$$

$a>0$ のとき b) で $b=\dfrac{1}{a}$ とおいた

$$f(1)=f(a)f\left(\frac{1}{a}\right)$$

から

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{f(a)}. \qquad \cdots\cdots②$$

$\forall m\in\mathbb{N}$ に対して

$$f\left(2^m\right)\leqq 2^m \qquad \cdots\cdots③$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す.

(i) $m=1$ のとき
c) で $a=b=1$ とおくと

$$f(2)\leqq 2\max\{f(1),f(1)\}=2f(1)=2$$

より成り立つ.
(ii) m のとき成り立つとする.
c) で $a=b=2^m$ とおくと

$$f\left(2^{m+1}\right)\leqq 2\max\left\{f\left(2^m\right),f\left(2^m\right)\right\}=2f\left(2^m\right)\leqq 2\cdot 2^m=2^{m+1}.$$

よって $f\left(2^{m+1}\right)\leqq 2^{m+1}$ となり $m+1$ のときも成り立つ.

(i)，(ii) よりすべての自然数 m について③は成り立つ.

次に $2^{r-1}\leqq n<2^r, r\in\mathbb{N}$ のとき

$$f(n)\leqq 2n \qquad \cdots\cdots④$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す.

(i) $r=1$ のとき $1 \leqq n < 2$ 　より $n=1$.

$f(1)=1$ だから $f(1) \leqq 2 \cdot 1$ は成り立つ.

(ii) r 以下のとき成り立つと仮定して，$2^r \leqq n < 2^{r+1}$ のとき $f(n) \leqq 2n$ が成り立つことを示す.

$n = 2^r + s$ とおくと $0 \leqq s < 2^r$.

$s=0$ のときは $n=2^r$ となるから③より

$$f(n) = f\left(2^r\right) \leqq 2^r = n.$$

よって，$f(n) \leqq 2n$ は成り立つ.

$1 \leqq s < 2^r$ のときは $2^{t-1} \leqq s < 2^t$ となる $t \in \mathbb{N}$, $(1 \leqq t \leqq r)$ がある.

仮定から $f(s) \leqq 2s$.

よって

$$\begin{aligned} f(n) = f\left(2^r + s\right) &\leqq 2 \max\left\{f\left(2^r\right), f\left(s\right)\right\} \\ &\leqq 2 \max\left\{2^r, 2s\right\} \\ &= \max\left\{2^{r+1}, 4s\right\}. \end{aligned}$$

$n < 2^{r+1}$ より $4s = 4\left(n - 2^r\right) < 2n$ で $2^{r+1} \leqq 2n$ が成り立つから

$$\max\left\{2^{r+1}, 4s\right\} \leqq 2n.$$

したがって $f(n) \leqq 2n$ が成り立つ.

(i)，(ii) から $2^{r-1} \leqq n < 2^r, r \in \mathbb{N}$ のとき

$$f(n) \leqq 2n \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ.

よって，$\forall n \in \mathbb{N}$ のとき

$$f(n) \leqq 2n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つことがわかる.

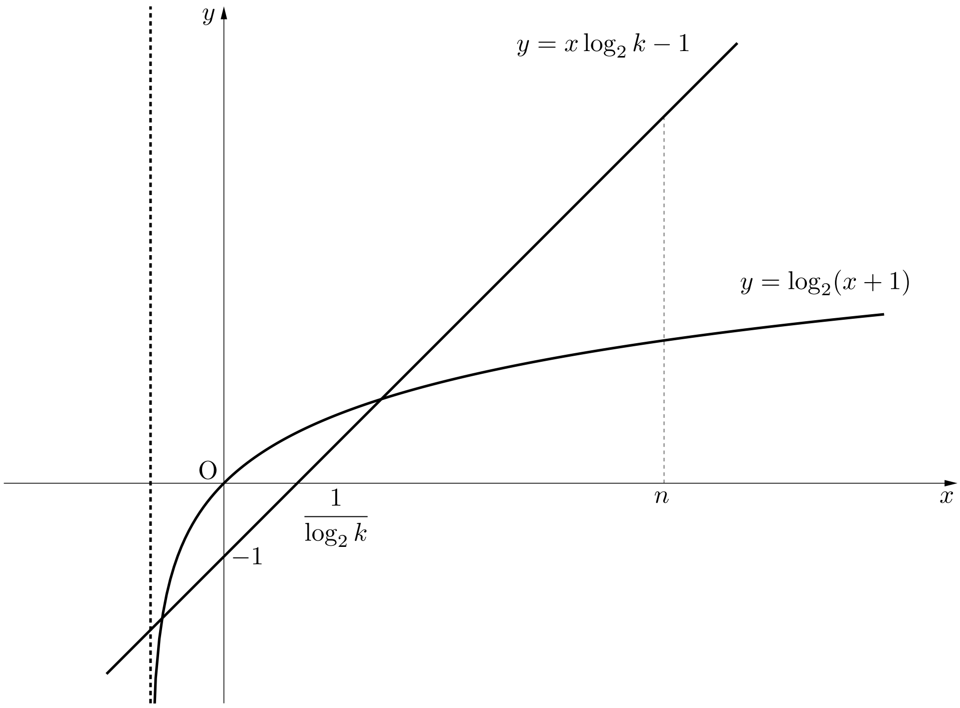
c) から

$$f(a+b) \leqq 2\max\{f(a), f(b)\} \leqq 2(f(a)+f(b))$$

が成り立つ.

$f(a+b) \leqq f(a)+f(b)$ を示すためには，$f(a+b) = k(f(a)+f(b))$ となる $k>1$ と a, b が存在したとして矛盾が生じることをいえばよい.

$y = x\log_2 k - 1$ と $y = \log_2(x+1)$ のグラフを考えると，n を十分大きくとれば，$n\log_2 k - 1 > \lceil \log_2(n+1) \rceil$ が成り立つようにできる.



$$n\log_2 k - 1 > \lceil \log_2(n+1) \rceil \Longleftrightarrow k^n > 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil + 1}$$

より，n を十分大きくとれば

$$k^n > 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil + 1} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つようにとできる.

以上のことを用いて

$$\boldsymbol{f(a+b)^n \geqq \frac{k^n}{2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil + 1}} f\left((a+b)^n\right)} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

が成り立つことを示す.

$$
\begin{aligned}
f(a+b)^n &= k^n(f(a)+f(b))^n \\
&= k^n \left[f(a)^n + nf(a)^{n-1}f(b) + {}_n\mathrm{C}_2 f(a)^{n-2}f(b)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_r f(a)^{n-r}f(b)^r + \cdots\cdots + f(b)^n\right] \\
&\underset{④}{\geqq} \frac{k^n}{2}\left[f(a)^n + f(n)f(a)^{n-1}f(b) + f\left({}_n\mathrm{C}_2\right)f(a)^{n-2}f(b)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \cdots\cdots + f\left({}_n\mathrm{C}_r\right)f(a)^{n-r}f(b)^r + \cdots\cdots + f(b)^n\right] \\
&\underset{b)}{=} \frac{k^n}{2}\left[f(a)^n + f(na^{n-1}b) + f\left({}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \cdots\cdots + f\left({}_n\mathrm{C}_r a)^{n-r}b^r\right) + \cdots\cdots + f\left(b^n\right)\right] \\
&\underset{\text{補題}}{\geqq} \frac{k^n}{2}\cdot\frac{1}{2^{\lceil\log_2(n+1)\rceil+1}} f\left(a^n + na^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n\right) \\
&= \frac{k^n}{2^{\lceil\log_2(n+1)\rceil+1}} f\left((a+b)^n\right).
\end{aligned}
$$

⑥，⑦から

$$
f(a+b)^n \geqq \frac{k^n}{2^{\lceil\log_2(n+1)\rceil+1}} f\left((a+b)^n\right) > f((a+b)^n) \underset{(*)}{=} f(a+b)^n
$$

となり矛盾が生じる．

よって，$f(a+b) = k(f(a)+f(b))$ となる $k>1$ と a,b は存在しないから

$$
f(a+b) \leqq f(a)+f(b) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}^{\geq 0}
$$

が成り立つ ■

類題 1　(Polish Mo Final 2010)

Real number $C > 1$ is given. Sequence of positive real numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in which $a_1 = 1$ and $a_2 = 2$, satisfy the conditions

$$a_{mn} = a_m a_n,$$

$$a_{m+n} \leqq C(a_m + a_n),$$

for $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Prove that $a_n = n$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$

$a_n = f(n)$ とおけば関数方程式の問題となる.

類題 2　(* Polish Mo Final 2010)

Real number $C > 1$ is given.

Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ be a function satisfying $f(1) = 1, f(2) = 2$ and

$$f(mn) = f(m)f(n),$$

$$f(m + n \leqq C(f(m) + f(n))),$$

for all $m, n \in \mathbb{N}$, simultaneously.

Prove that $f(n) = n$ for all $n \in N$.

解答

$$f(mn) = f(m)f(n) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$f(m + n \leqq C(f(m) + f(n))) \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく.

$f(0) = 0$ とし f を $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ に拡張しておく.

①で $m = 2$ とおいた $f(2n) = f(n)f(2)$ から $f(2n) = 2f(n)$.

②で $m = n$ おくと

$$f(2n) \leqq 2Cf(n) \qquad 2f(n) \leqq 2Cf(n).$$

$f(n) > 0$ より $1 \leqq C$.

