初等的な不等式 I

柳田 五夫

まえがき

ここでは，初等的な不等式を証明するために必要となる基本的な不等式と重要なテクニックを扱う．有名なものとして，相加平均と相乗平均に関する不等式やコーシー・シュワルツの不等式が当然含まれるが，それ以外にも有用な不等式もある．また，あまりなじみがない．Schur の不等式， Karamata の不等式，Muirhead の定理等についても触れている．これらは，いろいろな不等式を扱うとき，強力な武器になるものである．なお．本書では次のものを扱う．

(1) 並べ替えの不等式（The Rearrangement Inequality）
(2) チェビシェフの不等式（Chebyshev's Inequality）
(3) 相加平均と相乗平均の不等式（The Arithmetic Mean Geometric Mean Inequality）
　一般的によく知られている相加平均と相乗平均の不等式と重みつきの相加平均と相乗平均の不等式を扱う．
(4) 凸関数
　Karamata の不等式を証明するために必要となる凸関数の性質と，Jensen の不等式を扱う．
(5) コーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality)
(6) ヘルダーの不等式 (Hölder's Inequality)
(7) Schur の不等式
(8) Karamata の不等式
　Karamat の不等式の応用も扱う．
(9) Muirhead の定理

扱った問題は，大学入試問題や国際数学オリンピック問題等で，専門的な予備知識は必要としない．

2012 年 8 月

著者

目次

1 練習問題　1 4

1.1 基本的な恒等式・不等式 4

1.2 相加平均・相乗平均の不等式 16

1.3 コーシー・シュワルツの不等式 26

1.4 チェビシェフの不等式 34

1.5 凸関数 42

1.6 累次平均 46

2 補助定理 1(コーシー・シュワルツの不等式の変形) 51

3 補助定理 2(ヘルダーの不等式の変形) 67

4 例題 88

5 和の記号 $\sum\limits_{cyclic}$ と $\sum\limits_{sym}$ 等いくつかの定義 99

6 練習問題　2 104

7 並べ替えの不等式（The Rearrangement Inequality） 380

8 並べ替えの不等式の拡張 383

9 チェビシェフの不等式（Chebyshev’s Inequality） 388

10 相加平均と相乗平均の不等式 (AM-GM Inequality) 390

11 凸関数（Convex functions） 392

12 コーシ・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality) 399

13 ヘルダーの不等式 (Hölder’s Inequality) 401

14 Schur の不等式 403

15 3 変数の対称不等式 412

16 Karamata の不等式 (Karamat's Majorization Inequality) 413
16.1 アーベルの公式 (Abel Formula) 413
16.2 Karamata の不等式の証明 418
16.3 絶対値記号を含む不等式 1 422
16.4 絶対値記号を含む不等式 2 439
16.5 Karamata の不等式の実践的な使い方 449
16.6 karamat の不等式の練習問題 462
16.7 Popoviciu の不等式の拡張 1 476
16.8 Popoviciu の不等式の拡張 2 483
16.9 凸関数の不等式 492
16.10 Karamata の不等式の応用 497

17 Muirhead の定理 503
17.1 Muirhead の定理の証明 503
17.2 $p - mean$ の性質 509

1　練習問題　1

1.1　基本的な恒等式・不等式

ここでは，不等式の証明問題を解くときに必要となる基本的な恒等式や不等式を扱っている．

1．次の等式を証明せよ．

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc.$$

解　右辺を因数分解する．

$$\begin{aligned}(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc &= \{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\} - abc \\ &= (b+c)a^2 + \{(b+c)^2+bc\}a + (b+c)bc - abc \\ &= (b+c)a^2 + (b+c)^2 a + (b+c)bc \\ &= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\ &= (a+b)(b+c)(c+a).\end{aligned}$$

よって，$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc.$ ■

2．次の等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

解　$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ を使って左辺を因数分解する．

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc \\ &= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) - 3abc \\ &= (a+b+c)\left\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right\} - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)\left\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\right\} \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).\end{aligned}$$

よって，$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$ ■

[注]　右辺を展開して，左辺に等しくなることを示してもよい．

3． 次の等式を証明せよ．

$$(a+b+c+d)^2=(a-b+c-d)^2+4(ab+bc+cd+da).$$

解　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ を使う．

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)^2-(a-b+c-d)^2\\&=\{(a+b+c+d)+(a-b+c-d)\}\{(a+b+c+d)-(a-b+c-d)\}\\&=4(a+c)(b+d)=4(ab+bc+cd+da).\end{aligned}$$

よって，$(a+b+c+d)^2=(a-b+c-d)^2+4(ab+bc+cd+da)$. ■

[注]　この等式を使うと，次の不等式が成り立つことがわかる．

「a, b, c, d が実数のとき，$(a+b+c+d)^2 \geqq 4(ab+bc+cd+da)$ が成り立つ．」

4． 次の等式を証明せよ．

(1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$.

(2)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

$=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$.

(3)　$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2=\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

（ラグランジュの恒等式）

解 (1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$$\begin{aligned}&=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2\\&=(ay-bx)^2.\end{aligned}$$

よって，$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$.

(2)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$\begin{aligned}&=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2\\&\qquad-a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-2abxy-2bcyz-2cazx\\&=a^2y^2-2abxy+b^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+c^2x^2-2cazx+a^2z^2\\&=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.\end{aligned}$$

よって

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.$

(3) (i) $n=2$ のとき，(1) から成り立つ．

(ii) n のとき成り立つと仮定して，$n+1$ のときを考えると

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_ib_i\right)^2\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2+a_{n+1}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2+b_{n+1}^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i+a_{n+1}b_{n+1}\right)^2\\
&=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2}\\
&\qquad+b_{n+1}^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)+a_{n+1}^2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-2a_{n+1}b_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\\
&=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(b_{n+1}^2a_i^2-2a_{n+1}b_{n+1}a_ib_i+a_{n+1}^2b_i^2\right)\\
&=\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2+\sum_{1\leqq i<n+1}(a_ib_{n+1}-a_{n+1}b_i)^2\\
&=\sum_{1\leqq i<j\leqq n+1}(a_ib_j-a_jb_i)^2
\end{aligned}
$$

となり，$n+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より 2 以上の自然数 n に対して等式は成り立つ． ■

［注］　この等式をつかうと，コーシー・シュワルツの不等式が証明できる．

「 $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ が実数のとき，

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

が成り立つ.」 これは

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2=\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqq 0$$

から成り立つ．

5． 次の等式を証明せよ．

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a).$$

解　$P=(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$ とおくと，P は 3 次の同次対称式である．$a=-b$ とおくと $P=0$ となるから，P は $a+b$ を因数にもつ．同様にして，P は $b+c$, $c+a$ を因数にもつから，k を定数として

$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3) = k(a+b)(b+c)(c+a)$$

とおける．$a=b=c=1$ とおくと，$24=8k$ から $k=3$ を得る．
したがって，$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)$ すなわち

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

が成り立つ． ■

[注]　基本問題 1 と基本問題 5 を使うと

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc\\ &= a^3+b^3+c^3+3\{ab(a+b)+abc+bc(b+c)+abc+ca(c+a)+abc\}\\ &\quad -3abc\\ &= a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3bc(b+c)+3ca(c+a)+6abc\end{aligned}$$

と変形できる．$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ であることを用いると，次のようにまとめることができる．

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\\ &= a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3bc(b+c)+3ca(c+a)+6abc\\ &= a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc\end{aligned}$$

6． 次の等式を証明せよ．

$$(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+24abc = (a+b+c)^3.$$

解 1　左辺を展開する．

$$
\begin{aligned}
&(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+24abc\\
&=\{a+(b-c)\}^3-\{a-(b+c)\}^3+\{a-(b-c)\}^3+24abc\\
&=a^3+3(b-c)a^2\underset{\sim\sim\sim}{+3(b-c)^2a}+(b-c)^3\\
&\quad -a^3+3(b+c)a^2\underset{\sim\sim\sim}{-3(b+c)^2a}+(b+c)^3\\
&\quad\quad +a^3-3(b-c)a^2\underset{\sim\sim\sim}{+3(b-c)^2a}-(b-c)^3\underset{\sim\sim}{+24abc}\\
&=a^3+3(b+c)a^2\underset{\sim\sim\sim}{+3(b+c)^2a}+(b+c)^3=(a+b+c)^3.
\end{aligned}
$$

■

解 2　左辺は a, b, c に関する 3 次の同次対称式であるから

$$
\begin{aligned}
&(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+24abc\\
&=l(a^3+b^3+c^3)+m(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+nabc
\end{aligned}
$$

とおける．

$a=1,\ b=0,\ c=0$ を代入すると　$l=1$　……①

$a=1,\ b=1,\ c=0$ を代入すると　$2l+2m=8$　……②

$a=1,\ b=1,\ c=1$ を代入すると　$3l+6m+n=27$　……③

①，②，③から　$l=1,\ m=3,\ n=6$．よって

$$
\begin{aligned}
&(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+24abc\\
&=a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3bc(b+c)+3ca(c+a)+6abc\\
&=(a+b+c)^3 \qquad \text{(基本問題 5 の [注] 参照)}
\end{aligned}
$$

から

$$(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+24abc=(a+b+c)^3.$$

■

解 3　$(A+B+C)^3=A^3+B^3+C^3+3(A+B)(B+C)(C+A)$ において，$A=a+b-c,\ B=b+c-a,\ C=c+a-b$ とおくと

$$A+B+C=a+b+c,\ A+B=2b,\ B+C=2c,\ C+A=2a$$

となるから

$$(a+b+c)^3=(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+3\cdot 2b\cdot 2c\cdot 2a$$

すなわち

$$(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+24abc=(a+b+c)^3.$$

■

7．次の不等式を証明せよ．ただし，文字はすべて実数とする．

(1)　$a^2+b^2 \geqq 2ab$.

(2)　$2(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2$.

(3)　$ab \leqq \dfrac{(a+b)^2}{4}$.

(4)　$4(a^2+ab+b^2) \geqq 3(a+b)^2$.

解 (1)　$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geqq 0$ より $a^2+b^2 \geqq 2ab$.

(2)　$2(a^2+b^2)-(a+b)^2=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geqq 0$ より

$$2(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2.$$

(3)　$\dfrac{(a+b)^2}{4}-ab=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}=\dfrac{(a-b)^2}{4} \geqq 0$ より

$$ab \leqq \frac{(a+b)^2}{4}.$$

(4)　$4(a^2+ab+b^2)-3(a+b)^2=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \geqq 0$ より

$$4(a^2+ab+b^2) \geqq 3(a+b)^2.$$

■

［注］　ここで，“次の不等式を証明せよ．”というのは，“任意の実数 a, b に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．”という意味である．

8．次の不等式を証明せよ．ただし，文字はすべて実数とする．

(1)　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$.

(2)　$(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$.

(3)　$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$.

(4)　$(ab+bc+ca)^2 \geqq 3abc(a+b+c)$.

(5)　$a^4+b^4+c^4 \geqq abc(a+b+c)$.

解 (1)　基本問題 7(1) より，x, y が実数のとき，$x^2+y^2 \geqq 2xy$ が成り立つから

$$a^2+b^2 \geqq 2ab, \quad b^2+c^2 \geqq 2bc, \quad c^2+a^2 \geqq 2ca\,.$$

これらの不等式の辺々を加えることにより，

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

を得る．

(別解)　$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geqq 0$ より

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca.$$

(2)　(1) から $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\geqq 0$.
よって

$$(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca).$$

(3)　(1) から $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geqq 0$.
よって

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2.$$

(4)　(2) から $(ab+bc+ca)^2 \geqq 3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)=3abc(a+b+c)$.
よって

$$(ab+bc+ca)^2 \geqq 3abc(a+b+c).$$

(5)　(1) の不等式を二度使うと

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= (a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 \\ &\geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \\ &\geqq ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab=abc(a+b+c). \end{aligned}$$

よって

$$a^4+b^4+c^4 \geqq abc(a+b+c).$$

■

9．次の不等式を証明せよ．ただし，文字はすべて実数とする．
(1)　$(a+b+c+d)^2 \geqq 4(ab+bc+cd+da)$.
(2)　$3(a+b+c+d)^2 \geqq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

解 (1)　$(a+b+c+d)^2-4(ab+bc+cd+da)=(a-b+c-d)^2\geqq 0$ より

$$(a+b+c+d)^2 \geqq 4(ab+bc+cd+da).$$

(2)　$3(a+b+c+d)^2-8(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$
$=3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$
$=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\geqq 0$. より

$$3(a+b+c+d)^2 \geqq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

■

10. a, b が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $\sqrt{2(a+b)} \geqq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

(2) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geqq \dfrac{4}{a+b}.$

解 1 (1) $\left[\sqrt{2(a+b)}\right]^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0.$

$\sqrt{2(a+b)} > 0,\ \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ であるから $\sqrt{2(a+b)} \geqq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

(2) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{4}{a+b} = \dfrac{(a+b)^2 - 4ab}{ab(a+b)} = \dfrac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geqq 0$ より

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqq \frac{4}{a+b}. \qquad ■$$

解 2 (1) コーシー・シュワルツの不等式を使うと

$$2(a+b) = (1+1)(a+b) \geqq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \quad \text{から} \quad \sqrt{2(a+b)} \geqq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

(2) コーシー・シュワルツの不等式より

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq (1+1)^2 = 4\,.$$

よって

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqq \frac{4}{a+b}. \qquad ■$$

[注] (2) は後述の補助定理 1 を使っても示せる．

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{b} \geqq \frac{(1+1)^2}{a+b} = \frac{4}{a+b}.$$

11. a, b が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $a^3 + b^3 \geqq ab(a+b).$

(2) $a^5 + b^5 \geqq a^2b^2(a+b).$

解 (1) $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a-b)a^2 - (a-b)b^2 = (a-b)^2(a+b) \geqq 0$ より

$$a^3 + b^3 \geqq ab(a+b)$$

(2) $\quad a^5+b^5-a^2b^2(a+b)=(a^2-b^2)a^3-(a^2-b^2)b^3=(a^2-b^2)(a^3-b^3)$.
$a \geqq b$ のとき，$a^2 \geqq b^2$, $a^3 \geqq b^3$, $a<b$ のとき，$a^2<b^2$, $a^3<b^3$ であるから*1

$$(a^2-b^2)(a^3-b^3) \geqq 0.$$

よって

$$a^5+b^5 \geqq a^2b^2(a+b). \qquad \blacksquare$$

［注］ (2) において，$(a^2-b^2)(a^3-b^3) \geqq 0$ は
$(a^2-b^2)(a^3-b^3)=(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2) \geqq 0$ から示してもよい．

12. a, b が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2} \geqq \frac{1}{1+ab}.$$

解

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}-\frac{1}{1+ab}\\
&=\frac{(1+b)^2(1+ab)+(1+a)^2(1+ab)-(1+a)^2(1+b)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)}\\
&=\frac{a^3b+ab^3-a^2b^2-2ab+1}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)}=\frac{ab(a^2-2ab+b^2)+a^2b^2-2ab+1}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)}\\
&=\frac{ab(a-b)^2+(ab-1)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)} \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2} \geqq \frac{1}{1+ab}. \qquad \blacksquare$$

[注] $a^3b+ab^3-a^2b^2-2ab+1 \geqq 0$ は，相加平均・相乗平均の不等式を使って示すことができる．

$$\frac{a^3b+ab^3}{2} \geqq \sqrt{a^3b \cdot ab^3}=a^2b^2,$$

$$\frac{a^3b+ab^3}{2}+1=\frac{a^3b+ab^3+1+1}{2} \geqq \frac{4\sqrt[4]{a^4b^4}}{2}=2ab$$

が成り立つから，この 2 つの不等式の辺々を加えればよい．

*1 「a^2-b^2 と a^3-b^3 の符号は一致するから」で済ます場合がある．

13. a, b は正の実数で，$ab \geqq 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \geqq \frac{2}{1+ab}.$$

解　証明すべき不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \geqq \frac{2}{1+ab}\\
\Longleftrightarrow\ &(1+b^2)(1+ab)+(1+a^2)(1+ab) \geqq 2(1+a^2)(1+b^2)\\
\Longleftrightarrow\ &a^3b-2a^2b^2+ab^3-a^2+2ab-b^2 \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &ab(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2) \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &(a-b)^2(ab-1) \geqq 0.
\end{aligned}$$

$ab \geqq 1$ であるから $(a-b)^2(ab-1) \geqq 0$ は成り立つ．
よって

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \geqq \frac{2}{1+ab}. \qquad \blacksquare$$

14. a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

解 1　$\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc}$
を用いると

$$\begin{aligned}
&9(a+b)(b+c)(c+a)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)\\
&=(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc\\
&\overset{AM \geqq GM}{\geqq}\ 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{(abc)^2}-9abc\\
&=9abc-9abc=0.
\end{aligned}$$

よって

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8(a+b+c)(ab+bc+ca). \qquad \blacksquare$$

解 2　差をとると

$$
\begin{aligned}
&9(a+b)(b+c)(c+a)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)\\
&=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc\\
&=a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)\\
&=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geqq 0.
\end{aligned}
$$

よって

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8(a+b+c)(ab+bc+ca). \qquad \blacksquare$$

［注］　$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc \geqq 0$ の証明は，相加平均・相乗平均の不等式を使ってもよい．

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \geqq 6\sqrt[6]{a^2b\cdot a^2c\cdot b^2a\cdot b^2c\cdot c^2a\cdot c^2b}=6abc.$$

15.　$x \geqq 1, y \geqq 1$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leqq \sqrt{xy}.$$

解 1　証明すべき不等式を同値変形する．

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leqq \sqrt{xy} &\iff \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2 \leqq (\sqrt{xy})^2\\
&\iff x+y-2+2\sqrt{(x-1)(y-1)} \leqq xy\\
&\iff 0 \leqq (x-1)(y-1)+1-2\sqrt{(x-1)(y-1)}\\
&\iff 0 \leqq \left(\sqrt{(x-1)(y-1)}-1\right)^2.
\end{aligned}
$$

最後の不等式 $0 \leqq \left(\sqrt{(x-1)(y-1)}-1\right)^2$ は明らかに成り立つ．　$\blacksquare$

解 2　$u=x-1 \geqq 0,\ v=y-1 \geqq 0$ とおくと，証明すべき不等式は

$$\sqrt{u}+\sqrt{v} \leqq \sqrt{(u+1)(v+1)}$$

となる．コーシー・シュワルツの不等式より

$$\sqrt{(u+1)(v+1)}=\sqrt{(u+1)(1+v)} \geqq \sqrt{\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right)^2}=\sqrt{u}+\sqrt{v}. \qquad \blacksquare$$

16.　三角形 ABC において，次の不等式を証明せよ．

$$\sin A+\sin B+\sin C \geqq \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C.$$

解　まず $\sin 2A+\sin 2B \leqq 2\sin C$ が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}\sin 2A+\sin 2B &= 2\sin(A+B)\cos(A-B)\\ &= 2\sin(\pi-C)\cos(A-B)\\ &= 2\sin C\cos(A-B)\\ &\leqq 2\sin C\,.\end{aligned}$$

同様にして

$$\sin 2B+\sin 2C \leqq 2\sin A,\ \sin 2C+\sin 2A \leqq 2\sin B.$$

これらの不等式の辺々を加えることにより

$$\sin A+\sin B+\sin C \geqq \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C.$$

を得る．　■

［類題］　(明治大)　三角形 ABC において，次の不等式を証明せよ．

(i)　$a \geqq b\cos B+c\cos C.$

(ii)　$\sin A+\sin B+\sin C \geqq \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C.$

(i) の不等式を正弦定理 $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$ (R は三角形 ABC の外接円の半径) を使って書き直すと

$$\begin{aligned}a \geqq b\cos B+c\cos C &\iff 2R\sin A \geqq 2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C\\ &\iff 2\sin A \geqq 2\sin B\cos B+2\sin C\cos C\\ &\iff 2\sin A \geqq \sin 2B+\sin 2C\end{aligned}$$

となる．

したがって，$2\sin A \geqq \sin 2B+\sin 2C$ を示せばよく，これは 16 の前半に示した不等式と同じものである．

1.2　相加平均・相乗平均の不等式

1．(東工大)　a, b, c, d は正の数とする

(1)　次の 2 つの不等式を証明せよ．

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}, \quad \frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}.$$

(2)　次の式で与えられる，P, Q, R, S の大小を比較せよ．

$$P = \frac{a+b+c+d}{4}, \quad Q = \sqrt[4]{abcd},$$

$$R = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}}{6},$$

$$S = \frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{4}.$$

解 (1)　$x = \sqrt[3]{a} > 0$, $y = \sqrt[3]{b} > 0$, $z = \sqrt[3]{c} > 0$ とおくと

$$\begin{aligned} a+b+c-3\sqrt[3]{abc} &= x^3+y^3+z^3-3xyz \\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\ &= \frac{1}{2}(x+y+z)\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \geqq 0. \end{aligned}$$

よって，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$. 等号は $x=y=z$ すなわち，$a=b=c$ のときに限る．

「p, q が正の実数のとき，$\dfrac{p+q}{2} \geqq \sqrt{pq}$ が成り立つ．また，等号が成り立つのは，$p=q$ のときである．」

この不等式を使うと

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2} &\geqq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \\ &\geqq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}. \end{aligned}$$

よって，$\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$. 等号は，$a=b$ かつ $c=d$ かつ $\sqrt{ab}=\sqrt{cd}$ より $a=b=c=d$ のときに限り成り立つ．

(2)　(巾をみて，$P \geqq R \geqq S \geqq Q$ と予測する．)

$$P = \frac{1}{6}\left\{\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{a+d}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{b+d}{2}+\frac{c+d}{2}\right\}$$

$$\geqq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}}{6} = R.$$

よって，$P \geqq R$. 等号成立は，$a=b,\ a=c,\ a=d,\ b=c,\ b=d,\ c=d$ すなわち $a=b=c=d$ のときである．

R と S の大小比較をする．まず分母を 12 にして，分子を比較する．

$$R = \frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{ad}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}}{12},$$

$$S = \frac{3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{abd}+3\sqrt[3]{acd}+3\sqrt[3]{bcd}}{12}.$$

(1) から，「 $p,\ q,\ r$ が正の実数のとき，$p+q+r \geqq 3\sqrt[3]{pqr}$ が成り立つ．また，等号が成り立つのは $p=q=r$ のときである．」

この不等式を使うと

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \geqq 3\sqrt[3]{abc},\ \sqrt{ab}+\sqrt{bd}+\sqrt{ad} \geqq 3\sqrt[3]{abd},$$

$$\sqrt{ac}+\sqrt{cd}+\sqrt{ad} \geqq 3\sqrt[3]{acd},\ \sqrt{bc}+\sqrt{cd}+\sqrt{bd} \geqq 3\sqrt[3]{bcd}.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{ad}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}\\ &\geqq 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{abd}+3\sqrt[3]{acd}+3\sqrt[3]{bcd}\end{aligned}$$

よって，$R \geqq S$. 等号は

$\sqrt{ab}=\sqrt{bc}=\sqrt{ca},\ \sqrt{ab}=\sqrt{bd}=\sqrt{ad},\ \sqrt{ac}=\sqrt{cd}=\sqrt{ad},\ \sqrt{bc}=\sqrt{cd}=\sqrt{bd}$

すなわち $a=b=c=d$ のときに限る．

(1) から，「 $p,\ q,\ r,\ s$ が正の実数のとき，$\dfrac{p+q+r+s}{4} \geqq \sqrt[4]{pqrs}$ が成り立つ．また，等号が成り立つのは $p=q=r=s$ のときである．」

$$\begin{aligned}S &= \frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{4}\\ &\geqq \sqrt[4]{\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{abd}\cdot\sqrt[3]{acd}\cdot\sqrt[3]{bcd}} = \sqrt[4]{abcd} = Q\end{aligned}$$

から，$S \geqq Q$. 等号成立は $\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{abd}=\sqrt[3]{acd}=\sqrt[3]{bcd}$ すなわち $a=b=c=d$ のときである．

よって，$a=b=c=d$ のとき，$P=R=S=Q$.

それ以外のとき，$P>R>S>Q$. ■

［注］　(1) における不等式 $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ は，$\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ を示した後 $d = \dfrac{a+b+c}{3}$ とおくことにより証明することができる．

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd} \Longleftrightarrow \frac{3d+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$
$$\Longleftrightarrow d^4 \geqq abcd \Longleftrightarrow d^3 \geqq abc$$
$$\Longleftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}.$$

よって

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}. \qquad \square$$

２．a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc.$$

解 1　相加平均・相乗平均の不等式より

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab},\ b+c \geqq 2\sqrt{bc},\ c+a \geqq 2\sqrt{ca}.$$

これらの不等式の辺々をかけると

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc. \qquad \blacksquare$$

解 2　$(a+b)(b+c)(c+a) - 8abc$

$= a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b - 6abc$

$= a(b^2 - 2bc + c^2) + b(c^2 - 2ca + a^2) + c(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geqq 0.$

よって

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc. \qquad \blacksquare$$

３．(Russia 1992)　x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^4 + y^4 + z^2 \geqq \sqrt{8}xyz.$$

解　相加平均・相乗平均の不等式より

$$x^4 + y^4 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2} \geqq 4\sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot \frac{z^2}{2} \cdot \frac{z^2}{2}} = \sqrt{8}xyz\,.$$

よって，$x^4 + y^4 + z^2 \geqq \sqrt{8}xyz.$ $\blacksquare$

4．(Brazil 2001)　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+b)(a+c) \geqq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

解　相加平均・相乗平均の不等式より

$$(a+b)(a+c) = a(a+b+c) + bc \geqq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

よって，$(a+b)(a+c) \geqq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$. ■

5．a が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{1+a^3} \leqq \frac{a^2+2}{2}.$$

解 1　$$\sqrt{1+a^3} = \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \overset{GM \leqq AM}{\leqq} \frac{(a+1)+(a^2-a+1)}{2} = \frac{a^2+2}{2}.$$

よって，$\sqrt{1+a^3} \leqq \dfrac{a^2+2}{2}$. ■

解 2　$(a^2+2)^2 - 4(1+a^3) = a^4 - 4a^3 + 4a^2 = a^2(a-2)^2 \geqq 0.$

よって，$4(1+a^3) \leqq (a^2+2)^2$ から

$$\sqrt{1+a^3} \leqq \frac{a^2+2}{2}.$$ ■

6．(学習院大 1992)　n は正の整数で，x, y を正の実数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^n + (n-1)y^n \geqq nxy^{n-1}.$$

解　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} x^n + (n-1)y^n &= x^n + \underbrace{y^n + y^n + \cdots + y^n}_{n-1} \\ &\geqq n\sqrt[n]{x^n \cdot y^n \cdot y^n \ldots y^n} \\ &= n\sqrt[n]{x^n y^{n(n-1)}} = nxy^{n-1}. \end{aligned}$$

よって，$x^n + (n-1)y^n \geqq nxy^{n-1}$. ■

［注］　$t=x/y$ とおいて，$f(t)=t^n+(n-1)-nt\ (t>0)$ の増減を調べてもよい．

7．(Moldova 2004)　a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3 \geqq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}.$$

解 1　重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{4}{6}a^3+\frac{1}{6}b^3+\frac{1}{6}c^3 \geqq (a^3)^{\frac{4}{6}}(b^3)^{\frac{1}{6}}(c^3)^{\frac{1}{6}}=a^2\sqrt{bc},$$

$$\frac{1}{6}a^3+\frac{4}{6}b^3+\frac{1}{6}c^3 \geqq (a^3)^{\frac{1}{6}}(b^3)^{\frac{4}{6}}(c^3)^{\frac{1}{6}}=b^2\sqrt{ca},$$

$$\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{6}b^3+\frac{4}{6}c^3 \geqq (a^3)^{\frac{1}{6}}(b^3)^{\frac{1}{6}}(c^3)^{\frac{4}{6}}=c^2\sqrt{ab}.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$a^3+b^3+c^3 \geqq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$$

を得る．　■

［注 **1**］　通常の相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$\frac{4}{6}a^3+\frac{1}{6}b^3+\frac{1}{6}c^3 \geqq (a^3)^{\frac{4}{6}}(b^3)^{\frac{1}{6}}(c^3)^{\frac{1}{6}}=a^2\sqrt{bc}$$

は

$$\frac{4a^3+b^3+c^3}{6}=\frac{a^3+a^3+a^3+a^3+b^3+c^3}{6} \geqq \sqrt[6]{(a^3)^4b^3c^3}=a^2\sqrt{bc}$$

のようになる．

［注 **2**］　重みの $\frac{4}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$ は次のように求めることができる．

$$w_1a^3+w_2b^2+w_3c^3 \geqq (a^3)^{w_1}(b^3)^{w_2}(c^3)^{w_3}=a^{3w_1}b^{3w_2}c^{3w_3}=a^2b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$$

とすると

$$3w_1=2,\ 3w_2=\frac{1}{2},\ 3w_3=\frac{1}{2},\ w_1+w_2+w_3=1\,.$$

よって，$w_1=\frac{4}{6}$，$w_2=\frac{1}{6}$，$w_3=\frac{1}{6}$ となる．

解 2　$a,\ b,\ c$ の中に 0 が含まれているときには，明らかに不等式は成り立つので，以下 $a>0,\ b>0,\ c>0$ とする．$a=e^{a_1},\ b=e^{b_1},\ c=e^{c_1}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$e^{3a_1}+e^{3b_1}+e^{3c_1} \geqq e^{2a_1+\frac{b_1+c_1}{2}}+e^{2b_1+\frac{c_1+a_1}{2}}+e^{2c_1+\frac{a_1+b_1}{2}}$$

となる．$a_1 \geqq b_1 \geqq c_1$ と仮定すると

$$(3a_1,\ 3b_1,\ 3c_1) \succ \left(2a_1+\frac{b_1+c_1}{2},\ 2b_1+\frac{c_1+a_1}{2},\ 2c_1+\frac{a_1+b_1}{2}\right).$$

$f(x)=e^x$ とおくと，$f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は凸関数であるから，Karamat の不等式より

$$\begin{aligned} &f(3a_1)+f(3b_1)+f(3c_1) \\ \geqq\ &f\left(2a_1+\frac{b_1+c_1}{2}\right)+f\left(2b_1+\frac{c_1+a_1}{2}\right)+f\left(2c_1+\frac{a_1+b_1}{2}\right). \end{aligned}$$

よって，$e^{3a_1}+e^{3b_1}+e^{3c_1} \geqq e^{2a_1+\frac{b_1+c_1}{2}}+e^{2b_1+\frac{c_1+a_1}{2}}+e^{2c_1+\frac{a_1+b_1}{2}}$. ■

8．a,b,c は正の実数で，$abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$ab^2+bc^2+ca^2 \geqq a+b+c.$$

解　重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{2}{3}ca^2+\frac{1}{3}ab^2 \geqq (ca^2)^{\frac{2}{3}}(ab^2)^{\frac{1}{3}}=(abc)^{\frac{2}{3}}a=a\,.$$

同様にして

$$\frac{2}{3}ab^2+\frac{1}{3}bc^2 \geqq b,\ \frac{2}{3}bc^2+\frac{1}{3}ca^2 \geqq c\,.$$

これらの不等式の辺々を加えて，$ab^2+bc^2+ca^2 \geqq a+b+c$ を得る． ■

9．(東京医科歯科大 2010)　x,y,z を正の実数とするとき，

$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

解　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z} &= \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z} \\ &\geqq 3\sqrt[3]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z}}+3\sqrt[3]{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}} \\ &= 6.\end{aligned}$$

等号成立は $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{x}{z}$ かつ $\frac{z}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$ から $x=y=z$ のときに限る．

$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$ の最小値は 6 であることがわかったので，$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$ は 6 以上のすべての値がとれること，すなわち，値域が $[6,\ \infty)$ となることを示す．

$f(x,\ y,\ z)=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$ とおくと

$$f(x,\ 1,\ 1)=\frac{2}{x}+2x+2.$$

$g(x)=\frac{2}{x}+2x+2\quad(x>0)$ とおくと $g'(x)=-\frac{2}{x^2}+2=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^2}$.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$g(x)$ は $x=1$ で最小値 6 をとり，$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ である．
増減表より $g(x)$ の値域は $[6,\ \infty)$ である．
したがって，$f(x,\ y,\ z)$ の値域は $[6,\ \infty)$ である．　■

10. (法政大)　a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq \frac{100}{3}.$$

解　左辺を展開すると

$$左辺 = a^2+b^2+c^2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+3$$

となるから，$a^2+b^2+c^2$，$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$，$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}$ をそれぞれ評価する．

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2 = 1 \text{ から } a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{3}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \overset{AM\geqq GM}{\geqq} 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} = 3\,.$$

$$1 = a+b+c \overset{AM\geqq GM}{\geqq} 3\sqrt[3]{abc} \text{から } abc \leqq \frac{1}{27}.$$

ゆえに

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{abc} \geqq 27\,.$$

以上のことから

$$\begin{aligned} 左辺 &= a^2+b^2+c^2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+3 \\ &\geqq \frac{1}{3}+3+27+3 = \frac{100}{3}. \end{aligned}$$

よって

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq \frac{100}{3}. \quad \blacksquare$$

11. a, b, c は正の実数で $abc = 8$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} \leqq 0\,.$$

解　証明すべき不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned}
&\frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} \leqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 1 - \frac{3}{a+1} + 1 - \frac{3}{b+1} + 1 - \frac{3}{c+1} \leqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & (b+1)(c+1) + (c+1)(a+1) + (a+1)(b+1) \leqq (a+1)(b+1)(c+1) \\
\Longleftrightarrow\ & a + b + c + 2 - abc \leqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & a + b + c - 6 \leqq 0\,.
\end{aligned}$$

したがって $a + b + c \leqq 6$ を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$a + b + c \leqq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

■

[注]　$\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} \leqq 1$ は次のように示せる．

$$a = \frac{2x}{y},\ b = \frac{2y}{z},\ c = \frac{2z}{x} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} &= \frac{1}{\frac{2x}{y}+1} + \frac{1}{\frac{2y}{z}+1} + \frac{1}{\frac{2z}{x}+1} \\
&= \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \\
&= \frac{y^2}{y(2x+y)} + \frac{z^2}{z(2y+z)} + \frac{x^2}{x(2z+x)} \\
&\overset{\text{補助定理 1}}{\leqq} \frac{(y+z+x)^2}{y(2x+y)+z(2y+z)+x(2z+x)} \\
&= \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx} \\
&= \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2} = 1.
\end{aligned}$$

□

12. (IMO Short List 1998)　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n \bigl[1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\bigr]}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2)\cdots(1 - a_n)} \leqq \frac{1}{n^{n+1}}\,.$$

解　$a_{n+1} = 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) > 0$ とおくと $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = 1$.

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1 a_2 \cdots a_n \bigl[1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\bigr]}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2)\cdots(1 - a_n)} \leqq \frac{1}{n^{n+1}} \\
\iff\ &\frac{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}}{(1 - a_{n+1})(1 - a_1)(1 - a_2)\cdots(1 - a_n)} \leqq \frac{1}{n^{n+1}} \\
\iff\ &(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1})(a_1 + a_3 + \cdots + a_{n+1})\cdots(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\
&\geqq n^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1})(a_1 + a_3 + \cdots + a_{n+1})\cdots(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\
\geqq\ &n^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}
\end{aligned}$$

を示せばよい.

相加平均・相乗平均の不等式より

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} \geqq n\sqrt[n]{a_2 a_3 \cdots a_{n+1}}\,,$$

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{n+1} \geqq n\sqrt[n]{a_1 a_3 \cdots a_{n+1}}\,,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\,.$$

これらの不等式の辺々をかけ合わせると

$$\begin{aligned}
&(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1})(a_1 + a_3 + \cdots + a_{n+1})\cdots(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\
\geqq\ &n^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

■

1.3 コーシー・シュワルツの不等式

1． a, b, x, y が実数のとき，不等式 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$ を証明せよ．また，等号が成り立つ場合を調べよ．

解　差をとる．

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2 \\
&= a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2 \\
&= (ay-bx)^2 \geqq 0 .
\end{aligned}
$$

よって，$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$.

等号が成り立つのは，$ay=bx$ のときに限る．■

2． a, b, c, x, y, z が実数のとき，不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ を証明せよ．また，等号が成り立つ場合を調べよ．

解 1　差をとる．

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \\
&= a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2 \\
&\qquad -a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-2abxy-2bcyz-2cazx \\
&= a^2y^2-2abxy+b^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+c^2x^2-2cazx+a^2z^2 \\
&= (ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0 .
\end{aligned}
$$

よって，$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$.

等号が成り立つのは，$ay=bx$ かつ $bz=cy$ かつ $cx=az$ のときに限る．■

解 2 (i)　$a=b=c=0$ のとき，不等式の両辺はともに 0 であって，明らかに成り立つ．

(ii)　$a^2+b^2+c^2>0$ の場合

$f(t)=(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2$ とおくと，任意の実数 t に対して $f(t) \geqq 0$ が成り立つ．

$f(t)=(a^2+b^2+c^2)t^2-2(ax+by+cz)t+(x^2+y^2+z^2)$ と変形できる．

任意の実数 t に対して

$$(a^2+b^2+c^2)t^2-2(ax+by+cz)t+(x^2+y^2+z^2) \geqq 0$$

が成り立つ条件は，$a^2+b^2+c^2>0$ より，左辺の 2 次式の判別式 D は $D \leqq 0$ となる．

$$\frac{D}{4}=(ax+by+cz)^2-(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \leqq 0$$

より，$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$．
等号が成り立つのは，$at-x=bt-y=ct-z=0$ となる t が存在するときである．すなわち，$(x,\ y,\ z)=t(a,\ b,\ c)$ から
$t \fallingdotseq 0$ のとき，$(x,\ y,\ z) \mathbin{/\!/} (a,\ b,\ c)$ で，$t=0$ のとき $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$.
(i)，(ii) から不等式は成り立ち，等号が成り立つのは，$a=b=c=0$ または $x=y=z=0$ または $(x,\ y,\ z) \mathbin{/\!/} (a,\ b,\ c)$ のときである． ■

［注］　解 2 の方法で一般のコーシー・シュワルツの不等式が証明できる．
「 $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ が実数のとき，

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geqq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

が成り立つ．等号成立は，$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ または $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ または $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mathbin{/\!/} (b_1,b_2,\ldots,b_n)$ のときに限る.」

3．(類　慶応大)　x,y が正の実数であるとき，不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{x+y}$ が常に成り立つような k の最小値を求めよ．

解　不等式において $x=y=1$ とおくと $k \geqq \sqrt{2}$.
コーシー・シュワルツの不等式より

$$2(x+y)=(1+1)(x+y) \geqq \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2.$$

よって，$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq \sqrt{2(x+y)}$ が成り立つから，k の最小値は $\sqrt{2}$ である． ■

4．(東大　1995)　すべての正の実数 x,y に対し $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$ が成り立つような実数 k の最小値を求めよ．

解　不等式において $x=1,\ y=4$ とおくと $3 \leqq k\sqrt{6}$ から $k \geqq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
コーシー・シュワルツの不等式より

$$\frac{3}{2}(2x+y)=\left(\frac{1}{2}+1\right)(2x+y) \geqq \left(\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2x}+\sqrt{1\cdot y}\right)^2=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$$

よって，$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2x+y}$ が成り立つから，k の最小値は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である． ■

［注 **1**］　$x=1,\ y=4$ は不等式

$$\left(\frac{1}{2}+1\right)(2x+y) \geqq \left(\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2x}+\sqrt{1\cdot y}\right)^2$$

の等号成立条件　　$\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1}=\sqrt{y}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ の $y=4x$ を利用した．

［注 **2**］　$t=y/x$ とおくと

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y} \iff k \geqq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}=\frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{2+t}}$$

より，$f(t)=\dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+2}}\ (t>0)$ の最大値を求めてもよい．

5．(愛知学院大 1996)　a,b,c,x,y,z はすべて正数とするとき

$$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z} \leqq \sqrt{a+b+c}\sqrt{ax+by+cz}$$

が成り立つことを示せ．

解　コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}(a+b+c)(ax+by+cz) &\geqq \left(\sqrt{a\cdot ax}+\sqrt{b\cdot by}+\sqrt{c\cdot cz}\right)^2\\ &=\left(a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}\right)^2.\end{aligned}$$

よって，$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z} \leqq \sqrt{a+b+c}\sqrt{ax+by+cz}$． ■

6．(釧路公立大 2009)　$x>0,\ y>0$ で $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ のとき，$x+y$ の最小値が $3+2\sqrt{2}$ であることを証明せよ．

解 1　コーシー・シュワルツの不等式より

$$x+y=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y) \geqq \left(\sqrt{\frac{2}{x}\cdot x}+\sqrt{\frac{1}{y}\cdot y}\right)^2=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}.$$

等号成立は $\sqrt{\dfrac{2}{x}}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{\dfrac{1}{y}}\cdot\sqrt{x}$ かつ $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ から $x=\sqrt{2}y$ かつ $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ のときである．これを解くと，$x=2+\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}+1$．

よって，$x=2+\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}+1$ のとき，$x+y$ は最小値 $3+2\sqrt{2}$ をとる． ■

解 2 $\quad x+y=\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)(x+y)=3+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqq 3+2\sqrt{\dfrac{2y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}=3+2\sqrt{2}.$

等号は $\dfrac{2y}{x}=\dfrac{x}{y}$ かつ $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ から $x=2+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}+1$ のときに限り成り立つ．

よって，$x+y$ の最小値は $3+2\sqrt{2}$ である． ■

7．(Korea MO 2002) $\quad a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ は実数で，

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1$$

を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2\leqq 2|\,a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n-1\,|.$$

解 　コーシー・シュワルツの不等式より

$$1=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\,.$$

よって

$$-1\leqq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqq 1.$$

$S=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ とおくと $-1\leqq S\leqq 1$.