$\forall n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} f(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) &= f(n_k + (n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1})) \\ &\leqq Cf(n_k) + Cf(n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Cf(n_k) + C(f(n_{k-1} + (n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-2})) \\
&\leqq C(f(n_k) + C^2 f(n_{k-1}) + C^2 f(n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-2}) \\
&\leqq \cdots\cdots \\
&\leqq C(f(n_k) + C^2 f(n_{k-1}) + \cdots + C^k f(n_1)
\end{aligned}
$$

から

$$
f(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) \leqq C(f(n_k) + C^2 f(n_{k-1}) + \cdots + C^k f(n_1). \qquad \cdots\cdots ③
$$

①から

$$
f\left(n^k\right) = f(n)^k
$$

が得られる．

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
m = j_0 + j_1 n + \cdots + j_r n^r\,,\ 0 \leqq j_i \leqq n-1\,(i = 0, 1, \ldots, r),\ j_r \neq 0
$$

とかける．

③の不等式を使うと

$$
\begin{aligned}
f(m) &= f\left(j_0 + j_1 n + \cdots + j_r n^r\right) \\
&\leqq C\left(j_r n^r\right) + C^2\left(j_{r-1} n^{r-1}\right) + \cdots + C^{r+1} f(j_0) \\
&= Cf(j_r)\left(n^r\right) + C^2 f(j_{r-1})\left(n^{r-1}\right) + \cdots + C^{r+1} f(j_0) \\
&= Cf(j_r) f\left(n\right)^r + C^2 f(j_{r-1}) f\left(n\right)^{r-1} + \cdots + C^{r+1} f(j_0).
\end{aligned}
$$

$k_n = C \cdot \max\{f(0), f(1), \ldots, f(n-1)\}$ とおくと $0 = k_1 \leqq k_2 \leqq \cdots \leqq k_n$.

$0 \leqq j_i \leqq n-1$ だから $Cf(j_i) \leqq k_n$.

よって

$$
\begin{aligned}
&Cf(j_r) f\left(n\right)^r + C^2 f(j_{r-1}) f\left(n\right)^{r-1} + \cdots + C^{r+1} f(j_0) \\
&\leqq k_n \left(f\left(n\right)^r + Cf\left(n\right)^{r-1} + \cdots + C^r\right) \\
&\leqq k_n (r+1) \max\{f(n), C\}^r.
\end{aligned}
$$

よって

$$
f(m) \leqq k_n (r+1) \max\{f(n), C\}^r. \qquad \cdots\cdots ④
$$

$j_r \neq 0$ より $j_r \geqq 1$ だから

$$
m = j_0 + j_1 n + \cdots + j_r n^r \geqq j_r n^r \geqq n^r.
$$

よって $m \geqq n^r$ が成り立つから

$$r \leqq \frac{\log m}{\log n}.$$

これを使うと，$x > 0$ のとき

$$(r+1)x^r \leqq \left(\frac{\log m}{\log n}+1\right)x^{\frac{\log m}{\log n}}$$

が成り立つ．

よって

$$(r+1)\max\{f(n), c\}^r \leqq \left(\frac{\log m}{\log n}+1\right)\max\{f(n), C\}^{\frac{\log m}{\log n}}. \qquad \cdots\cdots⑤$$

⑤を④で使うと

$$f(m) \leqq k_n\left(\frac{\log m}{\log n}+1\right)\max\{f(n), C\}^{\frac{\log m}{\log n}}.$$

m のところを m^t $(t \in \mathbb{N})$ で置き換えると

$$f\left(m^t\right) \leqq k_n\left(\frac{\log m^t}{\log n}+1\right)\max\{f(n), C\}^{\frac{\log m^t}{\log n}},$$

$$f(m)^t \leqq k_n\left(t\cdot\frac{\log m}{\log n}+1\right)\max\{f(n), C\}^{t\cdot\frac{\log m}{\log n}}.$$

t 乗根をとると

$$f(m) \leqq \sqrt[t]{t\cdot k_n\cdot\frac{\log m}{\log n}+k_n}\,\max\{f(n), C\}^{\frac{\log m}{\log n}}.$$

$t \to \infty$ とすると $\sqrt[t]{t\cdot k_n\cdot\dfrac{\log m}{\log n}+k_n} \to 1$ だから

$$f(m) \leqq \max\{f(n), C\}^{\frac{\log m}{\log n}}. \qquad \cdots\cdots⑥$$

$f(n) \leqq C$ を満たす n が無限個存在すれば，⑥より

$$f(m)^{\frac{1}{\log m}} \leqq \left(C^{\frac{\log m}{\log n}}\right)^{\frac{1}{\log m}} = C^{\frac{1}{\log n}}$$

が有限個のを除いて成り立ち，$C^{\frac{1}{\log n}} \to 1\,(n \to \infty)$ だから

$$f(m)^{\frac{1}{\log m}} \leqq 1 \quad すなわち \quad f(m) \leqq 1.$$

これは $f(2) = 2$ に矛盾する．

したがって，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geqq n_0$ に対して $f(n) > C$ が成り立つ．

よって $n \geqq n_0$ のとき $\max\{f(n), C\} = f(n)$ で⑥より

$$f(m)^{\frac{1}{\log m}} \leqq \left(f(n)^{\frac{\log m}{\log n}}\right)^{\frac{1}{\log m}} = f(n)^{\frac{1}{\log n}} \qquad \forall m, \forall n \geqq n_0.$$

$m \geqq n_0$ とすると (m と n を入れ換える)

$$f(m)^{\frac{1}{\log m}} \geqq f(n)^{\frac{1}{\log n}} \qquad \forall n, \forall m \geqq n_0$$

が成り立つから，結局

$$f(m)^{\frac{1}{\log m}} = f(n)^{\frac{1}{\log n}} \qquad \forall m \geqq n_0, \forall n \geqq n_0$$

を得る．この式で $n = n_0$ とおき，$D = f(n_0)^{\frac{1}{\log n_0}} > 0$ とおくと

$$f(m)^{\frac{1}{\log m}} = D \qquad \forall m \geqq n_0$$

から

$$f(m) = D^{\log m} \qquad \forall m \geqq n_0.$$

$\forall n \geqq n_0$ に対して

$$f(2n) = D^{\log 2n} = D^{\log 2} \cdot D^{\log n} = D^{\log 2} f(n)$$

となるが，$f(2n) = f(n)\,(> 0)$ を使うと

$$D^{\log 2} = 1 \qquad D = e.$$

よって

$$f(m) = e^{\log m} = m \forall m \geqq n_0. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

$f(mn) = f(m)f(n)$ で $m \geqq n_0$ とすると $mn \geqq n_0$ だから，⑦を使うと

$$mn = mf(n)$$

から

$$f(n) = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

問題 80　(Iran TST 2012)

Let $g(x)$ be a polynomial of degree at least 2 with all of its coefficients positive. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that

$$f(f(x)+g(x)+2y) = f(x)+g(x)+2f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

解答

$$f(f(x)+g(x)+2y) = f(x)+g(x)+2f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

$c>0$ と $M>0$ が存在して，$\forall x>M$ に対して $f(x+c)=f(x)+c$ が成り立つことを示す．

$g(a)>0$ となる $a>0$ を 1 つとる．g は有界ではないから，$g(b)>f(a)+g(a)$ を満たす b が存在する．$f(b)>0$ だから

$$f(b)+g(b)>g(b)>f(a)+g(a). \qquad \cdots\cdots ②$$

①で $x=a$ とおくと

$$f(f(a)+g(a)+2y) = f(a)+g(a)+2f(y). \qquad \cdots\cdots ③$$

①で $x=b$ とおくと

$$f(f(b)+g(b)+2y) = f(b)+g(b)+2f(y). \qquad \cdots\cdots ④$$

④ − ③ から

$$f(f(b)+g(b)+2y) - f(f(a)+g(a)+2y) = f(b)+g(b)-f(a)-g(a).$$

$c=f(b)+g(b)-f(a)-g(a)$ とおくと，②から $c>0$ で

$$f(f(b)+g(b)+2y) = f(f(a)+g(a)+2y)+c,$$
$$f(2y+f(a)+g(a)+c) = f(2y+f(a)+g(a))+c.$$

$x=2y+f(a)+g(a)$ とおくと $f(x+c)=f(x)+c$.
$M=f(a)+g(a)\,(>0)$ とおくと，$\forall x>M$ に対して $f(x+c)=f(x)+c$.