　ところで，ラグランジュの恒等式を使うと

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\\ =&\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqq(a_1b_2-a_2b_1)^2\,.\end{aligned}$$

これから， $1-S^2\geqq(a_1b_2-a_2b_1)^2$ となるから $2(1-S)\geqq 1-S^2$ を示せばよい．

これは $2(1-S)-(1-S^2)=(1-S)^2\geqq 0$ から得られる． ■

8．(United Kingdom 2005) $\quad a, b, c$ が正の実数であるとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geqq(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

解　証明すべき不等式を同値変形する．

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geqq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\iff \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right) \geqq 3+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$
$$\iff \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geqq 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

したがって，次の 2 つの不等式を証明すればよい．

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geqq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},\ \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geqq 3. \qquad \cdots\cdots(*)$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$(1^2+1^2+1^2)\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right) \geqq \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \qquad \cdots\cdots①$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3. \qquad \cdots\cdots②$$

①，②から

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geqq \frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2}{3} \geqq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

また

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=3$$

が成り立つから，$(*)$ は成り立つ．　■

[注]　$\displaystyle\sum_{cyclic}$ を使う別解については，「初等的な不等式 II」参照．

9．(Titu Andreescu , Gazeta Mathematica)　a, b, c を負でない実数とする．負でないすべての実数 x に対して次の不等式を証明せよ．

$$(ax^2+bx+c)(cx^2+bx+a) \geqq (a+b+c)^2x^2.$$

解　コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}&(ax^2+bx+c)(cx^2+bx+a)\\ &=\left\{(\sqrt{a}x)^2+(\sqrt{bx})^2+(\sqrt{c})^2\right\}\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{bx})^2+(\sqrt{c}x)^2\right\}\\ &\geqq (ax+bx+cx)^2=(a+b+c)^2x^2.\end{aligned}$$

■

10．(Titu Andreescu , Revista Mathematica Timisoara)　$p(x)$ を係数がすべて正である整式とする．$P\left(\dfrac{1}{x}\right) \geqq \dfrac{1}{P(x)}$ が $x=1$ に対して成り立つならば，すべての実数 $x>0$ に対して成り立つことを証明せよ．

解　$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ とおくと，$a_i>0\ (0 \leqq i \leqq n)$．

$P\left(\dfrac{1}{x}\right) \geqq \dfrac{1}{P(x)}$ で $x=1$ とおくと，$P(1) \geqq \dfrac{1}{P(1)}$．

$P(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n>0$ であるから $\{P(1)\}^2>1$ すなわち

$$P(1)>1. \qquad \cdots\cdots(*)$$

$x>0$ のとき，コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}P(x)P\left(\frac{1}{x}\right)&=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\ &\quad\times\left(a_0\cdot\frac{1}{x^n}+a_1\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\cdot\frac{1}{x}+a_n\right)\\ &\geqq (a_0+a_1+\cdots+a_n)^2\\ &=\{P(1)\}^2>1.\end{aligned}$$

$x>0$ のとき $P(x)>0$ であるから

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geqq \frac{1}{P(x)}.$$

■

11．(Vasile Cîrtoaje)　a, b, c, x, y, z が実数であるとき，次の不等式を証明せよ．

$$ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqq \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$

解　$g=\dfrac{a+b+c}{3}$ とおく．

$$\begin{aligned}
&ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqq \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z)\\
\Longleftrightarrow\ &ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqq 2g(x+y+z)\\
\Longleftrightarrow\ &\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqq (2g-a)x+(2g-b)y+(2g-c)z.
\end{aligned}$$

$a_1=2g-a,\ b_1=2g-b,\ c_1=2g-c$ とおくと，証明すべき不等式は

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqq a_1x+b_1y+c_1z$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
a_1^2+b_1^2+c_1^2 &= (2g-a)^2+(2g-b)^2+(2g-c)^2\\
&= 12g^2-4(a+b+c)g+a^2+b^2+c^2\\
&= 12g^2-12g^2+a^2+b^2+c^2\\
&= a^2+b^2+c^2
\end{aligned}$$

が成り立つから，証明すべき不等式は

$$\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqq a_1x+b_1y+c_1z \qquad \cdots\cdots(*)$$

となる．

(i)　$a_1x+b_1y+c_1z<0$ のときは，明らかに $(*)$ は成り立つ．

(ii)　$a_1x+b_1y+c_1z \geqq 0$ のときは

$$(*) \Longleftrightarrow (a_1^2+b_1^2+c_1^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (a_1x+b_1y+c_1z)^2.$$

最後の不等式は，コーシー・シュワルツの不等式より成り立つ．　■

12. (Serbia 1998)　$a, x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1} \geqq \frac{n^2}{2}.$$

解　コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1}\right) \\
&= \left\{(x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + \cdots + (x_n + x_1)\right\} \\
&\qquad \times \left(\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1}\right) \\
&\geqq \left(\sqrt{(x_1 + x_2)\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2}} + \sqrt{(x_2 + x_3)\frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3}} + \cdots + \sqrt{(x_n + x_1)\frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1}}\right)^2 \\
&= \left(a^{\frac{x_1 - x_2}{2}} + a^{\frac{x_2 - x_3}{2}} + \cdots + a^{\frac{x_n - x_1}{2}}\right)^2 \\
&\overset{AM \geqq GM}{\geqq} \left(n \sqrt[n]{a^{\frac{x_1 - x_2}{2}} \cdot a^{\frac{x_2 - x_3}{2}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{x_n - x_1}{2}}}\right)^2 \\
&= \left(n a^{\frac{(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_n - x_1)}{2n}}\right)^2 \\
&= \left(n a^0\right)^2 = n^2\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1} \geqq \frac{n^2}{2}$$

が成り立つ．　■

1.4　チェビシェフの不等式

1．次の不等式を証明せよ．

(1)　$a \geqq b,\ a' \geqq b'$ のとき

$$\frac{aa'+bb'}{2} \geqq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a'+b'}{2}.$$

(2)　$a \geqq b \geqq c,\ a' \geqq b' \geqq c'$ のとき

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{3} \geqq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a'+b'+c'}{3}.$$

解 (1)　$a \geqq b,\ a' \geqq b'$ のとき

$$\frac{aa'+bb'}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a'+b'}{2} = \frac{1}{4}(a-b)(a'-b') \geqq 0.$$

よって，$\dfrac{aa'+bb'}{2} \geqq \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a'+b'}{2}.$

(2)　$a \geqq b \geqq c,\ a' \geqq b' \geqq c'$ のとき

$$\begin{aligned}&\frac{aa'+bb'+cc'}{3} - \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a'+b'+c'}{3}\\ &= \frac{1}{9}\{2aa'+2bb'+2cc'-a(b'+c')-b(a'+c')-c(a'+b')\}\\ &= \frac{1}{9}\{(a-b)(a'-b')+(b-c)(b'-c')+(c-a)(c'-a')\} \geqq 0.\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{aa'+bb'+cc'}{3} \geqq \dfrac{a+b+c}{3} \cdot \dfrac{a'+b'+c'}{3}.$　■

$a \geqq b,\ a' \leqq b'$ のときは，$a \geqq b,\ -a' \geqq -b'$ に対して 1．(1) を適用すると

$$\frac{a(-a')+b(-b')}{2} \geqq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{-a'-b'}{2}$$

から

$$\frac{aa'+bb'}{2} \leqq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a'+b'}{2}.$$

また，$a \geqq b \geqq c$, $a' \leqq b' \leqq c'$ のときは，$a \geqq b \geqq c$, $-a' \geqq -b' \geqq -c'$ に対し 1．(2) を適用すると

$$\frac{a(-a')+b(-b')+c(-c')}{3} \geqq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{-a'-b'-c'}{3}$$

から

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{3} \leqq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a'+b'+c'}{3}.$$

まとめると，次のようになる．

(1)　$a \geqq b$, $a' \leqq b'$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\frac{aa'+bb'}{2} \leqq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a'+b'}{2}.$$

(2)　$a \geqq b \geqq c$, $a' \leqq b' \leqq c'$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{3} \leqq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a'+b'+c'}{3}.$$

2．（京都府医大 1966） 三角形 ABC の頂角 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$60^\circ \leqq \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} < 90^\circ.$$

A, B, C を弧度法で測れば，上記の不等式は，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c} < \dfrac{\pi}{2}$ となる．

解　$A+B+C=180^\circ$ を使うと

$$\frac{A+B+C}{3} \leqq \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} < \frac{A+B+C}{2}$$

すなわち

$$\frac{1}{3}(a+b+c)(A+B+C) \leqq aA+bB+cC < \frac{1}{2}(a+b+c)(A+B+C)$$

を証明すればよい．

(i)　左側の不等式の証明

$a \geqq b \geqq c$ としても一般性を失わない．このとき，三角形の辺と対角の大小の性質によって，$A \geqq B \geqq C$ となる．チェビシェフの不等式より

$$aA + bB + cC \geqq \frac{1}{3}(a+b+c)(A+B+C)$$

が成り立つ．

(ii)　右側の不等式の証明

三角形の二辺の和は他の辺より大きいから

$$b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(A+B+C)-2(aA+bB+cC)\\=&(b+c-a)A+(c+a-b)B+(a+b-c)C>0\,.\end{aligned}$$

すなわち，右側の不等式が成り立つ．　■

3．(和歌山県立医大)　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$3(a^4+b^4+c^4) \geqq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3).$$

解　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．このとき $a^3 \geqq b^3 \geqq c^3$ であるから，チェビシェフの不等式を使うと

$$a \cdot a^3 + b \cdot b^3 + c \cdot c^3 \geqq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^3+b^3+c^3).$$

よって，$3(a^4+b^4+c^4) \geqq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$.　■

4．(類　東京医科歯科大 2010)　a, b, c を相異なる正の実数とするとき，次の 4 数の大小を比較し，小さい方から並べよ．

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2),\quad (a+b+c)(ab+bc+ca),\quad 3(a^3+b^3+c^3),\quad 9abc.$$

解　一般性を失うことなく $a > b > c$ と仮定できる．このとき，$a^2 > b^2 > c^2$ であるから，チェビシェフの不等式を使うと

$$3(a^3+b^3+c^3) = 3(a\cdot a^2 + b\cdot b^2 + c\cdot c^2) > (a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

「$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ (等号成立は $a=b=c$ のときに限る．)」が成り立つから

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) > (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca} = 9abc$$

等号成立は $a=b=c$ かつ $ab=bc=ca$ すなわち $a=b=c$ のときに限るから，

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) > 9abc.$$

よって，小さい順に並べると

$$9abc,\ (a+b+c)(ab+bc+ca),\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2),\ 3(a^3+b^3+c^3).$$ ■

5．a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)} \geqq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right).$$

解　一般性を失うことなく $a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．このとき

$$\frac{1}{a} \geqq \frac{1}{b} \geqq \frac{1}{c},\quad \frac{1}{a+1} \geqq \frac{1}{b+1} \geqq \frac{1}{c+1}$$

が成り立つから，チェビシェフの不等式を使うと

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)}\\ &\geqq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right).\end{aligned}$$ ■

6．(1)　任意の数列 $\{c_n\}, \{d_n\}$ に対して，次の等式を証明せよ．

$$n\sum_{i=1}^{n} c_i d_i - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} d_j\right) = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (c_i - c_j)(d_i - d_j).$$

(2)　$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$，$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

(チェビシェフの不等式)

解 (1)　数学的帰納法で証明する．

(i)　$n = 2$ のとき

$$\begin{aligned} 2(c_1d_1 + c_2d_2) - (c_1 + c_2)(d_1 + d_2) &= c_1d_1 + c_2d_2 - (c_1d_2 + c_2d_1) \\ &= (c_1 - c_2)(d_1 - d_2) \end{aligned}$$

となり，等式は成り立つ．

(ii)　$n = k$ のとき，等式が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned} &(k+1)\sum_{i=1}^{k+1} c_i d_i - \left(\sum_{i=1}^{k+1} c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} d_i\right) \\ &= (k+1)\left(\sum_{i=1}^{k} c_i d_i + c_{k+1}d_{k+1}\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} c_i + c_{k+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} d_i + d_{k+1}\right) \\ &= k\sum_{i=1}^{k} c_i d_i - \left(\sum_{i=1}^{k} c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} d_i\right) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{k} c_i d_i + k c_{k+1}d_{k+1} - d_{k+1}\sum_{i=1}^{k} c_i - c_{k+1}\sum_{i=1}^{k} d_i \\ &= \sum_{1 \leqq i < j \leqq k} (c_i - c_j)(d_i - d_j) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{k} c_i d_i + \sum_{i=1}^{k} c_{k+1}d_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} c_i d_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} c_{k+1}d_i \\ &= \sum_{1 \leqq i < j \leqq k} (c_i - c_j)(d_i - d_j) + \sum_{i=1}^{k} (c_i d_i + c_{k+1}d_{k+1} - c_i d_{k+1} - c_{k+1}d_i) \end{aligned}$$

$$= \sum_{1 \leqq i<j \leqq k} (c_i - c_j)(d_i - d_j) + \sum_{i=1}^{k} (c_i - c_{k+1})(d_i - d_{k+1})$$

$$= \sum_{1 \leqq i<j \leqq k+1} (c_i - c_j)(d_i - d_j).$$

したがって，$n = k+1$ のときも成り立つ．

(iii)　(i), (ii) から 2 以上のすべての自然数 n に対して等式は成り立つ．

(2)　(1) の結果から

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{1 \leqq i<j \leqq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqq 0.$$

よって，$n\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \geqq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)$.　■

7．$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ を満たすとき，すべての自然数 k に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \geqq a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \cdots + a_n^{k-1}.$$

解　$k = 1$ のとき，明らかに不等式は成り立つから，$k \geqq 2$ とする．
$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ と仮定しても一般性を失わない．このとき

$$a_1^{k-1} \geqq a_2^{k-1} \geqq \cdots \geqq a_n^{k-1}$$

であるから，チェビシェフの不等式より

$$n\left(a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k\right) \geqq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \cdots + a_n^{k-1}\right).$$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ を用いると

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \geqq a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \cdots + a_n^{k-1}.$$

■

8．a, b, c は正の実数で，$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}} = 3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}.$$

解　不等式を同次化して

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqq \left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)$$

を示せばよい．

$a \geqq b \geqq c$ と仮定しても一般性を失わない．このとき

$$a^{\frac{2}{3}} \geqq b^{\frac{2}{3}} \geqq c^{\frac{2}{3}},\ a^{\frac{4}{3}} \geqq b^{\frac{4}{3}} \geqq c^{\frac{4}{3}}$$

であるから，チェビシェフの不等式より

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqq \left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)$$

は成り立つ． ■

9．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n} \geqq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}.$$

解　不等式の両辺の対数をとると

$$\begin{aligned} & x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n} \geqq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} \\ \Longleftrightarrow\ & x_1\log x_1 + x_2\log x_2 + \cdots + x_n\log x_n \\ & \geqq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}(\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n). \end{aligned}$$

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ と仮定しても一般性を失わない．このとき

$$\log x_1 \geqq \log x_2 \geqq \cdots \geqq \log x_n$$

であるから，チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned} & x_1\log x_1 + x_2\log x_2 + \cdots + x_n\log x_n \\ \geqq\ & \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}(\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n) \end{aligned}$$

は成り立つ． ■

10．(Hojoo Lee)　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}} - \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geqq \frac{1}{3}.$$

解　両辺に $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$ をかける．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}}-\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geqq \frac{1}{3} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1} \\
&\geqq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)} \\
&\geqq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)
\end{aligned}
$$

最後の不等式は，次のように証明できる．
一般性を失うことなく $a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．このとき

$$
\frac{1}{a} \geqq \frac{1}{b} \geqq \frac{1}{c},\ \frac{1}{a+1} \geqq \frac{1}{b+1} \geqq \frac{1}{c+1}
$$

が成り立つから，チェビシェフの不等式を使うと

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)} \\
&\geqq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right).
\end{aligned}
$$

■

1.5　凸関数

1．$A,\ B,\ C,\ D$ はいずれも 0 と π の間にあるとする．次の不等式を証明せよ．

(i)　$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D \leqq 4\sin\dfrac{A+B+C+D}{4}$.

(ii)　$\sin A+\sin B+\sin C \leqq 3\sin\dfrac{A+B+C}{3}$.

(iii)　$\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \leqq \sin\dfrac{A+B+C}{3}$.

解　$f(x)=\sin x \quad (0<x<\pi)$ とおくと $f''(x)=-\sin x<0$ であるから $f(x)$ は凹関数である．

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)+f(D)}{4} \leqq f\left(\frac{A+B+C+D}{4}\right),$$

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \leqq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

から (i)，(ii) の不等式は得られる．

(iii) は $g(x)=\log\sin x \quad (0<x<\pi)$ とおくと，$g''(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}<0$ であるから $f(x)$ は凹関数である．

$$\frac{g(A)+g(B)+g(C)}{3} \leqq g\left(\frac{A+B+C}{3}\right),$$

$$\frac{\log\sin A+\log\sin B+\log\sin C}{3} \leqq \log\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right),$$

$$\log\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \leqq \log\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right).$$

よって，(iii) の不等式を得る．■

［注］　(iii) は次のように示してもよい．(ii) から

$$\sin\frac{A+B+C}{3} \geqq \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \overset{AM\geqq GM}{\geqq} \sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}.$$

よって，$\sin\dfrac{A+B+C}{3} \geqq \sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$.　□

2．(1991 京都大)　実数 a, b $\left(0 \leqq a < \dfrac{\pi}{4},\ 0 \leqq b < \dfrac{\pi}{4}\right)$ に対し次の不等式の成り立つことを示せ．

$$\sqrt{\tan a \cdot \tan b} \leqq \tan\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}(\tan a + \tan b).$$

解　右側の不等式は，$f(x) = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4}\right)$ が下に凸であることから得られる．

左側の不等式は，$0 < a < \dfrac{\pi}{4}$，$0 < b < \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\sqrt{\tan a \cdot \tan b} \leqq \tan\left(\frac{a+b}{2}\right) \iff \frac{\log\tan a + \log\tan b}{2} \leqq \log\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$g(x) = \log\tan x$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$g'(x) = \dfrac{1}{\tan x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$，

$g''(x) = -\dfrac{4\cos 2x}{\sin^2 2x} < 0$ であるから，$g(x)$ が凹関数（上にに凸）であることから得られる．

あとは，$a = 0$ または $b = 0$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．　■

3．(東工大 1990)　x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を正数とし，$\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ をみたすとする．このとき不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq k \log\frac{k}{n}.$$

を証明せよ．

解　$f(x) = x\log x$　$(x > 0)$ とおく．

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq k\log\frac{k}{n} \iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \frac{k}{n}\log\frac{k}{n}$$

$$\iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

ところで，$f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ から，$f(x)$ は凸関数である．よって

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$　■

4． a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geqq \frac{9}{4}.$$

解　$a+b+c=1$ を使うと，証明すべき不等式は

$$\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{b}{(1-b)^2}+\frac{c}{(1-c)^2} \geqq \frac{9}{4}$$

となる．

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)^2} \quad (0<x<1) \quad \text{とおくと，} \quad f''(x)=\frac{2(2+x)}{(1-x)^4}>0.$$

したがって，$f(x)$ は凸関数であるから

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{4}. \qquad \blacksquare$$

5． n を 2 以上の整数とする．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_n}}+\cdots+\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} \geqq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

解　$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$　$(0<x<1)$ とおくと，$f''(x)=\dfrac{4-x}{4(1-x)^{\frac{5}{2}}}>0$.

$f(x)$ は凸関数であるから

$$\begin{aligned}&f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\\ &\geqq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

6． $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ は実数で，$0 \geqq \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=2\pi$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$4 \leqq \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n \leqq n\sin\frac{2\pi}{n}.$$

解　$f(\theta)=\sin\theta$　$\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$f''(\theta)=-\sin\theta \leqq 0$.

$f(\theta)$ は凹関数であるから

$$\begin{aligned} &f(\theta_1)+f(\theta_2)+\cdots+f(\theta_n) \\ &\leqq nf\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}{n}\right)=nf\left(\frac{2\pi}{n}\right)=n\sin\frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

次に，左側の不等式を証明する．

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\theta \geqq \dfrac{2}{\pi}\theta$ が成り立つから

$$f(\theta_i) \geqq \frac{2}{\pi}\theta_i \quad (1 \leqq i \leqq n).$$

これらの不等式の辺々を加える．

$$f(\theta_1)+f(\theta_2)+\cdots+f(\theta_n) \geqq \frac{2}{\pi}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=\frac{2}{\pi}\cdot 2\pi=4. \qquad \blacksquare$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{2}{\pi}\theta \leqq \sin\theta \leqq \theta$.

[証明]　$\theta=0$ のとき，不等式は等号が成り立つ．

$\theta \fallingdotseq 0$ のとき，$F(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\theta}\ \left(0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$F'(\theta)=\dfrac{\theta\cos\theta-\sin\theta}{\theta^2}$.

$G(\theta)=\theta\cos\theta-\sin\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$G'(\theta)=-\theta\sin\theta$.

$0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $G'(\theta)<0$ より $G(\theta)$ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で減少関数である．

また，$G(0)=0$ であるから，$0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $G(\theta)<0$ となる．よって，$F'(\theta)<0$.

$F(\theta)$ は減少関数であるから，$\dfrac{2}{\pi}=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \leqq F(\theta) < \lim\limits_{\theta\to+0}F(\theta)=1$.

ゆえに，$0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{2}{\pi}\theta \leqq \sin\theta < \theta.$$

よって，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{2}{\pi}\theta \leqq \sin\theta \leqq \theta$ である．$\blacksquare$

1.6　累次平均

1．a, b, c は正の定数とする．

(1)　(類　慶応大)　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

(2)　0 でない実数 r に対して，$M_r=\left(\dfrac{a^r+b^r+c^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}}$ とおくと，
$0<r<s$ のとき $M_r \leqq M_s$ が成り立つことを示せ．

解 (1)　$f(x)=\log\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)$ とおくと，$f(0)=0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0).$$

$$f'(x)=\frac{a^x\log a+b^x\log b+c^x\log c}{a^x+b^x+c^x}$$

より

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=f'(0)=\frac{\log a+\log b+\log c}{3}=\log\sqrt[3]{abc}$$

e^x は連続関数であるから*2

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{f(x)}{x}}=e^{\log\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}.$$

(2)　$u=a^r,\ v=b^r,\ w=c^r$ とおくと

$$\begin{aligned}M_r\leqq M_s &\iff \left(\frac{a^r+b^r+c^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}}\leqq\left(\frac{a^s+b^s+c^s}{3}\right)^{\frac{1}{s}}\\ &\iff \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^{\frac{1}{r}}\leqq\left(\frac{u^{\frac{s}{r}}+v^{\frac{s}{r}}+w^{\frac{s}{r}}}{3}\right)^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

不等式は同次式なので，$u+v+w=3$ と仮定して

$$\frac{u^{\frac{s}{r}}+v^{\frac{s}{r}}+w^{\frac{s}{r}}}{3}\geqq 1$$

*2 「$\log x$ は連続であるから…」と安易に書かないようにしたい．

を示せばよい．$g(x) = x^{\frac{s}{r}} \quad (x > 0)$ とおくと $\frac{s}{r} > 1$ より

$$g''(x) = \frac{s}{r}\left(\frac{s}{r} - 1\right)x^{\frac{s}{r}-2} > 0\,.$$

$g(x)$ は（狭義）凸関数であるから

$$\frac{g(u)+g(v)+g(w)}{3} \geqq g\left(\frac{u+v+w}{3}\right) = g(1) = 1. \qquad \blacksquare$$

［注 1］　等号成立は $a = b = c$ のときに限る．

［注 2］　$r < s < 0$ のときも $M_r \leqq M_s$ が成り立つ．

$u = a^r,\ v = b^r,\ w = c^r$ とおくと

$$\begin{aligned} M_r \leqq M_s &\Longleftrightarrow \left(\frac{a^r+b^r+c^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}} \leqq \left(\frac{a^s+b^s+c^s}{3}\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^{\frac{1}{r}} \leqq \left(\frac{u^{\frac{s}{r}}+v^{\frac{s}{r}}+w^{\frac{s}{r}}}{3}\right)^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

不等式は同次式なので，$u+v+w = 3$ と仮定して

$$\frac{u^{\frac{s}{r}}+v^{\frac{s}{r}}+w^{\frac{s}{r}}}{3} \leqq 1$$

を示せばよい．$g(x) = x^{\frac{s}{r}} \quad (x > 0)$ とおくと $0 < \frac{s}{r} < 1$ より

$$g''(x) = \frac{s}{r}\left(\frac{s}{r} - 1\right)x^{\frac{s}{r}-2} < 0\,.$$

$g(x)$ は凹関数であるから

$$\frac{g(u)+g(v)+g(w)}{3} \leqq g\left(\frac{u+v+w}{3}\right) = g(1) = 1. \quad \square$$

$x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$, 0 でない実数 r に対して，

$$M_r = \left(\frac{x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の r 次平均という．

相加平均は $r = 1$ のときである．すなわち

$$M_1 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

$r=-1$ のとき

$$M_{-1}=\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}$$

は調和平均である．

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x_1^x+x_2^x+\cdots+x_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

であるから，相乗平均は 0 次平均とみなすことができる．

正の数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と 実数 r に対して

$$M_0=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},\quad M_r=\left(\frac{x_1^r+x_2^r+\cdots+x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}\quad (r\neq 0)$$

と定めると， M_r は r の単調増加関数である．

2． a, b を正の数とするとき，$\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ と $\left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ の大小を比較せよ．

解　累次平均の不等式より，$M_2\leqq M_3$ ，すなわち

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqq\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

が成り立つ．等号は $a=b$ のときに限る．

よって

$$a=b \text{ のとき } \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$a\neq b \text{ のとき } \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$ ■

3． $a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき，

$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$，$\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$，$\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^9$ の大小を比較せよ．

解　累次平均の不等式より，$M_3 \geqq M_1 \geqq M_{\frac{1}{3}}$，すなわち

$$\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \frac{a+b+c}{3} \geqq \left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^3$$

が成り立つから

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqq \left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^9.$$

等号は $a=b=c$ のときに限る．

よって

$a=b=c$ のとき，$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} = \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^9.$

これ以外のとき，$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} > \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 > \left(\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^9.$　■

[注]　$f(x)=x^3\ (x>0)$ は凸関数であるから

$A,\ B,\ C>0$ のとき

$$\frac{A^3+B^3+C^3}{3} \geqq \left(\frac{A+B+C}{3}\right)^3. \qquad \cdots\cdots(*)$$

等号は $A=B=C$ のとき成り立つ．

$(*)$ において $A=a,\ B=b,\ C=c$ とおくと

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$ 等号は $a=b=c$ のときに限る．

$(*)$ において $A=\sqrt[3]{a},\ B=\sqrt[3]{b},\ C=\sqrt[3]{c}$ とおくと

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^3$$ 等号は $a=b=c$ のときに限る．

以上のことから

$a=b=c$ のとき，$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} = \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^9.$

これ以外のとき，$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} > \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 > \left(\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^9.$　□

4． $n \geqq 2$ とする．$x_1, x_2, \dots, x_n$ は正の実数で，$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)^2 \geqq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 1}{n(n-1)}.$$

解　累次平均の不等式より

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ を使うと

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

この不等式から

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \geqq \frac{1}{\sqrt{n}},\ \sqrt{n} \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

よって

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)^2 \geqq \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n(n-1)} \geqq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 1}{n(n-1)}. \qquad \blacksquare$$

2　補助定理 1(コーシー・シュワルツの不等式の変形)

多くの問題を解くときに有用な二つの補助定理を準備する．最初の補助定理 1 は，コーシー・シュワルツの不等式の変形版であり，数学的帰納法でも示すことができる．

補助定理 1　$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ は実数で，$b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ のとき，

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

等号は

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

のときに限る．

［証明 1］　数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 2$ のとき

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} - \frac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2} = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{b_1 b_2 (b_1 + b_2)} \geqq 0$$

から不等式は成り立つことがわかる．

等号成立は，$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ すなわち，$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$ のときに限る．

(ii) n のとき成り立つと仮定して，$n+1$ のときを考える．

$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}$ は実数で，$b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1} > 0$ とすると，仮定から

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

両辺に $\dfrac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}$ を加えると

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} + \frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}} \geqq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} + \frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}.$$

また，(i) より A_1，A_2，B_1，B_2 が実数で，$B_1 > 0$，$B_2 > 0$ のとき

$$\frac{A_1^2}{B_1} + \frac{A_2^2}{B_2} \geqq \frac{(A_1 + A_2)^2}{B_1 + B_2}$$

が成り立つから，

$A_1=a_1+a_2+\cdots+a_n,\ A_2=a_{n+1},\ B_1=b_1+b_2+\cdots+b_n,\ B_2=b_{n+1}$ とおくと

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}+\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}\geqq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1}}.$$

したがって

$$\begin{aligned}&\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}+\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}\\ \geqq\ &\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}+\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}\\ \geqq\ &\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1}}\end{aligned}$$

となり $n+1$ のときも不等式は成り立つ．

等号成立は，$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ かつ $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ すなわち $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ のときである．[*3]

(iii) (i)，(ii) よりすべての $n\geqq 2$ について不等式は成り立ち，等号は

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\quad \text{のときに限る．}$$ ■

［証明 **2**］　コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}&(b_1+b_2+\cdots+b_n)\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)\\ \geqq&\left(\sqrt{b_1}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\sqrt{b_2}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\sqrt{b_n}\cdot\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2.\end{aligned}$$

等号は，

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=0 \text{ または } \left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}},\frac{a_2}{\sqrt{b_2}},\ldots,\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)\,/\!/\,(\sqrt{b_1},\sqrt{b_2},\ldots,\sqrt{b_n})$$

すなわち

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\quad \text{のときに限る．}$$ ■

[*3] $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=k$ とおき，$a_i=kb_i$ を $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ に代入すればよい．

一般化したものについては，次の定理が知られている．補助定理 1 はこの定理の $p=1$ のときにあたるが，$a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ という条件はなくても成り立つことに注意してほしい．定理の証明については, 問題 147 の解答を参照.

定理　(Radon's inequality)

$p, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ が正の実数のとき

$$\frac{a_1^{p+1}}{b_1^p} + \frac{a_2^{p+1}}{b_2^p} + \cdots + \frac{a_n^{p+1}}{b_n^p} \geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{p+1}}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^p}.$$

等号は

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

のときに限る.

1．(Croatia 2004)　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geqq \frac{3}{4}.$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \\
\geqq\ & \frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b)} \\
=\ & \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} \geqq \frac{3}{4}$$

すなわち，$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ を示せばよい．この不等式は

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$$

より成り立つ.　■

2．(Balkan MO 1984)　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n} \geqq \frac{n}{2n-1}.$$

解 1　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n} \\
&= \frac{a_1^2}{a_1(2-a_1)} + \frac{a_2^2}{a_2(2-a_2)} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n(2-a_n)} \\
&\geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n) - (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)} \\
&= \frac{1}{2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)} \geqq \frac{n}{2n-1}$$

すなわち

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqq \frac{1}{n}$$

を示せばよい．これは，補助定理 1 を使うと

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &= \frac{a_1^2}{1} + \frac{a_2^2}{1} + \cdots + \frac{a_n^2}{1} \\
&\geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

より成り立つ．■

解 2　$f(x) = \dfrac{x}{2-x}$ $(0 < x < 1)$ とおくと，$f''(x) = \dfrac{4}{(2-x)^3} > 0$ より $f(x)$ は凸関数である．

Jensen の不等式より

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geqq nf\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}.$$ ■

３．(Baltic 2008)　a, b, c は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2} \geqq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\\ \geqq\ &\frac{(a+b+c)^2}{6+(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)}\\ =\ &\frac{(a+b+c)^2}{9+a+b+c}.\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(a+b+c)^2}{9+(a+b+c)} \geqq \frac{(a+b+c)^2}{12}$$

すなわち

$$a+b+c \leqq 3$$

を示せばよい．これは

$$(a+b+c)^2 \leqq 3(a^2+b^2+c^2)=9$$

から得られる．■

４．(Estonia 2004)　a, b, c は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca} \geqq 1.$$

解　補助定理 1 より

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}=\frac{1^2}{1+2ab}+\frac{1^2}{1+2bc}+\frac{1^2}{1+2ca} \geqq \frac{(1+1+1)^2}{3+2(ab+bc+ca)}.$$

したがって

$$\frac{9}{3+2(ab+bc+ca)} \geqq 1 \quad \text{すなわち} \quad ab+bc+ca \leqq 3$$

を示せばよい．これは

$$ab+bc+ca \leqq a^2+b^2+c^2=3$$

から得られる． ■

5．(AMO 1991)　$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2 \ldots, b_n$ は正の実数で，$a_1+a_2+\cdots+a_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geqq \frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} &\geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)} \\
&= \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)} \\
&= \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)} \\
&= \frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n).
\end{aligned}$$

■

6．(Ireland 1999)　a, b, c, d は正の実数で，$a+b+c+d=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a} \geqq \frac{1}{2}.$$

解　補助定理 1 より

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a} \geqq \frac{(a+b+c+d)^2}{2(a+b+c+d)}=\frac{1}{2}.$$

よって

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a} \geqq \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

7．a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\\
&=\frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)}+\frac{b^4}{b(b^2+bc+c^2)}+\frac{c^4}{c(c^2+ca+a^2)}\\
&=\frac{(a^2)^2}{a(a^2+ab+b^2)}+\frac{(b^2)^2}{b(b^2+bc+c^2)}+\frac{(c^2)^2}{c(c^2+ca+a^2)}\\
&\geqq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}.
\end{aligned}$$

ここで，等式

$$a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

が成立するので，証明すべき不等式は成り立つ． $\blacksquare$

類題　(Tournament of the Towns 1998)　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqq \frac{a+b+c}{3}.$$

7．の不等式で $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geqq \dfrac{a+b+c}{3}$ すなわち　$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$ を示せばよい．

8． a, b, c は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b} \geqq 1.$$

解 1　補助定理 1 と $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ を使うと

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b} &= \frac{a^4}{a(b+2c)}+\frac{b^4}{b(c+2a)}+\frac{c^4}{c(a+2b)} \\ &\geqq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca)} \\ &\geqq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \\ &= 1.\end{aligned}$$

■

解 2　相加平均・相乗平均の不等式と $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ を使うと

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{a(b+2c)}{9} \geqq 2\sqrt{\frac{a^3}{b+2c}\cdot\frac{a(b+2c)}{9}} = \frac{2a^2}{3}.$$

同様にして

$$\frac{b^3}{c+2a}+\frac{b(c+2a)}{9} \geqq \frac{2b^2}{3},\quad \frac{c^3}{a+2b}+\frac{c(a+2b)}{9} \geqq \frac{2c^2}{3}.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b} \\ &\geqq \frac{2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)}{3} \\ &\geqq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \\ &= 1.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b} \geqq 1.$$

■

9．(Nguyen Van Thach)　a, b, c は正の実数で，$ab+bc+ca=\dfrac{1}{3}$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1} \geqq \frac{1}{a+b+c}.$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\\
&=\frac{a^2}{a(a^2-bc+1)}+\frac{b^2}{b(b^2-ca+1)}+\frac{c^2}{c(c^2-ab+1)}\\
&\geqq \frac{(a+b+c)^2}{a(a^2-bc+1)+b(b^2-ca+1)+c(c^2-ab+1)}\\
&=\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+a+b+c}\\
&=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+1)}\\
&=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+3(ab+bc+ca)}\\
&=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}\\
&=\frac{a+b+c}{(a+b+c)^2}\\
&=\frac{1}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1} \geqq \frac{1}{a+b+c}. \qquad \blacksquare$$

10. a, b, c は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c} \geqq 3.$$

解 1　証明すべき不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c} \geqq 3 \\
\iff& -1+\frac{2}{2-a}-1+\frac{2}{2-b}-1+\frac{2}{2-c} \geqq 6-3 \\
\iff& \frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c} \geqq 3\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c} \geqq 3$$

を示せばよい．補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c} \\
&=\frac{a^2}{a(2-a)}+\frac{b^2}{b(2-b)}+\frac{c^2}{c(2-c)} \\
&=\frac{(a+b+c)^2}{a(2-a)+b(2-b)+c(2-c)} \\
&=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)} \\
&=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3}.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3} \geqq 3$$

すなわち

$$(a+b+c)^2-6(a+b+c)+9 \geqq 0$$

を示せばよい．この不等式は

$$(a+b+c)^2-6(a+b+c)+9=(a+b+c-3)^2 \geqq 0$$

より成り立つ．■

解 2　$p=a^2,\ q=b^2,\ r=c^2$ とおくと，$p+q+r=3$ で，証明すべき不等式は

$$\frac{1}{2-\sqrt{p}}+\frac{1}{2-\sqrt{q}}+\frac{1}{2-\sqrt{r}} \geqq 3$$

となる．

$f(x)=\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}\quad (0<x<3)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2},\ f'(1)=\frac{1}{2}\,.$$

$y=f(x)$ 上の点 $(1,1)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ となるから，$y=f(x)$ との上下関係を調べる．

$$\begin{aligned} f(x)-\frac{x+1}{2} &= \frac{1}{2-\sqrt{x}}-\frac{x+1}{2} \\ &= \frac{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}{2(2-\sqrt{x})} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}{2(2-\sqrt{x})} \geqq 0\,. \end{aligned}$$

ゆえに

$$f(x) \geqq \frac{x+1}{2}.$$

したがって

$$f(p)+f(q)+f(r) \geqq \frac{(p+q+r)+3}{2}=3.$$

よって

$$\frac{1}{2-\sqrt{p}}+\frac{1}{2-\sqrt{q}}+\frac{1}{2-\sqrt{r}} \geqq 3.$$

■

11.　x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z} \leqq \frac{3}{4}.$$

解 1　証明すべき不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z} \leqq \frac{3}{4}\\
\iff & 1-\frac{x+y+z}{2x+y+z}+1-\frac{x+y+z}{x+2y+z}+1-\frac{x+y+z}{x+y+2z} \leqq \frac{3}{4}\\
\iff & \frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z} \geqq \frac{9}{4(x+y+z)}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z} \geqq \frac{9}{4(x+y+z)}$$

を示せばよい．補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\\
=&\frac{1^2}{2x+y+z}+\frac{1^2}{x+2y+z}+\frac{1^2}{x+y+2z}\\
\geqq&\frac{(1+1+1)^2}{2x+y+z+x+2y+z+x+y+2z}\\
=&\frac{9}{4(x+y+z)}.
\end{aligned}$$

■

解 2　$s=x+y+z$ とおくと，証明すべき不等式は

$$\frac{x}{s+x}+\frac{y}{s+y}+\frac{z}{s+z} \leqq \frac{3}{4}$$

となる．　$f(t)=\dfrac{t}{s+t}$　$(t>0)$ とおくと，$f''(t)=-\dfrac{2s}{(s+t)^3}<0$ であるから，$f(t)$ は凹関数である．

よって

$$f(x)+f(y)+f(z) \leqq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{s}{3}\right)=3\cdot\frac{\frac{s}{3}}{s+\frac{s}{3}}=\frac{3}{4}.$$

■

[注]　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $x+y+z=3$ と仮定できる．（後は解 2 で $s=3$ とおいたものと同様.）

12. a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \geqq \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 &= \frac{(a^2)^2}{a^2(b+c)^2}+\frac{(b^2)^2}{b^2(c+a)^2}+\frac{(c^2)^2}{c^2(a+b)^2}\\ &\geqq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2}.\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2} \geqq \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

すなわち

$$4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) \geqq 3\left\{a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2\right\}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}&4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) \geqq 3\left\{a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2\right\}\\ \Longleftrightarrow\ &4(a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3)\\ &\geqq 6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c) \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

より，2 つの不等式

$$a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3 \geqq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

$$a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3 \geqq 2abc(a+b+c) \qquad \cdots\cdots(\bigstar\bigstar)$$

を示せば $3\times(\bigstar)+(\bigstar\bigstar)$ から $(*)$ は得られる．

$(\bigstar)$ の証明

$$\begin{aligned}&a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\ &=ab(a^2-2ab+b^2)+bc(b^2-2bc+c^2)+ca(c^2-2ca+a^2)\\ &=ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2 \geqq 0.\end{aligned}$$

よって，$(\bigstar)$ は成り立つ．

$(\bigstar\bigstar)$ の証明

重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{3}a^3b+\frac{1}{3}a^3c+\frac{1}{6}b^3c+\frac{1}{6}bc^3 \geqq \left(a^3b\right)^{\frac{1}{3}}\left(a^3c\right)^{\frac{1}{3}}\left(b^3c\right)^{\frac{1}{6}}\left(bc^3\right)^{\frac{1}{6}}=a^2bc.$$

ゆえに

$$\frac{1}{3}a^3b+\frac{1}{3}a^3c+\frac{1}{6}b^3c+\frac{1}{6}bc^3 \geqq a^2bc.$$

同様にして

$$\frac{1}{3}b^3c+\frac{1}{3}b^3a+\frac{1}{6}c^3a+\frac{1}{6}ca^3 \geqq b^2ca,$$

$$\frac{1}{3}c^3a+\frac{1}{3}c^3b+\frac{1}{6}a^3b+\frac{1}{6}ab^3 \geqq c^2ab.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3}{2} \geqq abc(a+b+c).$$

よって

$$a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3 \geqq 2abc(a+b+c).$$ ■

[注]　不等式 $(*)$

$$2(a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3) \geqq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+abc(a+b+c)$$

の証明は Muirhead の定理を使ってもよい．

$$(*) \Longleftrightarrow 4[(3,1,0)] \geqq 3[(2,2,0)]+[(2,1,1)].$$

Muirhead の定理より

$$3[(3,1,0)] \geqq 3[(2,2,0)],\ [(3,1,0)] \geqq [(2,1,1)]$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えると，$4[(3,1,0)] \geqq 3[(2,2,0)]+[(2,1,1)]$ を得る． □

13.（India）　a,b,c は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3abc$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{c^2a^2}+\frac{c}{a^2b^2} \geqq \frac{9}{a+b+c}.$$

解　補助定理 1 より

$$\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{c^2a^2}+\frac{c}{a^2b^2} \geqq \frac{\left(\dfrac{a}{bc}\right)^2}{a}+\frac{\left(\dfrac{b}{ca}\right)^2}{b}+\frac{\left(\dfrac{c}{ab}\right)^2}{c}$$
$$\geqq \frac{\left(\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\right)^2}{a+b+c}$$
$$=\frac{\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}\right)^2}{a+b+c}$$
$$=\frac{9}{a+b+c}.$$

■

14. (Romania 1999)　$x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ は正の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqq x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \leqq \frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}.$$

解　補助定理 1 より

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}=\frac{x_1^2}{x_1y_1}+\frac{x_2^2}{x_2y_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_ny_n}$$
$$\geqq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}$$
$$\geqq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$
$$=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

■

15. (Vasile Cîrtoaje , Gazeta Mathematica)　a, b, c は正の実数で，$abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1} \geqq 1.$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\\
&=\frac{a^2}{a(b+c+1)}+\frac{b^2}{b(c+a+1)}+\frac{c^2}{c(a+b+1)}\\
&\geqq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)+a+b+c}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)+a+b+c}\geqq 1$$

すなわち

$$(a+b+c)^2\geqq 2(ab+bc+ca)+a+b+c$$

を示せばよい.

$$\begin{gathered}
(a+b+c)^2\geqq 2(ab+bc+ca)+a+b+c\\
\Longleftrightarrow a^2+b^2+c^2\geqq a+b+c\left(=\sqrt[3]{abc}(a+b+c)\right).
\end{gathered}$$

重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{6}b^2+\frac{1}{6}c^2\geqq (a^2)^{\frac{2}{3}}(b^2)^{\frac{1}{6}}(c^2)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=a(abc)^{\frac{1}{3}}=a.$$

よって

$$\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{6}b^2+\frac{1}{6}c^2\geqq a.$$

同様にして

$$\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{3}b^2+\frac{1}{6}c^2\geqq b,\ \ \frac{1}{6}a^2+\frac{1}{6}b^2+\frac{2}{3}c^2\geqq c.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$a^2+b^2+c^2\geqq a+b+c.$$ ■

[注]　不等式 $a^2+b^2+c^2\geqq a+b+c\left(=\sqrt[3]{abc}(a+b+c)\right)$ は Muirhead の定理を使い

$$[(2,0,0)\geqq\left[\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right]$$

から成り立つことがわかる.