$g(x)$ は $(0,\infty)$ で増加関数だから $x_0 > M$ に対して $g(x_0+c)-g(x_0) > 0$ だから $d = g(x_0+c)-g(x_0)\,(>0)$ とおくと

$$f(r+d) = f(r)+d \qquad \forall r>0$$

が成り立つことを示す．
①で $x = x_0+c$ とおくと

$$f(f(x_0+c)+g(x_0+c)+2y) = f(x_0+c)+g(x_0+c)+2f(y),$$
$$f(f(x_0)+c+g(x_0+c)+2y) = f(x_0)+c+g(x_0+c)+2f(y).$$

$y>M$ とすると

$$f(f(x_0)+g(x_0+c)+2y)+c = f(x_0)+c+g(x_0+c)+2f(y)$$

から

$$f(f(x_0)+g(x_0+c)+2y) = f(x_0)+g(x_0+c)+2f(y). \qquad \cdots\cdots⑤$$

①で $x = x_0$ とおくと

$$f(f(x_0)+g(x_0)+2y) = f(x_0)+g(x_0)+2f(y). \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑤ − ⑥ から

$$f(f(x_0)+g(x_0+c)+2y)-f(f(x_0)+g(x_0)+2y) = g(x_0+c)-g(x_0) = d,$$
$$f(f(x_0)+g(x_0)+d)+2y)-f(f(x_0)+g(x_0)+2y) = g(x_0+c)-g(x_0) = d.$$

$z = f(x_0)+g(x_0)+2y, N = f(x_0)+g(x_0)$ とおくと

$$f(z+d)-f(z) = d \qquad \forall z>N.$$

$z>N$ のとき

$$f(z+2d)-f(z) = f(z+2d)-f(z+d)+f(z+d)-f(z) = d+d = 2d$$

から

$$f(z+2d) = f(z)+2d \qquad \forall z>N. \qquad \cdots\cdots⑦$$

$\forall r>0$ に対して，$f(X)+g(X) > g(X) > N$ が成り立つように X を十分大きくとる．
①で $x = X, y = r+d$ とおくと

$$f(f(X)+g(X)+2r+2d) = f(X)+g(X)+2f(r+d). \qquad \cdots\cdots⑧$$

①で $x=X, y=r$ とおくと

$$f(f(X)+g(X)+2r)=f(X)+g(X)+2f(r). \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑧ − ⑨ から

$$f(f(X)+g(X)+2r+2d)-f(f(X)+g(X)+2r)=2f(r+d)-2f(r).$$

$f(X)+g(X)+2r>N+2r>N$ だから，⑦を使うと

$$f(f(X)+g(X)+2r+2d)-f(f(X)+g(X)+2r)=2d$$

となるから

$$2d=2f(r+d)-2f(r) \quad \text{すなわち} \quad f(r+d)=f(r)+d$$

を得る．

ある区間 $[k,\infty)$ は $\{g(x+c)-g(x)\,|\,x>M\}$ に含まれる．

$(x+c)^l-x^l$ $(l\in\mathbb{N})$ は係数が正の多項式だから，$g(x+c)-g(x)$ も係数が正の多項式で，少なくとも 1 次式である．$G(x)=g(x+c)-g(x)$ は $(0,\infty)$ で増加関数だから，たとえば $k=G(M+1)$ ととれば $[k,\infty)$ は $\{G(x)=g(x+c)-g(x)\,|\,x>M\}$ に含まれる．

$\forall d \geqq k$ に対して，$[k,\infty)\in\{g(x+c)-g(x)\,|\,x>M\}$ だから $d=g(x_0+c)-g(x_0), x_0>M$ となる $x_0>M$ があるから

$$f(r+d)=f(r)+d \qquad \forall d\geqq k, \forall r>0 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

が成り立つ．特に $d=k$ のときを考えると

$$f(r+k)=f(r)+k \qquad \forall r>0$$

が成り立つから，$\forall p>0$ に対して r のところを $r+p$ で置き換えると

$$f(r+p+k)=f(r+p)+k$$

が成り立つ．$p+k>k$ だから，⑩から $f(r+p+k)=f(r)+p+k$. これを使うと

$$f(r)+p+k=f(r+p)+k$$

から

$$f(r+p)=f(r)+p \qquad \forall r,p\in\mathbb{R}^+. \qquad \cdots\cdots ⑪$$

$r_0 > 0$ を任意の数として固定する．⑪で $r = r_0$ とおくと

$$f(r_0 + p) = f(r_0) + p = p + r_0 + f(r_0) - r_0.$$

$x = p + r_0, a = f(r_0) - r_0$ とおくと

$$f(x) = x + a \qquad \forall x > r_0.$$

$x \in \mathbb{R}^+$ を固定し，$y > r_0$ かつ $f(x) + g(x) + 2y > r_0$ を満たすように y をとると①から

$$f(f(x) + g(x) + 2y) = f(x) + g(x) + 2(y + a).$$

$f(x) + g(x) + 2y > r_0$ だから

$$f(x) + g(x) + 2y + a = f(x) + g(x) + 2(y + a) \qquad a = 0.$$

よって

$$(a =) f(r_0) - r_0 = 0$$

$r_0 > 0$ は任意の数であったから

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

これは①を満たす．

よって解は

- $f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

である． ■

問題 81 (Japan 2012)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

解答

$$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $x=y=0$ とおくと

$$f\left(f(0)^2\right) = 0. \qquad \cdots\cdots ②$$

①で $x=0$ とおくと

$$f(f(y)f(-y)) = -yf(y) \qquad \cdots\cdots ③$$

③で $y=f(0)^2$ とおき，②を使うと

$$f\left(\underbrace{f\left(f(0)^2\right)}_{=0} f\left(-f(0)^2\right)\right) = -f(0)^2 \underbrace{f\left(f(0)^2\right)}_{=0} \qquad f(0)=0.$$

①で $y=x$ とおくと

$$f\left(f(2x)\underbrace{f(0)}_{=0}\right) = x^2 - xf(x) \qquad f(0) = x^2 - xf(x) \qquad 0 = x^2 - xf(x).$$

よって

$$x^2 - xf(x) = 0.$$

$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x)=x$ となる．$f(0)=0$ だから

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき，①の左辺，右辺とも x^2-y^2 となり等しい．

よって解は

- $f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 82　(Kazakhstan 2012)

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function such that

$$f(xf(y)) = yf(x)$$

for any x, y are real numbers. Prove that

$$f(-x) = -f(x)$$

for all real number x.

解答

$$f(xf(y)) = yf(x) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $x = y = 0$ とおくと $f(0) = 0$.

$f(x) \equiv 0$ は①を満たし，このとき $f(-x) = -f(x)$ は成り立つので以下 $f(x) \not\equiv 0$ とする．

したがって，$f(x_0) \fallingdotseq 0$ となる $x_0 \in \mathbb{R}$ が存在する．

$f(p) = f(q) = r$ とする．

①で $x = x_0, y = p$ とおくと

$$f(x_0 f(p)) = pf(x_0) \qquad f(rx_0) = pf(x_0).$$

①で $x = x_0, y = p$ とおくと

$$f(x_0 f(q)) = qf(x_0) \qquad f(rx_0) = qf(x_0).$$

よって $pf(x_0 = qf(x_0$ が成り立ち $f(x_0) \fallingdotseq 0$ だから $p = q$ を得る．したがって f は単射 (injection) である．

①で $x = y = 1$ とおくと $f(f(1)) = f(1)$.

f は単射 (injection) だから $f(1) = 1$.

①で $x = 1$ とおくと $f(f(y)) = yf(1)$ すなわち

$$f(f(y)) = y \qquad \forall y \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ②$$

②から f は全射 (surjective) であることがわかる．

②で $y = -1$ とおくと $f(f(-1)) = -1$.

$u = f(-1)$ とおくと $f(u) = -1$.

①で $x = u, y = -1$ とおいた

$$f(uf(-1)) = -f(u) \qquad f\left(u^2\right) = 1 = f(1)$$

から $f\left(u^2\right)=f(1)$ が成り立ち，f は単射 (injection) なので $u^2=1$.
よって $u\in\{1,-1\}$.

(1) $u=1$ の場合
$f(u)=-1$ であったから $f(1)=-1$ となるが，これは $f(1)=1$ に矛盾する.

(2) $u=1$ の場合
$f(u)=-1$ から $f(-1)=-1$.
①で $x=-1$ とおいた

$$f(-f(y))=yf(-1)=-y \underset{②}{=} f(f(-y))$$

から $f(-f(y))=f(f(-y))$.
f は単射 (injection) だから $-f(y)=f(-y)\quad\forall y\in\mathbb{R}$ すなわち

$$f(-x)=-f(x)\qquad\forall x\in\mathbb{R}$$

となる. ■

問題 83　(Kyrgyzstan 2012)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

解答

$$f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $x = 1$ とおくと

$$f\left(f(1)^2 + f(y)\right) = f(1) + y.$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $y = t - f(1)$ とおくと $f\left(f(1)^2 + f(y)\right) = t$ となるから，f は全射 (surjective) である．

よって，$f(x_0) = 0$ となる $x_0 \in \mathbb{R}$ が存在する．

①で $x = x_0$ とおくと

$$f\left(f(y)\right) = y \qquad \forall y \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots②$$

$f(p) = f(q) = r$ とする．

②で $y = p$ とおくと

$$f\left(f(p)\right) = p \qquad f(r) = p.$$

②で $y = q$ とおくと

$$f\left(f(q)\right) = q \qquad f(r) = q.$$

よって $p = q$ となるから，f は単射 (injective) である．

①で $x = y = 0$ とおくと

$$f\left(f(0)^2 + f(0)\right) = 0 = f(x_0).$$

f は単射 (injective) だから

$$f(0)^2 + f(0) = x_0. \qquad \cdots\cdots③$$

①で $y = -xf(x)$ とおくと

$$f\left(f(x)^2 + f(-f(x))\right) = 0 = f(x_0).$$

f は単射 (injective) だから

$$f(x)^2 + f(-f(x)) = x_0.$$

この式で $x=x_0$ とおくと $f(x_0)^2+f(-f(x_0))=x_0$ から

$$f(0)=x_0. \qquad \cdots\cdots④$$

③，④から $f(0)=0, x_0=0$.
よって

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

がいえる．
　①で y のところを $yf(y)$ で置き換えると

$$f\left(f(x)^2+f(yf(y))\right)=xf(x)+yf(y). \qquad \cdots\cdots⑥$$

①で x と y を入れ換えると

$$f\left(f(y)^2+f(xf(x))\right)=yf(y)+xf(x). \qquad \cdots\cdots⑦$$

⑥，⑦から

$$f\left(f(x)^2+f(yf(y))\right)=f\left(f(y)^2+f(xf(x))\right).$$

f は単射 (injective) だから

$$f(x)^2+f(yf(y))=f(y)^2+f(xf(x)). \qquad \cdots\cdots⑧$$

⑧で $y=0$ とおくと

$$f(x)^2=f(xf(x)). \qquad \cdots\cdots⑨$$

f は全射 (surjective) だから，
　$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $f(s)=t$ となる $s\in\mathbb{R}$ がある．
⑨で $x=f(s)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(f(s))^2 &= f(f(s)f(f(s))) \\ &\underset{②}{=} f(f(s)s) \\ &\underset{⑨}{=} f(s)^2. \end{aligned}$$