3　補助定理 2(ヘルダーの不等式の変形)

補助定理 2 はヘルダーの不等式の特別な場合になっているが，補助定理 1 と同様に初等的な不等式の証明に利用できる．

補助定理 2　$p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, r_1, r_2, \ldots, r_n$ が正の実数のとき

$$(p_1^3 + p_2^3 + \cdots + p_n^3)(q_1^3 + q_2^3 + \cdots + q_n^3)(r_1^3 + r_2^3 + \cdots + r_n^3)$$
$$\geqq (p_1q_1r_1 + p_2q_2r_2 + \cdots + p_nq_nr_n)^3$$

が成り立つ．等号は

$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mathbin{/\!/} (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ かつ $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mathbin{/\!/} (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ のときに限る．

［証明 1］　コーシー・シュワルツの不等式より

$$(p_1^3 + p_2^3 + \cdots + p_n^3)(q_1^3 + q_2^3 + \cdots + q_n^3) \geqq \left(p_1^{\frac{3}{2}}q_1^{\frac{3}{2}} + p_2^{\frac{3}{2}}q_2^{\frac{3}{2}} + \cdots + p_n^{\frac{3}{2}}q_n^{\frac{3}{2}}\right)^2,$$
$$(r_1^3 + r_2^3 + \cdots + r_n^3)(p_1q_1r_1 + p_2q_2r_2 + \cdots + p_nq_nr_n)$$
$$\geqq \left(p_1^{\frac{1}{2}}q_1^{\frac{1}{2}}r_1^2 + p_2^{\frac{1}{2}}q_2^{\frac{1}{2}}r_2^2 + \cdots + p_n^{\frac{1}{2}}q_n^{\frac{1}{2}}r_n^2\right)^2.$$

これら 2 つの不等式の辺々をかけ合わせると

$$(p_1^3 + p_2^3 + \cdots + p_n^3)(q_1^3 + q_2^3 + \cdots + q_n^3)(r_1^3 + r_2^3 + \cdots + r_n^3)$$
$$\times (p_1q_1r_1 + p_2q_2r_2 + \cdots + p_nq_nr_n)$$
$$\geqq \left\{\left(p_1^{\frac{3}{2}}q_1^{\frac{3}{2}} + p_2^{\frac{3}{2}}q_2^{\frac{3}{2}} + \cdots + p_n^{\frac{3}{2}}q_n^{\frac{3}{2}}\right)\left(p_1^{\frac{1}{2}}q_1^{\frac{1}{2}}r_1^2 + p_2^{\frac{1}{2}}q_2^{\frac{1}{2}}r_2^2 + \cdots + p_n^{\frac{1}{2}}q_n^{\frac{1}{2}}r_n^2\right)\right\}^2$$
$$\overset{Schwarz}{\geqq} \left\{(p_1q_1r_1 + p_2q_2r_2 + \cdots + p_nq_nr_n)^2\right\}^2$$
$$= (p_1q_1r_1 + p_2q_2r_2 + \cdots + p_nq_nr_n)^4.$$

したがって

$$(p_1^3+p_2^3+\cdots+p_n^3)(q_1^3+q_2^3+\cdots+q_n^3)(r_1^3+r_2^3+\cdots+r_n^3) \geqq (p_1q_1r_1+p_2q_2r_2+\cdots+p_nq_nr_n)^3$$

が成り立つ．等号は

$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mathbin{/\!/} (q_1, q_2, \ldots, q_n)$

かつ $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \mathbin{/\!/} (\sqrt[3]{p_1q_1r_1}, \sqrt[3]{p_2q_2r_2}, \ldots, \sqrt[3]{p_nq_nr_n})$

かつ $\left(\sqrt[4]{p_1^3q_1^3}, \sqrt[4]{p_2^3q_2^3}, \dots, \sqrt[4]{p_n^3q_n^3}\right) /\!\!/ (\sqrt[4]{p_1q_1}r_1, \sqrt[4]{p_2q_2}r_2, \dots, \sqrt[4]{p_nq_n}r_n)$
のときに限り成り立つ.

$$\begin{aligned}
&(r_1, r_2, \dots, r_n) /\!\!/ (\sqrt[3]{p_1q_1r_1}, \sqrt[3]{p_2q_2r_2}, \dots, \sqrt[3]{p_nq_nr_n}) \\
\iff &(r_1, r_2, \dots, r_n) /\!\!/ (\sqrt{p_1q_1}, \sqrt{p_2q_2}, \dots, \sqrt{p_nq_n}), \\
&\left(\sqrt[4]{p_1^3q_1^3}, \sqrt[4]{p_2^3q_2^3}, \dots, \sqrt[4]{p_n^3q_n^3}\right) /\!\!/ (\sqrt[4]{p_1q_1}r_1, \sqrt[4]{p_2q_2}r_2, \dots, \sqrt[4]{p_nq_n}r_n) \\
\iff &(r_1, r_2, \dots, r_n) /\!\!/ (\sqrt{p_1q_1}, \sqrt{p_2q_2}, \dots, \sqrt{p_nq_n})
\end{aligned}$$

であるから，等号成立条件は

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) /\!\!/ (q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ かつ } (r_1, r_2, \dots, r_n) /\!\!/ (\sqrt{p_1q_1}, \sqrt{p_2q_2}, \dots, \sqrt{p_nq_n})$$

すなわち

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) /\!\!/ (q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ かつ } (r_1, r_2, \dots, r_n) /\!\!/ (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

となる. ■

［**証明 2**］　任意の正の実数 x, y, z に対して，相加平均・相乗平均の不等式より

$$xyz \leqq \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \qquad (\text{等号は } x=y=z \text{ のときに限る}).$$

この不等式において，$X = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} p_i^3}$, $Y = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} q_i^3}$, $Z = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} r_i^3}$ とし，

$$x = \frac{p_i}{X},\ y = \frac{q_i}{Y},\ z = \frac{r_i}{Z}$$

とおくと

$$\frac{p_iq_ir_i}{XYZ} \leqq \frac{1}{3}\left(\frac{p_i^3}{X^3} + \frac{q_i^3}{Y^3} + \frac{r_i^3}{Z^3}\right).$$

$i = 1, 2, \dots, n$ とおいた n 個の不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n} p_iq_ir_i}{XYZ} &\leqq \frac{1}{3}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^3}{X^3} + \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^3}{Y^3} + \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^3}{Z^3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{X^3}{X^3} + \frac{Y^3}{Y^3} + \frac{Z^3}{Z^3}\right) = 1\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{i=1}^{n} p_iq_ir_i \leqq XYZ \quad \text{から} \quad \sum_{i=1}^{n} p_iq_ir_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

すなわち，次の不等式が成り立つ．

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i r_i\right)^3 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^3\right).$$

等号は

$$\frac{p_i}{\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} p_i^3}} = \frac{q_i}{\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} q_i^3}} = \frac{r_i}{\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} r_i^3}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

すなわち，$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mathbin{/\!/} (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ かつ $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mathbin{/\!/} (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ のときに限る． ■

$p_i \geqq 0$，$q_i \geqq 0$，$r_i \geqq 0$ となる場合を考察する場合もあるので，次のようにまとめておく．

補助定理 3 $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, r_1, r_2, \ldots, r_n$ が負でない実数のとき

$$\begin{aligned}&(p_1^3 + p_2^3 + \cdots + p_n^3)(q_1^3 + q_2^3 + \cdots + q_n^3)(r_1^3 + r_2^3 + \cdots + r_n^3) \\ &\geqq (p_1 q_1 r_1 + p_2 q_2 r_2 + \cdots + p_n q_n r_n)^3 \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

が成り立つ．等号は $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ または $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$ または $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$ または「$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mathbin{/\!/} (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ かつ $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mathbin{/\!/} (r_1, r_2, \ldots, r_n)$」のときに限る．

［証明］ $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 等が $(0, 0, \ldots, 0)$ になるかどうかで場合分けをする．

(i) $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$，$(q_1, q_2, \ldots, q_n)$，$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ のなかに $(0, 0, \ldots, 0)$ と等しいものがある場合，不等式 $(*)$ において等号が成り立つ．

(ii) $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$，$(q_1, q_2, \ldots, q_n)$，$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ すべてが $(0, 0, \ldots, 0)$ と異なる場合

任意の負でない実数 x，y，z に対して，不等式

$$xyz \leqq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \qquad (\text{等号は } x = y = z \text{ のときに限る．})$$

が成り立ち，

$$X = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} p_i^3} > 0, \quad Y = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} q_i^3} > 0, \quad Z = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} r_i^3} > 0$$

であるから，補助定理 2 の証明 2 と全く同様に不等式は証明できる． ■

補助定理 2 の一般形は次のようになる．(証明は，定理 10 (Hölder) 参照．)

定理　(Hölder) a_{ij} $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n)$ が正の実数のとき

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \geqq \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{ij}}\right)^{m}$$

が成り立つ．

等号は，すべての i，j について $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \mathbin{/\!/} (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$ のときに限る．

$m = 4$, 5 のときに具体的に書いてみると

$$\begin{aligned}&(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})\cdots(a_{41}+a_{42}+\cdots+a_{4n})\\ \geqq\ &(\sqrt[4]{a_{11}a_{21}a_{31}a_{41}}+\sqrt[4]{a_{12}a_{22}a_{32}a_{42}}+\cdots+\sqrt[4]{a_{1n}a_{2n}a_{3n}a_{4n}})^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})\cdots(a_{51}+a_{52}+\cdots+a_{5n})\\ \geqq\ &(\sqrt[5]{a_{11}a_{21}\cdots a_{51}}+\sqrt[5]{a_{12}a_{22}\cdots a_{52}}+\cdots+\sqrt[5]{a_{1n}a_{2n}\cdots a_{5n}})^5\end{aligned}$$

となり，補助定理 2 と使い方は同じである．

補助定理 1 では分子が 2 次であったが，分子が p 次ものとして，次の補助定理がある．

補助定理 4　p を 3 以上の整数とする．$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ が正の実数のとき

$$\frac{a_1^p}{b_1}+\frac{a_2^p}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^p}{b_n} \geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}{n^{p-2}(b_1+b_2+\cdots+b_n)}.$$

等号は

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n,\ \ b_1 = b_2 = \cdots = b_n$$

のときに限る．

［証明］　ヘルダーの不等式より

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n})\cdots(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n})}^{p-2}(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\
&\quad\times\left(\frac{a_1^p}{b_1}+\frac{a_2^p}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^p}{b_n}\right)\\
&\geqq\left(\sqrt[p]{b_1\cdot\frac{a_1^p}{b_1}}+\sqrt[p]{b_2\cdot\frac{a_2^p}{b_2}}+\cdots+\sqrt[p]{b_n\cdot\frac{a_n^p}{b_n}}\right)^p\\
&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p\,.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{a_1^p}{b_1}+\frac{a_2^p}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^p}{b_n}\geqq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}{n^{p-2}(b_1+b_2+\cdots+b_n)}.
$$

等号は

$$
(1,1,\ldots,1)\mathbin{/\!/}(b_1,b_2,\ldots,b_n)\mathbin{/\!/}\left(\frac{a_1^p}{b_1},\frac{a_2^p}{b_2},\ldots,\frac{a_n^p}{b_n}\right)
$$

すなわち

$$
a_1=a_2=\cdots=a_n,\ \ b_1=b_2=\cdots=b_n
$$

のときに限る．　■

補助定理 4 で $p=3$ とおくと

$a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ が正の実数のとき

$$
\frac{a_1^3}{b_1}+\frac{a_2^3}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^3}{b_n}\geqq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^3}{n(b_1+b_2+\cdots+b_n)}.
$$

等号は

$$
a_1=a_2=\cdots=a_n,\ \ b_1=b_2=\cdots=b_n
$$

のときに限る．

1．(京都府医大)　a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a+b+c}{3} \leqq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

解 1　補助定理 2 より

$$(a^3+b^3+c^3)(1^3+1^3+1^3)(1^3+1^3+1^3) \geqq (a+b+c)^3\,.$$

よって，$\dfrac{a+b+c}{3} \leqq \sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}$.　■

解 2　累次平均の不等式より $M_1(a,b,c) \leqq M_3(a,b,c)$.

よって，$\dfrac{a+b+c}{3} \leqq \sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}$.　■

解 3　$f(x) = x^3\ (x>0)$ は $f''(x) = 6x > 0$ より凸関数である．

Jensen の不等式より

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

よって，$\dfrac{a+b+c}{3} \leqq \sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}$.　■

2．a,b が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

解 1　$\left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow \left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{2} \geqq \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{3}$.

補助定理 2 より

$$\begin{aligned} 2(a^3+b^3)^2 &= (1+1)(a^3+b^3)(a^3+b^3) \\ &\geqq \left(\sqrt[3]{1\cdot a^3\cdot a^3} + \sqrt[3]{1\cdot b^3\cdot b^3}\right)^3 = (a^2+b^2)^3\,. \end{aligned}$$

よって

$$\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$　■

解 2　累次平均の不等式より $M_3(a\ \ b) \geqq M_2(a\ \ b)$.

よって，$\left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.　■

3．(甲南大)　a,b,x,y が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}\right)(ax+by)^2 \geqq (a+b)^3.$$

解　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}\right)(ax+by)^2 &= \left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}\right)(ax+by)(ax+by)\\ &\geqq \left(\sqrt[3]{\frac{a}{x^2}\cdot ax\cdot ax}+\sqrt[3]{\frac{b}{y^2}\cdot by\cdot by}\right)^3\\ &= (a+b)^3.\end{aligned}$$

よって

$$\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}\right)(ax+by)^2 \geqq (a+b)^3.$$

■

4．a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqq \frac{(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca)}.$$

解　補助定理 2 より

$$(1+1+1)(ab+bc+ca)\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)$$

$$\geqq \left(\sqrt[3]{1\cdot ab\cdot\frac{a^2}{b}}+\sqrt[3]{1\cdot bc\cdot\frac{b^2}{c}}+\sqrt[3]{1\cdot ca\cdot\frac{c^2}{a}}\right)^3=(a+b+c)^3.$$

よって

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqq \frac{(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca)}.$$

■

5．a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \sqrt{\frac{27}{ab+bc+ca}}.$$

解　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2(ab+bc+ca)\\
&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)(ab+bc+ca)\\
&\geqq\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot ab}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\cdot bc}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}\cdot ca}\right)^3=27\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\sqrt{\frac{27}{ab+bc+ca}}.$$

■

6．a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\geqq\frac{27}{(a+b+c)^2}.$$

解　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\right)&=(b+c+a)(b+c+a)\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\right)\\
&\geqq\left(\sqrt[3]{b\cdot b\cdot\frac{a}{b^3}}+\sqrt[3]{c\cdot c\cdot\frac{b}{c^3}}+\sqrt[3]{a\cdot a\cdot\frac{c}{a^3}}\right)^3\\
&=\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right)^3\\
&\overset{AM\geqq GM}{\geqq}\left(3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[3]{\frac{c}{a}}}\right)^3=27\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\geqq\frac{27}{(a+b+c)^2}.$$

■

7．a,b,c は正の実数で $a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\geqq 3.$$

解　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}3(a+b+c)\left(\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\right) &= (1+1+1)(b+c+a)\left(\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\right)\\ &\geqq \left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{c^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{a^2}}\right)^3\\ &\overset{AM\geqq GM}{\geqq} \left(3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{c^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{c^2}{a^2}}}\right)^3 = 27\,.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3} \geqq \frac{9}{a+b+c}.$$

したがって，$\dfrac{9}{a+b+c} \geqq 3$ すなわち，$a+b+c \leqq 3$ を示せばよい．これは

$$(a+b+c)^2 \leqq 3(a^2+b^2+c^2) = 9$$

から成り立つ．■

［注］　$a^2+b^2+c^2=3$ のかわりに，k を正の整数で，$a^k+b^k+c^k=3$ としても不等式は成り立つ．上の証明のように，$a+b+c \leqq 3$ を示せばよい．$k=1$ のときは明らかに成り立つから，$k \geqq 2$ とする．ヘルダーの不等式より

$$\begin{aligned}3^k = 3^{k-1}(a^k+b^k+c^k) &= \underbrace{(1+1+1)(1+1+1)\cdots(1+1+1)}_{k-1}(a^k+b^k+c^k)\\ &\geqq (a+b+c)^k\,.\end{aligned}$$

よって，$a+b+c \leqq 3$ は成り立つ．□

8．a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geqq \frac{a+b+c}{2}.$$

解 1　補助定理 2 より

$$
\begin{aligned}
&2(a+b+c)^2\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)\\
&=(a+b+c)\bigl\{(a+b)+(b+c)+(c+a)\bigr\}\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)\\
&\geqq\left(\sqrt[3]{a\cdot(a+b)\cdot\frac{a^2}{a+b}}+\sqrt[3]{b\cdot(b+c)\cdot\frac{b^2}{b+c}}+\sqrt[3]{c\cdot(c+a)\cdot\frac{c^2}{c+a}}\right)^3\\
&=(a+b+c)^3.
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geqq\frac{a+b+c}{2}.$$

■

解 2　コーシー・シュワルツの不等式より

$$
\begin{aligned}
&2(a+b+c)\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)\\
&=\bigl\{(a+b)+(b+c)+(c+a)\bigr\}\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)\\
&\geqq\left(\sqrt{(a+b)\cdot\frac{a^2}{a+b}}+\sqrt{(b+c)\cdot\frac{b^2}{b+c}}+\sqrt{(c+a)\cdot\frac{c^2}{c+a}}\right)^2\\
&=(a+b+c)^2.
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geqq\frac{a+b+c}{2}.$$

■

解 3　補助定理 1 より

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}&\geqq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+b+c+c+a}\\
&=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}.
\end{aligned}
$$

■

9．a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\geqq\sqrt{\frac{abc(a+b+c)}{ab+bc+ca}}.$$

解

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geqq \sqrt{\frac{abc(a+b+c)}{ab+bc+ca}} \\
\iff& \frac{(a^2+b^2+c^2)^2(ab+bc+ca)}{abc} \geqq (a+b+c)^3 \\
\iff& (a^2+b^2+c^2)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq (a+b+c)^3\,.
\end{aligned}
$$

最後の不等式は，補助定理 2 より

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\
&= (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\
&\geqq \left(\sqrt[3]{a^2\cdot a^2\cdot\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{b^2\cdot b^2\cdot\frac{1}{b}}+\sqrt[3]{c^2\cdot c^2\cdot\frac{1}{c}}\right)^3 \\
&= (a+b+c)^3\,.
\end{aligned}
$$

■

10. a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt[3]{99} \geqq \sqrt[3]{1+8a}+\sqrt[3]{1+8b}+\sqrt[3]{1+8c}.$$

解 1　$(1+8a)+(1+8b)+(1+8c)=3+8(a+b+c)=11$ に注意して補助定理 2 を使うと

$$
\begin{aligned}
99 &= \bigl\{(1+8a)+(1+8b)+(1+8c)\bigr\}(1+1+1)(1+1+1) \\
&\geqq \left(\sqrt[3]{(1+8a)\cdot 1\cdot 1}+\sqrt[3]{(1+8b)\cdot 1\cdot 1}+\sqrt[3]{(1+8c)\cdot 1\cdot 1}\right)^3 \\
&= \left(\sqrt[3]{1+8a}+\sqrt[3]{1+8b}+\sqrt[3]{1+8c}\right)^3\,.
\end{aligned}
$$

よって，$\sqrt[3]{99} \geqq \sqrt[3]{1+8a}+\sqrt[3]{1+8b}+\sqrt[3]{1+8c}.$ ■

解 2　$f(x)=(1+8x)^{\frac{1}{3}}\quad(x>0)$ とおくと，$f''(x)=-\dfrac{128}{9}(1+8x)^{-\frac{5}{3}}<0$ より $f(x)$ は凹関数である．
よって

$$f(a)+f(b)+f(c) \leqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt[3]{99}.$$

■

11. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqq \left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)^n\,.$$

解 1　ヘルダーの不等式より

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqq \left(\sqrt[n]{1\cdot 1\cdots 1}+\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\right)^n$$
$$= (1+\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n})^n.$$

よって，$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqq \left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)^n$. ■

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n} \geqq \frac{n}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}}.$$

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_n} \geqq \frac{n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}}.$$

2 つの不等式の辺々を加えると

$$n \geqq \frac{n\left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}}.$$

よって，$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqq \left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)^n$. ■

12.　a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a(3b+1)}+\frac{1}{b(3c+1)}+\frac{1}{c(3a+1)} \geqq \frac{9}{2}.$$

解 1　補助定理 1 より

$$\frac{1}{a(3b+1)}+\frac{1}{b(3c+1)}+\frac{1}{c(3a+1)} \geqq \frac{(1+1+1)^2}{a(3b+1)+b(3c+1)+c(3a+1)}$$
$$= \frac{9}{(a+b+c)+3(ab+bc+ca)}$$
$$= \frac{9}{1+3(ab+bc+ca)}.$$

したがって，$\dfrac{9}{1+3(ab+bc+ca)} \geqq \dfrac{9}{2}$ すなわち $3(ab+bc+ca) \leqq 1$ を示せばよい．これは，$3(ab+bc+ca) \leqq (a+b+c)^2 = 1$ から得られる． ■

解 2　補助定理 2 より

$$
\begin{aligned}
&6\left(\frac{1}{a(3b+1)}+\frac{1}{b(3c+1)}+\frac{1}{c(3a+1)}\right)\\
&=(a+b+c)\bigl\{(3b+1)+(3c+1)+(3a+1)\bigr\}\\
&\quad\times\left(\frac{1}{a(3b+1)}+\frac{1}{b(3c+1)}+\frac{1}{c(3a+1)}\right)\\
&\geqq\left(\sqrt[3]{a\cdot(3b+1)\cdot\frac{1}{a(3b+1)}}+\sqrt[3]{b\cdot(3c+1)\cdot\frac{1}{b(3c+1)}}\right.\\
&\quad\left.+\sqrt[3]{c\cdot(3a+1)\cdot\frac{1}{c(3a+1)}}\right)^3\\
&=27\,.
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{1}{a(3b+1)}+\frac{1}{b(3c+1)}+\frac{1}{c(3a+1)}\geqq\frac{9}{2}.$$

■

13. (Balkan 2002)　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)}\geqq\frac{27}{(a+b+c)^2}.$$

解 1　補助定理 2 より

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^2\left(\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)}\right)\\
&=\bigl\{(a+b)+(b+c)+(c+a)\bigr\}(b+c+a)\left(\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\right)\\
&\geqq\left(\sqrt[3]{(a+b)\cdot b\cdot\frac{1}{b(a+b)}}+\sqrt[3]{(b+c)\cdot c\cdot\frac{1}{c(b+c)}}+\sqrt[3]{(c+a)\cdot a\cdot\frac{1}{a(c+a)}}\right)^3\\
&=27\,.
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)}\geqq\frac{27}{(a+b+c)^2}.$ ■

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)} \geqq 6\sqrt[3]{\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{abc} \quad \text{から} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geqq \frac{3}{a+b+c} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$2(a+b+c)=(a+b)+(b+c)+(c+a) \geqq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

から

$$\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geqq \frac{3}{2(a+b+c)} \qquad \cdots\cdots ③$$

①，②，③より

$$\begin{aligned}\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)} &\geqq 6\sqrt[3]{\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}\\ &\geqq 6\cdot\frac{3}{a+b+c}\cdot\frac{3}{2(a+b+c)}\\ &=\frac{27}{(a+b+c)^2}.\end{aligned}$$

■

14.　a, b は正の実数で，$a^2+b^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{b}{a^2+1}+\frac{a}{b^2+1}\right) \geqq \frac{8}{3}.$$

解　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}&3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{b}{a^2+1}+\frac{a}{b^2+1}\right)\\ &=(a^2+1+b^2+1)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{b}{a^2+1}+\frac{a}{b^2+1}\right)\\ &\geqq \left(\sqrt[3]{(a^2+1)\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{a^2+1}}+\sqrt[3]{(b^2+1)\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b^2+1}}\right)^3=8.\end{aligned}$$

よって

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{b}{a^2+1}+\frac{a}{b^2+1}\right) \geqq \frac{8}{3}.$$

■

15. a, b が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geqq \frac{8}{(a+b)^2}.$$

解 1 $\quad \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2} \geqq \dfrac{8}{(a+b)^2} \iff (a+b)^2(a^2+b^2) \geqq 8a^2b^2.$

$(a+b)^2(a^2+b^2)-8a^2b^2 = a^4+2a^3b-6a^2b^2+2ab^3+b^4 = (a-b)^2(a^2+4ab+b^2) \geqq 0.$

よって

$$(a+b)^2(a^2+b^2) \geqq 8a^2b^2. \quad \blacksquare$$

解 2 $\quad \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2} \geqq \dfrac{8}{(a+b)^2} \iff (a+b)^2(a^2+b^2) \geqq 8a^2b^2.$

$(a+b)^2 \geqq 4ab,\ a^2+b^2 \geqq 2ab$ の辺々をかけあわせると

$$(a+b)^2(a^2+b^2) \geqq 8a^2b^2. \quad \blacksquare$$

解 3　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}(a+b)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) &= (a+b)(a+b)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\\ &\geqq \left(\sqrt[3]{a\cdot a\cdot\frac{1}{a^2}}+\sqrt[3]{b\cdot b\cdot\frac{1}{b^2}}\right)^3 = 8\,.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geqq \frac{8}{(a+b)^2}. \quad \blacksquare$$

解 4　補助定理 1 より

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = \frac{\frac{1}{a^2}}{1}+\frac{\frac{1}{b^2}}{1} \geqq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}{2}.$$

したがって

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geqq \frac{8}{(a+b)^2} \quad \text{すなわち} \quad (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq 4$$

を示せばよい．これは，コーシー・シュワルツの不等式を使うと

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq (1+1)^2 = 4. \quad \blacksquare$$

16.　a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)} \geqq 1\,.$$

解 1　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\right\}(b+c+a)\\
&\qquad\qquad\qquad\times\bigl\{(2c+a)+(2a+b)+(2b+c)\bigr\}\\
&\geqq \left(\sqrt[3]{\frac{a^3}{b(2c+a)}\cdot b\cdot(2c+a)}+\sqrt[3]{\frac{b^3}{c(2a+b)}\cdot c\cdot(2a+b)}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.+\sqrt[3]{\frac{c^3}{a(2b+c)}\cdot a\cdot(2b+c)}\ \right)^3\\
&=(a+b+c)^3\,.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)} \geqq \frac{a+b+c}{3}=1\,. \qquad \blacksquare$$

解 2　不等式を同次化して

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)} \geqq \frac{a+b+c}{3}$$

を示す．相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b}{3}+\frac{2c+a}{9} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b(2c+a)}\cdot\frac{b}{3}\cdot\frac{2c+a}{9}}=a\,.$$

同様にして

$$\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c}{3}+\frac{2a+b}{9} \geqq b,\quad \frac{c^3}{a(2b+c)}+\frac{a}{3}+\frac{2b+c}{9} \geqq c\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}+\frac{2(a+b+c)}{3} \geqq a+b+c$$

から次の不等式が得られる．

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)} \geqq \frac{a+b+c}{3}. \qquad \blacksquare$$

17.　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt[3]{a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}} \geqq \frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}.$$

解 1　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
&27\left(a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}\right)\\
&=(a+a+a)\left(a+\frac{a+b}{2}+b\right)(a+b+c)\\
&\geqq\left(\sqrt[3]{a\cdot a\cdot a}+\sqrt[3]{a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot b}+\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}\right)^3\\
&\overset{AM\geqq GM}{\geqq}\left(a+\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}+\sqrt[3]{abc}\right)^3\\
&=\left(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\right)^3.
\end{aligned}$$

よって，$\sqrt[3]{a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}} \geqq \frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}$. ■

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\sqrt[3]{ab\cdot\frac{a+b}{2}} \geqq \sqrt[3]{ab\cdot\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

ゆえに

$$a+\sqrt[3]{ab\cdot\frac{a+b}{2}}+\sqrt[3]{abc} \geqq a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}.$$

したがって

$$3\sqrt[3]{a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}} \geqq a+\sqrt[3]{ab\cdot\frac{a+b}{2}}+\sqrt[3]{abc}$$

すなわち

$$3 \geqq \sqrt[3]{\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{3a}{a+b+c}}+\sqrt[3]{\frac{3b}{a+b+c}}+\sqrt[3]{\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{3c}{a+b+c}}$$

を示せばよい．

相加平均・相乗平均の不等式より

$$1+\frac{2a}{a+b}+\frac{3a}{a+b+c} \geqq 3\sqrt[3]{1\cdot\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{3a}{a+b+c}},$$

$$1+1+\frac{3b}{a+b+c} \geqq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot\frac{3b}{a+b+c}},$$

$$1+\frac{2b}{a+b}+\frac{3c}{a+b+c} \geqq 3\sqrt[3]{1\cdot\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{3c}{a+b+c}}.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$3 \geqq \sqrt[3]{\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{3a}{a+b+c}}+\sqrt[3]{\frac{3b}{a+b+c}}+\sqrt[3]{\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{3c}{a+b+c}}$$

が得られる． ■

18．(Samin Riasat)　a,b,c,m,n が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{b(ma+nb)}+\frac{b^2}{c(mb+nc)}+\frac{c^2}{a(mc+na)} \geqq \frac{3}{m+n}.$$

解　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
&(m+n)(a+b+c)(ab+bc+ca)\\
&\qquad\times\left(\frac{a^2}{b(ma+nb)}+\frac{b^2}{c(mb+nc)}+\frac{c^2}{a(mc+na)}\right)\\
&=\bigl\{(ma+nb)+(mb+nc)+(mc+na)\bigr\}(ab+bc+ca)\\
&\qquad\times\left(\frac{a^2}{b(ma+nb)}+\frac{b^2}{c(mb+nc)}+\frac{c^2}{a(mc+na)}\right)\\
&\geqq\Biggl(\sqrt[3]{(ma+nb)\cdot ab\cdot\frac{a^2}{b(ma+nb)}}+\sqrt[3]{(mb+nc)\cdot bc\cdot\frac{b^2}{c(mb+nc)}}\\
&\qquad+\sqrt[3]{(mc+na)\cdot ca\cdot\frac{c^2}{a(mc+na)}}\ \Biggr)^3\\
&=(a+b+c)^3.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{a^2}{b(ma+nb)}+\frac{b^2}{c(mb+nc)}+\frac{c^2}{a(mc+na)} \geqq \frac{(a+b+c)^2}{(m+n)(ab+ba+ca)}.$$

したがって

$$\frac{(a+b+c)^2}{(m+n)(ab+ba+ca)} \geqq \frac{3}{m+n}$$

すなわち

$$(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$$

を示せばよい．この不等式は

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) &= a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\\ &= \frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\} \geqq 0\end{aligned}$$

から得られる． ■

19．(SMO 2009)　$a, b, c, x_1, x_2, \ldots, x_5$ は正の実数で，$a+b+c=1$，$x_1x_2\cdots x_5=1$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\prod_{i=1}^{5}(ax_i^2+bx_i+c) \geqq 1.$$

解　ヘルダーの不等式より

$$\begin{aligned}&(ax_1^2+bx_1+c)(ax_2^2+bx_2+c)\cdots(ax_5^2+bx_5+c)\\ &\geqq \left(\sqrt[5]{ax_1^2\cdot ax_2^2\cdots ax_5^2}+\sqrt[5]{bx_1\cdot bx_2\cdots bx_5}+\sqrt[5]{c\cdot c\cdots c}\right)^5\\ &= \left(a\sqrt[5]{(x_1x_2\cdots x_5)^2}+b\sqrt[5]{x_1x_2\cdots x_5}+c\right)^5\\ &= (a+b+c)^5 = 1\,.\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\prod_{i=1}^{5}(ax_i^2+bx_i+c) \geqq 1.$ ■

20.　a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$(a+b+c)^4(ab+bc+ca) \leqq 27(a^3+b^3+c^3)^2.$$

解　補助定理 3 より

$$
\begin{aligned}
&(1+1+1)(a^3+b^3+c^3)(b^3+c^3+a^3)\\
&\geqq \left(\sqrt[3]{1\cdot a^3\cdot b^3}+\sqrt[3]{1\cdot b^3\cdot c^3}+\sqrt[3]{1\cdot c^3\cdot a^3}\right)^3=(ab+bc+ca)^3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+1+1)(1+1+1)(a^3+b^3+c^3)\\
&\geqq \left(\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot a^3}+\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot b^3}+\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot c^3}\right)^3=(a+b+c)^3,
\end{aligned}
$$

よって

$$ab+bc+ca \leqq 3^{\frac{1}{3}}(a^3+b^3+c^3)^{\frac{2}{3}}, \qquad \cdots\cdots ①$$

$$(a+b+c)^4 \leqq 3^{\frac{8}{3}}(a^3+b^3+c^3)^{\frac{4}{3}}. \qquad \cdots\cdots ②$$

① × ② から

$$(a+b+c)^4(ab+bc+ca) \leqq 27(a^3+b^3+c^3)^2$$

を得る．■

21.　a, b, c, d は正の実数で，$(a^2+b^2)^3 = c^2+d^2$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d} \geqq 1.$$

解　補助定理 2 より

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\right)\left(\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\right)(c^2+d^2)\\
&\geqq \left(\sqrt[3]{\frac{a^3}{c}\cdot\frac{a^3}{c}\cdot c^2}+\sqrt[3]{\frac{b^3}{d}\cdot\frac{b^3}{d}\cdot d^2}\right)^3=(a^2+b^2)^3.
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d} \geqq \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^3}{c^2+d^2}}=1.$$ ■

22. (TST 2010)　a, b, c は正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(c+2b)^2} \geqq \frac{1}{3}.$$

解　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(c+2b)^2}\right)\\
&\qquad \times \bigl[a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)\bigr]\bigl[a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)\bigr]\\
&\geqq \Biggl(\sqrt[3]{\frac{1}{a^5(b+2c)^2}\cdot a(b+2c)\cdot a(b+2c)}\\
&\qquad\qquad + \sqrt[3]{\frac{1}{b^5(c+2a)^2}\cdot b(c+2a)\cdot b(c+2a)}\\
&\qquad\qquad\qquad + \sqrt[3]{\frac{1}{c^5(a+2b)^2}\cdot c(a+2b)\cdot c(a+2b)}\Biggr)^3\\
&= \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3\\
&= (ab+bc+ca)^3.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(c+2b)^2}\\
&\geqq \frac{(ab+bc+ca)^3}{9(ab+bc+ca)^2}\\
&= \frac{ab+bc+ca}{9}\\
&\overset{AM \geqq GM}{\geqq} \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{9} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

■

4　例題

例題 1　(Hungary 1996)

a, b は正の実数で，$a + b = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geqq \frac{1}{3}.$$

解 1　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{a+1}{9} \geqq 2\sqrt{\frac{a^2}{a+1} \cdot \frac{a+1}{9}} = \frac{2a}{3}.$$

ゆえに

$$\frac{a^2}{a+1} \geqq \frac{5a-1}{9}.$$

同様にして

$$\frac{b^2}{b+1} \geqq \frac{5b-1}{9}.$$

2 つの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geqq \frac{5(a+b)-2}{9} = \frac{1}{3}.$$

したがって，不等式は証明された．　■

［注］　相加平均・相乗平均の不等式を使用するときに最も重要なことは，証明すべき不等式と作成する不等式で等号が成り立つ場合が一致するように係数を選ぶことである．

この問題では，等号が $a = b = \dfrac{1}{2}$ のときに成り立つことが推測できるので，係数 $\dfrac{1}{9}$ は，$\dfrac{a^2}{a+1}$ と $m(a+1)$ が $a = b = \dfrac{1}{2}$ のときに等しくなるように選んだものである．

解 2　補助定理 1 より

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geqq \frac{(a+b)^2}{a+1+b+1} = \frac{(a+b)^2}{a+b+2} = \frac{1}{3}.$$

したがって，不等式は証明された．　■

解 3　$a+b=1$ を用いて，不等式の左辺の分数式の分母の式を分子の式と同次化する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1} \geqq \frac{1}{3} \\
\iff &\frac{a^2}{(a+b)\,[a+(a+b)]}+\frac{b^2}{(a+b)\,[b+(a+b)]} \geqq \frac{1}{3} \\
\iff &\frac{a^2}{(a+b)(2a+b)}+\frac{b^2}{(a+b)(a+2b)} \geqq \frac{1}{3} \\
\iff &3a^2(a+2b)+3b^2(2a+b) \geqq (a+b)(2a+b)(a+2b) \\
\iff &a^3+b^3 \geqq a^2b+ab^2.
\end{aligned}
$$

したがって，$a^3+b^3 \geqq a^2b+ab^2$ を証明すればよく，これは

$$a^3+b^3-(a^2b+ab^2)=(a-b)^2(a+b) \geqq 0$$

から成り立つ．■

解 4　$f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}\quad(x>0)$ とおくと

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2},\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9}.$$

$y=f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{6}\right)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{5x-1}{9}$ となる．次に，$y=f(x)$ と接線 $y=\dfrac{5x-1}{9}$ との上下関係を調べる．

$$f(x)-\frac{5x-1}{9}=\frac{4x^2-4x+1}{9(x+1)}=\frac{(2x-1)^2}{9(x+1)} \geqq 0$$

より

$$f(x) \geqq \frac{5x-1}{9}.$$

よって

$$f(a)+f(b) \geqq \frac{5(a+b)-2}{9}=\frac{1}{3}.$$

■

［注］　解 1 で用いた不等式

$$\frac{a^2}{a+1} \geqq \frac{5a-1}{9}$$

の右辺の式 $\dfrac{5a-1}{9}$ は 解 4 で用いた接線の方程式に現れている $\dfrac{5x-1}{9}$ と同じ式である．

解 5 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}\quad (x>0)$ とおくと，$f''(x)=2(x+1)^{-3}>0$.
$f(x)$ は $x>0$ で凸関数であるから，Jensen の不等式より

$$f(a)+f(b)\geqq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

［注］ $a+b=1$ を用いて証明すべき不等式を変形すると

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geqq\frac{1}{3} &\iff a-1+\frac{1}{a+1}+b-1+\frac{1}{b+1}\geqq\frac{1}{3}\\
&\iff \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\geqq\frac{4}{3}\\
&\iff \frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)}\geqq\frac{4}{3}\\
&\iff \frac{3}{(a+1)(b+1)}\geqq\frac{4}{3}\\
&\iff (a+1)(b+1)\leqq\frac{9}{4}\\
&\iff ab+a+b+1\leqq\frac{9}{4}\\
&\iff ab\leqq\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

したがって，$ab\leqq\dfrac{1}{4}$ を示せばよい．これは，相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{2}=\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}.$$

よって，$ab\leqq\dfrac{1}{4}$ は成り立つ． $\square$

例題 2 (東工大)　a, b, c, x, y, z はすべて正の数を表すとき，次の不等式を証明せよ．

(1)　$(b+c)(c+a)(a+b) \geqq 8abc.$

(2)　$xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$

(1) は相加平均・相乗平均の不等式より

$$(b+c)(c+a)(a+b) \geqq 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \cdot 2\sqrt{ab} = 8abc$$

と証明できる．(2) では，$a = y+z-x,\ b = z+x-y,\ c = x+y-z$ とおくと $b+c = 2x,\ c+a = 2y,\ a+b = 2z$ となり，(1) と同じ不等式を証明すればよいことになるが，$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ かどうかわからないので，工夫が必要になる．以下の解答では (1) の解答を省略する．

解 1　不等式は $x,\ y,\ z$ に関して対称式であるから，$x \geqq y \geqq z$ と仮定することができる．

$a = y+z-x,\ b = z+x-y,\ c = x+y-z$ とおくと $b > 0,\ c > 0$ は成り立つ．また，$b+c = 2x,\ c+a = 2y,\ a+b = 2z$ より

$$\begin{aligned} & xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \\ \iff & \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \geqq abc \\ \iff & (b+c)(c+a)(a+b) \geqq 8abc. \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

a については $a > 0$ または $a \leqq 0$ となるから場合わけをする．

(i) $a > 0$ の場合

(1) から，①は成り立つ．

(ii) $a \leqq 0$ の場合

$b+c = 2x,\ c+a = 2y,\ a+b = 2z$ より $b+c > 0,\ c+a > 0,\ a+b > 0$ であるから，①の左辺 > 0，右辺 $\leqq 0$ となる．よって，①は成り立つ．■

解 2　不等式は $x,\ y,\ z$ に関して対称式なので，$x \geqq y \geqq z$ と仮定すると，$z+x-y > 0$，$x+y-z > 0$ は成立するが，$y+z-x$ の符号は不明なので場合分けをする．

(i) $y+z-x \leqq 0$ のときは，(2) の不等式の左辺 > 0，右辺 $\leqq 0$ より (2) の不等式は成り立つ．

(ii) $y+z-x > 0$ のときは

$$\Big[(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\Big]^2 \leqq (xyz)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

を証明すればよい.

$$(y+z-x)(z+x-y)=z^2-(x-y)^2\leqq z^2,$$

$$(z+x-y)(x+y-z)=x^2-(y-z)^2\leqq x^2,$$

$$(x+y-z)(y+z-x)=y^2-(z-x)^2\leqq y^2.$$

これらの不等式の辺々をかけると② は成り立つ. ■

解 3　不等式は $x,\ y,\ z$ に関して対称式なので，$x\geqq y\geqq z$ と仮定して

$$x-y=p\geqq 0,\ \ y-z=q\geqq 0$$

とおくと

$$\begin{aligned}&xyz-(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\\&=(z+p+q)(z+q)z-(z-p)(z+p)(z+p+2q)\\&=(p^2+pq+q^2)z+p^2(p+2q)\geqq 0\end{aligned}$$

したがって，(2) の不等式は成り立つ. ■

解 4　(Schur の不等式の証明にならう.)

$x,\ y,\ z$ に関して対称式なので，$x\geqq y\geqq z$ と仮定できる.

$$\begin{aligned}&xyz-(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\\&=x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\\&=(x-y)\Big[x(x-z)-y(y-z)\Big]+z(x-z)(y-z)\\&\geqq(x-y)\Big[x(y-z)-y(y-z)\Big]+z(x-z)(y-z)\\&=(x-y)^2(y-z)+z(x-z)(y-z)\geqq 0.\end{aligned}$$

したがって，(2) の不等式は成り立つ. ■

［注 1］（2）の不等式は，$x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ のときに成立することが容易にわかる. また，等号成立条件は $x>0,\ y>0,\ z>0$ のときには $x=y=z$ である.

$x,\ y,\ z$ のうちに 0 がある場合，

例えば $x=0$ のときの等号成立は $0=-(y+z)(y-z)^2$ より $y=z=0$ または $y=z$ より $x=y=z=0$ または $x=0,\ y=z$ となる.

まとめると，等号成立は $x=y=z(\neq 0)$ または $y=z,\ x=0$ または $z=x,\ y=0$ または $x=y,\ z=0$ のときとなる．

［注 **2**］ $xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ の右辺を展開して整理すると

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geqq x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$$

となる．

$(x+y+z)^3+9xyz \geqq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$ についても両辺を展開して整理すれば同じ式がでてくるので，次のようにまとめることができる．

$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つ．

a) $xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$

b) $x^3+y^3+z^3+3xyz \geqq x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$

b′) $x^3+y^3+z^3+3xyz \geqq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$

c) $(x+y+z)^3+9xyz \geqq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$

d) $x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y) \geqq 0$

等号は $x=y=z(\neq 0)$ または $y=z,\ x=0$ または $z=x,\ y=0$ または $x=y,\ z=0$ のときに成り立つ．

d) は次の Schur の不等式の $r=1$ の場合になっている．

定理 (Schur) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ で $r>0$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0$$

等号は $x=y=z(\neq 0)$ または $y=z,\ x=0$ または $z=x,\ y=0$ または $x=y,\ z=0$ のときに成り立つ．

例題 3 (USAMO Summer Program 2002)

$a>0, b>0, c>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3.$$

解

$$\frac{a}{a+b+c}=p>0,\ \ \frac{b}{a+b+c}=q>0,\ \ \frac{c}{a+b+c}=r>0$$

とおくと $p+q+r=1$ を満たす．

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3\\
\iff &\left(\frac{2p}{q+r}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2q}{r+p}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2r}{p+q}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3\\
\iff &\left(\frac{2p}{1-p}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2q}{1-q}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3.
\end{aligned}$$

$f(x)=\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0<x<1)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{4}{3}\left(\frac{2x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{(1-x)^2}.$$

$p=q=r=\dfrac{1}{3}$ のとき，不等式の等号が成り立つから，$y=f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ における接線の利用を考える． $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=3,\ f\left(\dfrac{1}{3}\right)=1$ であるから，接線の方程式は，$y=3x$ となる．

次に，$y=f(x)$ と 接線 $y=3x$ の上下関係を調べる．

$$\begin{aligned}
\Big[f(x)\Big]^3-(3x)^3&=\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2-(3x)^3\\
&=\frac{x^2(4-27x+54x^2-27x^3)}{(1-x)^2}\\
&=\frac{x^2(3x-1)^2(4-3x)}{(1-x)^2}\geqq 0\,.
\end{aligned}$$

したがって， $f(x)\geqq 3x$ が成り立つから

$$f(p)+f(q)+f(r)\geqq 3(p+q+r)=3.$$

■

［注 1］　$f''(x) = \dfrac{4(6x-1)}{9x(1-x)^3}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{3}}$ より，凸関数ではないので，Jensen の不等式は使えない．

［注 2］　「一般性を失うことなく $a+b+c=1$ と仮定する．」と解のはじめに断ってもよい．$p=\dfrac{a}{t}$，$q=\dfrac{b}{t}$，$r=\dfrac{c}{t}$　$(t>0)$ とおき，$a=pt,\ b=qt,\ c=rt$ を不等式に代入すると

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3\\ \Longleftrightarrow\ &\left(\frac{2p}{q+r}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2q}{r+p}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2r}{p+q}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3\end{aligned}$$

（不等式が $a,\ b,\ c$ に対して成り立つ $\Longleftrightarrow$ 不等式が $p,\ q,\ r$ に対して成り立つ）から，t は任意である．したがって

$$\boldsymbol{p+q+r=1\quad (t=a+b+c)}\quad \text{や}\quad \boldsymbol{pqr=1\quad (t=\sqrt[3]{abc})}\quad \text{や}$$

$$\boldsymbol{pq+qr+rp=3\quad \left(t=\sqrt{\frac{ab+ba+ca}{3}}\right)}\quad \text{等にすることができる．}$$

例題 4　a, b, c は正の実数で $ab+bc+ca=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqq \frac{3}{2}.$$

解 1　$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$ であるから，相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right).$$

ゆえに

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right).$$

同様にして

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}\right),\quad \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right).$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\\ &\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqq \frac{3}{2}.$$

■

解 2　$a=\cot A,\ b=\cot B,\ c=\cot C\ \left(0<A,\ B,\ C<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$ab+bc+ca=1$ から

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

この式を変形すると

$$\tan C=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan(A+B)=\tan(\pi-A-B).$$

$0<C<\frac{\pi}{2}$，$0<\pi-A-B<\pi$ であるから $C=\pi-A-B$ すなわち

$$A+B+C=\pi.$$

このとき，証明すべき不等式は

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqq \frac{3}{2}$$

となる．

$f(x) = \cos x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$f''(x) = -\cos x < 0$.
$f(x)$ は凹関数であるから

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}. \qquad \blacksquare$$

解 2 で用いた置き換えをまとめておこう．

(1) a, b, c が正の実数で $ab + bc + ca = 1$ を満たすとき
$a = \tan\frac{\alpha}{2}$, $b = \tan\frac{\beta}{2}$, $c = \tan\frac{\gamma}{2}$ とおける．
ただし，α, β, γ は三角形 ABC の内角である．

(2) a, b, c が正の実数で $ab + bc + ca = 1$ を満たすとき
$a = \cot A$, $b = \cot B$, $c = \cot C$ とおける．
ただし，A, B, C は鋭角三角形の内角である．

(3) a, b, c が正の実数で $a + b + c = abc$ を満たすとき
$a = \cot\frac{\alpha}{2}$, $b = \cot\frac{\beta}{2}$, $c = \cot\frac{\gamma}{2}$ とおける．
ただし，α, β, γ は三角形 ABC の内角である．

(4) a, b, c が正の実数で $a + b + c = abc$ を満たすとき
$a = \tan A$, $b = \tan B$, $c = \tan C$ とおける．
ただし，A, B, C は鋭角三角形の内角である．

(1) は $a = \tan\frac{\alpha}{2}$, $b = \tan\frac{\beta}{2}$, $c = \tan\frac{\gamma}{2}$ $(0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi)$ とおくと $ab+bc+ca = 1$ より

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1.$$

この式を利用すると

$$\tan\frac{\pi-\gamma}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{\tan\dfrac{\gamma}{2}}=\frac{\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}}{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$0<\dfrac{\pi-\gamma}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\pi$ であるから，$\dfrac{\pi-\gamma}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ すなわち

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

が得られる．

(2) は例題 4 の解 2 参照.