よって，$f(t)^2=t^2$ から

$$f(t)\in\{t,-t\} \qquad \forall t\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots⑩$$

⑩を使って①を書き直すと

$$f\left(x^2+f(y)\right)=xf(x)+y \qquad \cdots\cdots①'$$

となる．①$'$ で $y=0$ とおくと
$$f\left(x^2\right)=xf(x). \qquad \cdots\cdots ⑪$$
⑪で x のところを $-x$ で置き換えると
$$f\left(x^2\right)=-xf(-x). \qquad \cdots\cdots ⑫$$
⑪，⑫から $xf(x)=-xf(-x)$.
$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(-x)=-f(x)$.
$f(0)=0$ だから
$$f(-x)=-f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑬$$
$f(x)$ は奇関数である．
⑩から $f(1) \in \{1,-1\}$ なので場合分けをする．

(1) $f(1)=1$ の場合
$f(c)=-c$ となる $c\,(>0)$ が存在したとする．
①$'$ で $x=c, y=1$ とおいた $f\left(f(c)^2+f(1)\right)=cf(c)+1$ から
$$f\left(c^2+1\right)=-c^2+1.$$
⑩より $f\left(c^2+1\right) \in \left\{c^2+1,-\left(c^2+1\right)\right\}$ で $c^2+1 \fallingdotseq -c^2+1$, $-c^2-1 \fallingdotseq -c^2+1$ だから矛盾が生じる．
よって，$f(c)=-c$ となる $c\,(>0)$ は存在しないから
$$f(x)=x \qquad \forall x>0.$$
$x<0$ のときは⑬を使うと
$$f(x)=-f(-x)=-(-x)=x.$$
また，$f(0)=0$ だから
$$f(x)=x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
を得る．このとき，①を満たす．

(2) $f(1)=-1$ の場合
$f(d)=d$ となる $d\,(>0)$ が存在したとする．
①$'$ で $x=d, y=1$ とおいた $f\left(f(d)^2+f(1)\right)=df(d)+1$ から
$$f\left(d^2-1\right)=-d^2+1.$$

⑩より $f\left(d^2-1\right) \in \left\{d^2-1, -\left(d^2-1\right)\right\}$ で $d^2-1 \fallingdotseq d^2+1$, $-d^2+1 \fallingdotseq d^2+1$ だから矛盾が生じる．

よって，$f(d)=d$ となる $d\,(>0)$ は存在しないから

$$f(x)=-x \qquad \forall x>0.$$

$x<0$ のときは⑬を使うと

$$f(x)=-f(-x)=-(-(-x))=-x.$$

また，$f(0)=0$ だから

$$f(x)=-x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

を得る．このとき，①を満たす．

したがって解は

- $f(x)=x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

と

- $f(x)=-x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 84　(Macedonia 2012)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ which satisfy the conditions:

$f(x+y)<f(x)+f(y)$

$f(f(x))=\lfloor x\rfloor+2$

解答

$$f(x+y)<f(x)+f(y) \qquad \cdots\cdots①$$

$$f(f(x))=\lfloor x\rfloor+2 \qquad \cdots\cdots②$$

②で $x=0$ とおくと

$$f(f(0))=2. \qquad \cdots\cdots③$$

②で x のところを $f(x)$ で置き換えた

$$f(\underbrace{f(f(x))}_{=\lfloor x\rfloor+2})=\lfloor f(x)\rfloor+2=f(x)+2$$

から

$$f(\lfloor x\rfloor+2)=f(x)+2. \qquad \cdots\cdots④$$

$a=f(0),b=f(1)$ とおくと③より

$$f(a)=2. \qquad \cdots\cdots③'$$

④で $x=2m,m\in\mathbb{Z}$ とおくと $f(2m+2)=f(2m)+2.$

④で $x=2m+1,m\in\mathbb{Z}$ とおくと $f(2m+3)=f(2m+1)+2.$

よって

$$f(2m)=2m+a,\ f(2m+1)=2m+b. \qquad \cdots\cdots⑤$$

①で $x=y=0$ とおいた $f(0)<2f(0)$ から $f(0)>0.$

よって

$$a>0. \qquad \cdots\cdots⑥$$

①で $x=y=1$ とおいた $f(2)<2f(1)$ から

$$2+a<2b. \qquad \cdots\cdots⑦$$

(1) a が偶数の場合

$f(2m)=2m+a$ から $f(a)=a+a=2a.$

③$'$ より $f(a)=2$ だから $2=2a$ から $a=1.$

これはが偶数であることに矛盾する.

(2) a が奇数の場合

$f(2m+1) = 2m+b = (2m+1)+b-1$ から

$$f(a) = a+b-1.$$

③$'$ より $f(a)=2$ だから $2 = a+b-1$.

よって

$$a+b=3. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦,⑧から

$$2+a < 2(3-a) \qquad a < \frac{4}{3}.$$

⑥より $a>0$ なので $0<a<\dfrac{4}{3}$.

a は整数だから $a=1$ を得る．よって $b=2$.

したがって，⑤より

$$f(2m) = 2m+1,\ f(2m+1) = 2m+2 = (2m+1)+1$$

となるから

$$f(x) = x+1 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$\lfloor x \rfloor + 2$ は整数だから，⑨より

$$f(\lfloor x \rfloor + 2) = (\lfloor x \rfloor + 2) + 1 = \lfloor x \rfloor + 3. \qquad \cdots\cdots ⑩$$

④，⑩より

$$f(x)+2 = \lfloor x \rfloor + 3$$

すなわち

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき，$x=y=\dfrac{1}{2}$ とおくと $f(x)=f(y)=f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left\lfloor \dfrac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 1$,

$f(x+y) = f(1) = \lfloor 1 \rfloor + 1 = 2 = 1+1 = f(x)+f(y)$ となり，①は成り立たない．

したがって，求める関数は存在しない． ■

[注]　不等式 $f(x+y) < f(x)+f(y)$ を $f(x+y) \leqq f(x)+f(y)$ に置き換えれば解は存在する．

問題 85　(* Macedonia 2012)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ which satisfy the conditions:

$f(x+y)\leqq f(x)+f(y)$

$f(f(x))=\lfloor x\rfloor+2$

解答

$$f(x+y)\leqq f(x)+f(y) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$f(f(x))=\lfloor x\rfloor+2 \qquad \cdots\cdots ②$$

②で $x=0$ とおくと

$$f(f(0))=2. \qquad \cdots\cdots ③$$

②で x のところを $f(x)$ で置き換えると

$$f(\underbrace{f(f(x))}_{=\lfloor x\rfloor+2})=\lfloor f(x)\rfloor+2=f(x)+2$$

から

$$f(\lfloor x\rfloor+2)=f(x)+2. \qquad \cdots\cdots ④$$

$a=f(0), b=f(1)$ とおくと③より

$$f(a)=2. \qquad \cdots\cdots ③'$$

④で $x=2m, m\in\mathbb{Z}$ とおくと $f(2m+2)=f(2m)+2.$

④で $x=2m+1, m\in\mathbb{Z}$ とおくと $f(2m+3)=f(2m+1)+2.$

よって

$$f(2m)=2m+a,\ f(2m+1)=2m+b. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

①で $x=y=0$ とおいた $f(0)\leqq 2f(0)$ から $f(0)\geqq 0.$

よって

$$a\geqq 0. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

①で $x=y=1$ とおいた $f(2)\leqq 2f(1)$ から

$$2+a\leqq 2b. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

(1) a が偶数の場合

$f(2m)=2m+a$ から $f(a)=a+a=2a.$

③$'$ より $f(a)=2$ だから $2=2a$ から $a=1.$

これはが偶数であることに矛盾する.

(2) a が奇数の場合

$f(2m+1) = 2m+b = (2m+1)+b-1$ から

$$f(a) = a+b-1.$$

③$'$ より $f(a) = 2$ だから $2 = a+b-1$.

よって

$$a+b = 3. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦,⑧から

$$2+a \leqq 2(3-a) \qquad a \leqq \frac{4}{3}.$$

⑥より $a \geqq 0$ なので $0 \leqq a \leqq \dfrac{4}{3}$.

a は奇数だから $a = 1$ を得る．よって $b = 2$.

したがって，⑤より

$$f(2m) = 2m+1,\ f(2m+1) = 2m+2 = (2m+1)+1$$

となるから

$$f(x) = x+1 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$\lfloor x \rfloor + 2$ は整数だから，⑨より

$$f(\lfloor x \rfloor + 2) = (\lfloor x \rfloor + 2) + 1 = \lfloor x \rfloor + 3. \qquad \cdots\cdots ⑩$$

④，⑩より

$$f(x) + 2 = \lfloor x \rfloor + 3$$

すなわち

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき，①，②を満たすことを示す．

$\lfloor x \rfloor \leqq x < \lfloor x \rfloor + 1, \lfloor y \rfloor \leqq y < \lfloor y \rfloor + 1$ から $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqq x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.

よって，$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqq \lfloor x+y \rfloor \leqq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ から

$f(x+y) = \lfloor x+y \rfloor + 1 \leqq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 = \lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor y \rfloor + 1 = f(x) + f(y)$.

$f(x)$ は整数だから

$$f(f(x)) = \lfloor f(x) \rfloor + 1 = f(x) + 1 = (\lfloor x \rfloor + 1) + 1 = \lfloor x \rfloor + 2.$$

したがって，解は

- $f(x) = \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 86　(Middle European Mathematical Olympiad 2012)

Let $\mathbb{R}^+$ denote the set of all positive real numbers.Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that

$$f(x+f(y)) = yf(xy+1)$$

holds for all $x, y \in \mathbb{R}^+$.

解答

$$f(x+f(y)) = yf(xy+1) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

$x > 1$ のとき，①で $y = \dfrac{x-1}{x} + f(x)$ とおくと $xy+1 = x + xf(x)$ で

$$f\left(x + f\left(\frac{x-1}{x} + f(x)\right)\right) = \left(\frac{x-1}{x} + f(x)\right) f(x + xf(x)) \qquad \cdots\cdots②$$

①で x のところを $\dfrac{x-1}{x}$，y のところを x で置き換えた

$$f\left(\frac{x-1}{x} + f(x)\right) = xf\left(\frac{x-1}{x} \cdot x + 1\right)$$

から

$$f\left(\frac{x-1}{x} + f(x)\right) = xf(x). \qquad \cdots\cdots③$$

③を②に使うと

$$f(x+xf(x)) = \left(\frac{x-1}{x} + f(x)\right) f(x + xf(x)).$$

$f(x+xf(x)) > 0$ だから

$$1 = \frac{x-1}{x} + f(x).$$

よって

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x > 1. \qquad \cdots\cdots④$$

①で $x = 1$ とおくと

$$f(1+f(y)) = yf(y+1). \qquad \cdots\cdots⑤$$

$y > 0, f(y) > 0$ より $y+1 > 1, 1+f(y) > 1$ だから，④を使うと

$$f(1+f(y)) = \frac{1}{1+f(y)},\ f(y+1) = \frac{1}{y+1}.$$

これらの式を使うと⑤は

$$\frac{1}{1+f(y)} = y \cdot \frac{1}{y+1}$$

となるから

$$f(y) = \frac{1}{y} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^+$$

を得る．
よって

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

このとき

$$f(x+f(y)) = \frac{1}{x+f(y)} = \frac{1}{x+\frac{1}{y}} = \frac{y}{xy+1} = yf(xy+1)$$

となり，①は成り立つ．

したがって，解は

- $f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

である． ■

問題 87　(Pan African 2012)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$f\left(x^2-y^2\right)=(x+y)(f(x)-f(y))$$

for all real numbers x and y.

解答

$$f\left(x^2-y^2\right)=(x+y)(f(x)-f(y)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく．

①で $x=y=0$ とおくと $f(0)=0$.

①で $y=0$ とおくと

$$f\left(x^2\right)=xf(x). \qquad \cdots\cdots ②$$

x のところを $-x$ で置き換えると

$$f\left(x^2\right)=-xf(-x). \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③から $xf(x)=-xf(-x)$.

$x\fallingdotseq 0$ のとき $f(-x)=-f(x)$．$f(0)=0$ だからこの等式は $x=0$ のときも成り立つ．

よって

$$f(-x)=-f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立ち，$f(x)$ は奇関数である．

①で y のところを $-y$ で置き換えた

$$f\left(x^2-y^2\right)=(x-y)(f(x)-f(-y))=(x-y)(f(x)+f(y))$$

から

$$f\left(x^2-y^2\right)=(x-y)(f(x)+f(y)). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤から

$$(x+y)(f(x)-f(y))=(x-y)(f(x)+f(y)).$$

展開して整理すると

$$yf(x)=xf(y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥で $y=1$ とおくと $f(x)=f(1)x$.

$a=f(1)$ とおくと

$$f(x)=ax \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

このとき，①の左辺，右辺とも $x^2 - y^2$ となり等しくなる．

　したがって，解は

　a を定数として

- $f(x) = ax \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 88　(Puerto Rico TST 2012)

Let f be a function the following properties:

1) $f(n)$ is defined for every positive integers n;

2) $f(n)$ is an integer;

3) $f(2) = 2$;

4) $f(mn) = f(m)f(n)$ for all m and n;

5) $f(m) > f(n)$ whenever $m > n$.

Prove that $f(n) = n$.

解答　4) で $m = 2, n = 1$ とおいた $f(2) = f(2)f(1)$ より $2 = 2f(1)$ すなわち $f(1) = 1$ を得る．

4) で $m = n = 2$ とおいた $f(4) = f(2)^2 = 4$ より $f(4) = 4$ を得る．

5) より $f(2) < f(3) < f(4)$ が成り立つことを使うと，$2 < f(3) < 4$. よって $f(3) = 3$.

数学的帰納法で

$$f(n) = n \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを示す．

(i) $n = 1, 2$ のとき成り立つ．

(ii) $n \leqq k$ のとき成り立つと仮定する．

k が偶数の場合，$k = 2l, l \in \mathbb{N}$ とおく．

$l + 1 \leqq 2l = k$ だから仮定より $f(l + 1) = l + 1$．また $f(2l) = 2l$ も仮定から成り立つ．

4) より

$$f(2l + 2) = f(2(l + 1)) = f(2)f(l + 1) = 2(l + 1) = 2l + 2.$$

5) より

$$f(2l) < f(2l + 1) < f(2l + 2) \qquad 2l < f(2l + 1) < 2l + 2.$$

よって $f(2l + 1) = 2l + 1$ から $f(k + 1) = k + 1$.

k が奇数の場合，$k = 2l - 1, l \in \mathbb{N}$ とおく．$l \leqq 2l - 1 = k$ だから仮定より $f(l) = l$.

4) から

$$f(2l) = f(2)f(l) = 2l \qquad f(k + 1) = k + 1.$$

いずれの場合も $f(k + 1) = k + 1$ となり $n = k + 1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) からすべての自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ．　■

問題 89　(Romania 2012)

Find all differentiable functions $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ for which $f(0) = 0$ and $f'(x^2) = f(x)$ for any $x \in [0, \infty)$

解答　$\forall x \in [0, \infty)$ に対して $f'(x) = f(\sqrt{x}) \geqq 0$.
よって $f(x)$ は $[0, \infty)$ で非減少である．
$g(x) = e^{-x}f(x), x \in [0, \infty)$ とおくと

$$g'(x) = -e^{-x}(f(x) - f'(x)).$$

$x \geqq 1$ のとき $x \geqq \sqrt{x}$ だから $f(x) \geqq f(\sqrt{x}) = f'(x)$. よって $g'(x) \leqq 0$.
$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $x \leqq \sqrt{x}$ だから $f(x) \leqq f(\sqrt{x}) = f'(x)$. よって $g'(x) \geqq 0$.
したがって $g(x) \leqq g(1)$ が成り立つ．これから $e^{-x} \leqq e - -1 f(1)$ すなわち

$$f(x) \leqq f(1)e^{x-1} \qquad \forall x \in [0, \infty). \qquad \cdots\cdots ①$$

$f'(x) = f(\sqrt{x})$ より $f'(x)$ は $(0, \infty)$ で微分可能で

$$f''(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{f(\sqrt[4]{x})}{2\sqrt{x}} \geqq 0.$$

したがって $f(x)$ は $[0, \infty)$ で凸関数である．

$\mathrm{A}(1, f(1))$ における接線の方程式は

$$l : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

で $f'(1) = f(1)$ より $y = f(1)x$ となる．
したがって

$$f(x) \geqq f(1)x \qquad \forall x \in [0, \infty) \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

$f(x)$ は $[0, \infty)$ で凸関数なので，$0 \leqq x \leqq 1$ で $y = f(x)$ のグラフは線分 OA の下側にあるから

$$f(x) \leqq \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}x = f(1)x.$$

よって

$$f(x) \leqq f(1)x \qquad \forall x \in [0, 1]. \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③より

$$f(x) = f(1)x \qquad \forall x \in [0, 1]. \qquad \cdots\cdots ④$$

$\forall x \in (0,1)$ のとき $f(x) = f(1)x, f'(x) = f(1)$ となるので，これを条件 $f'(x^2) = f(x)$ に使うと $f(1) = f(1)x$ から $f(1) = 0$.
①から

$$0 \leqq f(x) \leqq f(1)e^{x-1} = 0$$

ゆえに

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in [0, \infty).$$

これは条件をみたすから解である.