(3)，(4) は $a+b+c=abc$ を

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}=1$$

と変形して，$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ に対して (1)，(2) を適用すればよい.

5　和の記号 $\sum\limits_{cyclic}$ と $\sum\limits_{sym}$ 等いくつかの定義

定義 1　f を n 変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の関数とする．
ある実数 k が存在して，すべての t $(\fallingdotseq 0)$，$x_1, x_2, \dots, x_n$ に対して

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

が成り立つとき，関数 f は **homogeneous with coefficient of homogeneity k** であるという．

不等式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqq g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

が homogeneous のとき，この不等式は homogeneous であると言う．[*4]

すでに扱った例題 3

(USAMO Summer Program 2002)
$a > 0, b > 0, c > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3.$$

の不等式は同次式 (homogeneous) である．なぜならば

$$F(a, b, c) = \left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} - 3$$

とおくと，すべての $t (\fallingdotseq 0)$，$a, b, c > 0$ に対して $F(ta, tb, tc) = F(a, b, c)$ を満たすからである．

そして，homogeneous 不等式の場合には，一般性を失うことなく追加条件を仮定することができる．例題 3 の場合は，$a + b + c = 1$ と仮定することができる．追加条件は，例えば，$a + b + c = 1$ または $abc = 1$ または $ab + bc + ca = 1$ 等多くある． このような，追加条件を指定する手続きを **normalization** という．normalization の具体例は練習問題でみていただきたい．

[*4] 筆者は「この不等式は同次式である．」と言うことにする．

定義 2　和の記号 $\sum\limits_{cyclic}$ と $\sum\limits_{sym}$ を導入する．$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を n 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の関数とするとき

$$\sum_{cyclic} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + f(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_1) + \cdots + f(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

と $\boldsymbol{n}$ 項の和で $\sum\limits_{cyclic}$ を定義する．$\sum\limits_{cyclic}$ を $\sum\limits_{cyc}$ で表記する場合もある．

$$\sum_{sym} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) + f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n-1}) + \cdots + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1)$$

と $\boldsymbol{n!}$ 項の和で $\sum\limits_{sym}$ を定義する．正確には

$$\sum_{sym} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

によって定義される．ただし，S_n は $\{1, 2, \ldots, n\}$ の順列全体の集合とする．

$n = 3$ の場合は，$P(x, y, z)$ を 3 変数 x, y, z の関数とするとき

$$\sum_{cyclic} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y),$$

$$\sum_{sym} P(x, y, z) = \underbrace{P(x, y, z) + P(x, z, y) + P(y, x, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y) + P(z, y, x)}_{3!=6}$$

で定義される．

たとえば

$$\sum_{cyclic} x^3 = x^3 + y^3 + z^3, \quad \sum_{cyclic} x^2 y = x^2 y + y^2 z + z^2 x,$$

$$\sum_{cyclic} xy^2 = xy^2 + yz^2 + zx^2, \quad \sum_{cyclic} xyz = xyz + yzx + zxy = 3xyz.$$

$$\sum_{sym} x^3 = x^3y^0z^0 + x^3z^0y^0 + y^3x^0z^0 + y^3z^0y^0 + z^3x^0y^0 + z^3y^0x^0$$
$$= 2(x^3 + y^3 + z^3),$$

$$\sum_{sym} x^2y = x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y,$$

$$\sum_{sym} xy^2 = xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2 = \sum_{sym} x^2y,$$

$$\sum_{sym} xyz = xyz + xzy + yxz + yzx + zxy + zyx = 6xyz.$$

定義 3 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を非負の実数とし，$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ とする．$[p]$ $(p - mean)$ は

$$[p] \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} x_{\sigma(2)}^{p_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n} = \frac{1}{n!} \sum_{sym} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$$

によって定義される．ただし，S_n は $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ の順列全体の集合とする．

$n = 3$ の場合，3 変数 $x,\ y,\ z$ に対して

$$[(3,\ 0,\ 0)] = \frac{1}{3\,!} \sum_{sym} x^3 = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3),$$

$$[(2,\ 1,\ 0)] = \frac{1}{3\,!} \sum_{sym} x^2y = \frac{1}{6}(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y),$$

$$[(1,\ 1,\ 1)] = \frac{1}{3\,!} \sum_{sym} xyz = \frac{1}{6} \cdot 6xyz = xyz\,.$$

次に，$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$，$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

(MJ1) $p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_n$，$q_1 \geqq q_2 \geqq \cdots \geqq q_n$，
(MJ2) $p_1 \geqq q_1$，$p_1 + p_2 \geqq q_1 + q_2$，$\ldots$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} \geqq q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1}$，
(MJ3) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$

を満たすとき，p は q の優数列である (p majorizes q) といい，$\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$ と書くことにする．

$(p - mean)$ に関しては，対称的な不等式の証明に非常に強力な Muirhead の定理がある．

(Muirhead's theorem) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で $p \in \mathbb{R}^n$，$q \in \mathbb{R}^n$ とする．

$p \succ q$ ならば $[p] \geqq [q]$ が成り立つ．

等号は $p \fallingdotseq q$ のときには，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限り成り立つ．

実用上は，Muirhead の定理と 次の $p - mean$ の性質を使うことが多い．

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を非負の実数とし，$p = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ とする．

$[p]$ は

$$[p] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} x_{\sigma(2)}^{p_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n}$$

を表す．ただし，S_n は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の順列全体の集合とする．

(M1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ を満たすとき，任意の実数 r に対して

$$[(p_1, p_2, \ldots, p_n)] = [(p_1 - r, p_2 - r, \ldots, p_n - r)]$$

が成り立つ．

(M2) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1 x_2 \cdots x_n \geqq 1$ を満たすとき，任意の非負の実数 r に対して

$$[(p_1, p_2, \ldots, p_n)] \geqq [(p_1 - r, p_2 - r, \ldots, p_n - r)]$$

が成り立つ．

(M3) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を正の実数とする．

$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$，$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\frac{[p] + [q]}{2} \geqq \left[\frac{p + q}{2} \right]$$

が成り立つ．

凸関数に関する不等式の証明に強力な Karamata の不等式がある．

(Karamata's Majorization Inequality) $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし，$f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数である．$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$，$x_i \in I$，$y_i \in I \quad (1 \leqq i \leqq n)$ ならば

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n)$$

が成り立つ．

6　練習問題　2

問題 1　a, b, c が三角形の 3 辺のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqq 3abc\,.$$

解 1　$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqq 3abc$

$\iff a^3+b^3+c^3+3abc \geqq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$

Schur の不等式から，この不等式は成り立つ．■

[注]　例題 2 参照．

解 2　$b+c-a=2x>0,\ c+a-b=2y,\ a+b-c=2z>0$ とおくと

$$a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y.$$

これを証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}&(y+z)^2\cdot 2x+(z+x)^2\cdot 2y+(x+y)^2\cdot 2z \leqq 3(y+z)(z+x)(x+y)\\ \iff\ & x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2-6xyz \geqq 0.\end{aligned}$$

したがって

$$x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2-6xyz \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}&x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2-6xyz\\ &=x(y^2-2yz+z^2)+y(z^2-2zx+x^2)+z(x^2-2xy+y^2)\\ &=x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2 \geqq 0.\end{aligned}$$

■

[注]　$(*)$ は相加平均・相乗平均の不等式を用いてもよい．

$$x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2 \geqq 6\sqrt[6]{x^2y\cdot xy^2\cdot y^2z\cdot yz^2\cdot z^2x\cdot zx^2}=6xyz \quad \square$$

問題 2　(Nesbitt's inequality)

$a,\ b,\ c$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}.$$

解 1　差をとると

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\\
&=\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}+\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}+\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\\
&=\frac{a-b+a-c}{2(b+c)}+\frac{b-a+b-c}{2(c+a)}+\frac{c-a+c-b}{2(a+b)}\\
&=\frac{a-b}{2}\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right)+\frac{b-c}{2}\left(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}\right)+\frac{c-a}{2}\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)\\
&=\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)}+\frac{(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)}\geqq 0.
\end{aligned}
$$

■

[注]　上の解から次の等式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}}\\
&\boldsymbol{=\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)}+\frac{(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)}}
\end{aligned}
$$

解 2　$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$，$Q=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$，
$R=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$ とおくと，$Q+R=3$．

相加平均・相乗平均の不等式より

$$
P+Q=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}=3
$$

$$
P+R=\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{c+a}{b+c}\cdot\frac{a+b}{c+a}\cdot\frac{b+c}{a+b}}=3.
$$

2 つの不等式の辺々を加えると，$2P+Q+R\geqq 6$ となり $2P+3\geqq 6$．

よって，$P\geqq\frac{3}{2}$．　■

解 3　補助定理 1 より

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\\
&\geqq\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geqq\frac{3}{2}
$$

を示せばよい．

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geqq \frac{3}{2} \iff (a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$$
$$\iff a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

より $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ を示せばよく，これは

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$$

から成り立つ．■

解 4　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定することができる．
すると，$a+b \geqq c+a \geqq b+c$ から $\dfrac{1}{b+c} \geqq \dfrac{1}{c+a} \geqq \dfrac{1}{a+b}$.
したがって，並べ替えの不等式 (rearrangement inequality) より

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b},$$
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geqq \frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}=3\,.$$

よって，$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqq \dfrac{3}{2}$.■

解 5　$b+c=2x>0,\ c+a=2y>0,\ a+b=2z>0$ とおくと

$$a=-x+y+z,\ b=x-y+z,\ c=x+y-z.$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{-x+y+z}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right\}-\frac{3}{2}\\ &\overset{AM\geqq GM}{\geqq} \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}+2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}\right)-\frac{3}{2}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

■

解 6　不等式は同次式であるから，$a+b+c=1$ と仮定できる．このとき証明すべき不等式は

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c} \geqq \frac{3}{2}$$

となる．$f(x)=\dfrac{x}{1-x}\quad(0<x<1)$ とおくと $f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}>0$. したがって，$f(x)$ は凸関数であるから

$$f(a)+f(b)+f(c)\geqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}.$$

よって，$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqq\dfrac{3}{2}$. ■

解 7　$\dfrac{a}{b+c}=x>0,\ \dfrac{b}{c+a}=y>0,\ \dfrac{c}{a+b}=z>0$ とおくと，
$xy+yz+zx+2xyz=1$ を満たす．なぜならば

$$\begin{aligned}
&xy+yz+zx+2xyz\\
&=\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}\\
&=\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&=\frac{(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&=\frac{(b+c)[a^2+(b+c)a+bc]}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1
\end{aligned}$$

となるからである．
このとき，証明すべき不等式は $x+y+z\geqq\dfrac{3}{2}$ となる．このことを背理法で証明する．
$x+y+z<\dfrac{3}{2}$ となる $x,\ y,\ z$ が存在すると仮定する．
$xy+yz+zx\leqq\dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ が成り立つから

$$xy+yz+zx\leqq\frac{(x+y+z)^2}{3}<\frac{3}{4}.$$

よって

$$xy+yz+zx<\frac{3}{4}. \tag{$*$}$$

また

$$\sqrt[3]{xyz}\leqq\frac{x+y+z}{3}<\frac{1}{2}$$

から

$$2xyz<\frac{1}{4}. \tag{$**$}$$

$(*), (**)$ より

$$1 = xy + yz + zx + 2xyz < \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

となり矛盾する．

したがって，$x + y + z \geqq \dfrac{3}{2}$ となる． ■

[注]　背理法を使わなければ

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geqq xy + yz + zx,\ \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geqq (\sqrt[3]{xyz})^3 = xyz$$

より

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} + 2\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geqq xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

$x + y + z = t$ とおくと，$\dfrac{1}{3}t^2 + \dfrac{2}{27}t^3 \geqq 1$ から $2t^3 + 9t^2 - 27 \geqq 0$.

左辺を因数分解して $(2t-3)(t+3)^2 \geqq 0$．$t > 0$ より $t \geqq \dfrac{3}{2}$.

解 7 で用いた置き換えを次のようにまとめておこう．

(1) $a,\ b,\ c$ が正の実数のとき，$\dfrac{a}{b+c} = x,\ \dfrac{b}{c+a} = y,\ \dfrac{c}{a+b} = z$ とおくと $x,\ y,\ z > 0,\ xy + yz + zx + 2xyz = 1$ を満たす．

(2) $a,\ b,\ c$ が正の実数のとき，$\dfrac{b+c}{a} = x,\ \dfrac{c+a}{b} = y,\ \dfrac{a+b}{c} = z$ とおくと $x,\ y,\ z > 0,\ xyz = x + y + z + 2$ を満たす．

(3) $x,\ y,\ z$ が正の実数で，$xyz = x + y + z + 2$ を満たすとき
$x = \dfrac{b+c}{a},\ y = \dfrac{c+a}{b},\ z = \dfrac{a+b}{c}\quad (a + b + c = 1)$ とおける．

(4) $x,\ y,\ z$ が正の実数で，$xy + yz + zx + 2xyz = 1$ を満たすとき
$x = \dfrac{a}{b+c},\ y = \dfrac{b}{c+a},\ z = \dfrac{c}{a+b}\quad (a + b + c = 1)$ とおける．

(1) については，次のことを確かめればよい．

$$
\begin{aligned}
&xy+yz+zx+2xyz\\
&=\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&=\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&=\frac{(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(b+c)[a^2+(b+c)a+bc]}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1\,.
\end{aligned}
$$

(2) $\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{1}{z}$ は (1) の関係式を満たすから

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+2\frac{1}{xyz}=1$$

すなわち，$xyz=x+y+z+2$ を満たす．

(3) $xyz=x+y+z+2$ を

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$$

と変形する．

$$a=\frac{1}{x+1},\ \ b=\frac{1}{y+1},\ \ c=\frac{1}{z+1}$$

とおくと，$a+b+c=1$．　そして，$a=\dfrac{1}{x+1}$ を変形すると

$$x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}.$$

同様にして，$y=\dfrac{c+a}{b}$，$z=\dfrac{a+b}{c}$ となる．

(4) $xy+yz+zx+2xyz=1$ を $\dfrac{1}{xyz}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+2$ と変形すると，(3) から

$$\frac{1}{x}=\frac{b+c}{a},\ \ \frac{1}{y}=\frac{c+a}{b},\ \ \frac{1}{z}=\frac{a+b}{c}$$

すなわち

$$x=\frac{a}{b+c},\ \ y=\frac{b}{c+a},\ \ z=\frac{c}{a+b}$$

とおける．　□

問題 3　(Rioplatense 2002)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right) \geqq 1\,.$$

解 1　同値変形すると

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right) \geqq 1\\ \iff &\frac{2a+b+c}{b+c}\cdot\frac{2b+c+a}{c+a}\cdot\frac{2c+a+b}{a+b} \geqq 8\,.\end{aligned}$$

不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b+c=1$ と仮定することができる．このとき

$$\begin{aligned}&\frac{2a+b+c}{b+c}\cdot\frac{2b+c+a}{c+a}\cdot\frac{2c+a+b}{a+b} \geqq 8\\ \iff &\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{1+c}{1-c} \geqq 8\\ \iff &\log\left(\frac{1+a}{1-a}\right)+\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right)+\log\left(\frac{1+c}{1-c}\right) \geqq \log 8\,.\end{aligned}$$

$f(x)=\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$　$(0<x<1)$ とおくと，$f''(x)=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}>0\,.$

したがって，$f(x)$ は凸関数であるから

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)=3\log 2=\log 8\,.$$ ■

解 2　$\dfrac{a}{b+c}=x>0,\ \dfrac{b}{c+a}=y>0,\ \dfrac{c}{a+b}=z>0$ とおくと

$xy+yz+zx+2xyz=1$ を満たす．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right) \geqq 1\\ \iff &\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right) \geqq 1\\ \iff &8xyz+4(xy+yz+zx)+2(x+y+z)+1 \geqq 8\\ \iff &4+2(x+y+z)+1 \geqq 8\\ \iff &x+y+z \geqq \frac{3}{2}\end{aligned}$$

より $x+y+z \geqq \dfrac{3}{2}$ を示せばよい．（問題 2 の解 7 参照．） ■

問題 4 (Unknown author)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{16}{27}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^3+\left(\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \frac{5}{2}.$$

解 $\dfrac{a}{b+c}=x>0,\ \dfrac{b}{c+a}=y>0,\ \dfrac{c}{a+b}=z>0$ とおくと
$xy+yz+zx+2xyz=1$ を満たす．

$$\begin{aligned}&\frac{16}{27}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^3+\left(\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \frac{5}{2}\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{16}{27}(x+y+z)^3+(xyz)^{\frac{1}{3}} \geqq \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geqq xy+yz+zx=1-2xyz$$

と Nesbitt の不等式

$$x+y+z \geqq \frac{3}{2}$$

より

$$\frac{16}{27}(x+y+z)^3=\frac{16}{9}(x+y+z)\frac{(x+y+z)^2}{3} \geqq \frac{8}{3}(1-2xyz)$$

となるから

$$\frac{8}{3}(1-2xyz)+(xyz)^{\frac{1}{3}} \geqq \frac{5}{2}$$

を示せばよい．$t=(xyz)^{\frac{1}{3}}$ とおく．
また，相加平均・相乗平均の不等式より

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8abc.$$

したがって，$\dfrac{a}{b+c}\cdot\dfrac{b}{c+a}\cdot\dfrac{c}{a+b} \leqq \dfrac{1}{8}$ と変形すると $xyz \leqq \dfrac{1}{8}$ であるから $0<t \leqq \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{8}{3}(1-2t^3)+t-\frac{5}{2}=\frac{-32t^3+6t+1}{6}=\frac{(4t+1)^2(1-2t)}{6} \geqq 0$$

より $\dfrac{8}{3}(1-2xyz)+(xyz)^{\frac{1}{3}} \geqq \dfrac{5}{2}$ は成り立つ． ■

問題 5　(India 1998)

a, b, c は実数で，$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0,\ ab + bc + ca + abc = 4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a + b + c \geqq ab + bc + ca.$$

解 1　(i) $a,\ b,\ c$ の中に 0 がある場合

$c = 0$ と仮定しても一般性を失わない．このとき，$ab = 4$ ならば $a + b \geqq ab$ を示せばよい．

相加平均・相乗平均の不等式より

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab} = 4 = ab\,.$$

よって，$ab = 4$ ならば $a + b \geqq ab$ は成り立つ．

(ii) $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ の場合

条件式は

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} + \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} = 1$$

となるから

$$\frac{a}{2} = \frac{x}{y+z},\ \frac{b}{2} = \frac{y}{z+x},\ \frac{c}{2} = \frac{z}{x+y}$$

すなわち

$$a = \frac{2x}{y+z},\ b = \frac{2y}{z+x},\ c = \frac{2z}{x+y}$$

とおける．このとき

$$\begin{aligned}
&a + b + c \geqq ab + bc + ca \\
\iff& \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \\
&\geqq \frac{2xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{2yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{2zx}{(y+x)(y+z)} \\
\iff& x(x+y)(x+z) + y(y+x)(y+z) + z(z+x)(z+y) \\
&\geqq 2xy(x+y) + 2yz(y+z) + 2zx(z+x) \\
\iff& x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geqq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x).
\end{aligned}$$

$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geqq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$ は，Schur の不等式より成り立つ．　■

解 2　(i) $a,\ b,\ c$ の中に 0 がある場合

$c=0$ と仮定しても一般性を失わない．このとき，$ab=4$ ならば $a+b \geqq ab$ を示せばよい．

相加平均・相乗平均の不等式より

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab} = 4 = ab\,.$$

よって，$ab=4$ ならば $a+b \geqq ab$ は成り立つ．

(ii) $a>0,\ b>0,\ c>0$ の場合

背理法で証明する．$a+b+c < ab+bc+ca$ を満たす $a,\ b,\ c$ が存在すると仮定すると

$$1 > \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}.$$

この不等式を使うと

$$\begin{aligned} 4 &= (ab+bc+ca)\cdot 1^2 + abc\cdot 1^3 \\ &> (ab+bc+ca)\left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^2 + abc\left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^3 \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2 > \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

Schur の不等式

$$\boldsymbol{(a+b+c)^3 + 9abc \geqq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

を変形する

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geqq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②から

$$\frac{9abc}{a+b+c} > \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2}.$$

よって，$9(ab+bc+ca)^2 > (a+b+c)^4$ から $3(ab+bc+ca) > (a+b+c)^2$.

これは $(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$ に矛盾する．

したがって

$$a+b+c \geqq ab+bc+ca. \qquad ■$$

解 3　$a,\ b,\ c$ のうち 2 つは 1 以下か 1 以上である．
なぜならば，$a>1,\ b>1,\ c>1$ と仮定すると

$$ab+bc+ca+abc>1+1+1+1=4$$

となり，$ab+bc+ca+abc=4$ に矛盾し，$0 \leqq a<1,\ 0 \leqq b<1,\ 0 \leqq c<1$ と仮定すると

$$ab+bc+ca+abc<1+1+1+1=4$$

となり，$ab+bc+ca+abc=4$ に矛盾するからである．したがって，a と b はともに，1 以下かまたは 1 以上であると仮定しても一般性を失わない．すると

$$c(a-1)(b-1) \geqq 0$$

から

$$abc \geqq ac+bc-c\,.$$

変形すると

$$a+b+c+abc \geqq (a+b)(c+1).$$

したがって

$$(a+b)(c+1) \geqq ab+bc+ca+abc=4$$

を示せばよい．

$ab \leqq \dfrac{(a+b)^2}{4}$ を用いると

$$4=ab+c(a+b+ab) \leqq \frac{(a+b)^2}{4}+c\left[a+b+\frac{(a+b)^2}{4}\right],$$

$$16-(a+b)^2 \leqq c(a+b)\left[4+(a+b)\right],$$

$$\left[4+(a+b)\right]\left[4-(a+b)\right] \leqq c(a+b)\left[4+(a+b)\right].$$

$4+(a+b)>0$ であるから

$$4-(a+b) \leqq c(a+b)$$

すなわち

$$(a+b)(c+1) \geqq 4$$

を得る．■

問題 6 (Proposed by Greece for 1987 IMO)

a, b, c は正の実数で，m が正の整数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b} \geqq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1}.$$

解 1　一般性を失うことなく，$a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．
すると

$$a^m \geqq b^m \geqq c^m,\ \frac{1}{b+c} \geqq \frac{1}{c+a} \geqq \frac{1}{a+b}$$

であるから，チェビシェフの不等式より

$$\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b} \geqq \frac{1}{3}\left(a^m+b^m+c^m\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right).$$

ここで，$f(x)=x^m\ (x>0)$ は凸関数であるから

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \geqq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b} &\geqq \frac{a^m+b^m+c^m}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\\ &\geqq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^m\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right).\end{aligned}$$

したがって

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^m\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geqq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1}$$

すなわち

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geqq 9$$

を示せばよい．これは，コーシー・シュワルツの不等式を使って

$$\begin{aligned}&2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\\ &=[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\\ &\geqq (1+1+1)^2=9\end{aligned}$$

から得られる．■

解 2　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b+c=3$ と仮定できる．このとき

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b} \geqq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{a^m}{3-a}+\frac{b^m}{3-b}+\frac{c^m}{3-c} \geqq \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

$f(x)=\dfrac{x^m}{3-x}\quad(0<x<3)$ とおくと

$$f''(x)=\frac{x^{m-2}\left[(m-1)(m-2)x^2-6m(m-2)x+9m(m-1)\right]}{(3-x)^3}.$$

(i) $m=1$ のとき，$f''(x)=\dfrac{6}{(3-x)^3}>0$.

(ii) $m=2$ のとき，$f''(x)=\dfrac{18}{(3-x)^3}>0$.

(iii) $m>2$ のとき，$(m-1)(m-2)x^2-6m(m-2)x+9m(m-1)=0$ の判別式 D は

$$\frac{D}{4}=9m^2(m-2)^2-9m(m-1)^2(m-2)=-9m(m-2)<0$$

で，2 次の係数 $(m-1)(m-2)>0$ であるから
すべての実数 x について $(m-1)(m-2)x^2-6m(m-2)x+9m(m-1)>0$.
したがって，$f''(x)>0$.

(i)，(ii)，(iii) より $f(x)$ は凸関数であるから

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f(1)=\frac{3}{2}. \qquad \blacksquare$$

解 3　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b+c=3$ と仮定できる．このとき

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b} \geqq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{a^m}{3-a}+\frac{b^m}{3-b}+\frac{c^m}{3-c} \geqq \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

$f(x)=\dfrac{x^m}{3-x}\quad(0<x<3)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{x^{m-1}[3m-(m-1)x]}{(3-x)^2},\ f'(1)=\frac{2m+1}{4}.$$

$y=f(x)$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{(2m+1)x-(2m-1)}{4}$ となるから $y=f(x)$ との上下関係を調べる．

$$\begin{aligned} f(x)-\frac{(2m+1)x-(2m-1)}{4} &= \frac{x^m}{3-x}-\frac{(2m+1)x-(2m-1)}{4} \\ &= \frac{4x^m+(2m+1)x^2-(8m+2)x+3(2m-1)}{4(3-x)}. \end{aligned}$$

$F(x)=4x^m+(2m+1)x^2-(8m+2)x+3(2m-1)\quad(0<x<3)$ とおくと，

$$F'(x)=4mx^{m-1}+2(2m+1)x-(8m+2),$$

$$F''(x)=4m(m-1)x^{m-2}+2(2m+1)>0\,.$$

$F'(x)$ は増加関数で $F'(1)=0$ であるから，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$F(1)=0$ であるから $F(x)\geqq 0$ すなわち

$$f(x)\geqq\frac{(2m+1)x-(2m-1)}{4}.$$

よって

$$\begin{aligned} f(a)+f(b)+f(c) &\geqq \frac{(2m+1)(a+b+c)-3(2m-1)}{4} \\ &= \frac{3(2m+1)-3(2m-1)}{4}=\frac{3}{2}. \end{aligned}$$ ■

上の解 1，解 3 から m は自然数ではなく，1 以上の実数でも成り立つことがわかるので，次のようにまとめておく．

> α, x, y, z は正の実数で，$\alpha\geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つ．
>
> $$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y}\geqq\frac{3}{2}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\alpha-1} \tag{6.1}$$

解 2 では，$1<\alpha<2$ のときの考察を付け加える必要がある．$1<\alpha<2$ のときも，$f''(x)>0$ すなわち，$f(x)$ が凸関数になることを示す．

$f(x)=\dfrac{x^\alpha}{3-x}\quad(0<x<3)$ とおくと

$$f''(x)=\frac{x^{\alpha-2}\left[(\alpha-1)(\alpha-2)x^2-6\alpha(\alpha-2)x+9\alpha(\alpha-1)\right]}{(3-x)^3}.$$

$g(x)=(\alpha-1)(\alpha-2)x^2-6\alpha(\alpha-2)x+9\alpha(\alpha-1)\quad(0<x<3)$ とおくと，$g(x)$ は凹関数である．

$y=g(x)$ の軸の方程式は

$$x=\frac{3\alpha}{\alpha-1}.$$

$1<\alpha<2$ のとき，$3<\dfrac{3\alpha}{\alpha-1}$ なので，$g(x)$ は $0<x<3$ で増加関数である．
したがって，$g(x)>\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=9\alpha(\alpha-1)>0$ から $f''(x)>0$． □

[注]　$g(x)$ が $0<x<3$ で増加関数であることは

$$g'(x)=2(\alpha-2)[(\alpha-1)x-3\alpha]>0$$

から示してもよい．

問題 7　(Titu Andreescu , Mircea Lascu)

α,x,y,z は正の実数で，$xyz=1,\ \alpha\geqq1$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y}\geqq\frac{3}{2}.$$

解 1 (*yanagita*)　問題 6 を一般化した不等式 (6.1) を用いると証明できる．
(6.1) と相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y}&\geqq\frac{3}{2}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\alpha-1}\\&\overset{AM\geqq GM}{\geqq}\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^{\alpha-1}\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y}\geqq\frac{3}{2}.$$ ■

解 2　一般性を失うことなく $x \geqq y \geqq z$ と仮定できる．すると，

$$x^{\alpha-1} \geqq y^{\alpha-1} \geqq z^{\alpha-1},\ \frac{x}{y+z} \geqq \frac{y}{z+x} \geqq \frac{z}{x+y}$$

であるから，チェビシェフの不等式より

$$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y} \geqq \frac{1}{3}\left(x^{\alpha-1}+y^{\alpha-1}+z^{\alpha-1}\right)\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right).$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} x^{\alpha-1}+y^{\alpha-1}+z^{\alpha-1} &\geqq 3\sqrt[3]{x^{\alpha-1}y^{\alpha-1}z^{\alpha-1}} \\ &= 3\sqrt[3]{(xyz)^{\alpha-1}} \\ &= 3\,. \end{aligned}$$

ゆえに

$$x^{\alpha-1}+y^{\alpha-1}+z^{\alpha-1} \geqq 3. \qquad \cdots\cdots ①$$

Nesbitt の不等式より

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geqq \frac{3}{2}. \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②を用いると

$$\begin{aligned} \frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y} &\geqq \frac{1}{3}\left(x^{\alpha-1}+y^{\alpha-1}+z^{\alpha-1}\right)\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right) \\ &\geqq \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y} \geqq \frac{3}{2}. \qquad \blacksquare$$

問題 8 (Turkey 1997)

$n \geqq 2$ とする．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ のとき，

$$\frac{x_1^5}{x_2+x_3+\cdots+x_n} + \frac{x_2^5}{x_1+x_3+\cdots+x_n} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}$$

の最小値を求めよ．

解 1 $\quad P = \dfrac{x_1^5}{x_2+x_3+\cdots+x_n} + \dfrac{x_2^5}{x_1+x_3+\cdots+x_n} + \cdots + \dfrac{x_n^5}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}$
とおく．ヘルダーの不等式より

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots+x_n) \\
&\qquad \times \left[(x_2+x_3+\cdots+x_n)+(x_1+x_3+\cdots+x_n)+\cdots+(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})\right] \\
&\qquad \times \left(\frac{x_1^5}{x_2+x_3+\cdots+x_n} + \frac{x_2^5}{x_1+x_3+\cdots+x_n} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}\right) \\
&\geqq \Biggl(\sqrt[3]{x_1(x_2+x_3+\cdots+x_n)\cdot\frac{x_1^5}{x_2+x_3+\cdots+x_n}} \\
&\qquad + \sqrt[3]{x_2(x_1+x_3+\cdots+x_n)\cdot\frac{x_2^5}{x_1+x_3+\cdots+x_n}} \\
&\qquad + \cdots + \sqrt[3]{x_n(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})\cdot\frac{x_n^5}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}}\Biggr)^3 \\
&= (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^3 = 1\,.
\end{aligned}$$

ゆえに，$P \geqq \dfrac{1}{(n-1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}$ となるから，$x_1+x_2+\cdots+x_n$ が最大となる場合を調べる．

$$n = (1^2+1^2+\cdots+1^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \geqq (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$$

より $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \leqq n$ であるから

$$P \geqq \frac{1}{(n-1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2} \geqq \frac{1}{(n-1)n}.$$

等号は，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt{\dfrac{1}{n}}$ のときに限る．

したがって，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt{\dfrac{1}{n}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{n(n-1)}$ をとる． ■

解 2　$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$,

$$P = \frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}$$
$$= \frac{x_1^5}{S - x_1} + \frac{x_2^5}{S - x_2} + \cdots + \frac{x_n^5}{S - x_n}$$

とおく．

一般性を失うことなく $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ と仮定できる．すると

$$x_1^4 \geqq x_2^4 \geqq \cdots \geqq x_n^4,\ \frac{x_1}{S - x_1} \geqq \frac{x_2}{S - x_2} \geqq \cdots \geqq \frac{x_n}{S - x_n}$$

であるから，チェビシェフの不等式より

$$P = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \cdot \frac{x_i}{S - x_i} \geqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S - x_i}.$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)(x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4) \geqq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^2 = 1.$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \geqq \frac{1}{n}.$$

$f(x) = \dfrac{x}{S - x}$　$(0 < x < S)$ とおくと，$f''(x) = \dfrac{2S}{(S - x)^3} > 0$ より $f(x)$ は凸関数であるから

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) = nf\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{n}{n-1}.$$

よって

$$P \geqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S - x_i}$$
$$\geqq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

等号は，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt{\dfrac{1}{n}}$ のときに限る．

したがって，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt{\dfrac{1}{n}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{n(n-1)}$ をとる．　■

解 3　大抵，最小値は変数が等しくなるときとるから，$x_1 = x_2 = \cdots = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{n(n-1)}$ をとることが予測されるので，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^5}{x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n} \geqq \frac{1}{n(n-1)}$$

を示せばよい．補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^5}{x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i^3\right)^2}{x_i(x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n)} \\
&\geqq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n)}.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i(x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left\{x_i(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - x_i^2\right\} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 1
\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 1} \geqq \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{すなわち} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)^2 \geqq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 1}{n(n-1)}$$

を示せばよい．累次平均の不等式より

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ を使うと

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \text{から} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \geqq \frac{1}{\sqrt{n}},\ \sqrt{n} \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

よって

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)^2 \geqq \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n(n-1)} \geqq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 1}{n(n-1)}.$$

■

問題 9 (Romanian TST)

a, b, x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} \geqq \frac{3}{a+b}.$$

解 補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} &= \frac{x^2}{x(ay+bz)}+\frac{y^2}{y(az+bx)}+\frac{z^2}{z(ax+by)} \\
&\geqq \frac{(x+y+z)^2}{x(ay+bz)+y(az+bx)+z(ax+by)} \\
&= \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geqq 3$$

すなわち

$$(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx)$$

を示せばよい．これは

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx) &= x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \\
&= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \geqq 0
\end{aligned}$$

より成り立つ．

■

類題 (Czech-Slovak Match 1999)
a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geqq 1\,.$$

問題 10 (Mexico 2007)
a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \leqq 2\,.$$

解 1 $a+b+c=1$ を使うと

$$a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

となるので

$$\sqrt{a+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)} \overset{GM \leqq AM}{\leqq} \frac{(a+b)+(a+c)}{2}=\frac{2a+b+c}{2}.$$

同様にして

$$\sqrt{b+ca} \leqq \frac{2b+c+a}{2}, \quad \sqrt{c+ab} \leqq \frac{2c+a+b}{2}.$$

したがって

$$\begin{aligned} &\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \\ &\leqq \frac{2a+b+c}{2}+\frac{2b+c+a}{2}+\frac{2c+a+b}{2} \\ &=2(a+b+c)=2. \end{aligned}$$

■

解 2 $a+b+c=1$ を使うと

$$a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c).$$

同様に $b+ca=(b+a)(b+c)$, $c+ab=(c+a)(c+b)$ が成り立つので，不等式を同次化すると

$$\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{(b+a)(b+c)}+\sqrt{(c+a)(c+b)} \leqq (a+b)+(b+c)+(c+a).$$

これは，$xy+yz+zx \leqq x^2+y^2+z^2$ において，$x=\sqrt{a+b}$, $y=\sqrt{b+c}$, $z=\sqrt{c+a}$ とおけばよい． ■

問題 11　(Korea 1998)

$x,\ y,\ z$ は正の実数で，$x+y+z=xyz$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3}{2}.$$

解 1　$a=\frac{1}{x}>0,\ b=\frac{1}{y}>0,\ c=\frac{1}{z}>0$ とおき，$x+y+z=xyz$ を $a,\ b,\ c$ の条件に書き直すと，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$ から $ab+bc+ca=1$．

また，$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3}{2}$ を $a,\ b,\ c$ を用いて書き直すと

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqq \frac{3}{2}$$

となる． ここで，$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$ が成り立つから

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \overset{GM\leqq AM}{\leqq} \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right).$$

同様にして

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}\right),\quad \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right).$$

したがって

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\\ &\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$ ■

解 2　$x=\tan A,\ y=\tan B,\ z=\tan C,\ 0<A,\ B,\ C<\frac{\pi}{2}$ とおくと

$$\tan(\pi-C)=-z=\frac{x+y}{1-xy}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\tan(A+B).$$

$\pi-C\in(\pi/2,\ \pi),\ A+B\in(0,\ \pi)$ であるから，$\pi-C=A+B$ すなわち $A+B+C=\pi$．

ところで，$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3}{2}$ を $a,\ b,\ c$ を用いて書き直すと

$$\cos A+\cos B+\cos C \leqq \frac{3}{2}$$

となる．$f(x)=\cos x\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$f''(x)=-\cos x<0$．$f(x)$ は凹関数であるから

$$f(A)+f(B)+f(c) \leqq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}.$$ ■

問題 12　(Carlson's inequality)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geqq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}.$$

解 1　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $ab+bc+ca=3$ と仮定できる．このとき

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geqq 1$$

を示せばよい．

$$(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca) = 9,$$

$$3 = ab+bc+ca \overset{AM \geqq GM}{\geqq} 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

から

$$a+b+c \geqq 3,\ abc \leqq 1$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)} &\boldsymbol{= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc} \\ &= 3(a+b+c) - abc \\ &\geqq 3 \cdot 3 - 1 = 8. \end{aligned}$$

■

［注］　$x = \frac{a}{t},\ y = \frac{b}{t},\ z = \frac{c}{t},\ t = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$ とおくと

$$xy + yz + zx = \frac{ab+bc+ca}{t^2} = 3\,.$$

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geqq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \\ \iff &\sqrt[3]{\frac{(tx+ty)(ty+tz)(tz+tx)}{8}} \geqq \sqrt{\frac{tx \cdot ty + ty \cdot tz + tz \cdot tx}{3}} \\ \iff &\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}} \geqq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \end{aligned}$$

となるから，$ab+bc+ca=3$ と仮定しても一般性を失わない．

解 2
$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geqq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$
$$\iff 27(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geqq 64(ab+bc+ca)^3\,.$$

$\dfrac{(a+b+c)^2}{3} \geqq ab+bc+ca$ より

$$\frac{64}{3}(ab+bc+ca)^2(a+b+c)^2 \geqq 64(ab+bc+ca)^3$$

となるから

$$27(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geqq \frac{64}{3}(ab+bc+ca)^2(a+b+c)^2$$

すなわち

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8(ab+bc+ca)(a+b+c)$$

を示せばよい.

$$\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&9(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8(ab+bc+ca)(a+b+c)\\
\iff &9(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8(a+b)(b+c)(c+a) + 8abc\\
\iff &(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc\,.
\end{aligned}$$

したがって，$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$ を示せばよい．これは，相加平均・相乗平均の不等式より

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca} = 8abc\,. \qquad \blacksquare$$

解 3 $\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geqq \sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}$

$$\begin{aligned}
\iff &27(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geqq 64(ab+bc+ca)^3\\
\iff &27\sum_{sym} a^4b^2 + 54\sum_{cyclic} a^4bc + 54\sum_{cyclic} a^3b^3 + 162\sum_{sym} a^3b^2c + 270a^2b^2c^2\\
&\geqq 64\sum_{cyclic} a^3b^3 + 192\sum_{sym} a^3b^2c + 384a^2b^2c^2\\
\iff &27\sum_{sym} a^4b^2 + 54\sum_{cyclic} a^4bc \geqq 10\sum_{cyclic} a^3b^3 + 30\sum_{sym} a^3b^2c + 114a^2b^2c^2\\
\iff &27[(4,\ 2,\ 0)] + 27[(4,\ 1,\ 1)] \geqq 5[(3,\ 3,\ 0)] + 30[(3,\ 2,\ 1)] + 19[(2,\ 2,\ 2)].
\end{aligned}$$

Muirhead の定理より

$$5[(4,\ 2,\ 0)] \geqq 5[(3,\ 3,\ 0)],\ 22[(4,\ 2,\ 0)] \geqq 22[(3,\ 2,\ 1)]$$
$$8[(4,\ 1,\ 1)] \geqq 8[(3,\ 2,\ 1)],\ 19[(4,\ 1,\ 1)] \geqq 19[(2,\ 2,\ 2)]$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えると

$$27[(4,\ 2,\ 0)] + 27[(4,\ 1,\ 1)] \geqq 5[(3,\ 3,\ 0)] + 30[(3,\ 2,\ 1)] + 19[(2,\ 2,\ 2)]. \qquad \blacksquare$$

問題 13 (Kazakhstan 2008)

x, y, z は正の実数で，$xyz = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{yz+z} + \frac{1}{zx+x} + \frac{1}{xy+y} \geqq \frac{3}{2}.$$

解 1 $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{b}{c}$, $z = \dfrac{c}{a}$ とおくと，

$$\frac{1}{yz+z} + \frac{1}{zx+x} + \frac{1}{xy+y} \geqq \frac{3}{2} \iff \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}.$$

したがって

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}$$

を示せばよく，これは Nesbitt の不等式より成り立つ． $\blacksquare$

解 2 $xyz = 1$ を利用すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{yz+z} + \frac{1}{zx+x} + \frac{1}{xy+y} \geqq \frac{3}{2} \\
\iff\ & 2\left[xy(z+1)(x+1) + yz(x+1)(y+1) + zx(y+1)(z+1)\right] \\
&\geqq 3(x+1)(y+1)(z+1) \\
\iff\ & 2(x^2y + y^2z + z^2x) \geqq x + y + z + xy + yz + zx\,.
\end{aligned}$$

重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{3}z^2x \geqq \left(x^2y\right)^{\frac{2}{3}}\left(z^2x\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}} = (xyz)^{\frac{2}{3}}x = x\,.$$

同様にして

$$\frac{2}{3}y^2z + \frac{1}{3}x^2y \geqq y,\ \ \frac{2}{3}z^2x + \frac{1}{3}y^2z \geqq z\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$x^2y + y^2z + z^2x \geqq x + y + z. \qquad \cdots\cdots①$$

重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{2}{3}x^2y+\frac{1}{3}y^2z \geqq \left(x^2y\right)^{\frac{2}{3}}\left(y^2z\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}z^{\frac{1}{3}}=(xyz)^{\frac{1}{3}}xy=xy\,.$$

同様にして

$$\frac{2}{3}y^2z+\frac{1}{3}z^2x \geqq yz,\ \ \frac{2}{3}z^2x+\frac{1}{3}x^2y \geqq zx\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$x^2y+y^2z+z^2x \geqq xy+yz+zx. \qquad \cdots\cdots②$$

①+② より，$2(x^2y+y^2z+z^2x) \geqq x+y+z+xy+yz+zx$ は成り立つ． ■

［注］　解 2 で重みつきの相加平均・相乗平均の不等式を使用したが，通常の相加平均・相乗平均の不等式を使う場合は次のようにすればよい．

$$\frac{x^2y+x^2y+z^2x}{3} \geqq \sqrt[3]{x^2y\cdot x^2y\cdot z^2x}=x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}=(xyz)^{\frac{2}{3}}x=x\,.$$

$$\frac{x^2y+x^2y+y^2z}{3} \geqq \sqrt[3]{x^2y\cdot x^2y\cdot y^2z}=x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}z^{\frac{1}{3}}=(xyz)^{\frac{1}{3}}xy=xy\,.$$

問題 14　(Columbia 2001)

x, y が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$3(x+y+1)^2+1 \geqq 3xy.$$

解　$u=x+y,\ v=xy$ とおくと

$$\begin{aligned}
3(x+y+1)^2+1-3xy &= 3(u+1)^2+1-3v\\
&= 3u^2+6u+4-3v\\
&= \frac{3}{4}(u^2-4v)+\frac{1}{4}(9u^2+24u+16)\\
&= \frac{3}{4}(u^2-4v)+\frac{1}{4}(3u+4)^2\\
&= \frac{3}{4}(x-y)^2+\frac{1}{4}\left[3(x+y)+4\right]^2 \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

よって

$$3(x+y+1)^2+1 \geqq 3xy. \qquad ■$$

［注］　一つの文字について平方完成すると

$$3(x+y+1)^2+1-3xy=3\left(x+\frac{y+2}{2}\right)^2+\frac{(3y+2)^2}{4} \geqq 0.$$

問題 15　a, x は $0 < a < 1, 0 < x < 1$ を満たす実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^x + x^a > 1.$$

解 1　次の補題を準備しておく．

補題 1　r, x は $0 < r < 1, x > 0$ を満たす実数のとき，次の不等式が成り立つ．

$$(1+x)^r < 1 + rx.$$

[証明]　$f(x) = (1+rx) - (1+x)^r \quad (x \geqq 0)$ とおくと

$$f'(x) = r - r(1+x)^{r-1} = r\left(1 - \frac{1}{(1+x)^{1-r}}\right)$$

$x > 0$ のとき，$f'(x) > 0$ なので，$f(x)$ は $[0,\ \infty)$ で増加関数である．
よって，$x > 0$ のとき　$f(x) > f(0) = 0$ となり，$(1+x)^r < 1 + rx$ は成り立つ．　□

a, x は $0 < a < 1, 0 < x < 1$ であるから $a = \dfrac{1}{1+u}$，$x = \dfrac{1}{1+v}$，$u > 0$，$v > 0$ とおくと，補題 1 より

$$a^x = \frac{1}{(1+u)^x} > \frac{1}{1+xu} = \frac{1+v}{1+u+v},$$

$$x^a = \frac{1}{(1+v)^a} > \frac{1}{1+av} = \frac{1+u}{1+u+v}.$$

ゆえに

$$a^x + x^a > \frac{2+u+v}{1+u+v} > 1.$$

■

解 2 (i)　最初に，不等式

$$1 - \frac{\log a}{a}x - a^{-x} > 0$$

が成り立つことを示す．

$g(x) = 1 - \dfrac{\log a}{a}x - a^{-x} \quad (0 \leqq x < 1)$ とおくと

$$g'(x) = -\frac{\log a}{a} - a^{-x}(\log a)(-1) = \log a\left[\left(\frac{1}{a}\right)^x - \frac{1}{a}\right]$$

$0 < x < 1$ のとき，$g'(x) > 0$ なので，$g(x)$ は $[0,\ 1)$ で増加関数である．
よって，$0 < x < 1$ のとき，$g(x) > g(0) = 0$ から $1 - \dfrac{\log a}{a}x - a^{-x} > 0$.