よって解は

- $f(x) = 0 \qquad \forall x \in [0, \infty)$

である. ■

問題 90　(Poland 2012)

Find all functions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$g(f(x) - y) = f(g(y)) + x$$

解答

$$g(f(x) - y) = f(g(y)) + x \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

①で $y = 0$ とおくと

$$g(f(x)) = f(g(0)) + x. \qquad \cdots\cdots②$$

①で $y = f(x)$ とおくと

$$g(0) = f(g(f(x))) + x. \qquad \cdots\cdots③$$

③で②を使うと

$$g(0) = f(f(g(0)) + x) + x.$$

この式で x のところを $x - f(g(0))$ で置き換えた

$$g(0) = f(x) + x - f(g(0))$$

から

$$f(x) = -x + f(g(0)) + g(0)$$

すなわち

$$f(x) = -x + c \qquad \cdots\cdots④$$

とおける．

④を用いると①は

$$g(-x - y + c) = -g(y) + x + c \qquad \cdots\cdots⑤$$

と書き直せる．

⑤で $y = c$ とおくと $g(-x) = -g(c) + c + x$ となるから

$$g(x) = -x + d \qquad \cdots\cdots⑥$$

とおける．

これを⑤に代入すると

$$-(-x - y + c) + d = -(-y + d) + c + x \qquad x + y - c + d = x + y + c - d.$$

よって，$c=d$ となり
$$f(x)=g(x)=-x+c.$$

このとき
$$\begin{aligned}g(f(x)-y)&=g(-x+c-y)=-(-x+c-y)+c=x+y,\\f(g(y))+x&=f(-y+c)+x=-(-y+c)+c+x=x+y\end{aligned}$$

だから，①は成り立つ．

よって，解は

c を定数として

- $f(x)=-x+c,\ g(x)=-x+c \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 91　(Singapore 2012)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$(x+y)(f(x)-f(y)) = (x-y)f(x+y)$$

for all x, y that belongs to $\mathbb{R}$.

解答

$$(x+y)(f(x)-f(y)) = (x-y)f(x+y) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

$x+y=X, x-y=Y$ とおくと，$x=\dfrac{X+Y}{2}, y=\dfrac{X-Y}{2}$ となる．X, Y を用いて①を書き直すと

$$X\left(f\left(\frac{X+Y}{2}\right)-f\left(\frac{X-Y}{2}\right)\right) = Yf(X)$$

となる．X, Y を x, y に書き直すと

$$x\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) = yf(x). \qquad \cdots\cdots②$$

②で $y=4$ とおくと

$$x\left(f\left(\frac{x}{2}+2\right)-f\left(\frac{x}{2}-2\right)\right) = 4f(x). \qquad \cdots\cdots③$$

②で y のところを $y+2$ で置き換えると

$$x\left(f\left(\frac{x+y+2}{2}\right)-f\left(\frac{x-y-2}{2}\right)\right) = (y+2)f(x).$$

この式で $x=2$ とおくと

$$f\left(\frac{y}{2}+2\right)-f\left(\frac{-y}{2}\right) = \frac{y+2}{2}f(2).$$

この式 $y=x$ でとおくと

$$f\left(\frac{x}{2}+2\right)-f\left(\frac{-x}{2}\right) = \frac{x+2}{2}f(2). \qquad \cdots\cdots④$$

②で y のところを $y-2$ で置き換えると

$$x\left(f\left(\frac{x+y-2}{2}\right)-f\left(\frac{x-y+2}{2}\right)\right) = (y-2)f(x).$$

この式で $x=-2$ とおくと

$$f\left(\frac{y}{2}-2\right)-f\left(\frac{-y}{2}\right) = \frac{y-2}{-2}f(-2).$$

この式 $y=x$ でとおくと

$$f\left(\frac{x}{2}-2\right)-f\left(\frac{-x}{2}\right)=\frac{x-2}{-2}f(-2). \qquad \cdots\cdots ⑤$$

③ $-$ ④ $\times x+$ ⑤ $\times x$ から

$$0=4f8x)-\frac{x(x+2)}{2}f(2)+\frac{x(x-2)}{-2}f(-2).$$

変形すると

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{f(2)}{8}(x^2+2x)+\frac{f(-2)}{8}(x^2-2x)\\ &=\frac{f(2)+f(-2)}{8}x^2+\frac{f(2)-f(-2)}{8}x. \end{aligned}$$

よって

$$f(x)=ax^2+bx \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

　このとき

$$\begin{aligned} (x+y)(f(x)-f(y))&=(x+y)\left(a(x^2-y^2+b(x-y)\right)\\ &=(x+y)(x-y)\left(a(x+y)+b\right),\\ (x-y)f(x+y)&=(x-y)\left(a(x+y)^2+b(x+y)\right)\\ &=(x-y)(x+y)\left(a(x+y)+b\right) \end{aligned}$$

となるから，①は成り立つ．

　よって解は

　a,b を定数として

- $f(x)=ax^2+bx \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 92　(South Africa 2012)

Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(km) + f(kn) - f(k)f(mn) \geqq 1$$

for all $k, m, n \in \mathbb{N}$.

解答

$$f(km) + f(kn) - f(k)f(mn) \geqq 1 \qquad \cdots\cdots①$$

とおく.

①で $k = m = n = 1$ とおいた $2f(1) - f(1)^2 \geqq 1$ から $(f(1) - 1)^2 \leqq 0$.
よって $f(1) = 1$.

①で $m = n = 1$ とおいた $2f(k) - f(k)f(1) \geqq 1$ から

$$f(k) \geqq 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad \cdots\cdots②$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ に対して $m = n = k$ とおくと

$$2f\left(k^2\right) - f(k)f\left(k^2\right) \geqq 1 \qquad f\left(k^2\right)(2 - f(k)) \geqq 1.$$

$f\left(k^2\right) > 0$ だから $2 - f(k) > 0$ すなわち

$$f(k) < 2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad \cdots\cdots③$$

①で $m = 1, n = k$ とおいた

$$f(k) + f\left(k^2\right) - f(k)^2 \geqq 1$$

から

$$f\left(k^2\right) - f(k) \geqq (f(k) - 1)^2. \qquad \cdots\cdots④$$

④から

$$f\left(k^2\right) \geqq f(k) \qquad \cdots\cdots④'$$

がいえる.

④, ④$'$ で k のところを k^{2^l} で置き換えると

$$f\left(k^{2^{l+1}}\right) - f\left(k^{2^l}\right) \geqq \left(f\left(k^{2^l}\right) - 1\right)^2, \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$f\left(k^{2^{l+1}}\right) \geqq f\left(k^{2^l}\right). \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑥で $l=0,1,\ldots,r-1$ とおくと

$$f\left(k^2\right) \geqq f(k), f\left(k^{2^2}\right) \geqq f\left(k^2\right) \geqq f(k), \ldots\ldots, f\left(k^{2^r}\right) \geqq f\left(k^{2^{r-1}}\right) \geqq \cdots \geqq f(k).$$

これから，$f\left(k^{2^l}\right)-1 \geqq f(k)-1 \underset{②}{\geqq} 0.$
よって⑤より

$$f\left(k^{2^{l+1}}\right)-f\left(k^{2^l}\right) \geqq (f(k)-1)^2.$$

$l=0,1,\ldots,r-1$ とおいた不等式の辺々を加えると

$$f\left(k^{2^r}\right)-f(k) \geqq r(f(k)-1)^2. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

$f(k)-1>0$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在したとすると $\lim_{r\to\infty} r(f(k)-1)^2=\infty$ より $\lim_{r\to\infty} f\left(k^{2^r}\right)=\infty$ となり，$f\left(k^{2^r}\right)<2$ に矛盾する．
したがって，$f(k)-1>0$ となる $k \in \mathbb{N}$ は存在しないから②より

$$f(k)=1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

このとき①は成り立つ．

よって解は
- $f(k)=1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

である． ■

問題 93 (Spain 2012)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$(x-2)f(y)+f(y+2f(x))=f(x+yf(x))$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$.

解答

$$(x-2)f(y)+f(y+2f(x))=f(x+yf(x)) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく.

①で $x=0$ とおくと

$$-2f(y)+f(y+2f(0))=f(yf(0)). \qquad \cdots\cdots ②$$

$f(0)=0$ のとき②から $-2f(y)+f(y)=f(0)$ すなわち $f(y)=0$.
よって

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たすから解である.

以下,$f(0)\fallingdotseq 0$ とする.

①で $y=0$ とおくと

$$(x-2)f(0)+f(2f(x))=f(x) \qquad \cdots\cdots ③$$

$f(p)=f(q)=r$ とする.
③で $x=p$ とおくと

$$(p-2)f(0)+f(2f(p))=f(p) \qquad (p-2)f(0)+f(2r)=f(r).$$

③で $x=q$ とおくと

$$(q-2)f(0)+f(2f(q))=f(q) \qquad (q-2)f(0)+f(2r)=f(r).$$

よって $(p-2)f(0)=(q-2)f(0)$.$f(0)\fallingdotseq 0$ だから $p=q$ となり,f は単射 (injective) である.

①で $x=2$ とおくと $f(y+2f(2))=f(2+yf(2))$.
f は単射 (injective) だから

$$y+2f(2)=2+yf(2) \qquad y-2=(y-2)f(2).$$

この式で,$y=3$ とおくと $f(2)=1$.

$\forall t \neq 2$ に対して，f は単射 (injective) だから $f(t) \neq 1$ となるので $a = \dfrac{t-2f(t)}{1-f(t)}$ とおくと，$a+2f(t) = t+af(t)$ で，①で $x=t, y=a$ とおくと

$$(t-2)f(a)+f(a+2f(t)) = f(t+af(t)) \qquad (t-2)f(a) = 0.$$

$t \neq 2$ だから $f(a)=0$.