(ii)　次に関数 $f(x)=a^x+x^a-1\quad(0 \leqq x \leqq 1)$ について，$f'(x)=0$，$f(x) \leqq 0$ をともに満たす $x\ (0<x<1)$ は存在しないことを示す．

$x=x_1\ (0<x_1<1)$ において

$$f(x_1)=a^{x_1}+x_1^a-1 \leqq 0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$f'(x_1)=a^{x_1}\log a+ax_1^{a-1}=0 \qquad \cdots\cdots②$$

がともに成り立つと仮定すると，②から

$$x_1^a=-\frac{a^{x_1}x_1\log a}{a}.$$

これを① に代入すると

$$a^{x_1}-\frac{a^{x_1}x_1\log a}{a}-1 \leqq 0.$$

両辺を $a^{x_1}\ (>0)$ で割ると

$$1-\frac{\log a}{a}x_1-a^{-x_1} \leqq 0.$$

これは (i) に矛盾する．したがって，このような x_1 は存在しない．

(iii)　$f(x)=a^x+x^a-1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ について，$f(0)=0$，$f(1)=a$．
$f(x) \leqq 0$ となる $x\ (0<x<1)$ があると仮定して，一つを $\alpha\ (0<\alpha<1)$ とおく．

$f(x)$ は連続関数であるから，$[0,\ 1]$ で最小値をとる．$x=\beta$ で最小値をとるとすれば，$0<\beta<1$ とすることができ，$f(\beta) \leqq f(\alpha) \leqq 0$.

$f(x)$ は微分可能であるから，$f'(\beta)=0$ となる．これは (ii) に矛盾する．したがって，このような α は存在しないから，不等式 $a^x+x^a>1$ が成り立つ．■

問題 16 (APMC 1993)

a, b が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \leqq \frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4} \leqq \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} \leqq \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}.$$

解 1 (*yanagita*) $P = \dfrac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4} - \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$ とおくと

$$\begin{aligned}
P &= \frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4} - \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b-(a+2\sqrt{ab}+b)}{4} \\
&= \frac{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}-2\sqrt{ab}}{4}.
\end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2} \geqq 2\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[3]{ab^2}} = 2\sqrt{ab}.$$

よって，$P \geqq 0$．

$Q = \dfrac{a+\sqrt{ab}+b}{3} - \dfrac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4}$ とおくと

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} - \frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4} \\
&= \frac{a+4\sqrt{ab}+b-3\sqrt[3]{a^2b}-3\sqrt[3]{ab^2}}{12}.
\end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$a+2\sqrt{ab} = a+\sqrt{ab}+\sqrt{ab} \geqq 3\sqrt[3]{a(\sqrt{ab})^2} = 3\sqrt[3]{a^2b},$$

$$b+2\sqrt{ab} = b+\sqrt{ab}+\sqrt{ab} \geqq 3\sqrt[3]{b(\sqrt{ab})^2} = 3\sqrt[3]{ab^2}$$

が成り立つから

$$a+4\sqrt{ab}+b \geqq 3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}.$$

よって，$Q \geqq 0$．

次に，$\dfrac{a+\sqrt{ab}+b}{3} \leqq \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}$ を示す．

$a=0$ または $b=0$ のときは明らかに成り立つから，$a>0,\ b>0$ とする．証明すべき不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $ab=1$ と仮定することができる．
$x=\sqrt[3]{a},\ y=\sqrt[3]{b}$ とおくと，$xy=1$．

$$
\begin{aligned}
&\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} \leqq \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3} \\
\iff& \left(\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}\right)^2 \leqq \left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3 \\
\iff& \left(\frac{x^3+y^3+1}{3}\right)^2 \leqq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^3 \\
\iff& \frac{x^6+y^6+2(x^3+y^3)+2x^3y^3+1}{9} \leqq \frac{x^6+y^6+3x^2y^2(x^2+y^2)}{8} \\
\iff& \frac{x^6+y^6+2(x^3+y^3)+3}{9} \leqq \frac{x^6+y^6+3(x^2+y^2)}{8} \\
\iff& x^6+y^6-16(x^3+y^3)+27(x^2+y^2)-24 \geqq 0.
\end{aligned}
$$

$t=x+y$ とおくと，$xy=1$ であるから

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2,\ x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=t^3-3t,$$

$$x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3=(t^3-3t)^2-2=t^6-6t^4+9t^2-2.$$

これを用いると

$$
\begin{aligned}
&x^6+y^6-16(x^3+y^3)+27(x^2+y^2)-24 \geqq 0 \\
\iff& t^6-6t^4+9t^2-2-16(t^3-3t)+27(t^2-2)-24 \geqq 0 \\
\iff& t^6-6t^4-16t^3+36t^2+48t-80 \geqq 0 \\
\iff& (t-2)^2(t^4+4t^3+6t^2-8t-20) \geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

$t=x+y \geqq 2\sqrt{xy}=2$ であるから，

$t^4+4t^3+6t^2-8t-20=t^4+4t(t^2-2)+2(3t^2-10) \geqq t^4+4t(4-2)+2(12-10)>0\,.$

よって，$(t-2)^2(t^4+4t^3+6t^2-8t-20) \geqq 0$ が成り立つから

$$\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} \leqq \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}. \qquad \blacksquare$$

［注］　三番目の不等式の証明において，$a>0,\ b>0$ のとき，$p=\dfrac{a}{t},\ q=\dfrac{q}{t},\ t=\sqrt{ab}$ とおくと，$pq=\dfrac{ab}{t^2}=\dfrac{ab}{ab}=1$ が成り立ち

$$\begin{aligned}
&\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} \leqq \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{tp+\sqrt{tp\cdot tq}+tq}{3} \leqq \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{(tp)^2}+\sqrt[3]{(tq)^2}}{2}\right)^3}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{p+\sqrt{pq}+q}{3} \leqq \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{p^2}+\sqrt[3]{q^2}}{2}\right)^3}
\end{aligned}$$

であるから，一般性を失うことなく $ab=1$ と仮定してもよい．

解 2　$A=\sqrt[6]{a},\ B=\sqrt[6]{b}$ とおくと，$A\geqq 0,\ B\geqq 0$．

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \leqq \frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4}\\
\Longleftrightarrow\ &(A^3+B^3)^2 \leqq (A^6+A^4B^2+A^2B^4+B^6)\\
\Longleftrightarrow\ &(A^3+B^3)^2 \leqq (A^4+B^4)(A^2+B^2).
\end{aligned}$$

したがって，$(A^3+B^3)^2 \leqq (A^4+B^4)(A^2+B^2)$ を示せばよく，コーシー・シュワルツの不等式より

$$(A^4+B^4)(A^2+B^2) \geqq \left(A^2\cdot A+B^2\cdot B\right)^2=(A^3+B^3)^2.$$

次に

$$\begin{aligned}
&\frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4} \leqq \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}\\
\Longleftrightarrow\ &3(A^6+B^6)+3A^4B^2+3A^2B^4 \leqq 4(A^6+A^3B^3+B^6)\\
\Longleftrightarrow\ &A^6+3A^4B^2+3A^2B^4+B^6 \leqq 2(A^6+2A^3B^3+B^6)\\
\Longleftrightarrow\ &(A^2+B^2)^3 \leqq 2(A^3+B^3)^2.
\end{aligned}$$

補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
2(A^3+B^3)^2 &= (1+1)(A^3+B^3)(A^3+B^3)\\
&\geqq (\sqrt[3]{1\cdot A^3\cdot A^3}+\sqrt[3]{1\cdot B^3\cdot B^3}+)^3=(A^2+B^2)^3.
\end{aligned}$$

よって，$(A^2+B^2)^3 \leqq 2(A^3+B^3)^2$．

三番目の不等式は

$$\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} \leqq \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}$$

$$\iff \left(\frac{A^6+A^3B^3+B^6}{3}\right)^2 \leqq \left(\frac{A^4+B^4}{2}\right)^3$$

$$\iff 8(A^6+A^3B^3+B^6)^2 \leqq 9(A^4+B^4)^3$$

差をとると

$$\begin{aligned}
&9(A^4+B^4)^3-8(A^6+A^3B^3+B^6)^2\\
&=A^{12}-16A^9B^3+27A^8B^4-24A^6B^6+27A^4B^8-16A^3B^9+B^{12}\\
&=(A-B)^4\\
&\quad\times\left(\underset{\sim\sim}{A^8}+4A^7B+10A^6B^2+4A^5B^3\underset{\sim\sim\sim\sim}{-2A^4B^4}+4A^3B^5+10A^2B^6+4AB^7+\underset{\sim\sim}{B^8}\right)\\
&=(A-B)^4\\
&\quad\times\left[\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{(A^4-B^4)^2}+4A^7B+10A^6B^2+4A^5B^3+4A^3B^5+10A^2B^6+4AB^7\right] \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\left(\frac{A^6+A^3B^3+B^6}{3}\right)^2 \leqq \left(\frac{A^4+B^4}{2}\right)^3. \qquad \blacksquare$$

［注］　二番目の不等式を証明するところに現れた不等式 $(A^2+B^2)^3 \leqq 2(A^3+B^3)^2$ は，$A,\ B>0$ のときには累次平均の不等式

$$\left(\frac{A^2+B^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\frac{A^3+B^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

の両辺を 6 乗すると得られる（$A=0$ または $B=0$ のときは不等式は成り立つことは容易にわかる）.

問題 17　(Czech and Slovakia 2000)

a, b が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \geqq \sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,.$$

解1　$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \geqq \sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \Longleftrightarrow 2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3$.
したがって

$$2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3$$

を示せばよい．補助定理 2 より

$$\begin{aligned} 2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) &= (1+1)(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) \\ &\geqq \left(\sqrt[3]{1\cdot a\cdot\frac{1}{b}}+\sqrt[3]{1\cdot b\cdot\frac{1}{a}}\right)^3 \\ &= \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3 . \end{aligned}$$

■

解2　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b=1$ と仮定することができる．

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \geqq \sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}} &\Longleftrightarrow \sqrt[3]{\frac{2}{ab}} \geqq \sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \\ &\Longleftrightarrow \sqrt[3]{2} \geqq \sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}. \end{aligned}$$

$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ $(x>0)$ とおくと，$f''(x)=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}<0$. $f(x)$ は凹関数であるから

$$f(a)+f(b) \leqq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{3}}.$$

よって，$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2} \leqq \sqrt[3]{2}$. ■

［注］　$\sqrt[3]{2} \geqq \sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$ は累次平均の不等式

$$\frac{1}{2}=\frac{a+b}{2} \geqq \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

から導くこともできる．

解3　両辺を 3 乗しても同値である．

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \geqq \sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

$$\Longleftrightarrow 2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3$$

$$\Longleftrightarrow 4+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geqq \frac{a}{b}+3\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}$$

$$\Longleftrightarrow 4+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,.$$

したがって

$$4+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$1+1+\frac{a}{b} \geqq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot \frac{a}{b}} = 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}},$$

$$1+1+\frac{b}{a} \geqq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot \frac{b}{a}} = 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

2 つの不等式の辺々を加えると，$4+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geqq 3\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}+3\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$. ■

［注］　$4+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geqq 3\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}+3\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$. は次のように示すこともできる．

$\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = x$ とおくと

$$4+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \Longleftrightarrow 4+x^3+\frac{1}{x^3} \geqq 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$t = x+\dfrac{1}{x}$ とおくと $x+\dfrac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}} \geqq 2$ より $t \geqq 2$,

$$x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) = t^3-3t$$

より

$$\begin{aligned} 4+x^3+\frac{1}{x^3} \geqq 3\left(x+\frac{1}{x}\right) &\Longleftrightarrow 4+t^3-3t \geqq 3t \\ &\Longleftrightarrow t^3-6t+4 \geqq 0 \\ &\Longleftrightarrow (t-2)(t^2+2t-2) \geqq 0. \end{aligned}$$

$t \geqq 2$ であるから，$t^2+2t-2 = (t+1)^2-3 \geqq 3^2-3 > 0$ より $(t-2)(t^2+2t-2) \geqq 0$.

□

問題 18 (Die $\sqrt{WURZEL}$, Heinz-Jürgen Seiffert)

x, y は実数で $xy > 0$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqq \sqrt{xy} + \frac{x+y}{2}.$$

解 不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned}
&\frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqq \sqrt{xy} + \frac{x+y}{2} \\
\iff& \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \sqrt{xy} \geqq \frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} \\
\iff& \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \sqrt{xy}\right)\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right) \\
&\geqq \left(\frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y}\right)\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right) \\
\iff& \frac{(x-y)^2}{2} \geqq \frac{(x-y)^2}{2(x+y)}\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right).
\end{aligned}$$

(i) $x+y<0$ のときは，$\dfrac{(x-y)^2}{2} \geqq 0$，$0 \geqq \dfrac{(x-y)^2}{2(x+y)}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right)$ より $\dfrac{(x-y)^2}{2} \geqq \dfrac{(x-y)^2}{2(x+y)}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right)$ は成り立つ．

(ii) $x+y>0$ のときは

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-y)^2}{2} \geqq \frac{(x-y)^2}{2(x+y)}\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right) \\
\Longleftarrow\ & x+y \geqq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy} \\
\iff& (x+y)^2 \geqq \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right)^2 \\
\iff& (x+y)^2 \geqq \frac{x^2+y^2}{2} + 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\sqrt{xy} + xy \\
\iff& (x+y)^2 \geqq \frac{(x+y)^2}{2} + 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\sqrt{xy}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \frac{(x+y)^2}{2} \geqq 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\sqrt{xy} \\
&\iff (x+y)^4 \geqq 8(x^2+y^2)xy \\
&\iff x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4 \geqq 0 \\
&\iff (x-y)^4 \geqq 0
\end{aligned}
$$

から成り立つ. ■

問題 19　(Crux Mathematicorum , Problem 2645 ,Hojoo Lee)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \geqq 33.$$

解

$$
\begin{aligned}
&\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}-33 \geqq 0 \\
\iff & \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}-6+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}-27 \geqq 0 \\
\iff & 2\cdot\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{abc}+9\cdot\frac{(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} \geqq 0 \\
\iff & 2\cdot\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{abc} \\
& \qquad -18\cdot\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+c^2} \geqq 0 \\
\iff & 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left(\frac{a+b+c}{abc}-\frac{9}{a^2+b^2+c^2}\right) \geqq 0 \\
\iff & \frac{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-9abc\right]}{abc(a^2+b^2+c^2)} \geqq 0 \\
\iff & \frac{\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\left[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-9abc\right]}{abc(a^2+b^2+c^2)} \geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

ここで，相加平均・相乗平均の不等式より

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc\,.$$

よって

$$\frac{\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\left[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-9abc\right]}{abc(a^2+b^2+c^2)} \geqq 0\,. \qquad ■$$

問題 20　x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt[3]{xyz}+\frac{|x-y|+|y-z|+|z-x|}{3} \geqq \frac{x+y+z}{3}.$$

解　($yanagita$) 不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $xyz=1$ と仮定できる．また，不等式は対称式なので，$x \geqq y \geqq z$ と仮定する．

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{xyz}+\frac{|x-y|+|y-z|+|z-x|}{3} \geqq \frac{x+y+z}{3}\\
\Longleftrightarrow\ & 1+\frac{x-y+y-z+x-z}{3} \geqq \frac{x+y+z}{3}\\
\Longleftrightarrow\ & 1 \geqq \frac{-x+y+3z}{3}\\
\Longleftrightarrow\ & (x-y)+3(1-z) \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

ここで，$z^3 \leqq xyz=1$ から $z \leqq 1$ となるから，$(x-y)+3(1-z) \geqq 0$ は成り立つ．　■

［注］　$p=\dfrac{x}{t}$，$q=\dfrac{y}{t}$，$r=\dfrac{z}{t}$，$t=\sqrt[3]{xyz}$ とおくと，$pqr=\dfrac{xyz}{t^3}=\dfrac{xyz}{xyz}=1$ で

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{xyz}+\frac{|x-y|+|y-z|+|z-x|}{3} \geqq \frac{x+y+z}{3}\\
\Longleftrightarrow\ & \sqrt[3]{tp\cdot tq\cdot tr}+\frac{|tp-tq|+|tq-tr|+|tr-tp|}{3} \geqq \frac{tp+tq+tr}{3}\\
\Longleftrightarrow\ & \sqrt[3]{pqr}+\frac{|p-q|+|q-r|+|r-p|}{3} \geqq \frac{p+q+r}{3}
\end{aligned}$$

であるから，一般性を失うことなく $xyz=1$ と仮定してもよい．

問題 21　a, b, c, x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} \geqq \sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz}.$$

解 1　補助定理 2 より，$(a+x)(b+y)(c+z) \geqq \left(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz}\right)^3$．

よって，$\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} \geqq \sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz}$.　■

解 2　($yanagita$) Normalization する．

$x_1=\sqrt[3]{a}>0, x_2=\sqrt[3]{b}>0, x_3=\sqrt[3]{c}>0, y_1=\sqrt[3]{x}>0, y_2=\sqrt[3]{y}>0, y_3=\sqrt[3]{z}>0$ とおき

$$\sqrt[3]{(x_1^3+y_1^3)(x_2^3+y_2^3)(x_3^3+y_3^3)} \geqq x_1x_2x_3+y_1y_2y_3$$

すなわち

$$(x_1^3+y_1^3)(x_2^3+y_2^3)(x_3^3+y_3^3) \geqq (x_1x_2x_3+y_1y_2y_3)^3$$

を証明すればよい．

$x_1^3+y_1^3=1$ と仮定しても一般性を失わない．なぜならば，
$t=\sqrt[3]{x_1^3+y_1^3}$ として $x_1=tp$，$y_1=tq$ とおくと

$$p^3+q^3=\frac{x_1^3+y_1^3}{t^3}=\frac{x_1^3+y_1^3}{x_1^3+y_1^3}=1$$

で，証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}
&(x_1^3+y_1^3)(x_2^3+y_2^3)(x_3^3+y_3^3) \geqq (x_1x_2x_3+y_1y_2y_3)^3\\
\iff&(t^3p^3+t^3q^3)(x_2^3+y_2^3)(x_3^3+y_3^3) \geqq (tpx_2x_3+tqy_2y_3)^3\\
\iff&(p^3+q^3)(x_2^3+y_2^3)(x_3^3+y_3^3) \geqq (px_2x_3+qy_2y_3)^3\\
\iff&(x_2^3+y_2^3)(x_3^3+y_3^3) \geqq (px_2x_3+qy_2y_3)^3
\end{aligned}$$

となるからである．

同様にして，$x_2^3+y_2^3=1$，$x_3^3+y_3^3=1$ としても一般性を失わないから，$x_1^3+y_1^3=1$ かつ $x_2^3+y_2^3=1$ かつ $x_3^3+y_3^3=1$ のときに

$$x_1x_2x_3+y_1y_2y_3 \leqq 1$$

を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$3x_1x_2x_3 \leqq x_1^3+x_2^3+x_3^3,\ 3y_1y_2y_3 \leqq y_1^3+y_2^3+y_3^3$$

が成り立つから，2 つの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}
3(x_1x_2x_3+y_1y_2y_3) &\leqq x_1^3+x_2^3+x_3^3+y_1^3+y_2^3+y_3^3\\
&=(x_1^3+y_1^3)+(x_2^3+y_2^3)+(x_3^3+y_3^3)=3\,.
\end{aligned}$$

よって

$$x_1x_2x_3+y_1y_2y_3 \leqq 1.$$

■

解 3　$x_1=\sqrt[3]{a}>0$，$x_2=\sqrt[3]{b}>0$，$x_3=\sqrt[3]{c}>0$，$y_1=\sqrt[3]{x}>0$，$y_2=\sqrt[3]{y}>0$，$y_3=\sqrt[3]{z}>0$ とおき

$$\sqrt[3]{(x_1^3+y_1^3)(x_2^3+y_2^3)(x_3^3+y_3^3)} \geqq x_1x_2x_3+y_1y_2y_3$$

すなわち

$$(x_1^3+y_1^3)(x_2^3+y_2^3)(x_3^3+y_3^3) \geqq (x_1x_2x_3+y_1y_2y_3)^3$$

を証明すればよい．コーシー・シュワルツの不等式より

$$(x_1^3+y_1^3)(x_2^3+y_2^3) \geqq \left(x_1^{\frac{3}{2}}x_2^{\frac{3}{2}}+y_1^{\frac{3}{2}}y_2^{\frac{3}{2}}\right)^2,$$

$$(x_3^3+y_3^3)(x_1x_2x_3+y_1y_2y_3) \geqq \left(x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}x_3^2+y_1^{\frac{1}{2}}y_2^{\frac{1}{2}}y_3^2\right)^2.$$

これらの不等式の辺々をかけあわせ，再びコーシー・シュワルツの不等式を適用すると

$$\begin{aligned}&(x_1^3+y_1^3)(x_2^3+y_2^3)(x_3^3+y_3^3)(x_1x_2x_3+y_1y_2y_3)\\ &\geqq \left[\left(x_1^{\frac{3}{2}}x_2^{\frac{3}{2}}+y_1^{\frac{3}{2}}y_2^{\frac{3}{2}}\right)\left(x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}x_3^2+y_1^{\frac{1}{2}}y_2^{\frac{1}{2}}y_3^2\right)\right]^2\\ &\geqq (x_1x_2x_3+y_1y_2y_3)^4.\end{aligned}$$

よって，$(x_1^3+y_1^3)(x_2^3+y_2^3)(x_3^3+y_3^3) \geqq (x_1x_2x_3+y_1y_2y_3)^3$. ■

問題 22 (Belarus 2000)

a, b, c, x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geqq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

㊎ 補助定理 2 より

$$\begin{aligned}&(1+1+1)(x+y+z)\left(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\right)\\ &\geqq \left(\sqrt[3]{1\cdot x\cdot\frac{a^3}{x}}+\sqrt[3]{1\cdot y\cdot\frac{b^3}{y}}+\sqrt[3]{1\cdot z\cdot\frac{c^3}{z}}\right)^3\\ &=(a+b+c)^3.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geqq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$ ■

問題 23 (Samin Riasat)

a, b, c が三角形の 3 辺のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{8abc+(a+b-c)^3}+\frac{1}{8abc+(b+c-a)^3}+\frac{1}{8abc+(c+a-b)^3} \leqq \frac{1}{3abc}.$$

解　証明すべき不等式を同値変形する．

$$\frac{1}{8abc+(a+b-c)^3}+\frac{1}{8abc+(b+c-a)^3}+\frac{1}{8abc+(c+a-b)^3} \leqq \frac{1}{3abc}$$

$$\iff \left(\frac{1}{8abc}-\frac{1}{8abc+(a+b-c)^3}\right)+\left(\frac{1}{8abc}-\frac{1}{8abc+(b+c-a)^3}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{8abc}-\frac{1}{8abc+(c+a-b)^3}\right) \geqq \frac{3}{8abc}-\frac{1}{3abc}$$
$$\iff \frac{(a+b-c)^3}{8abc+(a+b-c)^3}+\frac{(b+c-a)^3}{8abc+(b+c-a)^3}+\frac{(c+a-b)^3}{8abc+(c+a-b)^3} \geqq \frac{1}{3}.$$

問題 22 より

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+b-c)^3}{8abc+(a+b-c)^3}+\frac{(b+c-a)^3}{8abc+(b+c-a)^3}+\frac{(c+a-b)^3}{8abc+(c+a-b)^3} \\
\geqq\ &\frac{[(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)]^3}{3\left[8abc+(a+b-c)^3+8abc+(b+c-a)^3+8abc+(c+a-b)^3\right]} \\
=\ &\frac{(a+b+c)^3}{3\left[\underbrace{24abc+(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3}_{=(a+b+c)^3}\right]} \\
=\ &\frac{(a+b+c)^3}{3(a+b+c)^3} \\
=\ &\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{(a+b-c)^3}{8abc+(a+b-c)^3}+\frac{(b+c-a)^3}{8abc+(b+c-a)^3}+\frac{(c+a-b)^3}{8abc+(c+a-b)^3} \geqq \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

問題 24　(Kyiv 2006)

x, y, z は正の実数で，$xy+yz+zx=1$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x^3}{1+9y^2zx}+\frac{y^3}{1+9z^2xy}+\frac{z^3}{1+9x^2yz} \geqq \frac{(x+y+z)^3}{18}.$$

解　問題 22 より

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3}{1+9y^2zx}+\frac{y^3}{1+9z^2xy}+\frac{z^3}{1+9x^2yz}\\
&\geqq \frac{(x+y+z)^3}{3(1+9y^2zx+1+9z^2xy+1+9x^2yz)}\\
&=\frac{(x+y+z)^3}{9[1+3xyz(x+y+z)]}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(x+y+z)^3}{9[1+3xyz(x+y+z)]}\geqq\frac{(x+y+z)^3}{18}$$

すなわち

$$3xyz(x+y+z)\leqq 1$$

を示せばよい．

$a,\ b,\ c$ が実数のとき，$(a+b+c)^2\geqq 3(ab+bc+ca)$ が成り立つから

$$1=(xy+yz+zx)^2\geqq 3(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)=3xyz(x+y+z). \qquad \blacksquare$$

問題 25　x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leqq 1\,.$$

解 1　コーシー・シュワルツの不等式より

$$(x+y)(x+z)=(x+y)(z+x)\geqq(\sqrt{x}\cdot\sqrt{z}+\sqrt{y}\cdot\sqrt{x})^2=(\sqrt{xy}+\sqrt{xz})^2\,.$$

ゆえに

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}\leqq\frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}.$$

同様にして

$$\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}\leqq\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}},\quad \frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leqq\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\sum_{cyclic}\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}\leqq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}=1\,. \qquad \blacksquare$$

解 2　証明すべき不等式は，$\displaystyle\sum_{cyclic} \frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{(x+y)(x+z)}{x^2}}} \leqq 1$ と変形できる．

不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $xy+yz+zx=1$ とおける．

$x=\tan\dfrac{\alpha}{2},\ y=\tan\dfrac{\beta}{2},\ z=\tan\dfrac{\gamma}{2}\ (0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\pi)$ とおくと

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{z}=\frac{x+y}{1-xy}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right).$$

$0<\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2}<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}<\pi$ なので $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}$. ゆえに，

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi\,.$$

$$\frac{(x+y)(x+z)}{x^2}=\frac{x^2+xy+yz+zx}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}=1+\frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

より

$$\frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{(x+y)(x+z)}{x^2}}}=\frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

したがって

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{1+\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{1+\sin\frac{\gamma}{2}}\leqq 1$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{1+\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{1+\sin\frac{\gamma}{2}}\leqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &1-\frac{1}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}+1-\frac{1}{1+\sin\frac{\beta}{2}}+1-\frac{1}{1+\sin\frac{\gamma}{2}}\leqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &2\leqq\frac{1}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{\gamma}{2}}.
\end{aligned}$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$\left(\frac{1}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{\gamma}{2}}\right)\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}+1+\sin\frac{\beta}{2}+1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$\geqq (1+1+1)^2 = 9.$$

よって

$$\frac{1}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{\gamma}{2}} \geqq \frac{9}{3+\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}$$

となるから

$$\frac{9}{3+\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}} \geqq 2$$

すなわち

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{3}{2}$$

を示せばよい．

$f(x)=\sin\frac{x}{2}$ $(0<x<\pi)$ とおくと，$f''(x)=-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}<0$. $f(x)$ は凹関数であるから

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma) \leqq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}. \qquad \blacksquare$$

問題 26　x, y, z は正の実数で $x+y+z=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}+\frac{z}{\sqrt{1-z}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

解 1　$f(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t}}$ $(0<t<1)$ とおくと，$f''(t)=\frac{4-t}{4(1-t)^{\frac{5}{2}}}>0$.
$f(t)$ は凸関数であるから

$$f(x)+f(y)+f(z) \geqq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}. \qquad \blacksquare$$

解 2　$x \geqq y \geqq z$ と仮定すると，$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{1-y}} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$ となるから，チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}+\frac{z}{\sqrt{1-z}} &\geqq \frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1-y}}+\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1-y}}+\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right).\end{aligned}$$

ここで，コーシー・シュワルツの不等式より

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1-y}}+\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z}\right) \geqq (1+1+1)^2 = 9\,.$$

よって

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1-y}}+\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right) \geqq \frac{3}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z}}. \qquad \cdots\cdots(*)$$

$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき，$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \geqq a+b+c$ が成り立つから

$$\sqrt{3(1-x+1-y+1-z)} \geqq \sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z}$$

すなわち

$$\frac{3}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z}} \geqq \frac{3}{\sqrt{3(3-x-y-z)}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}. \qquad \cdots\cdots(**)$$

$(*)$, $(**)$ より

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}+\frac{z}{\sqrt{1-z}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

■

解 3　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyclic}\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)^2 \sum_{cyclic} x(1-x) &= \sum_{cyclic}\frac{x}{\sqrt{1-x}}\cdot\sum_{cyclic}\frac{x}{\sqrt{1-x}}\cdot\sum_{cyclic}x(1-x)\\ &\geqq \left(\sum_{cyclic}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)^2\cdot x(1-x)}\right)^3\\ &= (x+y+z)^3 = 1\,.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}+\frac{z}{\sqrt{1-z}}\right)^2 \geqq \frac{1}{x(1-x)+y(1-y)+z(1-z)}$$
$$= \frac{1}{x+y+z-x^2-y^2-z^2}$$
$$= \frac{1}{1-x^2-y^2-z^2}$$

したがって

$$\frac{1}{1-x^2-y^2-z^2} \geqq \frac{3}{2}$$

すなわち

$$3(x^2+y^2+z^2) \geqq 1$$

を示せばよい．これは，コーシー・シュワルツの不等式より

$$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+z)^2 = 1\,.$$

したがって，$3(x^2+y^2+z^2) \geqq 1$ は成り立つ． ■

［類題］　(India 1995)

x_1，x_2，…，x_n は正の実数で $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

問題 27　(Brazilian TST 2004)

x, y, z は正の実数で $x^2+y^2+z^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2} \geqq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

解　$a=x^2,\ b=y^2,\ c=z^2$ とおくと，$a,\ b,\ c$ は正の実数で $a+b+c=1$ を満たす．このとき

$$\frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c} \geqq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

を証明すればよい．

$f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{1-t}\ (0<t<1)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{1+t}{2\sqrt{t}(1-t)^2},\ \ f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$y=f(t)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t$ となるから，$y=f(t)$ との上下関係を調べる．

$$\begin{aligned} f(t)-\frac{3\sqrt{3}}{2}t &= \frac{\sqrt{t}}{1-t}-\frac{3\sqrt{3}}{2}t=\frac{3\sqrt{3}t^2-3\sqrt{3}t+2\sqrt{t}}{2(1-t)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{3t}-1\right)^2\left(\sqrt{3}t+2\sqrt{t}\right)}{2(1-t)} \geqq 0 \end{aligned}$$

より

$$f(t) \geqq \frac{3\sqrt{3}}{2}t\,.$$

よって

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a+b+c)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

問題 28　(Romania 2005,Unused)

a,b,c は正の実数で $ab+bc+ca+2abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leqq \frac{3}{2}\,.$$

解 1　$x=\sqrt{ab}>0,\ y=\sqrt{bc}>0,\ z=\sqrt{ca}>0$ とおくと，$ab+bc+ca+2abc=1$ は $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ となる．

$x^2<x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ から $0<x<1$．同様にして $0<y<1,\ 0<z<1$ が成り立つ．

ところで，$t=x+y+z$ とおくと

$$\frac{3-t}{3}=\frac{3-(x+y+z)}{3}=\frac{(1-x)+(1-y)+(1-z)}{3}$$
$$\overset{AM\geqq GM}{\geqq}\ \sqrt[3]{(1-x)(1-y)(1-z)}\,,$$

$$\begin{aligned}(1-x)(1-y)(1-z)&=1-(x+y+z)+xy+yz+zx-xyz\\&=1-(x+y+z)+xy+yz+zx-\frac{1-(x^2+y^2+z^2)}{2}\\&=\frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)-2(x+y+z)+1}{2}\\&=\frac{(x+y+z)^2-2(x+y+z)+1}{2}=\frac{t^2-2t+1}{2}\end{aligned}$$

となるので

$$\left(\frac{3-t}{3}\right)^3\geqq\frac{t^2-2t+1}{2}\,.$$

整理すると

$$2t^3+9t^2-27\leqq 0\quad\text{から}\quad(t+3)^2(2t-3)\leqq 0\,.$$

よって，$t\leqq\dfrac{3}{2}$ となるから，$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leqq\dfrac{3}{2}$．■

解 2　$x=\sqrt{ab}>0,\ y=\sqrt{bc}>0,\ z=\sqrt{ca}>0$ とおくと，$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$．

$x^2<x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ から $0<x<1$．同様にして $0<y<1\ \ 0<z<1$．

$x=\sin\dfrac{\alpha}{2},\ y=\sin\dfrac{\beta}{2},\ z=\sin\dfrac{\gamma}{2}\quad(0<\alpha<\pi,\ 0<\beta<\pi,\ 0<\gamma<\pi)$ とおく．ここで，$\gamma'=\pi-(\alpha+\beta)$ とおくと

$$\begin{aligned}z^2+2xyz&=1-x^2-y^2=1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\\&=1-\frac{1-\cos\alpha}{2}-\frac{1-\cos\beta}{2}=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}\\&=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin\frac{\gamma'}{2}\left(\sin\frac{\gamma'}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) \\
&= \sin^2\frac{\gamma'}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma'}{2}.
\end{aligned}
$$

また，$z^2 + 2xyz = \sin^2\dfrac{\gamma}{2} + 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$ であるから

$$
\sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sin^2\frac{\gamma'}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma'}{2}.
$$

$$
\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma'}{2}\right)\left(\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma'}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) = 0\,.
$$

ところで

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma'}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} &= \sin\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\
&= \sin\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2} > 0
\end{aligned}
$$

が成り立つから

$$
\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma'}{2} = 0\,.
$$

$-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\gamma'}{2} < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \dfrac{\gamma}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\gamma = \gamma'$ すなわち $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

証明すべき不等式は

$$
\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{3}{2}
$$

となる．そこで，$f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$ $(0 < x < \pi)$ とおくと $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x}{2} < 0$.
$f(x)$ は凹関数であるから

$$
f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \leqq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\,. \qquad \blacksquare
$$

解 2 で用いた置き換えを次のようにまとめておく．

(1) a, b, c が正の実数で $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ を満たすとき
$a = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, $b = \sin\dfrac{\beta}{2}$, $c = \sin\dfrac{\gamma}{2}$ とおける．ただし，α, β, γ は三角形 ABC の内角である．

(2) $a,\ b,\ c$ が正の実数で $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ を満たすとき

$a=\cos A,\ b=\cos B,\ c=\cos C$ とおける．ただし，$A,\ B,\ C$ は鋭角三角形 ABC の内角である．

(3) $a,\ b,\ c$ が負でない実数で $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ を満たすとき

$a=\sin\dfrac{\alpha}{2},\ b=\sin\dfrac{\beta}{2},\ c=\sin\dfrac{\gamma}{2}$ とおける．

ただし，$0 \leqq \alpha,\ \beta,\ \gamma \leqq \dfrac{\pi}{2},\ \alpha+\beta+\gamma=\pi$.

(4) $a,\ b,\ c$ が負でない実数で $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ を満たすとき

$a=\cos A,\ b=\cos B,\ c=\cos C$ とおける．

ただし，$0 \leqq A,\ B,\ C \leqq \dfrac{\pi}{2},\ A+B+C=\pi$.

(2) は (1) を用いて示せる．

(1) から $a=\sin\dfrac{\alpha}{2},\ b=\sin\dfrac{\beta}{2},\ c=\sin\dfrac{\gamma}{2}$ とおける．ただし，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は三角形の内角である．

$A=\dfrac{\pi-\alpha}{2},\ B=\dfrac{\pi-\beta}{2},\ C=\dfrac{\pi-\gamma}{2}$ とおくと

$$A+B+C=\pi,\ 0<A,B,C<\frac{\pi}{2},\ a=\cos A,\ b=\cos B,\ c=\cos C.$$

(3)　$a^2 \leqq a^2+b^2+c^2+2abc=1$ から $0 \leqq a \leqq 1$. 同様にして $0 \leqq b \leqq 1,\ 0 \leqq c \leqq 1$.

$a=\sin\dfrac{\alpha}{2},\ b=\sin\dfrac{\beta}{2},\ c=\sin\dfrac{\gamma}{2}$　$(0 \leqq \alpha,\ \beta,\ \gamma \leqq \pi)$ とおく．

ここで，$\gamma'=\pi-(\alpha+\beta)$ とおくと

$$\begin{aligned}
c^2+2abc &= 1-a^2-b^2 = 1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\\
&= 1-\frac{1-\cos\alpha}{2}-\frac{1-\cos\beta}{2}=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}\\
&= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
&= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&= \sin\frac{\gamma'}{2}\left(\sin\frac{\gamma'}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\
&= \sin^2\frac{\gamma'}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma'}{2}.
\end{aligned}$$

また，$c^2+2abc=\sin^2\dfrac{\gamma}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$ であるから

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\sin^2\frac{\gamma'}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma'}{2}.$$

$$\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma'}{2}\right)\left(\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma'}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=0\,.$$

ところで

$$\begin{aligned}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma'}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}&=\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\&=\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geqq 0\end{aligned}$$

が成り立つ．

$\sin\dfrac{\gamma}{2}+\sin\dfrac{\gamma'}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}>0$ のとき

$$\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma'}{2}=0\,.$$

$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\gamma'}{2}<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\dfrac{\gamma}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\gamma=\gamma'$ すなわち $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

$\sin\dfrac{\gamma}{2}+\sin\dfrac{\gamma'}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}=0$ のときは $\gamma=0,\ \alpha-\beta=\pm\pi$ より
$\gamma=0,\ (\alpha,\beta)=(\pi,0),(0,\pi)$.
したがって，$\gamma'=\pi-(\alpha+\beta)=0$ となり $\gamma=\gamma'$ すなわち $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

(4) は (3) を用いて示せる．(3) から $a=\sin\dfrac{\alpha}{2},\ b=\sin\dfrac{\beta}{2},\ c=\sin\dfrac{\gamma}{2}$ とおける．
ただし，$0\leqq\alpha,\ \beta,\ \gamma\leqq\dfrac{\pi}{2},\ \alpha+\beta+\gamma=\pi$.