①で $x=a, y=2$ とおくと

$$(a-2)f(2)+f(2+2f(a)) = f(a+2f(a)) \qquad (a-2)\cdot 1+f(2) = f(a) \qquad (a-2)+1=0.$$

よって $a=1$ となり

$$\frac{t-2f(t)}{1-f(t)} = 1 \qquad t-2f(t) = 1-f(t)$$

から

$$f(t) = t-1 \qquad \forall t \neq 2.$$

$f(2)=1$ よりこの等式は $t=2$ のときも成り立つ．

よって

$$f(x) = x-1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき

$$\begin{aligned}
(x-2)f(y)+f(y+2f(x)) &= (x-2)(y-1)+y+2f(x)-1 \\
&= (x-2)(y-1)+y+2(x-1)-1 \\
&= xy+x-y-1 \\
f(x+yf(x)) &= x+yf(x)-1 \\
&= x+y(x-1)-1 \\
&= xy+x-y-1
\end{aligned}$$

となり，①は成り立つ．

したがって，解は

- $f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

と

- $f(x) = x-1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である． ■

問題 94　(Turkey 2012)

Find all non-decreasing functions from real numbers to itself such that for all real numbers x, y

$$f\left(f\left(x^2\right)+y+f(y)\right)=x^2+2f(y)$$

holds

解答

$$f\left(f\left(x^2\right)+y+f(y)\right)=x^2+2f(y) \qquad \cdots\cdots①$$

とおく．

$X=x^2 \geqq 0$ とおくと①は

$$f(f(X)+y+f(y))=X+2f(y) \qquad \cdots\cdots②$$

となる．$a=f(0)$ とおく．

②で $X=0$ とおくと

$$f(a+y+f(y))=2f(y). \qquad \cdots\cdots③$$

③で $y=0$ とおくと $f(2a)=2a$.

③で $y=2a$ とおくと $f(5a)=4a$.

($a \geqq 0$ でないと，②で $X=2a$ とおけないから $f(3a)=4a$ はでないことに注意してほしい．)

②から f は $[0,\infty)$ で単射 (injective) であることが示せる．

$f(p)=f(q)=r$, $p,q \geqq 0$ とする．

②で $X=p,q$ とおくと

$$f(f(p)+y+f(y))=p+2f(y) \qquad f(r+y+f(y))=p+2f(y),$$

$$f(f(q)+y+f(y))=q+2f(y) \qquad f(r+y+f(y))=q+2f(y).$$

よって $p=q$ を得る．

(1) $a<0$ の場合

②で $y=0$ とおいた $f(f(X)+f(0))=X+2f(0)$ から

$$f(f(X)+a)=X+2a.$$

$\forall t \in [2a, \infty)$ に対して $X = t - 2a\,(\geqq 0)$ とおくと $f(f(X)+a) = t$.
よって $[2a, \infty) \in Range(f)$.
$a < 0$ だから $f(b) = 0$ となる $b \in \mathbb{R}$ が存在する.
$b < 0$ だと f は非減少だから $0 = f(b) \leqq f(0) =$ となり $a < 0$ に矛盾する.
よって $b \geqq 0$ となる.
②で $X = b, y = b$ とおくと

$$f(f(b) + b + f(b)) = b + 2f(b) \qquad f(b) = b \qquad 0 = b.$$

よって $f(0) = 0$ から $a = 0$ となり $a < 0$ に矛盾する.

(2) $a \geqq 0$ の場合
②で $X = 2a, y = 0$ とおくと

$$f(f(2a) + f(0)) = 2a + 2f(0) \qquad f(2a + a) = 2a + 2a \qquad f(3a) = 4a.$$

よって，$f(5a) = f(3a)(= 4a)$ で，f は $[0, \infty)$ で単射 (injective) だから $5a = 3a$ から $a = 0$ を得る.
したがって $f(0) = 0$.
②で $y = 0$ とおくと

$$f(f(X)) = X. \qquad \cdots\cdots ④$$

f は $[0, \infty)$ で狭義の単調増加であることを示す.
$X > Y\,(\geqq 0)$ とすると f は非減少だから $f(X) \geqq f(Y)$.
$f(X) = f(Y)$ となったとすると，f は $[0, \infty)$ で単射 (injective) だから $X = Y$ となり $X > Y$ に矛盾する.
よって $f(X) > f(Y)$ だから，f は $[0, \infty)$ で狭義の単調増加である.
$X \geqq 0$ のとき，$f(X) > X$ とすると f は非減少だから $f(f(X)) \geqq f(X)$.
④を使うと $X \geqq f(X)$ となり $f(X) > X$ に矛盾する.
同様にして $X \geqq 0$ のとき，$f(X) < X$ とすると f は非減少だから $f(f(X)) \leqq f(X)$.
④を使うと $X \leqq f(X)$ となり $f(X) < X$ に矛盾する.
したがって，$\forall X \geqq 0$ に対して $f(X) = X$ となるから

$$f(x) = x \qquad \forall x \geqq 0.$$

$x < 0$ のとき f は非減少だから $f(x) \leqq f(0) = 0$.

$X \geqq 0$ のとき $f(X) = X$ であったから，②は

$$f(X + y + f(y)) = X + 2f(y) \qquad \forall X \geqq 0, \forall y \in \mathbb{R} \qquad \cdots\cdots ②'$$

と書き直すことができる．

②$'$ で $X=-2f(x)\,(\geqq 0), y=x$ とおくと

$$f(x-f(x))=0. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$f(d)=0$ となる $d<0$ があったとする．

②$'$ で $y=d$ とおくと $f(X+d)=x>0=f(0)$ から

$$f(X+d)>f(0). \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$X+d\leqq 0$ とすると，f は非減少だから $f(X+d)\leqq f(0)$ となり⑥に矛盾する．

よって，$X+d>0$ でこのとき $f(X+d)=X=f(X)$ から $f(X+d)=f(X)$.

f は $[0,\infty)$ で単射 (injective) なので $X+d=X$ から $d=0$ を得る．

これは $d<0$ に矛盾する．したがって，$f(d)=0$ となる $d<0$ は存在しない．

f は $[0,\infty)$ で狭義の単調増加だから $f(d)=0$ となる $d>0$ も存在しない．

よって

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$$

を得る．これを⑤に使うと $x-f(x)=0$ から

$$f(x)=x \qquad \forall x<0.$$

以上のことから

$$f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

これは①を満たす．

したがって，解は

- $f(x)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 95　(USA TST 2012)

Determine all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for every pair of real numbers x and y,

$$f\left(x+y^2\right)=f(x)+|yf(y)|.$$

holds

解答

$$f\left(x+y^2\right)=f(x)+|yf(y)| \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく.

①で $x=0$ とおくと

$$f\left(y^2\right)=f(0)+|yf(y)|. \qquad \cdots\cdots ②$$

①で $x=-y^2$ とおくと

$$f(0)=f\left(-y^2\right)+|yf(y)|. \qquad \cdots\cdots ③$$

② + ③ から

$$f\left(y^2\right)=f\left(-y^2\right)+2|yf(y)|. \qquad \cdots\cdots ④$$

④で $y=-1$ とおくと，$f(-1)=f(1)-2|f(1)|\leqq|f(1)|-|f(1)|=0$ から

$$f(-1)\leqq 0. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

③で $y=-1$ とおくと

$$f(0)=f(-1)+|f(-1)| \underset{⑤}{=} f(-1)-f(-1)=0.$$

②で $f(0)=0$ を使うと，$f\left(y^2\right)=|yf(y)|\geqq 0$.
③で $f(0)=0$ を使うと，$f\left(-y^2\right)=-|yf(y)|\leqq 0$.
よって

$$f(x)\geqq 0 \qquad \forall x\geqq 0,\quad f(x)\leqq 0 \qquad \forall x\leqq 0. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

①，⑥から

$y\geqq 0$ のとき

$$f\left(x+y^2\right)=f(x)+\left|y\underbrace{f(y)}_{\geqq 0}\right|=f(x)+yf(y).$$

$y \leqq 0$ のとき

$$f\left(x+y^2\right)=f(x)+\left|y\underbrace{f(y)}_{\leqq 0}\right|=f(x)+yf(y).$$

よって

$$f\left(x+y^2\right)=f(x)+yf(y). \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑦で y のところを $-y$ で置き換えると

$$f\left(x+y^2\right)=f(x)-yf(-y). \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑦'$$

⑦, ⑦′ から $yf(y)=-yf(-y)$.$y \fallingdotseq 0$ のとき $f(-y)=-f(y)$.
$f(0)=0$ だからこの等式は $y=0$ のときも成り立つ．
よって

$$f(-x)=-f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

となり，$f(x)$ は奇関数である．
　⑦で $x=0$ とおいた $f\left(y^2\right)=f(0)+yf(y)$ から

$$f\left(y^2\right)=yf(y) \qquad \forall y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑧を使って⑦を書き直すと

$$f\left(x+y^2\right)=f(x)+f\left(y^2\right). \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

したがって

$$f\left(x+y\right)=f(x)+f\left(y\right). \qquad \forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}_{\geq 0}. \qquad \cdots\cdots ⑨$$