$A=\dfrac{\pi-\alpha}{2},\ B=\dfrac{\pi-\beta}{2},\ C=\dfrac{\pi-\gamma}{2}$ とおくと

$$A+B+C=\pi,\ 0\leqq A,B,C\leqq\frac{\pi}{2},\ a=\cos A,\ b=\cos B,\ c=\cos C.$$

問題 29　(Iran 1998)

x,y,z は実数で $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2,\ x>1,\ y>1,\ z>1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\sqrt{x+y+z}\geqq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\,.$$

解 1　$a=x-1>0,\ b=y-1>0,\ c=z-1>0$ とおく．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \iff \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2\\
\iff& (b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)+(a+1)(b+1)=2(a+1)(b+1)(c+1)\\
\iff& ab+bc+ca+2abc=1\,.
\end{aligned}$$

証明すべき不等式は $\sqrt{a+b+c+3} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ となる．

$$\begin{aligned}
\sqrt{a+b+c+3} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} &\iff \left(\sqrt{a+b+c+3}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\\
&\iff \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leqq \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

より $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leqq \dfrac{3}{2}$ を示せばよい．（問題 28 参照．）　■

解 2　$a,b,c>0$ のときコーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} &= \sqrt{a}\sqrt{\frac{x-1}{a}}+\sqrt{b}\sqrt{\frac{y-1}{b}}+\sqrt{c}\sqrt{\frac{z-1}{c}}\\
&\leqq \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{x-1}{a}+\frac{y-1}{b}+\frac{z-1}{c}\right)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．最後の式を $\sqrt{x+y+z}$ としたいので

$$a=x,\ b=y,\ c=z$$

とおくと

$$\frac{x-1}{a}+\frac{y-1}{b}+\frac{z-1}{c} = \frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z} = 3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3-2=1,$$

$$a+b+c=x+y+z$$

であるから，証明すべき不等式は成り立つ．　■

問題 30　(KMO Winter Program Test 2001)

a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)} \geqq abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}\,.$$

解 abc で両辺を割ると

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)} \geqq abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)} \geqq 1+\sqrt[3]{\left(1+\frac{bc}{a^2}\right)\left(1+\frac{ca}{b^2}\right)\left(1+\frac{ab}{c^2}\right)}.$$

$x=\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{b}$, $z=\dfrac{a}{c}$ とおくと，$xyz=1$ で，証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)} &\geqq 1+\sqrt[3]{\left(1+\frac{x}{z}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)}\\ &=1+\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}}\\ &=1+\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}\end{aligned}$$

となる．

$\boldsymbol{(x+y+z)(xy+yz+zx)=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz}$ と $xyz=1$ より $(x+y+z)(xy+yz+zx)=(x+y)(y+z)(z+x)+1$ となるから

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)} \geqq 1+\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}\\ \Longleftrightarrow\ &\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)+1} \geqq 1+\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}.\end{aligned}$$

$t=\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$ とおくと，

$$\sqrt{t^3+1} \geqq 1+t$$

を示せばよい．

$$\sqrt{t^3+1} \geqq 1+t \Longleftrightarrow t^3+1 \geqq (1+t)^2 \Longleftrightarrow t(t+1)(t-2) \geqq 0$$

から $t \geqq 2$ を示せばよい．これは

$$t=\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \geqq \sqrt[3]{2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}}=2\sqrt[3]{xyz}=2.$$

から示される． ■

問題 31 (KMO Summer Program Test 2001)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geqq \sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}.$$

解 $\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geqq \sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \left(\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)^2 \\
&\qquad \geqq \left(\sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}\right)^2 \\
&\Longleftrightarrow a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\sqrt{a^4+b^4+c^4}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \\
&\qquad \geqq a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3+2\sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}\,.
\end{aligned}$$

次の 2 つの不等式を証明すれば，最後の不等式は成り立つ．

$$a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqq a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3 \ (\bigstar)\,,$$

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geqq \sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3} \ (\bigstar\bigstar)\,.$$

一番目の不等式 ($\bigstar$) を証明する．

$$\begin{aligned}
&a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-(a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3) \\
&= \frac{(a^4-2a^3b+a^2b^2)+(b^4-2b^3c+b^2c^2)+(c^4-2c^3a+c^2a^2)}{2} \\
&\qquad + \frac{(a^4-2a^3c+a^2c^2)+(b^4-2b^3a+b^2a^2)+(c^4-2c^3b+c^2b^2)}{2} \\
&= \frac{a^2(a-b)^2+b^2(b-c)^2+c^2(c-a)^2+a^2(a-c)^2+b^2(b-a)^2+c^2(c-b)^2}{2} \\
&\geqq 0\,.
\end{aligned}$$

次に，二番目の不等式 ($\bigstar\bigstar$) を証明する．

コーシー・シュワルツの不等式より

$$(a^4+b^4+c^4)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geqq (a^3b+b^3c+c^3a)^2\,,$$

$$(a^4+b^4+c^4)(c^2a^2+a^2b^2+b^2c^2) \geqq (a^3c+b^3a+c^3b)^2\,.$$

これらの不等式の辺々をかけると

$$(a^4+b^4+c^4)^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2 \geqq (a^3b+b^3c+c^3a)^2(ab^3+bc^3+ca^3)^2\,.$$

よって

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geqq \sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}\,. \qquad \blacksquare$$

問題 32　n を 2 以上の整数とする．a_i, b_i $(i=1,2,\ldots,n)$ が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\geqq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}\,.$$

解　数学的帰納法で証明する．

(i) $n=2$ のとき

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqq \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$
$$\iff a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqq (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2$$
$$\iff \sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqq a_1a_2+b_1b_2\,.$$

したがって

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqq a_1a_2+b_1b_2 \qquad \cdots\cdots ①$$

を示す．

$a_1a_2+b_1b_2<0$ のときは明らかに①は成立するから，$a_1a_2+b_1b_2 \geqq 0$ と仮定する．このとき

$$\begin{aligned}\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqq a_1a_2+b_1b_2 &\iff (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) \geqq (a_1a_2+b_1b_2)^2\\ &\iff a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2 \geqq 0\\ &\iff (a_1b_2-a_2b_1)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

より，①は成立する．

(ii) n のとき成り立つと仮定して，$n+1$ の場合を考えると

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\sqrt{a_{n+1}^2+b_{n+1}^2}$$
$$\geqq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}+\sqrt{a_{n+1}^2+b_{n+1}^2} \quad (*)\,.$$

(i) で証明したように

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geqq \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

が成立するから

$$\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}+\sqrt{a_{n+1}^2+b_{n+1}^2}$$
$$\geqq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1})^2} \quad (**)\,.$$

よって，$(*)$, $(**)$ から

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\sqrt{a_{n+1}^2+b_{n+1}^2}$$
$$\geqq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}+\sqrt{a_{n+1}^2+b_{n+1}^2}$$
$$\geqq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1})^2}$$

となり，$n+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より 2 以上の整数 n について

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\geqq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}$$

は成り立つ． ■

[注]　一般的に次のミンコウスキー (Minkowski) の不等式が成立することが知られている．

$p>1$ とする．a_i, b_i $(i=1,2,\ldots,n)$ が負でない実数のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\sqrt[p]{a_1^p+b_1^p}+\sqrt[p]{a_2^p+b_2^p}+\cdots+\sqrt[p]{a_n^p+b_n^p}$$
$$\geqq \sqrt[p]{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^p}\,.$$

問題 33　a, b, c が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2} \geqq \frac{3\sqrt{2}}{2}\,.$$

解 1　$X,\ Y$ が実数のとき $2(X^2+Y^2) \geqq (X+Y)^2$ が成り立つから，

$$\sqrt{X^2+Y^2} \geqq \frac{|X+Y|}{\sqrt{2}} \geqq \frac{X+Y}{\sqrt{2}}\,.$$

この不等式を使うと

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2} \geqq \frac{a+1-b}{\sqrt{2}}\,,\quad \sqrt{b^2+(1-c)^2} \geqq \frac{b+1-c}{\sqrt{2}}\,,$$

$$\sqrt{c^2+(1-a)^2} \geqq \frac{c+1-a}{\sqrt{2}}\,.$$

よって

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\\ \geqq\ &\frac{a+1-b}{\sqrt{2}}+\frac{b+1-c}{\sqrt{2}}+\frac{c+1-a}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\,.\end{aligned}$$

■

解 2　ミンコウスキーの不等式 (問題 32 の結果) より

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \geqq\ &\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\\ \geqq\ &\sqrt{(a+b+c)^2+(1-b+1-c+1-a)^2}\\ =\ &\sqrt{(a+b+c)^2+(a+b+c-3)^2}\,.\end{aligned}$$

$x=a+b+c$ とおき，$\sqrt{x^2+(x-3)^2} \geqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+(x-3)^2} \geqq \frac{3\sqrt{2}}{2} &\iff 2x^2-6x+\frac{9}{2} \geqq 0\\ &\iff 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

より，$\sqrt{x^2+(x-3)^2} \geqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ は成り立つ．■

［注］　$a_i\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ が実数のとき，次の不等式

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+(1-a_1)^2} \geqq \frac{n\sqrt{2}}{2}$$

が成り立つことがわかる．証明は，解 1，解 2 いずれの方法でもできる．

問題 34　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqq \sqrt{a^2+ac+c^2}\,.$$

解 1

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqq \sqrt{a^2+ac+c^2}$$
$$\iff \left(\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{a^2+ac+c^2}\right)^2$$
$$\iff 2\sqrt{a^2-ab+b^2}\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqq ab+bc+ca-2b^2\,. \qquad \cdots\cdots ①$$

$ab+bc+ca-2b^2<0$ のときは，明らかに ① は成り立つ．

$ab+bc+ca-2b^2 \geqq 0$ のとき

$$2\sqrt{a^2-ab+b^2}\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqq ab+bc+ca-2b^2$$
$$\iff \left(2\sqrt{a^2-ab+b^2}\sqrt{b^2-bc+c^2}\right)^2 \geqq (ab+bc+ca-2b^2)^2$$

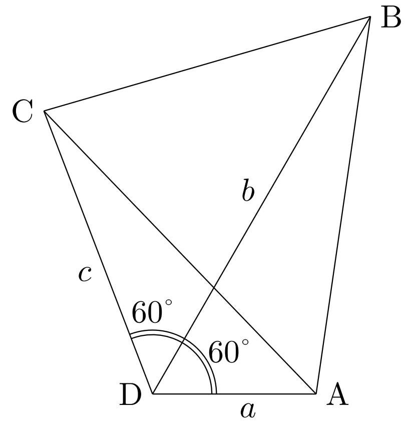
で，コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}&\left(2\sqrt{a^2-ab+b^2}\sqrt{b^2-bc+c^2}\right)^2\\ &=\left[(a-b)^2+a^2+b^2\right]\left[b^2+c^2+(c-b)^2\right]\\ &\geqq \left[(a-b)b+ac+b(c-b)\right]^2=(ab+bc+ca-2b^2)^2\,.\end{aligned}$$

■

解 2　図のように 4 点 A，B，C，D をとる．

AD $=a$，BD $=b$，CD $=c$ とおく．



$$\mathrm{AC}=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos 120^\circ}=\sqrt{a^2+ac+c^2},$$
$$\mathrm{AB}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ}=\sqrt{a^2-ab+b^2},$$
$$\mathrm{BC}=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ}=\sqrt{b^2-bc+c^2}.$$

$\mathrm{AB}+\mathrm{BC} \geqq \mathrm{AC}$ から

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\\ &\geqq \sqrt{a^2+ac+c^2}\end{aligned}$$

が成り立つ．

■

問題 35　(Belarus 2002)

a, b, c, d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{2|ad-bc|}{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}} \geqq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$
$$\geqq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\,.$$

解　$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geqq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ の証明

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geqq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\\
\iff &\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\right)^2\\
\iff &\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geqq ac+bd\\
\iff &\left(\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\right)^2 \geqq (ac+bd)^2\\
\iff &(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqq (ac+bd)^2\\
\iff &(ad-bc)^2 \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

よって，$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geqq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{2|ad-bc|}{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}} \geqq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

の証明

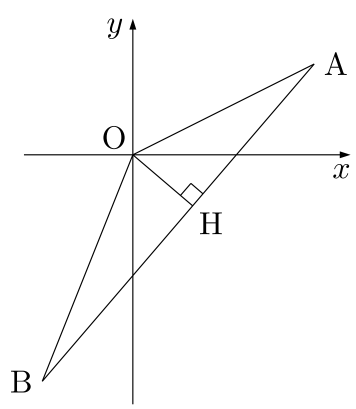
A$(a,\ b)$, B$(-c,\ -d)$ とおく．

(i) O, A, B が一直線上にあるとき，$ad-bc=0$．

AB=OA+OB から

$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$ すなわち

① は成り立つ．



(ii) O, A, B が同一直線上にないとき

$ad-bc \fallingdotseq 0$．

三角形 OAB の面積を S とおくと

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2} \\
&= \frac{1}{2}|ad-bc|\,.
\end{aligned}
$$

原点から AB に下ろした垂線の足を H とすると，$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OH}$ から

$$
\mathrm{OH} = \frac{2S}{\mathrm{AB}} = \frac{|ad-bc|}{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}}\,.
$$

したがって，証明すべき不等式は

$$
\mathrm{AB{+}2OH} \geqq \mathrm{OA{+}OB}
$$

となる．これは，不等式

$$
\mathrm{AH{+}OH} > \mathrm{OA},\ \ \mathrm{BH{+}OH} > \mathrm{OB}
$$

の辺々を加えると

$$
\mathrm{AH{+}BH{+}2OH} > \mathrm{OA{+}OB}\,.
$$

$\mathrm{AH}+\mathrm{BH}=\mathrm{AB}$ であるから

$$
\mathrm{AB{+}2OH} > \mathrm{OA{+}OB}\,. \qquad \blacksquare
$$

問題 36 (Hong Kong 1998)

a, b, c が 1 以上の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leqq \sqrt{c(ab+1)}\,.$$

解 1 まず，$x \geqq 1,\ y \geqq 1$ のとき，不等式

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leqq \sqrt{xy} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示す．これは

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leqq \sqrt{xy} &\iff \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2 \leqq (\sqrt{xy})^2 \\
&\iff x-1+y-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)} \leqq xy \\
&\iff 0 \leqq (x-1)(y-1)+1-2\sqrt{(x-1)(y-1)} \\
&\iff 0 \leqq \left(\sqrt{(x-1)(y-1)}-1\right)^2
\end{aligned}$$

から成り立つ．この不等式を使うと

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leqq \sqrt{ab}+\sqrt{c-1} = \sqrt{c-1}+\sqrt{ab+1-1} \leqq \sqrt{c(ab+1)}\,.$$

よって

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leqq \sqrt{c(ab+1)}\,. \qquad ■$$

解 2 $x=\sqrt{a-1}>0,\ y=\sqrt{b-1}>0,\ z=\sqrt{c-1}>0$ とおくと，証明すべき不等式は

$$x+y+z \leqq \sqrt{(1+z^2)[(1+x^2)(1+y^2)+1]}$$

となる．

$$\begin{aligned}
(1+z^2)[(1+x^2)(1+y^2)+1] &\geqq \left(\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+z\right)^2 \qquad \text{(コーシー・シュワルツ)} \\
&= \left(\sqrt{(x^2+1)(1+y^2)}+z\right)^2 \\
&\geqq \left(\sqrt{(x+y)^2}+z\right)^2 \qquad \text{(コーシー・シュワルツ)} \\
&\geqq (x+y+z)^2\,.
\end{aligned}$$

よって

$$x+y+z \leqq \sqrt{(1+z^2)[(1+x^2)(1+y^2)+1}\,. \qquad ■$$

問題 37 (IMO 2001)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq 1\,.$$

解 1　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2\sum_{cyclic}a(a^2+8bc)\\
&=\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\cdot\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\cdot\sum_{cyclic}a(a^2+8bc)\\
&\geqq\left(\sum_{cyclic}\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\cdot a(a^2+8bc)}\right)^3\\
&=(a+b+c)^3\,.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^2 \geqq \frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}\,.$$

したがって，$\dfrac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc} \geqq 1$ すなわち

$$(a+b+c)^3 \geqq a^3+b^3+c^3+24abc$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^3 \geqq a^3+b^3+c^3+24abc &\iff a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \geqq 6abc\\
&\iff a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

より，$(a+b+c)^3 \geqq a^3+b^3+c^3+24abc$ は成り立つ． ■

［注］　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $abc=1$ と仮定することができる．このとき

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+\dfrac{8}{a}}}=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a^3+8}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8)^{\frac{1}{2}}}$$

と変形できるから

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8)^{\frac{1}{2}}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{(b^3+8)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(b^3+8)^{\frac{1}{2}}} \geqq 1$$

を証明すればよい．Radon の不等式 (問題 147 参照)

「 $p>0$ とする．$a_i>0,\ x_i>0,\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{p+1}}{a_i^p} \geqq \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{p+1}}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{p}}.$$

」を用いると（ $p=1/2,\ n=3$ ）

$$\begin{aligned}&\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8)^{\frac{1}{2}}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{(b^3+8)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(b^3+8)^{\frac{1}{2}}}\\ &\geqq \frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8+b^3+8+c^3+8)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+b^3+c^3+24)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+b^3+c^3+24)^{\frac{1}{2}}} \geqq 1$$

すなわち

$$(a+b+c)^3 \geqq a^3+b^3+c^3+24$$

を示せばよい.（解 1 参照.） □

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{a(a^2+8bc)}{(a+b+c)^3}\\ &\geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\cdot\frac{a(a^2+8bc)}{(a+b+c)^3}}=\frac{3a}{a+b+c}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$2\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{a(a^2+8bc)}{(a+b+c)^3} \geqq \frac{3a}{a+b+c}.$$

同様にして

$$2\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{b(b^2+8ca)}{(a+b+c)^3} \geqq \frac{3b}{a+b+c},\ 2\cdot\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}+\frac{c(c^2+8ab)}{(a+b+c)^3} \geqq \frac{3c}{a+b+c}.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq \frac{3}{2}-\frac{a^3+b^3+c^3+24abc}{2(a+b+c)^3}.$$

したがって

$$\frac{3}{2}-\frac{a^3+b^3+c^3+24abc}{2(a+b+c)^3} \geqq 1$$

すなわち，$(a+b+c)^3 \geqq a^3+b^3+c^3+24abc$ を示せばよい．これは

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3+24abc)\\
&=3(a^2b+b^2c+c^2a)+3(a^2c+b^2a+c^2b)-18abc\\
&\geqq 3\cdot 3\sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a}+3\cdot 3\sqrt[3]{a^2c+b^2a+c^2b}-18abc\\
&=9abc+9abc-18abc=0
\end{aligned}$$

から成り立つ． ■

解 3　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b+c=1$ と仮定することができる．

$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ とおくと $f''(t)=\dfrac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}}>0$. $f(t)$ は凸関数であるから

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\\
&=a\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}}+b\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}}+c\cdot\frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}\\
&=af(a^2+8bc)+bf(b^2+8ca)+cf(c^2+8ab)\\
&\geqq f\left(a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)}}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{\sqrt{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)}} \geqq 1$$

すなわち，$1 \geqq a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&1 \geqq a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)\\
\Longleftrightarrow\ &(a+b+c)^3 \geqq a^3+b^3+c^3+24abc \qquad \text{(Homogenization)}
\end{aligned}$$

より，$(a+b+c)^3 \geqq a^3+b^3+c^3+24abc$ を示せばよい．（解 1 または解 2 参照.） ■

問題 38　(IMO Short List 2004)

a, b, c は正の実数で $ab+bc+ca=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \leqq \frac{1}{abc}\,.$$

解　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}&\bigl[(1+6ab)+(1+6bc)+(1+6ca)\bigr]\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1+1+1)\\ \geqq&\left(\sqrt[3]{(1+6ab)\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{(1+6bc)\frac{1}{b}}+\sqrt[3]{(1+6ca)\frac{1}{c}}\right)^3.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\right)^3 \leqq \frac{27}{abc}\,.$$

したがって

$$\frac{27}{abc} \leqq \frac{1}{(abc)^3}$$

すなわち

$$(abc)^2 \leqq \frac{1}{27}$$

を示せばよい．これは，$1=ab+bc+ca \overset{AM\geqq GM}{\geqq} 3\sqrt[3]{(abc)^2}$ から得られる．■

問題 39　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)} \geqq \sqrt{4abc+(a+b)(b+c)(c+a)}\,.$$

解 1　両辺を平方する．

$$\begin{aligned}&\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)} \geqq \sqrt{4abc+(a+b)(b+c)(c+a)}\\ \Longleftrightarrow&\left(\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{4abc+(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^2\\ \Longleftrightarrow&\, b\sqrt{ca(b+a)(b+c)}+c\sqrt{ab(c+a)(c+b)}+a\sqrt{bc(a+b)(a+c)} \geqq 3abc\,.(*)\end{aligned}$$

ここで，相加平均・相乗平均の不等式より

$$b\sqrt{ca(b+a)(b+c)} \geqq b\sqrt{ca\cdot 2\sqrt{ba}\cdot 2\sqrt{bc}} = 2\sqrt[4]{b^6c^3a^3}\,.$$

同様にして

$$c\sqrt{ab(c+a)(c+b)} \geqq 2\sqrt[4]{c^6a^3b^3},\ a\sqrt{bc(a+b)(a+c)} \geqq 2\sqrt[4]{a^6b^3c^3}\,.$$

よって

$$\begin{aligned}
&b\sqrt{ca(b+a)(b+c)}+c\sqrt{ab(c+a)(c+b)}+a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}\\
&\geqq 2\left(\sqrt[4]{b^6c^3a^3}+\sqrt[4]{c^6a^3b^3}+\sqrt[4]{a^6b^3c^3}\right)\\
&\geqq 6\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^6c^3a^3\cdot c^6a^3b^3\cdot a^6b^3c^3}}=6abc>3abc
\end{aligned}$$

となり，$(*)$ は成り立つ． ■

［注］　上の証明からわかるように，次の不等式が成り立つ．

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)} \geqq \sqrt{10abc+(a+b)(b+c)(c+a)}\,.$$

解 2　[注] の不等式を証明する．両辺を $\sqrt{abc}$ で割った

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}} \geqq \sqrt{10+\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}$$

を証明すればよい．

$x=\dfrac{b+c}{a}$，$y=\dfrac{c+a}{b}$，$z=\dfrac{a+b}{c}$ とおくと，$xyz=x+y+z+2$ が成り立つ．このとき

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geqq \sqrt{10+xyz}=\sqrt{12+x+y+z}$$

を証明すればよい．

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geqq \sqrt{12+x+y+z} &\iff \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{12+x+y+z}\right)^2\\
&\iff \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \geqq 6\,.
\end{aligned}$$

まず，xyz のとる値の範囲を調べる．

$$xyz=2+x+y+z \geqq 2+3\sqrt[3]{xyz}$$

が成り立つから，$t=\sqrt[3]{xyz}$ とおくと，$t^3 \geqq 2+3t$．

$$t^3 \geqq 2+3t \iff t^3-3t-2 \geqq 0 \iff (t+1)^2(t-2) \geqq 0 \iff t \geqq 2\,.$$

よって，$t \geqq 2$ から $\sqrt[3]{xyz} \geqq 2$．これを用いると

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \geqq 3\sqrt[3]{\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}}=3\sqrt[3]{xyz} \geqq 6\,.$$ ■

問題 40　(Macedonia 1995)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geqq 2\,.$$

解　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b+c=1$ と仮定することができる．すると

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}}+\sqrt{\frac{b}{1-b}}+\sqrt{\frac{c}{1-c}} \geqq 2$$

を証明すればよい．$f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} \quad (0<x<1)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}},\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\,.$$

$y=f(x)$ 上の $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ における接線の方程式は $y=2x$ となるから，$y=f(x)$ との上下関係を調べる．

$$f(x)-2x=f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}-2x=\frac{\sqrt{x}\left(1-2\sqrt{x(1-x)}\right)}{\sqrt{1-x}}\,.$$

ここで

$$\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \leqq \frac{1}{2}$$

となるから，$f(x) \geqq 2x$．

よって

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq 2(a+b+c)=2\,.$$

■

問題 41　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leqq 3\,.$$

解 1 (*Mikhail Leptchinski*) コーシー・シュワルツの不等式より，任意の正の実数 $x,\ y,\ z$ に対して

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{2ax}{a+b}+\frac{2by}{b+c}+\frac{2cz}{c+a}\right) \geqq \left(\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\right)^2.$$

ゆえに

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leqq \sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{2ax}{a+b}+\frac{2by}{b+c}+\frac{2cy}{c+a}\right)}.$$

したがって

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{2ax}{a+b}+\frac{2by}{b+c}+\frac{2cz}{c+a}\right) \leqq 9 \qquad (*)$$

を満たす $x,\ y,\ z>0$ があることを示せばよい.

$$x=\frac{1}{c+a},\ y=\frac{1}{a+b},\ z=\frac{1}{b+c}$$

とおくと $(*)$ は

$$(c+a+a+b+b+c)\left(\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{1}{c+a}+\frac{2b}{b+c}\cdot\frac{1}{a+b}+\frac{2c}{c+a}\cdot\frac{1}{b+c}\right) \leqq 9$$

すなわち

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)} \leqq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

となる.

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)} \leqq \frac{9}{4(a+b+c)}\\
\Longleftrightarrow\ & 4(a+b+c)\big[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\big] \leqq 9(a+b)(b+c)(c+a)\\
\Longleftrightarrow\ & \boldsymbol{8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leqq 9(a+b)(b+c)(c+a)}\\
\Longleftrightarrow\ & a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2) \geqq 6abc\\
\Longleftrightarrow\ & a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2ab+b^2) \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ & a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

より

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)} \leqq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

は成り立つ. ■

解 2　$x=\sqrt{\dfrac{b}{a}},\ y=\sqrt{\dfrac{c}{b}},\ z=\sqrt{\dfrac{a}{c}}$ とおくと，$xyz=1$.

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leqq 3$$

$$\iff \sqrt{\frac{2}{1+\dfrac{b}{a}}}+\sqrt{\frac{2}{1+\dfrac{c}{b}}}+\sqrt{\frac{2}{1+\dfrac{a}{c}}} \leqq 3$$

$$\iff \sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leqq 3$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

したがって，$xyz=1,\ x \geqq y \geqq z > 0$ のとき，次の 2 つの不等式を証明すればよい．

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{2}{\sqrt{1+yz}} \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \cdots\cdots(\bigstar\bigstar)$$

なぜならば，$(\bigstar)+(\bigstar\bigstar)$ から

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

が得られるからである．

$(\bigstar)$ の証明

$a>0,\ b>0$ のとき $\dfrac{1}{2}(a+b)^2 \leqq a^2+b^2$ が成り立つから

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 \leqq \frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}.$$

$$\frac{2}{1+yz}-\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+z^2}=\frac{(1-yz)(y-z)^2}{(1+y^2)(1+z^2)(1+yz)}$$

したがって，$yz \leqq 1$ を示せばよい．

これは

$x^3 \geqq xyz=1$ から $x \geqq 1$ なので，$yz=\dfrac{1}{x} \leqq 1$ となる．

(★★) の証明

$yz=\dfrac{1}{x}$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+2\sqrt{\frac{x}{1+x}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

を示せばよい．コーシー・シュワルツの不等式より

$$2(1+x^2)=(1^2+1^2)(1^2+x^2) \geqq (1+x)^2\,.$$

よって

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqq \frac{\sqrt{2}}{1+x}$$

が成り立つから

$$\frac{1}{1+x}+\sqrt{\frac{2x}{1+x}} \leqq \frac{3}{2}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x}+\sqrt{\frac{2x}{1+x}} \leqq \frac{3}{2} &\iff 2+2\sqrt{2x(1+x)} \leqq 3(1+x)\\
&\iff 2\sqrt{2x(1+x)} \leqq 3x+1\\
&\iff (\sqrt{2x}-\sqrt{1+x})^2 \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{1+x}+\sqrt{\frac{2x}{1+x}} \leqq \frac{3}{2}. \qquad \blacksquare$$

解 3　$p,q,r,x,y,z>0$ のとき，コーシー・シュワルツの不等式より

$$(p+q+r)(x+y+z) \geqq (\sqrt{px}+\sqrt{qy}+\sqrt{rz})^2.$$

よって

$$\sqrt{px}+\sqrt{qy}+\sqrt{rz} \leqq \sqrt{(p+q+r)(x+y+z)}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a(b+c)\cdot(c+a)}+\sqrt{b(c+a)\cdot(a+b)}+\sqrt{c(a+b)\cdot(b+c)}\\
&\leqq \sqrt{\big\{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\big\}(c+a+a+b+b+c)}.
\end{aligned}$$

これを用いると

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\\
&=\frac{\sqrt{a(b+c)(c+a)}+\sqrt{b(c+a)(a+b)}+\sqrt{c(a+b)(b+c)}}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}\\
&\leqq\sqrt{\frac{\bigl\{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\bigr\}(c+a+a+b+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\\
&=2\sqrt{\frac{\boldsymbol{(ab+bc+ca)(a+b+c)}}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\\
&=2\sqrt{\frac{\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)+abc}}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\\
&=2\sqrt{1+\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}
\end{aligned}
$$

したがって

$$2\sqrt{1+\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\leqq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

すなわち

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$$

を示せばよい．これは，相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8abc.$$

よって

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\leqq 3\,. \qquad \blacksquare$$

解 4　$f(x)=\sqrt{x}$ は凹関数であるから，Jensen の不等式より

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}$$

$$=\frac{c+a}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{4a(a+b+c)^2}{(a+b)(c+a)^2}}+\frac{a+b}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{4b(a+b+c)^2}{(b+c)(a+b)^2}}$$

$$+\frac{b+c}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{4c(a+b+c)^2}{(c+a)(b+c)^2}}$$

$$\leqq\sqrt{\sum_{cyclic}\frac{c+a}{2(a+b+c)}\cdot\frac{4a(a+b+c)^2}{(a+b)(c+a)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2a(a+b+c)}{(c+a)(a+b)}+\frac{2b(a+b+c)}{(a+b)(b+c)}+\frac{2c(a+b+c)}{(b+c)(c+a)}}\,.$$

したがって

$$\sqrt{\frac{2a(a+b+c)}{(c+a)(a+b)}+\frac{2b(a+b+c)}{(a+b)(b+c)}+\frac{2c(a+b+c)}{(b+c)(c+a)}}\leqq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

すなわち

$$\frac{a(a+b+c)}{(c+a)(a+b)}+\frac{b(a+b+c)}{(a+b)(b+c)}+\frac{c(a+b+c)}{(b+c)(c+a)}\leqq\frac{9}{4}\qquad\cdots\cdots(*)$$

を示せばよい．

$$(*)$$

$$\iff 4(a+b+c)\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right]\leqq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\iff \boldsymbol{8(a+b+c)(ab+bc+ca)\leqq 9(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\iff a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\geqq 6abc$$

$$\iff a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)\geqq 0$$

$$\iff a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geqq 0$$

より，$(*)$ は成り立つ．■

問題 42　a,b,c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{c^2+a+b}+\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}\leqq 1\,.$$

解 1　$a+b+c=3$ を用いると，証明すべき不等式は

$$\frac{1}{c^2-c+3}+\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}\leqq 1$$

となる．

$f(x)=(x^2-x+3)^{-1}$　$(\,0<x<3\,)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1-2x}{(x^2-x+3)^2},\ f'(1)=-\frac{1}{9}\,.$$

$y=f(x)$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{1}{3}\right)$ における接線の方程式は $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{4}{9}$ となるから，$y=f(x)$ との上下関係を調べる．

$$\begin{aligned} f(x)-\frac{-x+4}{9} &= \frac{1}{x^2-x+3}-\frac{-x+4}{9} \\ &= \frac{x^3-5x^2+7x-3}{9(x^2-x+3)} \\ &= \frac{(x-3)(x-1)^2}{9(x^2-x+3)}\leqq 0\,. \end{aligned}$$

ゆえに

$$f(x)\leqq\frac{-x+4}{9}\,.$$

よって，

$$f(a)+f(b)+f(c)\leqq\frac{-(a+b+c)+12}{9}=1\,.$$ ■

解 2　証明すべき不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2+a+b}+\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}\leqq 1 \\ \iff &\frac{1}{3}-\frac{1}{c^2-c+3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{b^2-b+3}\geqq 0 \\ \iff &\frac{a(a-1)}{a^2-a+3}+\frac{b(b-1)}{b^2-b+3}+\frac{c(c-1)}{c^2-c+3}\geqq 0 \\ \iff &\frac{a-1}{a-1+\dfrac{3}{a}}+\frac{b-1}{b-1+\dfrac{3}{b}}+\frac{c-1}{c-1+\dfrac{3}{c}}\geqq 0\,. \end{aligned}$$

$3=a+b+c>a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ より $ab<\dfrac{9}{4}<3$．同様にして，$bc<3,\ ca<3$ も成り立つから

$$ab<3,\ bc<3,\ ca<3. \qquad \cdots\cdots(*)$$

一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．(∗) より

$$c-1+\frac{3}{c}-\left(b-1+\frac{3}{b}\right)=c-b+\frac{3(b-c)}{bc}=\frac{(b-c)(3-bc)}{bc}\geqq 0\,,$$

$$b-1+\frac{3}{b}-\left(a-1+\frac{3}{a}\right)=b-a+\frac{3(a-b)}{ab}=\frac{(a-b)(3-ab)}{ab}\geqq 0\,.$$

ゆえに

$$c-1+\frac{3}{c}\geqq b-1+\frac{3}{b}\geqq a-1+\frac{3}{a}\,.$$

よって

$$\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}}\geqq\frac{1}{b-1+\frac{3}{b}}\geqq\frac{1}{c-1+\frac{3}{c}}\,.$$

また

$$a-1\geqq b-1\geqq c-1$$

が成り立つから，チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned}&3\left(\frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}}+\frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}}+\frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}}\right)\\&\geqq(a-1+b-1+c-1)\left(\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}}+\frac{1}{b-1+\frac{3}{b}}+\frac{1}{c-1+\frac{3}{c}}\right)=0\,.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}}+\frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}}+\frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}}\geqq 0\,.$$

■

問題 43 (Titu Andreescu , Gabriel Dospinescu)

x,y,z は実数で，$x,y,z\leqq 1$，$x+y+z=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\leqq\frac{27}{10}\,.$$

解　$f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ $(t<1)$ とおくと

$$f'(t)=-\frac{2t}{(1+t^2)^2},\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{27}{50},\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{10}\,.$$

$y=f(t)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{9}{10}\right)$ における接線の方程式は，$y=-\dfrac{27}{50}(t-2)$ となる．
次に，$y=f(t)$ と接線の上下関係を調べる．

$$\begin{aligned} f(t)+\frac{27}{50}(t-2) &= \frac{1}{1+t^2}+\frac{27}{50}(t-2)\\ &= \frac{27t^3-54t^2+27t-4}{50(1+t^2)}\\ &= \frac{(3t-1)^2(3t-4)}{50(1+t^2)} \leqq 0\,. \end{aligned}$$

ゆえに，$f(t)\leqq -\dfrac{27}{50}(t-2)\,.$
よって

$$f(x)+f(y)+f(z)\leqq -\frac{27}{50}(x+y+z-6)=-\frac{27}{50}(1-6)=\frac{27}{10}\,.$$ ■

［注］ $f''(t)=\dfrac{6t^2-2}{(1+t^2)^3}$ より，$f(t)$ は凹関数ではないので，Jensen の不等式は使えない．

問題 44　(IMO 2000)

a,b,c は正の実数で $abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqq 1\,.$$

解　$a=\dfrac{x}{y},\ b=\dfrac{y}{z},\ c=\dfrac{z}{x}$ とおくと，不等式は

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\leqq 1\\ \Longleftrightarrow\ & xyz\geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\,. \end{aligned}$$

これは Schur の不等式から成り立つ．（例題 2 参照） ■

問題 45 (IMO Short List 1998)

x, y, z は正の実数で $xyz = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqq \frac{3}{4}\,.$$

解 1 補助定理 2 より

$$\sum_{cyclic} \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \sum_{cyclic} (1+y) \sum_{cyclic} (1+z)$$
$$\geqq \left(\sum_{cyclic} \sqrt[3]{\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \cdot (1+y) \cdot (1+z)} \right)^3 = (x+y+z)^3\,.$$

ゆえに

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqq \frac{(x+y+z)^3}{(x+y+z+3)^2}\,.$$

したがって，$\dfrac{(x+y+z)^3}{(x+y+z+3)^2} \geqq \dfrac{3}{4}$ すなわち $4(x+y+z)^3 \geqq 3(x+y+z+3)^2$ を示せばよい．

$t = x+y+z > 0$ とおくと

$$\begin{aligned} 4(x+y+z)^3 \geqq 3(x+y+z+3)^2 &\iff 4t^3 \geqq 3(t+3)^2 \\ &\iff 4t^3 - 3t^2 - 18t - 27 \geqq 0 \\ &\iff (t-3)(4t^2+9t+9) \geqq 0 \iff t \geqq 3\,. \end{aligned}$$

したがって，$x+y+z \geqq 3$ を示せばよい．これは，相加平均・相乗平均の不等式より

$$x+y+z \geqq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\,.$$ ■

解 2 相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{1+y}{8} + \frac{1+z}{8} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \cdot \frac{1+y}{8} \cdot \frac{1+z}{8}} = \frac{3}{4}x\,.$$

同様にして

$$\frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{1+z}{8} + \frac{1+x}{8} \geqq \frac{3}{4}y\,,$$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geqq \frac{3}{4}z\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\sum_{cyclic} \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{3+(x+y+z)}{4} \geqq \frac{3(x+y+z)}{4}$$

から

$$\sum_{cyclic} \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \geqq \frac{2(x+y+z)-3}{4} \overset{AM \geqq GM}{\geqq} \frac{6\sqrt[3]{xyz}-3}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

よって

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqq \frac{3}{4}\,. \qquad \blacksquare$$

解 3　一般性を失うことなく $x \geqq y \geqq z$ と仮定できる．このとき

$$x^3 \geqq y^3 \geqq z^3,\ \ \frac{1}{(1+y)(1+z)} \geqq \frac{1}{(1+z)(1+x)} \geqq \frac{1}{(1+x)(1+y)}$$

であるから，チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned}\sum_{cyclic} \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} &\geqq \frac{1}{3} \sum_{cyclic} x^3 \cdot \sum_{cyclic} \frac{1}{(1+y)(1+z)} \\ &= \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \cdot \frac{3+x+y+z}{(1+x)(1+y)(1+z)}\,.\end{aligned}$$

$a = \dfrac{x+y+z}{3}$ とおく．t^3 $(t>0)$ は凸関数であるから，

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = a^3\,.$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$a = \frac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz} = 1\,.$$

$f(x) = \log(1+x)$ $(x>0)$ とおくと，$f''(x) = -(x+1)^{-2} < 0$ より $f(x)$ は凹関数となるから

$$f(x)+f(y)+f(z) \leqq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right),$$

$$\log(1+x)+\log(1+y)+\log(1+z) \leqq 3\log\left(1+\frac{x+y+z}{3}\right).$$

ゆえに

$$(1+x)(1+y)(1+z) \leqq \left(1+\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = (1+a)^3\,.$$

したがって

$$\sum_{cyclic} \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \geqq \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \cdot \frac{3+x+y+z}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$
$$\geqq a^3 \cdot \frac{3+3a}{(1+a)^3} = \frac{3a^3}{(1+a)^2}$$

から，$\dfrac{3a^3}{(1+a)^2} \geqq \dfrac{3}{4}$ すなわち

$$4a^3 \geqq (1+a)^2$$

を示せばよい．

$$4a^3-(a+1)^2 = 4a^3-a^2-2a-1 = (a-1)(4a^2+3a+1) \geqq 0$$

から，$4a^3 \geqq (1+a)^2$． ■

問題 46 (IMO Short List 1996)

a, b, c は正の実数で $abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leqq 1\,.$$

解 $(a^3-b^3)(a^2-b^2) \geqq 0$ より $a^5+b^5 \geqq a^2b^2(a+b)$．

よって

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leqq \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab} = \frac{1}{ab(a+b)+1} = \frac{c}{abc(a+b)+c} = \frac{c}{a+b+c}\,.$$

同様にして

$$\frac{bc}{b^5+c^5+bc} \leqq \frac{a}{a+b+c},\quad \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leqq \frac{b}{a+b+c}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えて

$$\sum_{cyclic} \frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leqq \frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = 1\,.$$

よって

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leqq 1\,.$$ ■

問題 47　(IMO 1995)

a, b, c は正の実数で $abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqq \frac{3}{2}\,.$$

解 1　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{ab+ca}{4} = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{a(b+c)}{4} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{a^3(b+c)} \cdot \frac{a(b+c)}{4}} = \frac{1}{a} = bc\,.$$

同様にして

$$\frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{bc+ab}{4} \geqq ca,\ \ \frac{1}{c^3(a+b)} + \frac{ca+bc}{4} \geqq ab\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqq \frac{ab+bc+ca}{2} \overset{AM \geqq GM}{\geqq} \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}\,. \quad \blacksquare$$

［注］　$\dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(c+a)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \geqq \dfrac{ab+bc+ca}{2}$ は次のように導くこともできる．補助定理 1 より

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)} \\ &\geqq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)} \\ &= \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2}\,. \qquad \square\end{aligned}$$

解 2　$x = \dfrac{1}{a},\ y = \dfrac{1}{b},\ z = \dfrac{1}{c}$ とおくと，$xyz = 1$．

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} + \frac{y^3}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}} + \frac{z^3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \\ &= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \\ &\overset{\text{補助定理 1}}{\geqq} \frac{(x+y+z)^2}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}\end{aligned}$$

$$= \frac{x+y+z}{2}$$

$$\overset{AM \geqq GM}{\geqq} \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

［注］ $\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z^2}{x+y} \geqq \dfrac{x+y+z}{2}$ は相加平均・相乗平均の不等式を使って示すこともできる．

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \overset{AM \geqq GM}{\geqq} 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = x\,.$$

これと，同様にして得られる不等式

$$\frac{y^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geqq y,\ \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geqq z$$

の辺々を加えればよい． $\square$

問題 48 (IMO Short List 1993)

a, b, c, d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqq \frac{2}{3}\,.$$

解 補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \\
&= \frac{a^2}{a(b+2c+3d)} + \frac{b^2}{b(c+2d+3a)} + \frac{c^2}{c(d+2a+3b)} + \frac{d^2}{d(a+2b+3c)} \\
&\geqq \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+2c+3d)+b(c+2d+3a)+c(d+2a+3b)+d(a+2b+3c)} \\
&= \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} \geqq \frac{2}{3}$$

すなわち

$$3(a+b+c+d)^2 \geqq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}&3(a+b+c+d)^2 \geqq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\ \Longleftrightarrow\ &3(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqq 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\ \Longleftrightarrow\ &(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \geqq 0\,.\end{aligned}$$

よって，$3(a+b+c+d)^2 \geqq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ は成り立つ． ■

[注]　$3(a+b+c+d)^2 \geqq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ の証明は
$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ から
$8(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = 4(a+b+c+d)^2 - 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ を用いると

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqq (a+b+c+d)^2$$

を示せばよいことになる．これは，コーシー・シュワルツの不等式を使うと

$$(1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqq (a+b+c+d)^2.$$

問題 49　(IMO Short List 1990)

a, b, c, d は正の実数で $ab+bc+cd+da=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c} \geqq \frac{1}{3}\,.$$

解 1　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}\sum_{cyclic}\frac{a^3}{b+c+d}\cdot\sum_{cyclic}(b+c+d)\cdot\sum_{i=1}^{4}1 &\geqq \left(\sum_{cyclic}\sqrt[3]{\frac{a^3}{b+c+d}\cdot(b+c+d)\cdot 1}\right)^3\\ &= (a+b+c+d)^3\,.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\sum_{cyclic}\frac{a^3}{b+c+d} \geqq \frac{(a+b+c+d)^2}{12}\,.$$

したがって

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{12} \geqq \frac{1}{3}\quad \text{すなわち}\quad a+b+c+d \geqq 2$$

を示せばよい．

$ab+bc+cd+da=1 \Longleftrightarrow (a+c)(b+d)=1$ から

$$a+b+c+d=(a+c)+(b+d) \overset{AM\geqq GM}{\geqq} 2\sqrt{(a+c)(b+d)}=2\,.$$ ■

解 2　補助定理 1 より

$$\sum_{cyclic} \frac{a^3}{b+c+d} = \frac{a^4}{a(b+c+d)} + \frac{b^4}{b(c+d+a)} + \frac{c^4}{c(d+a+b)} + \frac{d^4}{d(a+b+c)}$$
$$\geqq \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)}$$
$$= \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{2(ab+bc+cd+da)+2(ac+bd)}$$
$$= \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{2+2(ac+bd)}\,.$$

したがって

$$\frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{2+2(ac+bd)} \geqq \frac{1}{3}$$

すなわち

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \geqq 2+2(ac+bd)$$

を示せばよい.

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+d^2}{2} + \frac{d^2+a^2}{2}$$
$$\geqq ab+bc+cd+da = 1\,,$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = (a^2+c^2)+(b^2+d^2) \geqq 2ac+2bd$$

より

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \geqq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$$
$$= 2(a^2+b^2+c^2+d^2)+(a^2+b^2+c^2+d^2)$$
$$\geqq 2+2(ac+bd)\,.$$

■

問題 50　(IMO 1968)

$x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ は実数で $x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_1y_1 > z_1^2,\ x_2y_2 > z_2^2$ を満たすとき,次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \geqq \frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\,.$$

解 1 $x_1y_1 > z_1^2 \geqq 0$ から $x_1y_1 > 0$ で，$x_1 > 0$ より $y_1 > 0$ である．同様にして，$y_2 > 0$ が成り立つ．

$u_1 = \sqrt{x_1y_1} + z_1$，$u_2 = \sqrt{x_2y_2} + z_2$，$v_1 = \sqrt{x_1y_1} - z_1$，$u_2 = \sqrt{x_2y_2} - z_2$ とおくと

$$\sqrt{x_1y_1} = \frac{u_1+v_1}{2},\ \sqrt{x_2y_2} = \frac{u_2+v_2}{2},\ z_1 = \frac{u_1-v_1}{2},\ z_2 = \frac{u_2-v_2}{2}.$$

さて，$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$ については

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2\\
&= x_1y_1+x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1-z_1^2-z_2^2-2z_1z_2\\
&= x_1y_1-z_1^2+x_2y_2-z_2^2+(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1})^2+2\sqrt{x_1y_1}\sqrt{x_2y_2}-2z_1z_2\\
&= u_1v_1+u_2v_2+(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1})^2+2\cdot\frac{u_1+v_1}{2}\cdot\frac{u_2+v_2}{2}-2\cdot\frac{u_1-v_1}{2}\cdot\frac{u_2-v_2}{2}\\
&= u_1v_1+u_2v_2+(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1})^2+u_1v_2+u_2v_1\\
&= (u_1+u_2)(v_1+v_2)+(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1})^2\\
&\geqq (u_1+u_2)(v_1+v_2)
\end{aligned}$$

より

$$\frac{8}{(u_1+u_2)(v_1+v_2)} \geqq \frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}.$$

したがって

$$\frac{1}{u_1v_1}+\frac{1}{u_2v_2} \geqq \frac{8}{(u_1+u_2)(v_1+v_2)}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{u_1v_1}+\frac{1}{u_2v_2} \geqq \frac{8}{(u_1+u_2)(v_1+v_2)}\\
\iff &(u_1+u_2)(v_1+v_2)(u_1v_1+u_2v_2) \geqq 8u_1u_2v_1v_2
\end{aligned}$$

から

$$(u_1+u_2)(v_1+v_2)(u_1v_1+u_2v_2) \geqq 8u_1u_2v_1v_2$$

を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$(u_1+u_2)(v_1+v_2)(u_1v_1+u_2v_2) \geqq 2\sqrt{u_1u_2}\cdot 2\sqrt{v_1v_2}\cdot 2\sqrt{u_1u_2v_1v_2} = 8u_1u_2v_1v_2$$

を得る． ■

解 2　$x_1y_1 > z_1^2 \geqq 0$ から $x_1y_1 > 0$ で，$x_1 > 0$ より $y_1 > 0$ である．同様にして，$y_2 > 0$ が成り立つ．

$x_1y_1 - z_1^2 = p > 0,\ x_2y_2 - z_2^2 = q > 0$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2\\
&= x_1y_1 + x_2y_2 + \underline{x_1y_2 + x_2y_1} - z_1^2 - z_2^2 - 2z_1z_2\\
&\overset{AM\geqq GM}{\geqq} \quad x_1y_1 - z_1^2 + x_2y_2 - z_2^2 + \underline{2\sqrt{x_1y_1 \cdot x_2y_2}} - 2z_1z_2\\
&= p + q + 2\sqrt{(p+z_1^2)(q+z_2^2)} - 2z_1z_2\\
&\overset{Schwarz}{\geqq} \quad p + q + 2\left(\sqrt{pq} + z_1z_2\right) - 2z_1z_2\\
&= p + q + 2\sqrt{pq} = (\sqrt{p}+\sqrt{q})^2 .
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\frac{8}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2} \geqq \frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}
$$

となるから

$$
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqq \frac{8}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2} \text{ すなわち } (\sqrt{p}+\sqrt{q})^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \geqq 8
$$

を示せばよい．この不等式は

$$
(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \overset{AM\geqq GM}{\geqq} \left(2\sqrt{\sqrt{pq}}\right)^2 \cdot 2\sqrt{\frac{1}{pq}} = 8
$$

から成り立つ．■

［注 **1**］　$(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\right) \geqq 8$ は補助定理 2 を使っても証明できる．

$$
(\sqrt{p}+\sqrt{q})(\sqrt{p}+\sqrt{q})\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \geqq \left(\sqrt[3]{\sqrt{p}\cdot\sqrt{p}\cdot\frac{1}{p}} + \sqrt[3]{\sqrt{q}\cdot\sqrt{q}\cdot\frac{1}{q}}\right)^3 = 8.
$$

［注 **2**］　問題 50 の不等式は次のように一般化できる．

n を 2 以上の整数とする．x_1，$x_2, \ldots, x_n$，y_1，y_2，$\ldots$，y_n，z_1，z_2，$\ldots$，z_n は実数で，$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0,\ x_1y_1 > z_1^2,\ x_2y_2 > z_2^2, \ldots,\ x_ny_n > z_n^2$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_ny_n - z_n^2}$$
$$\geqq \frac{n^3}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)^2}.$$

解

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)^2 &= \left(\sqrt{x_1} \cdot \frac{z_1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2} \cdot \frac{z_2}{\sqrt{x_2}} + \cdots + \sqrt{x_n} \cdot \frac{z_n}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \\ &\overset{Schwarz}{\leqq} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{z_1^2}{x_1} + \frac{z_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{z_n^2}{x_n}\right)\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)^2 \\ &\geqq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \\ &\qquad - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{z_1^2}{x_1} + \frac{z_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{z_n^2}{x_n}\right) \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n - \frac{z_1^2}{x_1} - \frac{z_2^2}{x_2} - \cdots - \frac{z_n^2}{x_n}\right) \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{x_1y_1 - z_1^2}{x_1} + \frac{x_2y_2 - z_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_ny_n - z_n^2}{x_n}\right) \\ &\overset{AM \geqq GM}{\geqq} n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \cdot n\sqrt[n]{\frac{(x_1y_1 - z_1^2)(x_2y_2 - z_2^2)\cdots(x_ny_n - z_n^2)}{x_1x_2\cdots x_n}} \\ &= n^2\sqrt[n]{(x_1y_1 - z_1^2)(x_2y_2 - z_2^2)\cdots(x_ny_n - z_n^2)}.\end{aligned}$$

ゆえに $\displaystyle \frac{n}{\sqrt[n]{(x_1y_1 - z_1^2)(x_2y_2 - z_2^2)\cdots(x_ny_n - z_n^2)}}$

$$\geqq \frac{n^3}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)^2}.$$

したがって

$$\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_ny_n - z_n^2} \geqq \frac{n}{\sqrt[n]{(x_1y_1 - z_1^2)(x_2y_2 - z_2^2)\cdots(x_ny_n - z_n^2)}}$$

を示せばよい．これは，相加平均・相乗平均の不等式から得られる． ■

問題 51　(Romania 1997)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab} \geqq 1 \geqq \frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}\,.$$

解 1　[左側の不等式の証明]

$b^2+c^2 \geqq 2bc$ より

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} \geqq \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

同様にして

$$\frac{b^2}{b^2+2ca} \geqq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2},\ \ \frac{c^2}{c^2+2ab} \geqq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab} \geqq \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1\,.$$

[右側の不等式の証明]

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}=1-\frac{2bc}{a^2+2bc},\ \ \frac{b^2}{b^2+2ca}=1-\frac{2ca}{b^2+2ca},\ \ \frac{c^2}{c^2+2ab}=1-\frac{2ca}{c^2+2ab}$$

を用いて左側の不等式

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab} \geqq 1$$

を書き直すと

$$1-\frac{2bc}{a^2+2bc}+1-\frac{2ca}{b^2+2ca}+1-\frac{2ca}{c^2+2ab} \geqq 1\,.$$

よって

$$1 \geqq \frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}\,.$$

■

解 2　[左側の不等式の証明]

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab} &\overset{\text{補助定理 1}}{\geqq} \frac{(a+b+c)^2}{a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab}\\ &= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1\,.\end{aligned}$$

■

問題 52　(Canada 2002)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geqq a+b+c\,.$$

解 1　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{a^3}{bc}+b+c \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}\cdot b\cdot c}=3a\,.$$

同様にして

$$\frac{b^3}{ca}+c+a \geqq 3b,\ \ \frac{c^3}{ab}+a+b \geqq 3c\,.$$

これらの不等式の辺々を加えて

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geqq a+b+c\,. \qquad \blacksquare$$

解 2　問題 22 と $(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$ を使うと

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} &\geqq \frac{(a+b+c)^3}{3(bc+ca+ab)}\\ &=(a+b+c)\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3(bc+ca+ab)}\\ &\geqq a+b+c.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geqq a+b+c\,. \qquad \blacksquare$$

解 3　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\right)(b+c+a)(c+a+b)\\ &\geqq \left(\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}\cdot b\cdot c}+\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca}\cdot c\cdot a}+\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab}\cdot a\cdot b}\ \right)^3\\ &=(a+b+c)^3\,.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geqq a+b+c\,. \qquad \blacksquare$$

解 4　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．このとき

$$a^3 \geqq b^3 \geqq c^3,\ \frac{1}{bc} \geqq \frac{1}{ca} \geqq \frac{1}{ab}$$

であるから，並べ替えの不等式より

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geqq \frac{a^3}{ab} + \frac{b^3}{bc} + \frac{c^3}{ca} = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\,.$$

$a^2 \geqq b^2 \geqq c^2,\ \dfrac{1}{c} \geqq \dfrac{1}{b} \geqq \dfrac{1}{a}$ であるから，並べ替えの不等式より

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqq \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} + \frac{c^2}{c} = a + b + c\,.$$

よって

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geqq a + b + c\,. \qquad \blacksquare$$

解 5　（筆者が高校 1 年生のときに教科書で学んだ解法）

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geqq a + b + c \Longleftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geqq abc(a + b + c)\,.$$

$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + yz + zx$ が成り立つから

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \\ &\geqq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \\ &\geqq ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab \\ &= abc(a + b + c)\,. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

解 6　$\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ca} + \dfrac{c^3}{ab} \geqq a + b + c \Longleftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geqq abc(a + b + c)\,.$

重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{2}{4}a^4 + \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{4}c^4 \geqq (a^4)^{\frac{2}{4}}(b^4)^{\frac{1}{4}}(c^4)^{\frac{1}{4}} = a^2bc\,.$$

同様にして

$$\frac{1}{4}a^4 + \frac{2}{4}b^4 + \frac{1}{4}c^4 \geqq ab^2c,\ \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}b^4 + \frac{2}{4}c^4 \geqq abc^2\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqq a^2bc + ab^2c + abc^2 = abc(a + b + c)\,. \qquad \blacksquare$$

解 7 $$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geqq a+b+c \Longleftrightarrow a^4+b^4+c^4\geqq abc(a+b+c)$$
$$\Longleftrightarrow [(4,\ 0,\ 0)]\geqq[(2,\ 1,\ 1)]$$

$[(4,\ 0,\ 0)]\geqq[(2,\ 1,\ 1)]$ は Muirhead の定理から成り立つ． ■

解 8 $a=e^{a_1},\ b=e^{b_1},\ c=e^{c_1}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$e^{3a_1-b_1-c_1}+e^{3b_1-c_1-a_1}+e^{3c_1-a_1-b_1}\geqq e^{a_1}+e^{b_1}+e^{c_1}$$

となる．$a_1\geqq b_1\geqq c_1$ と仮定すると

$$(3a_1-b_1-c_1,\ 3b_1-c_1-a_1,\ 3c_1-a_1-b_1)\succ(a_1,\ b_1,\ c_1)\,.$$

$f(x)=e^x$ とおくと $f''(x)=e^x>0$．よって，$f(x)$ は凸関数であるから，Karamat の不等式より

$$f(3a_1-b_1-c_1)+f(3b_1-c_1-a_1)+f(3c_1-a_1-b_1)\geqq f(a_1)+f(b_1)+f(c_1)\,.$$ ■

問題 53 (Greek 2004)

次の不等式がすべての実数 x,y,z に対して成り立つように，最良の定数 M を求めよ．

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\geqq M(xy+yz+zx)^2\,.$$

解 $x=y=z=1$ とおくと，$M\leqq\dfrac{2}{3}$．$M=\dfrac{2}{3}$ のとき，不等式が成り立つことを示せば，最良の定数 M は $\dfrac{2}{3}$ となる．

$$\begin{aligned}
&x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\geqq\frac{2}{3}(xy+yz+zx)^2\\
\Longleftrightarrow\ &3(x^4+y^4+z^4)+3xyz(x+y+z)\geqq 2(xy)^2+2(yz)^2+2(zx)^2+4xyz(x+y+z)\\
\Longleftrightarrow\ &2\bigl[x^4+y^4+z^4-(xy)^2-(yz)^2-(zx)^2\bigr]+x^4+y^4+z^4\geqq xyz(x+y+z)\,.\quad(*)
\end{aligned}$$

$X^2+Y^2+Z^2\geqq XY+YZ+ZX\quad\cdots(**)$ を利用する．
$(**)$ で $X=x^2,Y=y^2,Z=z^2$ とおくと

$$x^4+y^4+z^4-(xy)^2-(yz)^2-(zx)^2\geqq 0\,.$$

$(**)$ を 2 回利用すると

$$x^4+y^4+z^4\geqq(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\geqq xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy=xyz(x+y+z)\,.$$

よって，$(*)$ は成り立つ． ■

問題 54　(Ukraine 2004)

a, b, c は正の実数で，$abc \geqq 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3 \geqq ab+bc+ca\,.$$

解 1　同次化 (Homonization) して

$$a^3+b^3+c^3 \geqq (abc)^{\frac{1}{3}}(ab+bc+ca)$$

を証明する．重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{4}{9}a^3+\frac{4}{9}b^3+\frac{1}{9}c^3 \geqq (a^3)^{\frac{4}{9}}(b^3)^{\frac{4}{9}}(c^3)^{\frac{1}{9}} = a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{3}} = (abc)^{\frac{1}{3}}ab\,.$$

同様にして

$$\frac{1}{9}a^3+\frac{4}{9}b^3+\frac{4}{9}c^3 \geqq (abc)^{\frac{1}{3}}bc,\ \ \frac{4}{9}a^3+\frac{1}{9}b^3+\frac{4}{9}c^3 \geqq (abc)^{\frac{1}{3}}ca\,.$$

これらの不等式の辺々を加えて

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &\geqq (abc)^{\frac{1}{3}}(ab+bc+ca) \\ &\geqq ab+bc+ca \end{aligned}$$

を得る．■

解 2　$a^3+b^3+c^3 \geqq ab+bc+ca \iff [(3,\ 0,\ 0)] \geqq [(1,\ 1,\ 0)]\,.$

$$\begin{aligned} [(3,\ 0,\ 0)] &\geqq \left[\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)\right] \\ &\overset{(M2)}{\geqq} \left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\right] = [(1,\ 1,\ 0)] \end{aligned}$$

となり，$[(3,\ 0,\ 0)] \geqq [(1,\ 1,\ 0)]$ は成り立つ．■

［注］　$[(3,\ 0,\ 0)] \geqq [(1,\ 1,\ 0)]$ の証明は次のように示すことができる．

$$[(3,\ 0,\ 0)] \geqq \left[\left(\frac{7}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)\right] \geqq \left[\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\right] = [(2,\ 0,\ 0)] \geqq [(1,\ 1,\ 0)]$$

としてもよい．副産物として $[(3,\ 0,\ 0)] \geqq [(2,\ 0,\ 0)]$ より次の不等式を得る．

$a,\ b,\ c$ は正の実数で，$abc \geqq 1$ を満たすとき，次の不等式が成り立つ．

$$a^3+b^3+c^3 \geqq a^2+b^2+c^2\,.$$

解 3　$a \geqq b \geqq c$ と仮定しても一般性を失わない．このとき，$a^2 \geqq b^2 \geqq c^2$ が成り立つから，チェビシェフの不等式より

$$3(a^3+b^3+c^3) \geqq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\,.$$

ところで，相加平均・相乗平均の不等式より

$$a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{abc} \geqq 3\,.$$

そして

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

が成り立つから

$$a^3+b^3+c^3 \geqq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3} \geqq \frac{3(ab+bc+ca)}{3} = ab+bc+ca\,. \quad \blacksquare$$

解 4　$a^3+b^3+c^3 \geqq (abc)^{\frac{1}{3}}(ab+bc+ca)$ を証明する．$a=e^{a_1}$，$b=e^{b_1}$，$c=e^{c_1}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$e^{3a_1}+e^{3b_1}+e^{3c_1} \geqq e^{\frac{4a_1+4b_1+c_1}{3}}+e^{\frac{4b_1+4c_1+a_1}{3}}+e^{\frac{4c_1+4a_1+b_1}{3}}$$

となる．$a_1 \geqq b_1 \geqq c_1$ と仮定すると

$$(3a_1,\ 3b_1,\ 3c_1) \succ \left(\frac{4a_1+4b_1+c_1}{3},\ \frac{4c_1+4a_1+b_1}{3},\ \frac{4b_1+4c_1+a_1}{3}\right).$$

$f(x)=e^x$ とおくと，$f''(x)=e^x>0$．$f(x)$ は凸関数であるから，Karamat の不等式より

$$\begin{aligned}
&f(3a_1)+f(3b_1)+f(3c_1)\\
&\geqq f\left(\frac{4a_1+4b_1+c_1}{3}\right)+f\left(\frac{4b_1+4c_1+a_1}{3}\right)+f\left(\frac{4c_1+4a_1+b_1}{3}\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

問題 55　(Elemente der Mathematik，Problem 1207)

x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\,.$$

解 1　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{x^2y}{y^2z}} = 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} = \frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}\,.$$

同様にして

$$\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqq \frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}},\ \frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y} \geqq \frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えて

$$3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \geqq \frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}\,.$$

よって

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\,. \qquad \blacksquare$$

解 2　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^3 &= \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)\\ &\geqq \left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}}+\sqrt[3]{\frac{y}{z}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}+\sqrt[3]{\frac{z}{x}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}}\right)^3\\ &= \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{zx}}+\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}\right)^3\\ &= \left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^3.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\,. \qquad \blacksquare$$

問題 56　(APMO 1998)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

解 1
$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geqq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

したがって
$$\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \geqq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}},\ \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$
を証明すればよい．

このためには，$x>0,\ y>0,\ z>0$ のとき
$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$
を証明すればよい．（問題 55 参照．） ■

解 2
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) &= 2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1\\ &\overset{AM\geqq GM}{\geqq} (a+b+c)\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}-1\,.\end{aligned}$$

したがって
$$\frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}-1 \geqq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$
すなわち
$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geqq 3$$
を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より
$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geqq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{abc}} = 3\,.$$ ■

問題 57 a, b, c は正の実数で，$abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq a+b+c\,.$$

解 同次化 (Homonization) して

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

を証明すればよい．（問題 55 参照.） ■

問題 58 (a) (Pham Kim Hung)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geqq 4\,.$$

(b) (Samin Riasat)

n は 3 以下の自然数で，a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+n\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right) \geqq 3+n\,.$$

解 (a) 問題 55 の結果から $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geqq \dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$ が成り立つので

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geqq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\,.$$

したがって

$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geqq 4$$

を証明すればよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} &= \frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}+\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}+\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \\
&\geqq 4\sqrt[4]{\frac{3(a+b+c)^3\sqrt[3]{abc}}{27(\sqrt[3]{abc})^3(a+b+c)}} \\
&= 4\sqrt{\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}} \overset{AM \geqq GM}{\geqq} 4\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{abc}}{3\sqrt[3]{abc}}} = 4\,.
\end{aligned}$$

(b) (a) と同様に

$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+n\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right) \geqq 3+n$$

を証明すればよい．

$x=\dfrac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}$ とおくと，相加平均・相乗平均の不等式より

$$x=\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}} \geqq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{3\sqrt[3]{abc}}=1\,.$$

ゆえに，$x \geqq 1$.

証明すべき不等式を x で表すと

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+n\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)=3x+\frac{n}{x} &= x+x+x+\underbrace{\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x}}_{n} \\
&\overset{AM\geqq GM}{\geqq} (n+3)\sqrt[n+3]{\frac{x^3}{x^n}} \\
&=(n+3)\sqrt[n+3]{x^{3-n}} \geqq (n+3)\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+n\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right) \geqq 3+n\,. \qquad \blacksquare$$

問題 59 (a) a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\,.$$

(b) (Samin Riasat)

n は 3 以下の自然数，a, b, c は正の実数で，$a+b+c=ab+bc+ca$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{3n}{a^2+b^2+c^2} \geqq 3+n\,.$$

㊫ (a) $abc\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\right)(ab+bc+ca)-abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

$$=a^4c^2+b^4a^2+c^4b^2-a^3b^2c-b^3c^2a-c^3a^2b\,.$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{a^4c^2+b^4a^2}{2} \geqq \sqrt{a^4c^2\cdot b^4a^2}=a^3b^2c\,.$$

同様にして

$$\frac{b^4a^2+c^4b^2}{2} \geqq b^3c^2a,\ \ \frac{c^4b^2+a^4c^2}{2} \geqq c^3a^2b\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$a^4c^2 + b^4a^2 + c^4b^2 \geqq a^3b^2c + b^3c^2a + c^3a^2b\,.$$

よって

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\,.$$

(b)　(a) の不等式と $a+b+c = ab+bc+ca$ より

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} = a^2+b^2+c^2$$

が成り立つから

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{3n}{a^2+b^2+c^2} \geqq a^2+b^2+c^2 + \frac{3n}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

したがって

$$a^2+b^2+c^2 + \frac{3n}{a^2+b^2+c^2} \geqq 3+n$$

を証明すればよい．$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} = x$ とおくと，相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 + \frac{3n}{a^2+b^2+c^2} &= 3x + \frac{n}{x} = x+x+x+\underbrace{\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x}}_{n} \\ &\overset{AM\geqq GM}{\geqq} (n+3)\sqrt[n+3]{\frac{x^3}{x^n}} = (n+3)\sqrt[n+3]{x^{3-n}}. \end{aligned}$$

したがって

$$(n+3)\sqrt[n+3]{x^{3-n}} \geqq n+3 \text{ すなわち } x \geqq 1$$

を示せばよい．

$(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca) = 3(a+b+c)$ から $a+b+c \geqq 3$ を得る．また，$3x = a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca = a+b+c \geqq 3$ より $x \geqq 1$ は成り立つ． ■

問題 60　(USA 1997)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqq \frac{1}{abc}\,.$$

解 1　$(a^2-b^2)(a-b) \geqq 0$ から $a^3+b^3 \geqq ab(a+b)$. この不等式を用いると

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leqq \frac{1}{ab(a+b)+abc} = \frac{1}{ab(a+b+c)}\,.$$

同様にして

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc} \leqq \frac{1}{bc(a+b+c)},\ \ \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqq \frac{1}{ca(a+b+c)}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\\ &\leqq \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}\\ &= \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}\,.\end{aligned}$$

■

解 2　不等式の両辺に $abc(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc)$ をかけると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqq \frac{1}{abc}\\ &\iff a^6b^3+a^6c^3+b^6a^3+b^6c^3+c^6a^3+c^6b^3 \geqq 2(a^5b^2c^2+a^2b^5c^2+a^2b^2c^5)\\ &\iff [(6,3,0)] \geqq [(5,2,2)]\,.\end{aligned}$$

$[(6,3,0)] \geqq [(5,2,2)]$ は Muirhead の定理より成り立つ. ■

[注 1]　$a^6b^3+a^6c^3+b^6a^3+b^6c^3+c^6a^3+c^6b^3 \geqq 2(a^5b^2c^2+a^2b^5c^2+a^2b^2c^5)$ を示すのに重みつきの相加平均・相乗平均の不等式を用いてもよい.

$$\begin{aligned}&\frac{5}{12}a^6b^3+\frac{5}{12}a^6c^3+\frac{1}{12}b^6c^3+\frac{1}{12}c^6b^3\\ &\geqq (a^6b^3)^{\frac{5}{12}}(a^6c^3)^{\frac{5}{12}}(b^6c^3)^{\frac{1}{12}}(c^6b^3)^{\frac{1}{12}} = a^5b^2c^2\end{aligned}$$

より

$$\frac{5}{12}a^6b^3+\frac{5}{12}a^6c^3+\frac{1}{12}b^6c^3+\frac{1}{12}c^6b^3 \geqq a^5b^2c^2\,.$$

同様にして

$$\frac{5}{12}b^6c^3+\frac{5}{12}b^6a^3+\frac{1}{12}c^6a^3+\frac{1}{12}a^6c^3 \geqq a^2b^5c^2\,,$$

$$\frac{5}{12}c^6a^3+\frac{5}{12}c^6b^3+\frac{1}{12}a^6b^3+\frac{1}{12}b^6a^3 \geqq a^2b^2c^5\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a^6b^3+a^6c^3+b^6a^3+b^6c^3+c^6a^3+c^6b^3}{2} \geqq a^5b^2c^2+a^2b^5c^2+a^2b^2c^5\,.$$

ゆえに

$$a^6b^3+a^6c^3+b^6a^3+b^6c^3+c^6a^3+c^6b^3 \geqq 2(a^5b^2c^2+a^2b^5c^2+a^2b^2c^5)\,.$$

[注 **2**]　問題 60 の不等式は同次式であるから，$abc=1$ と仮定して，$x=a^3$, $y=b^3$, $z=c^3$ とおくと

x, y, z は正の実数で，$xyz=1$ を満たすとき

$$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1} \leqq 1$$

を示せばよい．これは問題 183 の不等式の特別な場合になっている．

問題 61　x, y, z は正の実数で，$xyz=x+y+z+2$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$xy+yz+zx \geqq 2(x+y+z)\,.$$

解　$xyz=x+y+z+2$ を変形すると，$\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=1\,.$

ここで

$$a=\frac{1}{1+x},\ y=\frac{1}{1+y},\ z=\frac{1}{1+z}$$

とおくと，$a+b+c=1$ で，

$$x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a},\ y=\frac{1-b}{b}=\frac{c+a}{b},\ z=\frac{1-c}{c}=\frac{a+b}{c}\,.$$

証明すべき不等式を同値変形すると

$$\begin{aligned}
&xy+yz+zx \geqq 2(x+y+z)\\
\iff &\frac{(c+a)(c+b)}{ab}+\frac{(a+b)(a+c)}{bc}+\frac{(b+a)(b+c)}{ca}\\
&\geqq 2\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)\\
\iff &a^3+b^3+c^3+3abc \geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

を示せばよいが，これは，Schur の不等式から成立する．　■

問題 62　(Japan 1997)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geqq \frac{3}{5}\,.$$

解 1　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b+c=1$ と仮定することができる．このとき，証明すべき不等式は

$$\frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2+a^2}+\frac{(1-2b)^2}{(1-b)^2+b^2}+\frac{(1-2c)^2}{(1-c)^2+c^2} \geqq \frac{3}{5}$$

となる．$f(x)=\dfrac{(1-2x)^2}{(1-x)^2+x^2}$ $(0<x<1)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{4x-2}{(2x^2-2x+1)^2},\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{54}{25}\,.$$

$y=f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{5}\right)$ における接線の方程式は $y=-\dfrac{54}{25}x+\dfrac{23}{25}$．

次に，この接線と $y=f(x)$ との上下関係を調べる．

$$\begin{aligned}
f(x)-\left(-\frac{54}{25}x+\frac{23}{25}\right) &= \frac{4x^2-4x+1}{2x^2-2x+1}+\frac{54x-23}{25} \\
&= \frac{108x^3-54x^2+2}{25(2x^2-2x+1)} \\
&= \frac{2(3x-1)^2(6x+1)}{25(2x^2-2x+1)} \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$f(x) \geqq -\frac{54}{25}x+\frac{23}{25}$$

が成り立つから

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq -\frac{54}{25}(a+b+c)+3\cdot\frac{23}{25}=-\frac{54}{25}+\frac{69}{25}=\frac{3}{5}\,. \qquad \blacksquare$$

解 2　$x=\dfrac{b+c}{a}$，$y=\dfrac{c+a}{b}$，$z=\dfrac{a+b}{c}$ とおくと，$xyz=x+y+z+2$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geqq \frac{3}{5} \\
\iff &\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{(y-1)^2}{y^2+1}+\frac{(z-1)^2}{z^2+1} \geqq \frac{3}{5}\,.
\end{aligned}$$

補助定理 1 より

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{(y-1)^2}{y^2+1}+\frac{(z-1)^2}{z^2+1} \geqq \frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+3}$$

が成り立つから

$$\frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+3} \geqq \frac{3}{5}$$

すなわち

$$(x+y+z)^2-15(x+y+z)+3(xy+yz+zx)+18 \geqq 0$$

を示せばよい．ところで，問題 61 の結果から

$$xy+yz+zx \geqq 2(x+y+z)$$

が成り立つ．

$$xyz = x+y+z+2 \overset{AM \geqq GM}{\geqq} 3\sqrt[3]{xyz}+2$$

において $t=\sqrt[3]{xyz}$ とおくと $t^3 \geqq 3t+2$．$(t+1)^2(t-2) \geqq 0$．よって，$t \geqq 2$ から

$$xyz \geqq 8$$

が成り立つから

$$x+y+z = xyz-2 \geqq 6\,.$$

したがって

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^2-15(x+y+z)+3(xy+yz+zx)+18\\
&=3[xy+yz+zx-2(x+y+z)]+(x+y+z)^2-9(x+y+z)+18\\
&=3[xy+yz+zx-2(x+y+z)]+(x+y+z-3)(x+y+z-6)\\
&\geqq 0\,.
\end{aligned}$$

■

問題 63　(USA 2003)

a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leqq 8\,.$$

解 1　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b+c=1$ と仮定することができる．このとき，証明すべき不等式は

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \leqq 8$$

となる．$f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2}\quad (0<x<1)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{-8x^2-4x+4}{(3x^2-2x+1)^2},\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=4\,.$$

$y=f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{12x+4}{3}$.
次に，この接線と $y=f(x)$ との上下関係を調べる．

$$\begin{aligned} f(x)-\frac{12x+4}{3} &= \frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1}-\frac{12x+4}{3} \\ &= \frac{-36x^3+15x^2+2x-1}{3(3x^2-2x+1)} \\ &= -\frac{(3x-1)^2(4x+1)}{3(3x^2-2x+1)} \leqq 0\,. \end{aligned}$$

ゆえに

$$f(x) \leqq \frac{12x+4}{3}\,.$$

よって

$$f(a)+f(b)+f(c) \leqq \frac{12(a+b+c)+3\cdot 4}{3}=\frac{12+3\cdot 4}{3}=8\,. \qquad \blacksquare$$

解 2　$x=\dfrac{b+c}{a}$，$y=\dfrac{c+a}{b}$，$z=\dfrac{a+b}{c}$ とおくと，$xyz=x+y+z+2$ が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leqq 8 \\ \iff &\frac{(2+x)^2}{2+x^2}+\frac{(2+y)^2}{2+y^2}+\frac{(2+z)^2}{2+z^2} \leqq 8 \\ \iff &1+\frac{4x+2}{2+x^2}+1+\frac{4y+2}{2+y^2}+1+\frac{4z+2}{2+z^2} \leqq 8 \\ \iff &\frac{2x+1}{2+x^2}+\frac{2y+1}{2+y^2}+\frac{2z+1}{2+z^2} \leqq \frac{5}{2} \\ \iff &1-\frac{2x+1}{2+x^2}+1-\frac{2y+1}{2+y^2}+1-\frac{2z+1}{2+z^2} \geqq 3-\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\iff \frac{(x-1)^2}{2+x^2}+\frac{(y-1)^2}{2+y^2}+\frac{(z-1)^2}{2+z^2} \geqq \frac{1}{2}\,.$$

補助定理 1 を使うと

$$\frac{(x-1)^2}{2+x^2}+\frac{(y-1)^2}{2+y^2}+\frac{(z-1)^2}{2+z^2} \geqq \frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$$

となるから

$$\frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6} \geqq \frac{1}{2}$$

すなわち

$$(x+y+z)^2-12(x+y+z)+12+2(xy+yz+zx) \geqq 0$$

を示せばよい．ところで，問題 61 の結果から

$$xy+yz+zx \geqq 2(x+y+z)$$

が成り立つ．

$$xyz = x+y+z+2 \overset{AM \geqq GM}{\geqq} 3\sqrt[3]{xyz}+2$$

において，$t=\sqrt[3]{xyz}$ とおくと $t^3 \geqq 3t+2$．$(t+1)^2(t-2) \geqq 0$．よって，$t \geqq 2$ から

$$xyz \geqq 8\,.$$

が成り立つから

$$x+y+z = xyz-2 \geqq 6\,.$$

したがって

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^2-12(x+y+z)+12+2(xy+yz+zx)\\
&=2[xy+yz+zx-2(x+y+z)]+(x+y+z)^2-8(x+y+z)+12\\
&=2[xy+yz+zx-2(x+y+z)]+(x+y+z-2)(x+y+z-6)\\
&\geqq 0\,.
\end{aligned}$$

■

問題 64 (Pham Kim Hung)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{(2a+b+c)^2}{4a^3+(b+c)^3}+\frac{(2b+c+a)^2}{4b^3+(c+a)^3}+\frac{(2c+a+b)^2}{4c^3+(a+b)^3} \leqq \frac{12}{a+b+c}\,.$$

解　この不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b+c=3$ と仮定することができる．このとき，証明すべき不等式は

$$\frac{(3+a)^2}{4a^3+(3-a)^3}+\frac{(3+b)^2}{4b^3+(3-b)^3}+\frac{(3+c)^2}{4c^3+(3-c)^3} \leqq 4$$

となる．$f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{4x^3+(3-x)^3}\quad (0<x<3)$ とおくと

$$f'(x)=-\frac{x^4+12x^3+54x^2+36x-135}{3(x^3+3x^2-9x+9)^2},\ f'(1)=\frac{2}{3}\,.$$

$y=f(x)$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{4}{3}\right)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{2x+2}{3}$．
次に，この接線と $y=f(x)$ との上下関係を調べる．

$$\begin{aligned} f(x)-\frac{2x+2}{3} &= \frac{(x+3)^2}{4x^3+(3-x)^3}-\frac{2x+2}{3} \\ &= \frac{3(-2x^4-8x^3+13x^2+6x-9)}{4x^3+(3-x)^3} \\ &= -\frac{3(x-1)^2(2x^2+12x+9)}{4x^3+(3-x)^3} \leqq 0\,. \end{aligned}$$

ゆえに

$$f(x) \leqq \frac{2x+2}{3}\,.$$

よって

$$f(a)+f(b)+f(c) \leqq \frac{2(a+b+c)+3\cdot 2}{3}=\frac{6+6}{3}=4\,. \qquad \blacksquare$$

問題 65　(Crux Mathematicorum , Problem 2580 , Hojoo Lee)
a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\,.$$

解 1

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{b+c}{a^2+bc}-\frac{c+a}{b^2+ca}-\frac{a+b}{c^2+ab}\\
&=\frac{a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4-a^4b^2c^2-b^4c^2a^2-c^4a^2b^2}{abc(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}\\
&=\frac{(a^2b^2-b^2c^2)^2+(b^2c^2-c^2a^2)^2+(c^2a^2-a^2b^2)^2}{2abc(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}\geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\,. \qquad \blacksquare$$

解 2　証明すべき不等式を同値変形する.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\\
\iff &\frac{1}{a}-\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{1}{b}-\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{1}{c}-\frac{a+b}{c^2+ab}\geqq 0\\
\iff &\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}+\frac{(b-a)(b-c)}{b(b^2+ca)}+\frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)}\geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

一般性を失うことなく $a\geqq b\geqq c$ と仮定すると

$$\frac{1}{a(a^2+bc)}\leqq\frac{1}{b(b^2+ca)}\leqq\frac{1}{c(c^2+ab)}\,.$$

ここで，$x=\dfrac{1}{a(a^2+bc)}$，$y=\dfrac{1}{b(b^2+ca)}$，$z=\dfrac{1}{c(c^2+ab)}$ とおくと，$0<x\leqq y\leqq z$.
証明すべき不等式は

$$x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b)\geqq 0$$

となる．$x(a-b)(a-c)\geqq 0$ で

$$
\begin{aligned}
y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b)&=(b-c)[y(b-a)-z(c-a)]\\
&\geqq(b-c)[y(c-a)-z(c-a)]\\
&=(b-c)(a-c)(z-y)\geqq 0
\end{aligned}
$$

より

$$x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b)\geqq 0\,. \qquad \blacksquare$$

問題 66 (Crux Mathematicorum , Problem 2581 , Hojoo Lee)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \geqq a+b+c\,.$$

解 1　差をとると

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}-(a+b+c)\\
&=\frac{a^2+bc}{b+c}-a+\frac{b^2+ca}{c+a}-b+\frac{c^2+ab}{a+b}-c\\
&=\frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{(b-a)(b-c)}{c+a}+\frac{(c-a)(c-b)}{a+b}\\
&=\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)+(b^2-a^2)(b^2-c^2)+(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&=\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&=\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \geqq a+b+c\,.$$

■

解 2　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．このとき

$$a^2 \geqq b^2 \geqq c^2,\ \frac{1}{b+c} \geqq \frac{1}{c+a} \geqq \frac{1}{a+b}$$

が成り立つから，並べ替えの不等式より

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqq \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\,.$$

この不等式を使うと

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\\
&=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\\
&\geqq \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\\
&=\frac{a^2+ab}{a+b}+\frac{b^2+bc}{b+c}+\frac{c^2+ca}{c+a}
\end{aligned}$$

$$= a + b + c\,.$$

よって

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geqq a + b + c\,. \qquad \blacksquare$$

解 3　証明すべき不等式を同値変形する.

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geqq a + b + c \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{a^2+bc}{b+c} - a + \frac{b^2+ca}{c+a} - b + \frac{c^2+ab}{a+b} - c \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(a-b)(a-c)}{b+c} + \frac{(b-a)(b-c)}{c+a} + \frac{(c-a)(c-b)}{a+b} \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定すると

$$\frac{1}{a+b} \leqq \frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{b+c}\,.$$

ここで，$x = \dfrac{1}{b+c}$，$y = \dfrac{1}{c+a}$，$z = \dfrac{1}{a+b}$ とおくと，$x \geqq y \geqq z > 0$.
証明すべき不等式は

$$x(a-b)(a-c) + y(b-a)(b-c) + z(c-a)(c-b) \geqq 0$$

となる．$z(c-a)(c-b) = z(a-c)(a-b) \geqq 0$ で

$$\begin{aligned}
x(a-b)(a-c) + y(b-a)(b-c) &= (a-b)[x(a-c) - y(b-c)] \\
&\geqq (a-b)[x(b-c) - y(b-c)] \\
&= (x-y)(a-b)(b-c) \geqq 0
\end{aligned}$$

より

$$x(a-b)(a-c) + y(b-a)(b-c) + z(c-a)(c-b) \geqq 0\,. \qquad \blacksquare$$

問題 67　(Crux Mathematicorum , Problem 2532 , Hojoo Lee)

a, b, c は正の実数で，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqq 3 + \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\,.$$

解 1　証明すべき不等式を同値変形する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\
\iff &\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}-1\right)\\
&\geqq \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\
\iff &\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{c^2+a^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2}{c^2} \geqq \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\
\iff &b^2c^2(b^2+c^2)+c^2a^2(c^2+a^2)+a^2b^2(a^2+b^2) \geqq 2abc(a^3+b^3+c^3)\\
\iff &a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2) \geqq 2a^4bc+2b^4ca+2c^4ab\\
\iff &a^4(b-c)^2+b^4(c-a)^2+c^4(a-b)^2 \geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

よって，証明すべき不等式は成り立つ．■

解 2　不等式を同次化する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\
\iff &(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geqq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\
\iff &(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-9 \geqq \frac{2(a^3+b^3+c^3-3abc)}{abc}\\
\iff &\sum_{cyclic}\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2c^2} \geqq \sum_{cyclic}\frac{(a+b+c)(b-c)^2}{abc}\\
\iff &\sum_{cyclic}(b-c)^2\left[\frac{(b+c)^2}{b^2c^2}-\frac{(a+b+c)}{abc}\right] \geqq 0.
\end{aligned}
$$

$$
A=\frac{(b+c)^2}{b^2c^2}-\frac{a+b+c}{abc},\ B=\frac{(c+a)^2}{c^2a^2}-\frac{a+b+c}{abc},\ C=\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}-\frac{a+b+c}{abc}
$$

とおき，$A(b-c)^2+B(c-a)^2+C(a-b)^2 \geqq 0$ を示せばよい．

一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．このとき

$$
A=\frac{a(b+c)^2-(a+b+c)bc}{ab^2c^2}=\frac{abc+(a-c)b^2+(a-b)c^2}{ab^2c^2}>0,
$$

$$
B=\frac{b(c+a)^2-(a+b+c)ca}{bc^2a^2}=\frac{bc^2+ca(b-c)+(b-c)a^2}{bc^2a^2}>0,
$$

$$
\begin{aligned}
A(b-c)^2+B(c-a)^2+C(a-b)^2 &\geqq B(a-c)^2+C(a-b)^2\\
&\geqq B(a-b)^2+C(a-b)^2\\
&=(B+C)(a-b)^2.
\end{aligned}
$$

したがって，$B+C \geqq 0$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
B+C \geqq 0 &\iff \frac{(c+a)^2}{c^2a^2}+\frac{(a+b)^2}{a^2b^2} \geqq \frac{2(a+b+c)}{abc}\\
&\iff b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2 \geqq 2abc(a+b+c)\\
&\iff a^2(b-c)^2+2b^2c^2 \geqq 0.
\end{aligned}
$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 68 (Belarus 1999)

a, b, c は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$
\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geqq \frac{3}{2}\,.
$$

解 1　補助定理 1 より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} &= \frac{1^2}{1+ab}+\frac{1^2}{1+bc}+\frac{1^2}{1+ca}\\
&\geqq \frac{(1+1+1)^2}{ab+bc+ca+3}=\frac{9}{ab+bc+ca+3}\,.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\frac{9}{ab+bc+ca+3} \geqq \frac{3}{2} \text{ すなわち } 3 \geqq ab+bc+ca
$$

を示せばよい．これは，$3=a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ から言える． ■

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より

$$
\frac{1}{1+ab}+\frac{1+ab}{4} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{1+ab}\cdot\frac{1+ab}{4}}=1\,.
$$

同様にして

$$
\frac{1}{1+bc}+\frac{1+bc}{4} \geqq 1,\ \ \frac{1}{1+ca}+\frac{1+ca}{4} \geqq 1\,.
$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$
\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geqq \frac{9}{4}-\frac{ab+bc+ca}{4}\,.
$$

したがって

$$\frac{9}{4}-\frac{ab+bc+ca}{4} \geqq \frac{3}{2} \text{ すなわち } 3 \geqq ab+bc+ca$$

を示せばよい．これは，$3=a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ から言える． ■

問題 69 (Moldova 2005)

a, b, c は正の実数で，$a^4+b^4+c^4=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca} \leqq 1 .$$

解 1 $a^4<a^4+b^4+c^4=3$ から $a^2<\sqrt{3}<2$．同様にして，$b^2<2,\ c^2<2$．これを使うと，$(ab)^2=a^2b^2<4$ から $ab<2<4$．同様にして，$bc<4,\ ca<4$ が成り立つ．$x=ab>0,\ y=bc>0,\ z=ca>0$ とおくと，$x, y, z<4$.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca} \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1}{4-x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{4-z} \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & 1-\frac{3}{4-x}+1-\frac{3}{4-y}+1-\frac{3}{4-z} \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1-x}{4-x}+\frac{1-y}{4-y}+\frac{1-z}{4-z} \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1-x^2}{(4-x)(1+x)}+\frac{1-y^2}{(4-y)(1+y)}+\frac{1-z^2}{(4-z)(1+z)} \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1-x^2}{4+3x-x^2}+\frac{1-y^2}{4+3y-y^2}+\frac{1-z^2}{4+3z-z^2} \geqq 0 .
\end{aligned}$$

$3=a^4+b^4+c^4 \geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=x^2+y^2+z^2$ から $x^2+y^2+z^2 \leqq 3$．これを使うと $(x+y)^2 \leqq 2(x^2+y^2)<2(x^2+y^2+z^2) \leqq 6$ から $x+y<\sqrt{6}$ がいえる．

一般性を失うことなく $x \geqq y \geqq z$ と仮定すると

$$1-x^2 \leqq 1-y^2 \leqq 1-z^2,\ \frac{1}{4+3z-z^2} \geqq \frac{1}{4+3y-y^2} \geqq \frac{1}{4+3x-x^2}$$

が成り立つ．なぜならば，$x+y<\sqrt{6}<3$ より

$$4+3x-x^2-(4+3y-y^2)=3(x-y)-(x-y)(x+y)=(x-y)(3-x-y) \geqq 0$$

等が成り立つからである．

チェビシェフの不等式より

$$\frac{1-x^2}{4+3x-x^2}+\frac{1-y^2}{4+3y-y^2}+\frac{1-z^2}{4+3z-z^2}$$

$$\geqq \frac{1}{3}\left(1-x^2+1-y^2+1-z^2\right)\left(\frac{1}{4+3x-x^2}+\frac{1}{4+3y-y^2}+\frac{1}{4+3z-z^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(3-x^2-y^2-z^2\right)\left(\frac{1}{4+3x-x^2}+\frac{1}{4+3y-y^2}+\frac{1}{4+3z-z^2}\right) \geqq 0\,. \qquad ■$$

解 2　$a^4 < a^4+b^4+c^4 = 3$ から $a^2 < \sqrt{3} < 2$．同様にして，$b^2 < 2$, $c^2 < 2$．これを使うと，$(ab)^2 = a^2b^2 < 4$ から $ab < 2 < 4$．

次の 2 つの不等式を証明する．

$$\frac{2}{4-ab} \leqq \frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2} \qquad \cdots\cdots(★)$$

$$\frac{1}{4-a^2} \leqq \frac{a^4+5}{18} \qquad \cdots\cdots(★★)$$

(★) の証明

補助定理 1 より

$$\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2} \geqq \frac{(1+1)^2}{8-(a^2+b^2)} = \frac{4}{8-(a^2+b^2)}\,.$$

したがって

$$\frac{4}{8-(a^2+b^2)} \geqq \frac{2}{4-ab} \text{ すなわち } a^2+b^2-2ab \geqq 0$$

を示せばよい．$a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geqq 0$ は明らかに成り立つ．

(★★) の証明

$$\frac{1}{4-a^2} \leqq \frac{a^4+5}{18} \iff a^6-4a^4+5a^2-2 \leqq 0$$

$$\iff (a^2-2)(a^2-1)^2 \leqq 0$$

$a^2 < 2$ より $(a^2-2)(a^2-1)^2 \leqq 0$ は成り立つ．

(★)，(★★) を使うと

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2}+\frac{1}{4-c^2}+\frac{1}{4-a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2}$$

$$\leqq \frac{1}{18}\left(a^4+5+b^4+5+c^4+5\right) = \frac{1}{18}(3+15) = 1\,. \qquad ■$$

問題 70　(Greece 2002)

a, b, c は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \geqq \frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2 .$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} &= \frac{a^3}{a^2(b^2+1)}+\frac{b^3}{b^2(c^2+1)}+\frac{c^3}{c^2(a^2+1)} \\ &\geqq \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)} .\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)} \geqq \frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$$