が成り立つ．
　$y \geqq 0$ のとき，$f(x-y)=f(x)+f(-y)(=f(x)-f(y))$ が成り立つことを示す．
　⑨で x のところを $x-y$ で置き換えると

$$f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y) \qquad f(x)=f(x-y)+f(y).$$

$f(x)$ は奇関数だから

$$f(x-y)=f(x)-f(y)=f(x)+f(-y)$$

となり

$$f\left(x+y\right)=f(x)+f\left(y\right). \qquad \forall x\in\mathbb{R},\forall y\leqq 0. \qquad \cdots\cdots ⑨'$$

⑨，⑨$'$ より

$$f\left(x+y\right)=f(x)+f\left(y\right). \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ⑩$$

$\forall x,h\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して，⑩,⑥より

$$f(x+h)-f(x)=f(h)\geqq 0 \qquad f(x+h)\geqq f(x).$$

$f(x)$ は非減少関数で，コーシーの関数方程式を満たすから，$f(x)=kx$ の形となる．
⑥から $k\geqq 0$ だから

$$f(x)=kx \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

このとき

$$f\left(x+y^2\right)=k\left(x+y^2\right)=kx+ky^2=\left|ky^2\right|=f(x)+|yf(y)|$$

となり，①を満たす．

よって解は

$k\geqq 0$ を定数として

- $f(x)=kx \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

である． ■

問題 96　(Vietnam 2012)

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that:

(a) For every real number a there exist real number $b : f(b)=a$

(b) If $x>y$ then $f(x)>f(y)$

(c) $f\left(f(x)\right)=f(x)+12x.$

解答　f は単射 (injective) であることを示す．$f(p)=f(q)=r$ とする．
(c) で $x=p$ とおくと

$$f\left(f(p)\right)=f(p)+12p \qquad f(p)=r+12p.$$

(c) で $x=q$ とおくと

$$f\left(f(q)\right)=f(q)+12q \qquad f(q)=r+12q.$$

よって $r+12p=r+12q$ から $p=q$ となり，f は単射 (injective) である．
(a) とあわせて f は全単射 (bijective) である．

f は全射 (surjective) だから，$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)=t$ を満たす $x\in\mathbb{R}$ がある．
(c) から

$$f\left(f(x)\right)=f(x)+12x \qquad f(t)=t+12x \qquad x=\frac{f(t)-t}{12}.$$

これを $f(x)=t$ に代入すると

$$f\left(\frac{f(t)-t}{12}\right)=t \qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

よって

$$f\left(\frac{f(x)-x}{12}\right)=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \cdots\cdots ①$$

(c) で $x=0$ とおくと $f(f(0))=f(0)$. f は単射 (injective) だから $f(0)=0$.

(b) から f は増加関数だから

$x>0$ のとき　$f(x)>f(0)=0, x<0$ のとき　$f(x)<f(0)=0.$

よって

$x>0$ のとき　$f(x)>0, x<0$ のとき　$f(x)<0.$ $\cdots\cdots ②$

f は全単射 (bijective) だから f の逆関数 f^{-1} が存在する．

$a_1=x, a_2=\dfrac{f(x)-x}{12}$ とおくと，①から $f(a_2)=a_1\ \left(a_2=f^{-1}(a_1)\right).$

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = x,$$
$$a_{n+1} = f^{-1}(a_n)\ (n = 1, 2, \dots)$$

で定義する．

(1) $x > 0$ の場合

$a_1 > 0$ で②から $f(a_1) > 0$.
①で $x = a_1$ とおくと $f\left(\dfrac{f(a_1) - a_1}{12}\right) = a_1$.

$f(a_1) - a_1 \leqq 0$ とすると，f は増加関数だから

$$a_1 = f\left(\frac{f(a_1) - a_1}{12}\right) \leqq f(0) = 0.$$

これは $a_1 > 0$ に矛盾する．
よって $f(a_1) > a_1$ すなわち $f(a_1) > a_1 = f(a_2)$.
$a_1 \leqq a_2$ とすると，f は増加関数だから $f(a_1 \leqq f(a_2)$ となり $f(a_1) > f(a_2)$ に矛盾する．よって $a_1 > a_2$.
次に

$$f(a_2) = a_1, a_1 > a_2, f\left(\frac{a_1 - a_2}{12}\right) = f\left(\frac{f(a_2) - a_2}{12}\right) = a_2$$

において，$\dfrac{a_1 - a_2}{12} \geqq a_2$ とすると，f は増加関数だから

$$a_2 = f\left(\frac{a_1 - a_2}{12}\right) \geqq f(a_2) = a_1$$

となり $a_2 < a_1$ に矛盾する．

よって，$\dfrac{a_1 - a_2}{12} < a_2$ から $a_1 < 13a_2$.

$0 < a_1 < 13a_2$ から $a_2 > 0$ で $1 < \dfrac{a_1}{a_2} < 13$ が成り立つ．

$\forall n \in \mathbb{N}$ について

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < 13,\ a_n > 0,\ a_{n+1} > 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき成り立つ．

(ii) $n=k\,(\geqq 1)$ のとき成り立つと仮定すると

$$1<\frac{a_k}{a_{k+1}}<13,\ a_k>0,\ a_{k+1}>0.$$

$a_{k+1}>0$ で②から $f(a_{k+1})>0$.

①で $x=a_{k+1}$ とおくと $f\left(\dfrac{f(a_{k+1})-a_{k+1}}{12}\right)=a_{k+1}$.

$f(a_{k+1})-a_{k+1}\leqq 0$ とすると，f は増加関数だから

$$a_{k+1}=f\left(\frac{f(a_{k+1})-a_{k+1}}{12}\right)\leqq f(0)=0.$$

これは $a_{k+1}>0$ に矛盾する．

よって $f(a_{k+1})>a_{k+1}$ すなわち $f(a_{k+1})>a_{k+1}=f(a_{k+2})$.

$a_{k+1}\leqq a_{k+2}$ とすると，f は増加関数だから $f(a_{k+1}\leqq f(a_{k+2})$ となり $f(a_{k+1})>f(a_{k+2})$ に矛盾する．よって $a_{k+1}>a_{k+2}$.

次に

$$f(a_{k+2})=a_{k+1},a_{k+1}>a_{k+2},$$
$$f\left(\frac{a_{k+1}-a_{k+2}}{12}\right)=f\left(\frac{f(a_{k+2})-a_{k+2}}{12}\right)=a_{k+2}$$

において，$\dfrac{a_{k+1}-a_{k+2}}{12}\geqq a_2$ とすると，f は増加関数だから

$$a_{k+2}=f\left(\frac{a_{k+1}-a_{k+2}}{12}\right)\geqq f(a_{k+2})=a_{k+1}$$

となり $a_{k+2}<a_{k+1}$ に矛盾する．

よって，$\dfrac{a_{k+1}-a_{k+2}}{12}<a_{k+2}$ から $a_{k+1}<13a_{k+2}$.

$0<a_{k+1}<13a_{k+2}$ から $a_{k+2}>0$ で $1<\dfrac{a_{k+1}}{a_{k+2}}<13$ が成り立つから，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) よりすべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ．

(c) で $x=a_{n+2}$ とおくと

$$f\left(f(a_{n+2})\right)=f(a_{n+2})+12a_{n+2}\qquad a_n=a_{n+1}+12a_{n+2}$$

から

$$a_{n+2}=\frac{1}{12}(-a_{n+1}+a_n).\qquad\cdots\cdots④$$

④を変形すると

$$a_{n+2}-\frac{1}{4}a_{n+1}=-\frac{1}{3}\left(a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n\right),$$

$$a_{n+2}+\frac{1}{3}a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n\right).$$

よって

$$a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n=\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$$a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n=\left(a_2+\frac{1}{3}a_1\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥ − ⑤ から

$$\frac{7}{12}a_n=\left(a_2+\frac{1}{3}a_1\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

$$\frac{7}{12}a_{n+1}=\left(a_2+\frac{1}{3}a_1\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n}-\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

これらの等式を使うと

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\frac{\left(a_2+\frac{1}{3}a_1\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{\left(a_2+\frac{1}{3}a_1\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n}-\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}}\\&=\frac{-3\left(a_2+\frac{1}{3}a_1\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}+3\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)}{\left(a_2+\frac{1}{3}a_1\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^{n}-\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)}.\end{aligned}$$

$a_2-\frac{1}{4}a_1 \fallingdotseq 0$ とすると，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$ だから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{-3\left(a_2+\frac{1}{3}a_1\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}+3\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)}{\left(a_2+\frac{1}{3}a_1\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^{n}-\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)}\\&=\frac{3\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)}{-\left(a_2-\frac{1}{4}a_1\right)}\\&=-3.\end{aligned}$$

これは③に矛盾する．

よって，$\boldsymbol{a_2 - \frac{1}{4}a_1 = 0}$ で $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 4$ となる**.**

$a_2 = \dfrac{1}{4}a_1$ から

$$f^{-1}(a_1) = \frac{1}{4}a_1.$$

$a_1 = x\,(>0)$ は任意の正の数だから

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x \qquad \forall x > 0.$$

よって

$$f(x) = 4x \qquad \forall x > 0.$$

(2) $x < 0$ の場合も (1) と同様にして

$$f(x) = 4x \qquad \forall x < 0.$$

(1)，(2) と $f(0) = 0$ から

$$f(x) = 4x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

このとき，(a)，(b)，(c) を満たす.

よって解は

- $f(x) = 4x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

である. ■