すなわち

$$4 \geqq 3\left[a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)\right]$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}&4 \geqq 3\left[a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)\right] \\ \Longleftrightarrow\ &4 \geqq 3+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ \Longleftrightarrow\ &1 \geqq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ \Longleftrightarrow\ &(a^2+b^2+c^2)^2 \geqq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) .\end{aligned}$$

$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ は $(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx)$ で $x=a^2,\ y=b^2,\ z=c^2$ とおくことにより得られる． ■

問題 71　(Iran 1996)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geqq \frac{9}{4} .$$

解　(*Va Quoc Ba Can* による解) 一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．このとき，次の不等式が成り立つことを示す．

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2} \geqq \frac{1}{4ab}+\frac{2}{(a+c)(b+c)} .$$

実際

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2} \geqq \frac{1}{4ab}+\frac{2}{(a+c)(b+c)} \\
\iff &\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}-\frac{2}{(a+c)(b+c)} \geqq \frac{1}{4ab}-\frac{1}{(a+b)^2} \\
\iff &\frac{(a-b)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \geqq \frac{(a-b)^2}{4ab(a+b)^2}\,.
\end{aligned}$$

$$\frac{(a-b)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \geqq \frac{(a-b)^2}{4ab(a+b)^2}$$

は

$$4ab \geqq 4b^2 \geqq (b+c)^2,\ \ (a+b)^2 \geqq (a+c)^2$$

から $4ab(a+b)^2 \geqq (a+c)^2(b+c)^2$ となるので成り立つ．したがって

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{4ab}+\frac{2}{(a+c)(b+c)}\right] \geqq \frac{9}{4}$$

を証明すればよく，

$$\frac{ab+bc+ca}{4ab}=\frac{1}{4}+\frac{c(a+b)}{4ab},\ \ \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+c)(b+c)}=2-\frac{2c^2}{(a+c)(b+c)}$$

であるから，この不等式は

$$\frac{c(a+b)}{4ab} \geqq \frac{2c^2}{(a+c)(b+c)} \text{ すなわち } (a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$

と同値である．この不等式は，相加平均・相乗平均の不等式より

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca} = 8abc\,.$$ ■

問題 72　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+2ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+2ab}{(a+b)^2} \geqq \frac{9}{4}\,.$$

解　左辺を変形する．

$$\begin{aligned}
\sum_{cyclic}\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2} &= \sum_{cyclic}\frac{(a-b)(a-c)+ab+bc+ca}{(b+c)^2} \\
&= \sum_{cyclic}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}+(ab+bc+ca)\sum_{cyclic}\frac{1}{(b+c)^2}\,.
\end{aligned}$$

問題 71 より

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geqq \frac{9}{4}$$

が成り立つから

$$\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}+\frac{(b-c)(b-a)}{(c+a)^2}+\frac{(c-a)(c-b)}{(a+b)^2} \geqq 0$$

を示せばよい．$a \geqq b \geqq c$ と仮定すると

$$\frac{1}{(b+c)^2} \geqq \frac{1}{(c+a)^2} \geqq \frac{1}{(a+b)^2}\,.$$

$x=\dfrac{1}{(b+c)^2}$，$y=\dfrac{1}{(c+a)^2}$，$z=\dfrac{1}{(a+b)^2}$ とおくと，$x \geqq y \geqq z > 0$ で

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b) \geqq 0$$

を示せばよい．$z(c-a)(c-b)=z(a-c)(b-c) \geqq 0$ で

$$\begin{aligned} x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c) &= (a-b)[x(a-c)-y(b-c)] \\ &\geqq (a-b)[x(b-c)-y(b-c)] \\ &= (a-b)(b-c)(x-y) \geqq 0\,. \end{aligned}$$

よって，$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b) \geqq 0$． ■

問題 73　(Belarus 1997)

a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}\,.$$

解 1　$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geqq \dfrac{a+b}{c+a}+\dfrac{b+c}{a+b}+\dfrac{c+a}{b+c}$

$$\iff \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}+1}+\frac{1+\frac{c}{b}}{\frac{a}{b}+1}+\frac{1+\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1}$$

より $x=\dfrac{a}{b}$，$y=\dfrac{b}{c}$，$z=\dfrac{c}{a}$ とおくと，$xyz=1$．

$$\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}+1}=\frac{1+yz}{z+1}=y+\frac{1-y}{1+z}\,.$$

同様にして

$$\frac{1+\frac{c}{b}}{\frac{a}{b}+1}=\frac{1+zx}{x+1}=z+\frac{1-z}{1+x},\quad \frac{1+\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1}=\frac{1+xy}{y+1}=x+\frac{1-x}{1+y}\,.$$

これらの等式を使うと証明すべき不等式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}+1}+\frac{1+\frac{c}{b}}{\frac{a}{b}+1}+\frac{1+\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1} \\
\Longleftrightarrow\ & x+y+z \geqq y+\frac{1-y}{1+z}+z+\frac{1-z}{1+x}+x+\frac{1-x}{1+y} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1-y}{1+z}+\frac{1-z}{1+x}+\frac{1-x}{1+y} \leqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2+y^2+z^2+xy^2+yz^2+zx^2 \geqq x+y+z+3
\end{aligned}
$$

となる．

$$x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{x+y+z}{3}\cdot(x+y+z) \geqq \sqrt[3]{xyz}(x+y+z)=x+y+z,$$

$$xy^2+yz^2+zx^2 \geqq 3\sqrt[3]{xy^2\cdot yz^2\cdot zx^2}=3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=3xyz=3\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると，$x^2+y^2+z^2+xy^2+yz^2+zx^2 \geqq x+y+z+3$ を得る． ■

解 2 $\displaystyle \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}$

$$\Longleftrightarrow a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \geqq a^3bc^2+a^2b^3c+ab^2c^3+3a^2b^2c^2\,.$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \geqq 3\sqrt[3]{a^3b^3\cdot b^3c^3\cdot c^3a^3}=3a^2b^2c^2\,.$$

したがって，$a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4 \geqq a^3bc^2+a^2b^3c+ab^2c^3$ を示せばよい．

重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{6}a^2b^4+\frac{1}{6}b^2c^4+\frac{4}{6}c^2a^4 \geqq (a^2b^4)^{\frac{1}{6}}(b^2c^4)^{\frac{1}{6}}(c^2a^4)^{\frac{4}{6}}=a^3bc^2\,.$$

同様にして

$$\frac{4}{6}a^2b^4+\frac{1}{6}b^2c^4+\frac{1}{6}c^2a^4 \geqq a^2b^3c,\ \ \frac{1}{6}a^2b^4+\frac{4}{6}b^2c^4+\frac{1}{6}c^2a^4 \geqq ab^2c^3.$$

3 つの不等式の辺々を加えると，$a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4 \geqq a^3bc^2+a^2b^3c+ab^2c^3$ を得る． ■

問題 74 (Poland 1996)

a,b,c は実数で，$a+b+c=1$，$a \geqq -\dfrac{3}{4}$，$b \geqq -\dfrac{3}{4}$，$c \geqq -\dfrac{3}{4}$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \leqq \frac{9}{10}\,.$$

解　$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\ \left(x \geqq -\dfrac{3}{4}\right)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2},\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{18}{25}\,.$$

$y=f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{10}\right)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{18}{25}x+\dfrac{3}{50}$ となるから，$y=f(x)$ との上下関係を調べる．

$$\begin{aligned} f(x)-\left(\frac{18}{25}x+\frac{3}{50}\right) &= \frac{x}{x^2+1}-\frac{36x+3}{50} \\ &= \frac{-36x^3-3x^2+14x-3}{50(x^2+1)} \\ &= \frac{-(3x-1)^2(4x+3)}{50(x^2+1)} \leqq 0 \end{aligned}$$

から

$$f(x) \leqq \frac{18}{25}x+\frac{3}{50}\,.$$

よって

$$\begin{aligned} f(a)+f(b)+f(c) &\leqq \frac{18}{25}(a+b+c)+3\cdot\frac{3}{50} \\ &= \frac{18}{25}+\frac{9}{50}=\frac{9}{10}\,. \end{aligned}$$

■

問題 75　(日本数学オリンピック 本選 2004)

$a+b+c=1$ をみたす正の実数 a,b,c に対して

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \leqq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\,.$$

が成立することを証明せよ．ただし，等号が成立する条件を述べる必要はない．

解　$a+b+c=1$ を用いると

$$\frac{1+a}{1-a}=\frac{a+b+c+a}{a+b+c-a}=\frac{b+c+2a}{b+c}=1+\frac{2a}{b+c}\,.$$

同様にして

$$\frac{1+b}{1-b}=1+\frac{2b}{c+a},\ \frac{1+c}{1-c}=1+\frac{2c}{a+b}$$

と変形できるから

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \leqq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$

$$\iff 1+\frac{2a}{b+c}+1+\frac{2b}{c+a}+1+\frac{2c}{a+b} \leqq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$
$$\iff \frac{3}{2} \leqq \left(\frac{b}{a}-\frac{b}{c+a}\right)+\left(\frac{c}{b}-\frac{c}{a+b}\right)+\left(\frac{a}{c}-\frac{a}{b+c}\right)$$
$$\iff \frac{3}{2} \leqq \frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}+\frac{ab}{c(b+c)}\,. \qquad \cdots\cdots(*)$$

この不等式は同次式であるから $a+b+c=1$ の条件を取り除いても成り立つことを示す.

次に，$(*)$ は同次式なので，一般性を失うことなく $abc=1$ と仮定できる.

$$p=\frac{1}{a},\ q=\frac{1}{b},\ r=\frac{1}{c}$$

とおくと，$pqr=1$ で証明すべき不等式は

$$\frac{3}{2} \leqq \frac{p^2}{q(r+p)}+\frac{q^2}{r(p+q)}+\frac{r^2}{p(q+r)}$$

となる．補助定理 1 より

$$\begin{aligned}&\frac{p^2}{q(r+p)}+\frac{q^2}{r(p+q)}+\frac{r^2}{p(q+r)}\\ \geqq\ &\frac{(p+q+r)^2}{q(r+p)+r(p+q)+p(q+r)}=\frac{(p+q+r)^2}{2(pq+qr+rp)}\,.\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(p+q+r)^2}{2(pq+qr+rp)} \geqq \frac{3}{2} \text{ すなわち } (p+q+r)^2 \geqq 3(pq+qr+rp)$$

を示せばよい．これは，次のように示すことができる.

$$\begin{aligned}(p+q+r)^2-3(pq+qr+rp)&=p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp\\&=\frac{1}{2}\left[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\right] \geqq 0\end{aligned}$$ ■

問題 76 (Lithuania 1987)

x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \geqq \frac{x+y+z}{3}\,.$$

解 1　$x^2+xy+y^2 \geqq 3xy$ を用いると

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2} = x - \frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2} \geqq x - \frac{x+y}{3} = \frac{2x-y}{3}\,.$$

同様にして

$$\frac{y^3}{y^2+yz+z^2} \geqq \frac{2y-z}{3},\quad \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \geqq \frac{2z-x}{3}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \geqq \frac{x+y+z}{3}\,. \qquad \blacksquare$$

解 2　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \\
&= \frac{\left(x^2\right)^2}{x(x^2+xy+y^2)} + \frac{\left(y^2\right)^2}{y(y^2+yz+z^2)} + \frac{\left(z^2\right)^2}{z(z^2+zx+x^2)} \\
&\geqq \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x(x^2+xy+y^2)+y(y^2+yz+z^2)+z(z^2+zx+x^2)} \\
&= \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y}\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y} \geqq \frac{x+y+z}{3}$$

すなわち

$$3(x^2+y^2+z^2)^2 \geqq (x+y+z)(x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
&3(x^2+y^2+z^2)^2 \\
&\geqq (x+y+z)(x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y) \\
\iff &2(x^4+y^4+z^4)+4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \\
&\geqq 2x^3(y+z)+2y^3(z+x)+2z^3(x+y)+2xyz(x+y+z) \\
\iff &(x^4-2x^3y+x^2y^2)+(x^4-2x^3z+x^2z^2)+(y^4-2y^3x+y^2x^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(y^4-2y^3z+y^2z^2)+(z^4-2z^3x+z^2x^2)+(z^4-2z^3y+z^2y^2)\\
&\quad+2\bigl[(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2-xy\cdot yz-yz\cdot zx-zx\cdot xy\bigr]\geqq 0\\
\iff\ & x^2(x-y)^2+x^2(x-z)^2+y^2(y-x)^2+y^2(y-z)^2+z^2(z-x)^2+z^2(z-y)^2\\
&+2\bigl[(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2\bigr]\geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

よって

$3(x^2+y^2+z^2)^2 \geqq (x+y+z)(x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)\,.$ ■

［注］　Muirhead の定理を使うと

$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \geqq x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y)+xyz(x+y+z)$

の証明は次のようにできる．

$$
\begin{aligned}
&x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\\
&\geqq x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y)+xyz(x+y+z)\\
\iff &[(4,\ 0,\ 0)]+2[(2,\ 2,\ 0)]\geqq 2[(3,\ 1,\ 0)]+[(2,\ 1,\ 1)]\,.
\end{aligned}
$$

$$
[(4,\ 0,\ 0)]+[(2,\ 2,\ 0)] \overset{(M3)}{\geqq} 2\left[\left(\frac{4+2}{2},\ \frac{0+2}{2},\ \frac{0+0}{2}\right)\right]=2[(3,\ 1,\ 0)],
$$

$$
[(2,\ 2,\ 0)]\geqq[(2,\ 1,\ 1)]
$$

の辺々を加えることにより，$[(4,\ 0,\ 0)]+2[(2,\ 2,\ 0)] \geqq 2[(3,\ 1,\ 0)]+[(2,\ 1,\ 1)]$ は成り立つ． □

問題 77　(Romania 1997)

x, y, z は正の実数で，$xyz=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$
\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geqq 2\,.
$$

解 1　$a=x^3,\ b=y^3,\ c=z^3$ とおくと，$abc=1$.

$$\begin{aligned}&\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geqq 2\\ \iff &\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\geqq 2\,.\end{aligned}$$

ここで，$-ab\geqq -\dfrac{a^2+b^2}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\geqq ab$ を用いると

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}\geqq\frac{(a+b)\left(a^2-\dfrac{a^2+b^2}{2}+b^2\right)}{a^2+\dfrac{a^2+b^2}{2}+b^2}=\frac{a+b}{3}\,.$$

同様にして

$$\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}\geqq\frac{b+c}{3},\ \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\geqq\frac{c+a}{3}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\\ &\geqq\frac{2(a+b+c)}{3}\\ &\overset{AM\geqq GM}{\geqq}\frac{2\cdot 3\sqrt[3]{abc}}{3}=2\,.\end{aligned}$$

■

［注］　$\dfrac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}\geqq\dfrac{a+b}{3}$ の証明は次のように示すこともできる.

$$\begin{aligned}\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}&=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}=\frac{a+b}{3}\cdot\frac{3(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}\\ &=\frac{a+b}{3}\left(1+\frac{2(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}\right)\\ &\geqq\frac{a+b}{3}\,.\end{aligned}$$

解 2　（問題 76 の解 1 の方法を使う.）

$a=x^3,\ b=y^3,\ c=z^3$ とおくと，$abc=1$.

$$\begin{aligned}&\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geqq 2\\ \iff &\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\geqq 2 \qquad (*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iff & \frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}\\ &+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}\\ &\geqq 2\,.\end{aligned}$$

$a^2+ab+b^2 \geqq 3ab$ を用いると

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}=a-\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geqq a-\frac{a+b}{3}\,.$$

同様にして

$$\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}\geqq b-\frac{a+b}{3},$$

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}\geqq b-\frac{b+c}{3},\ \ \frac{c^3}{b^2+bc+c^2}\geqq c-\frac{b+c}{3},$$

$$\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqq c-\frac{c+a}{3},\ \ \frac{a^3}{c^2+ca+a^2}\geqq a-\frac{c+a}{3}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} &\geqq \frac{2(a+b+c)}{3}\\ &\overset{AM\geqq GM}{\geqq} \frac{2\cdot 3\sqrt[3]{abc}}{3}=2\,.\end{aligned}$$ ■

［注］　$(*)$ の証明は，問題 76 の不等式を直接使い次のように示すことができる．

$$\begin{aligned}&\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\\ &=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\\ &\quad+\frac{a^3}{a^2+ac+c^2}+\frac{c^3}{c^2+cb+b^2}+\frac{b^3}{b^2+ba+a^2}\\ &\geqq \frac{a+b+c}{3}+\frac{a+c+b}{3}\\ &=\frac{2(a+b+c)}{3}\\ &\overset{AM\geqq GM}{\geqq} \frac{2\cdot 3\sqrt[3]{abc}}{3}=2\,.\end{aligned}$$ □

解 3　同次化 (Homonization) して

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geqq 2xyz$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \sum_{cyclic}(x^9+y^9)(y^6+y^3z^3+z^6)(z^6+z^3x^3+x^6)\\
&\qquad \geqq 2xyz(x^6+x^3y^3+y^6)(y^6+y^3z^3+z^6)(z^6+z^3x^3+x^6)\\
&\Longleftrightarrow 2\sum_{sym}x^{15}y^6+2\sum_{cyclic}x^{15}y^3z^3+2\sum_{sym}x^{12}y^9+2\sum_{sym}x^{12}y^6z^3+2\sum_{cyclic}x^9y^9z^3\\
&\qquad\quad +2\sum_{cyclic}x^9y^6z^6\\
&\qquad \geqq 2\sum_{sym}x^{13}y^7z+2\sum_{cyclic}x^{13}y^4z^4+2\sum_{cyclic}x^{10}y^{10}z+4\sum_{sym}x^{10}y^7z^4+6x^7y^7z^7\\
&\Longleftrightarrow 2[(15,6,0)]+[(15,3,3)]+2[(12,9,0)]+2[(12,6,3)]+[(9,9,3)]+[(9,6,6)]\\
&\qquad \geqq 2[(13,7,1)]+[(13,4,4)]+[(10,10,1)]+4[(10,7,4)]+[(7,7,7)].
\end{aligned}$$

ところで

$$[(15,6,0)]+[(12,9,0)]\overset{(M3)}{\geqq}2\left[\left(\frac{15+12}{2},\frac{6+9}{2},0\right)\right]=2\left[\left(\frac{27}{2},\frac{15}{2},0\right)\right]\geqq 2[(13,7,1)],$$

$$[(15,\ 6,\ 0)]\geqq[(10,\ 10,\ 1)],$$

$$[(15,\ 3,\ 3)]\geqq[(13,\ 4,\ 4)],$$

$$[(12,\ 9,\ 0)]\geqq[(10,\ 7,\ 4)],$$

$$[(12,6,3)]+[(9,9,3)]\overset{(M3)}{\geqq}2\left[\left(\frac{12+9}{2},\frac{6+9}{2},\frac{3+3}{2}\right)\right]=2\left[\left(\frac{21}{2},\frac{15}{2},3\right)\right]\geqq 2[(10,7,4)],$$

$$[(12,\ 6,\ 3)]\geqq[(10,\ 7,\ 4)],$$

$$[(9,\ 6,\ 6)]\geqq[(7,\ 7,\ 7)]$$

が成り立つ．これらの不等式の辺々を加えると求める不等式

$$\begin{aligned}
&2[(15,6,0)]+[(15,3,3)]+2[(12,9,0)]+2[(12,6,3)]+[(9,9,3)]+[(9,6,6)]\\
&\geqq 2[(13,7,1)]+[(13,4,4)]+[(10,10,1)]+4[(10,7,4)]+[(7,7,7)].
\end{aligned}$$

が得られる．■

問題 78 (IMO 2005)

x, y, z は正の実数で，$xyz \geqq 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqq 0\,.$$

解 1 まず $\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geqq \dfrac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}$ を証明する．

$$\begin{aligned}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)} &= \frac{(x^5-x^2)\left[x^3(x^2+y^2+z^2)-(x^5+y^2+z^2)\right]}{x^3(x^2+y^2+z^2)(x^5+y^2+z^2)}\\ &= \frac{(x^5-x^2)(x^3-1)(y^2+z^2)}{x^3(x^2+y^2+z^2)(x^5+y^2+z^2)}\\ &= \frac{(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x(x^2+y^2+z^2)(x^5+y^2+z^2)} \geqq 0\,.\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} \geqq \frac{y^5-y^2}{y^3(x^2+y^2+z^2)},\quad \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqq \frac{z^5-z^2}{z^3(x^2+y^2+z^2)}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\\ &\geqq \frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^5-y^2}{y^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{z^5-z^2}{z^3(x^2+y^2+z^2)}\\ &= \frac{x^3-1}{x(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^3-1}{y(x^2+y^2+z^2)}+\frac{z^3-1}{z(x^2+y^2+z^2)}\\ &= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(\frac{x^3-1}{x}+\frac{y^3-1}{y}+\frac{z^3-1}{z}\right)\\ &= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)\\ &= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x^2+y^2+z^2-\frac{yz+zx+xy}{xyz}\right)\\ &\geqq \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\right)\\ &\geqq 0\,.\end{aligned}$$

■

解 2　$\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=1-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$ 等より

$$\begin{aligned}
&\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqq 0\\
\iff& 1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+1-\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+1-\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqq 0\\
\iff& \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqq 3\,.
\end{aligned}$$

ここで，補助定理 1 を使うと

$$x^5+y^2+z^2=\frac{x^4}{\frac{1}{x}}+\frac{y^4}{y^2}+\frac{z^4}{z^2}\geqq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\frac{1}{x}+y^2+z^2}$$

が成り立つから

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leqq\frac{\frac{1}{x}+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

同様にして

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}\leqq\frac{\frac{1}{y}+z^2+x^2}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqq\frac{\frac{1}{z}+x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\\
&\leqq\frac{\frac{1}{x}+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{\frac{1}{y}+z^2+x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{\frac{1}{z}+x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\\
&=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}\\
&=2+\frac{xy+yz+zx}{xyz(x^2+y^2+z^2)}\\
&\leqq 2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\\
&\leqq 3 \qquad\qquad (\quad x^2+y^2+z^2\geqq xy+yz+zx\quad \text{を用いた})\,. \qquad\qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

解 3　次のことを使う．

$A, B, C, D > 0$ のとき，$f(t) = \dfrac{A - Bt}{C + Dt} \quad (t > 0)$ は減少関数である．

[証明]　$f'(t) = -\dfrac{AD + BC}{(C + Dt)^2} < 0.$

これを使うと

$$\begin{aligned}
\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} &\geqq \frac{x^5 - x^2 \cdot xyz}{x^5 + (y^2 + z^2)xyz} \\
&= \frac{x^4 - x^2 yz}{x^4 + yz(y^2 + z^2)} \\
&\geqq \frac{x^4 - x^2 \cdot \frac{y^2+z^2}{2}}{x^4 + (y^2 + z^2) \cdot \frac{y^2+z^2}{2}} \qquad \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \geqq yz \quad \text{を用いた} \right) \\
&= \frac{2x^4 - x^2(y^2 + z^2)}{2x^4 + (y^2 + z^2)^2}.
\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} \geqq \frac{2y^4 - y^2(z^2 + x^2)}{2y^4 + (z^2 + x^2)^2}, \quad \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqq \frac{2z^4 - z^2(x^2 + y^2)}{2z^4 + (x^2 + y^2)^2}$$

が成り立つから

$$\sum_{cyclic} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geqq \sum_{cyclic} \frac{2y^4 - y^2(z^2 + x^2)}{2y^4 + (z^2 + x^2)^2}.$$

したがって

$$\sum_{cyclic} \frac{2y^4 - y^2(z^2 + x^2)}{2y^4 + (z^2 + x^2)^2} \geqq 0$$

を示せばよい．$x^2 = a,\ y^2 = b,\ z^2 = c$ とおくと，$a, b, c > 0, abc \geqq 1$ のとき

$$\sum_{cyclic} \frac{2a^2 - a(b + c)}{2a^2 + (b + c)^2} \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を示せばよい．$(*)$ は同次式であるから，$abc \geqq 1$ という条件を抜かして示す．

$$\begin{aligned}
(*) &\Longleftrightarrow \sum_{cyclic} \left(1 - \frac{(a + b + c)(b + c)}{2a^2 + (b + c)^2} \right) \geqq 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{cyclic} \frac{b + c}{2a^2 + (b + c)^2} \leqq \frac{3}{a + b + c}. \qquad \cdots\cdots(**)
\end{aligned}$$

不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく，$a+b+c=3$ と仮定できる．このとき，証明すべき不等式は

$$\sum_{cyclic} \frac{3-a}{2a^2+(3-a)^2} \leqq 1$$

となる．

$f(t)=\dfrac{3-t}{2t^2+(3-t)^2}\quad(0<t<3)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{t^2-6t+3}{3(t^2-2t+3)^2},\quad f'(1)=-\frac{1}{6}.$$

$y=f(t)$ 上の点 $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{-t+3}{6}$ であるから，$y=f(t)$ との上下関係を調べる．

$$\begin{aligned} f(t)-\frac{-t+3}{6} &= \frac{3-t}{3(t^2-2t+3)}-\frac{-t+3}{6} \\ &= -\frac{(3-t)(t-1)^2}{6(t^2-2t+3)} \leqq 0 \end{aligned}$$

より

$$f(t) \leqq \frac{-t+3}{6}.$$

よって

$$f(a)+f(b)+f(c) \leqq \frac{-(a+b+c)+9}{6}=1. \qquad \blacksquare$$

解 4　次のことが成り立つ．

$A,B,C,D>0$ のとき，$f(t)=\dfrac{A-Bt}{C+Dt}\quad(t>0)$ は減少関数である．

これを使うと

$$\begin{aligned} \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} &\geqq \frac{x^5-x^2\cdot xyz}{x^5+(y^2+z^2)xyz} \\ &= \frac{x^4-x^2yz}{x^4+yz(y^2+z^2)} \\ &\geqq \frac{x^4-x^2\cdot\frac{y^2+z^2}{2}}{x^4+(y^2+z^2)\cdot\frac{y^2+z^2}{2}} \qquad \left(\frac{y^2+z^2}{2} \geqq yz \quad \text{を用いた}\right) \\ &= \frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)^2}. \end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} \geqq \frac{2y^4-y^2(z^2+x^2)}{2y^4+(z^2+x^2)^2},\ \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqq \frac{2z^4-z^2(x^2+y^2)}{2z^4+(x^2+y^2)^2}$$

が成り立つから

$$\sum_{cyclic} \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geqq \sum_{cyclic} \frac{2y^4-y^2(z^2+x^2)}{2y^4+(z^2+x^2)^2}.$$

したがって

$$\sum_{cyclic} \frac{2y^4-y^2(z^2+x^2)}{2y^4+(z^2+x^2)^2} \geqq 0$$

を示せばよい．$x^2=a,\ y^2=b,\ z^2=c$ とおくと，$a, b, c>0, abc \geqq 1$ のとき

$$\sum_{cyclic} \frac{2a^2-a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を示せばよい．$(*)$ は同次式であるから，$abc \geqq 1$ という条件を抜かして示す．

$$\begin{aligned}\sum_{cyclic} \frac{2a^2-a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} &= \sum_{cyclic} \frac{a(a-b)-a(c-a)}{2a^2+(b+c)^2} \\ &= \sum_{cyclic} \frac{a(a-b)}{2a^2+(b+c)^2} - \sum_{cyclic} \frac{a(c-a)}{2a^2+(b+c)^2} \\ &= \sum_{cyclic} \frac{a(a-b)}{2a^2+(b+c)^2} - \sum_{cyclic} \frac{b(a-b)}{2b^2+(c+a)^2} \\ &= \sum_{cyclic} \frac{(a-b)^2\left[a^2-ab+b^2+c^2+2c(a+b)\right]}{\left[2a^2+(b+c)^2\right]\left[2b^2+(c+a)^2\right]} \geqq 0.\end{aligned}$$

よって，$(*)$ は成り立つ． ■

問題 79　(Vietnam 1991)

x, y, z は正の実数で，$x \geqq y \geqq z$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y} \geqq x^2+y^2+z^2\,.$$

解 1　$x-y=X,\ y-z=Y,\ z=Z$ とおくと

$$x=X+Y+Z,\ y=Y+Z,\ z=Z,\ X\geqq 0,\ Y\geqq 0,\ Z>0\,.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y} \geqq x^2+y^2+z^2\\
\iff &\frac{(X+Y+Z)^2(Y+Z)}{Z}+\frac{(Y+Z)^2Z}{X+Y+Z}+\frac{Z^2(X+Y+Z)}{Y+Z}\\
&\geqq (X+Y+Z)^2+(Y+Z)^2+Z^2\\
\iff &(X+Y+Z)^3(Y+Z)^2+(Y+Z)^3Z^2+Z^3(X+Y+Z)^2\\
&\geqq (X+Y+Z)(Y+Z)Z\left[(X+Y+Z)^2+(Y+Z)^2+Z^2\right]\,.
\end{aligned}$$

不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $X+Y+Z=1$ と仮定することができる．このとき証明すべき不等式は

$$(Y+Z)^2+(Y+Z)^3Z^2+Z^3 \geqq (Y+Z)Z\left[1+(Y+Z)^2+Z^2\right]$$

となる．$Y+Z=k\quad(0<k\leqq 1)$ とおくと，$0<Z\leqq k$．

$$\begin{aligned}
&(Y+Z)^2+(Y+Z)^3Z^2+Z^3 \geqq (Y+Z)Z\left[1+(Y+Z)^2+Z^2\right]\\
\iff &k^2+k^3Z^2+Z^3 \geqq kZ(1+k^2+Z^2)
\end{aligned}$$

より，$f(z)=(1-k)z^3+k^3z^2-(k^3+k)z+k^2\quad(0<z\leqq k)$ とおくと，$f(z)\geqq 0$ を示せばよい．

$$f'(z)=3(1-k)z^2+2k^3z-(k^3+k),\ f''(z)=6(1-k)z+2k^3\,.$$

$f''(z)=6(1-k)z+2k^3>0$ より $f'(z)$ は増加関数である．

$f'(k)=2k^4-4k^3+3k^2-k=k(k-1)(2k^2-2k+1)\leqq 0$ から $f'(z)\leqq 0$．

$f(z)$ は単調減少で

$$f(k)=k^5-2k^4+k^3=k^3(k-1)^2\geqq 0$$

より，$f(z)\geqq 0$．　■

解 2　$x-z=X,\ y-z=Y,\ z=Z$ とおくと

$$x=X+Z,\ y=Y+Z,\ z=Z,\ X \geqq Y \geqq 0,\ Z>0\,.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y} \geqq x^2+y^2+z^2\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(X+Z)^2(Y+Z)}{Z}+\frac{(Y+Z)^2Z}{X+Z}+\frac{Z^2(X+Z)}{Y+Z}\\
&\geqq (X+Z)^2+(Y+Z)^2+Z^2\\
\Longleftrightarrow\ &(X+Z)^3(Y+Z)^2+(Y+Z)^3Z^2+Z^3(X+Z)^2\\
&\geqq \left[(X+Z)^2+(Y+Z)^2+Z^2\right](Y+Z)(X+Z)Z\\
\Longleftrightarrow\ &X^3Y^2+X^2Z^3+Y^2Z^3+X^3YZ+3X^2Y^2Z+3X^2YZ^2 \geqq XY^3Z+XYZ^3\\
\Longleftrightarrow\ &X^3Y^2+XZ^3(X-Y)+Y^2Z^3+XYZ(X^2-Y^2)+3X^2Y^2Z+3X^2YZ^2 \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

$X \geqq Y \geqq 0,\ Z>0$ であるから

$$X^3Y^2+XZ^3(X-Y)+Y^2Z^3+XYZ(X^2-Y^2)+3X^2Y^2Z+3X^2YZ^2 \geqq 0$$

は成り立つ. ■

> **問題 80**　(Iran 1997)
>
> x_1,x_2,x_3,x_4 は正の実数で，$x_1x_2x_3x_4=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.
>
> $$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 \geqq \max\left(x_1+x_2+x_3+x_4,\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right).$$

解　次の 2 つの不等式を証明すればよい.

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 \geqq x_1+x_2+x_3+x_4, \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 \geqq \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\,. \qquad \cdots\cdots(\bigstar\bigstar)$$

(i) ($\bigstar$) の証明

補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
&(1+1+1+1)(1+1+1+1)(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3)\\
\geqq\ &\left(\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot x_1^3}+\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot x_2^3}+\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot x_3^3}+\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot x_4^3}\right)^3=(x_1+x_2+x_3+x_4)^3\,.
\end{aligned}$$

よって

$$
\begin{aligned}
x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 &\geqq \frac{(x_1+x_2+x_3+x_4)^3}{16} \\
&= (x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2}{16} \\
&\overset{AM\geqq GM}{\geqq} (x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot\frac{\left(4\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\right)^2}{16} \\
&= x_1+x_2+x_3+x_4\,.
\end{aligned}
$$

(ii) (★★) の証明

$x_1x_2x_3x_4=1$ から $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}=x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2+x_1x_2x_3$ が成り立つので

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 \geqq x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2+x_1x_2x_3$$

を証明すればよい.

$$x_2^3+x_3^3+x_4^3 \overset{AM\geqq GM}{\geqq} 3\sqrt[3]{x_2^3x_3^3x_4^3}=3x_2x_3x_4\,.$$

同様にして

$$x_1^3+x_3^3+x_4^3 \geqq 3x_1x_3x_4,$$

$$x_1^3+x_2^3+x_4^3 \geqq 3x_1x_2x_4,$$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3 \geqq 3x_1x_2x_3.$$

これらの不等式の辺々を加えることにより

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 \geqq x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2+x_1x_2x_3$$

を得る. ■

問題 81 (Hong Kong 2000)
a,b,c は正の実数で，$abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3} \geqq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}\,.$$

解 1　$abc=1$ を使い同次化 (Homonization) する.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3} \geqq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}\\
\iff &\frac{abc+ab^2}{c^3}+\frac{abc+bc^2}{a^3}+\frac{abc+ca^2}{b^3} \geqq \frac{18abc}{a^3+b^3+c^3}\\
\iff &\frac{ab(b+c)}{c^3}+\frac{bc(c+a)}{a^3}+\frac{ca(a+b)}{b^3} \geqq \frac{18abc}{a^3+b^3+c^3}\\
\iff &\frac{b+c}{c^4}+\frac{c+a}{a^4}+\frac{a+b}{b^4} \geqq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}\\
\iff &(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{b+c}{c^4}+\frac{c+a}{a^4}+\frac{a+b}{b^4}\right) \geqq 18\,.
\end{aligned}
$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$a^3+b^3+c^3 \geqq 3\sqrt[3]{(abc)^3}=3,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{b+c}{c^4}+\frac{c+a}{a^4}+\frac{a+b}{b^4} &\geqq 3\sqrt[3]{\frac{b+c}{c^4}\cdot\frac{c+a}{a^4}\cdot\frac{a+b}{b^4}}=3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}\\
&\geqq 3\sqrt[3]{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2\sqrt{ab}}=3\sqrt[3]{8abc}=3\sqrt[3]{8}=6\,.
\end{aligned}
$$

よって

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{b+c}{c^4}+\frac{c+a}{a^4}+\frac{a+b}{b^4}\right) \geqq 18\,. \qquad \blacksquare$$

［注］ $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{b+c}{c^4}+\frac{c+a}{a^4}+\frac{a+b}{b^4}\right) \geqq 18$ の証明は，コーシー・シュワルツの不等式を使うと次のようにできる．

$$
\begin{aligned}
(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{c+a}{a^4}+\frac{a+b}{b^4}+\frac{b+c}{c^4}\right) &\geqq \left(\sqrt{\frac{c+a}{a}}+\sqrt{\frac{a+b}{b}}+\sqrt{\frac{b+c}{c}}\right)^2\\
&\overset{AM\geqq GM}{\geqq} \left(3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}}}\right)^2\\
&= \left(3\sqrt[6]{(b+c)(c+a)(a+b)}\right)^2\\
&\overset{AM\geqq GM}{\geqq} \left(3\sqrt[6]{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2\sqrt{ab}}\right)^2\\
&= \left(3\sqrt[6]{2^3abc}\right)^2=(3\sqrt{2})^2=18\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

解 2　左辺を 2 つに分けて考える．

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3} \geqq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$
$$\iff \frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{ab^2}{c^3}+\frac{bc^2}{a^3}+\frac{ca^2}{b^3} \geqq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}\,.$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$(c^3+a^3+b^3)\left(\frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right) \geqq (1+1+1)^2=9,$$

$$\begin{aligned}(c^3+a^3+b^3)\left(\frac{ab^2}{c^3}+\frac{bc^2}{a^3}+\frac{ca^2}{b^3}\right) &\geqq (\sqrt{ab^2}+\sqrt{bc^2}+\sqrt{ca^2})^2 \\ &\overset{AM\geqq GM}{\geqq} \left(3\sqrt[3]{\sqrt{ab^2}\cdot\sqrt{bc^2}\cdot\sqrt{ca^2}}\right)^2 \\ &= \left(3\sqrt{abc}\right)^2 = 9\,.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3} \geqq \frac{9}{a^3+b^3+c^3},\quad \frac{ab^2}{c^3}+\frac{bc^2}{a^3}+\frac{ca^2}{b^3} \geqq \frac{9}{a^3+b^3+c^3}\,.$$

2 つの不等式の辺々を加えて

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3} \geqq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

を得る． ■

問題 82　(Albania 2002)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,.$$

解　$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$ から

$$\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geqq a+b+c\,.$$

ゆえに

$$(\sqrt{3}+1)\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geqq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

したがって

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq (\sqrt{3}+1)\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

すなわち

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}(ab+bc+ca) \geqq 3\sqrt{3}abc$$

を証明すればよい．

相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2+c^2}(ab+bc+ca) &\geqq \sqrt{3\sqrt[3]{(abc)^2}}\cdot 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}\\ &= 3\sqrt{3}abc\end{aligned}$$

を得る．　■

類題　(Hong Kong 1997)

x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{3+\sqrt{3}}{9} \geqq \frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}\,.$$

(表記は異なるが，問題 82 と同じ問題である．)

問題 83 (Belarus 1998)

$a,\ b,\ c$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1\,.$$

解 1　証明すべき不等式の両辺に $abc(b+c)(a+b)$ をかける．

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1\\ \Longleftrightarrow\ & a^2b^3+ab^4+a^3c^2+b^3c^2+b^2c^3 \geqq a^2b^2c+2ab^3c+2ab^2c^2\end{aligned}$$

より

$$a^2b^3+ab^4+a^3c^2+b^3c^2+b^2c^3 \geqq a^2b^2c+2ab^3c+2ab^2c^2$$

を証明すればよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$a^2b^3+b^3c^2 \geqq 2\sqrt{a^2b^3\cdot b^3c^2}=2ab^3c,$$

$$\frac{1}{2}ab^4+\frac{1}{2}a^3c^2 \geqq \sqrt{ab^4\cdot a^3c^2}=a^2b^2c,$$

$$\frac{1}{2}ab^4+\frac{1}{2}a^3c^2+b^2c^3 \geqq a^2b^2c+b^2c^3 \geqq 2\sqrt{a^2b^4c^4}=2ab^2c^2\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$a^2b^3+ab^4+a^3c^2+b^3c^2+b^2c^3 \geqq a^2b^2c+2ab^3c+2ab^2c^2. \qquad \blacksquare$$

［注］　$x=\frac{a}{b},\ y=\frac{c}{b}$ とおくと，$\frac{c}{a}=\frac{y}{x},\ \frac{a+b}{b+c}=\frac{x+1}{1+y},\ \frac{b+c}{a+b}=\frac{1+y}{x+1}$ となるから，証明すべき不等式は

$$x+\frac{1}{y}+\frac{y}{x} \geqq \frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{x+1}+1$$

すなわち

$$x^3y^2+x^2+x+y^3+y^2 \geqq x^2y+2xy^2+2xy$$

となる．相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{x^3y^2+x}{2} \geqq x^2y,\ \frac{x^3y^2+x+y^3+y^3}{2} \geqq \frac{4\sqrt[4]{x^4y^8}}{2}=2xy^2,\ x^2+y^2 \geqq 2xy\,.$$

これらの 3 つの不等式の辺々を加えると $x^3y^2+x^2+x+y^3+y^2 \geqq x^2y+2xy^2+2xy$ を得る．

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geqq 3,\ \dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{a+b} \geqq 2$ が成り立つことに注意して次のように変形する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1 \\
\iff &\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3 \geqq \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}-2 \\
\iff &(a+b+c)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\right) \geqq (a+b+c)\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}-2\right) \\
\iff &\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-(a+b+c)+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}-(a+b+c) \\
&\geqq \frac{(a+b+c)(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \\
\iff &\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}+\frac{1}{abc}\left[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)\right] \\
&\geqq \frac{(a+b+c)(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}.
\end{aligned}
$$

したがって

$$\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a} \geqq \frac{(a+b+c)(a-c)^2}{(a+b)(b+c)} \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

と

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c) \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(\bigstar\bigstar)$$

を示せばよい．

($\bigstar$) の証明

補助定理 1 より $\dfrac{(a-b)^2}{b}+\dfrac{(b-c)^2}{c} \geqq \dfrac{(a-c)^2}{b+c}$ が成り立つから

$$
\begin{aligned}
\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a} &\geqq \frac{(a-c)^2}{b+c}+\frac{(c-a)^2}{a} = \frac{(a+b+c)(c-a)^2}{a(b+c)} \\
&\geqq \frac{(a+b+c)(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}.
\end{aligned}
$$

($\bigstar\bigstar$) の証明

$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ において，$x=ab,\ y=bc,\ z=ca$ とおくと

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c) \geqq 0. \qquad \blacksquare$$

問題 84　(BMO 2005)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}\,.$$

解

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}\\
\iff\ &\underline{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-(a+b+c)} \geqq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}\\
\iff\ &\underline{\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}} \geqq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}\,.
\end{aligned}$$

補助定理 1 より

$$\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a} \geqq \frac{\bigl(|a-b|+|b-c|+|c-a|\bigr)^2}{a+b+c}\,.$$

ここで，$|b-c|+|c-a| \geqq |(b-c)+(c-a)| = |b-a| = |a-b|$ が成り立つから

$$\begin{aligned}
\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a} &\geqq \frac{\bigl(|a-b|+|b-c|+|c-a|\bigr)^2}{a+b+c}\\
&\geqq \frac{\bigl(2|a-b|\bigr)^2}{a+b+c} = \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}\,.
\end{aligned}$$

■

問題 85　(Moldova 1999)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)} \geqq \frac{a}{c+a}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}\,.$$

解　証明すべき不等式の両辺に $abc(a+b)(b+c)(c+a)$ をかける．

$$\begin{aligned}
&\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)} \geqq \frac{a}{c+a}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}\\
\iff\ &a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4 \geqq a^3bc^2+b^3ca^2+c^3ab^2+3a^2b^2c^2\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4 \geqq a^3bc^2+b^3ca^2+c^3ab^2+3a^2b^2c^2$$

を証明すればよい．重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{3}a^3b^3 + \frac{2}{3}c^3a^3 \geqq \left(a^3b^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(c^3a^3\right)^{\frac{2}{3}} = a^3bc^2\,.$$

同様にして

$$\frac{1}{3}b^3c^3 + \frac{2}{3}a^3b^3 \geqq b^3ca^2,\ \ \frac{1}{3}c^3a^3 + \frac{2}{3}b^3c^3 \geqq c^3ab^2\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geqq a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2\,.$$

また

$$a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 \overset{AM\geqq GM}{\geqq} 3\sqrt[3]{a^2b^4\cdot b^2c^4\cdot c^2a^4} = 3\sqrt[3]{a^6b^6c^6} = 3a^2b^2c^2$$

が成り立つことから

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 \geqq a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2 + 3a^2b^2c^2\,. \qquad \blacksquare$$

問題 86　(Baltic Way 1995)

$a, b, c,\ d$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geqq 4\,.$$

解　$x > 0,\ y > 0$ のとき，補助定理 1 を使うと

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1^2}{x} + \frac{1^2}{y} \geqq \frac{(1+1)^2}{x+y} = \frac{4}{x+y}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
&\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a}\\
&= \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d}\right)(c+a) + \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a}\right)(d+b)\\
&\geqq \frac{4}{a+b+c+d}(c+a) + \frac{4}{b+c+d+a}(d+b)\\
&= \frac{4(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 4\,.
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

問題 87　([ONI]，Vasile Cîrtoaje)

a, b, c, d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b} \geqq 0\,.$$

解

$$\begin{aligned}
&\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b} \geqq 0 \\
\iff &\left(\frac{a-b}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b-c}{c+d}+1\right)+\left(\frac{c-d}{d+a}+1\right)+\left(\frac{d-a}{a+b}+1\right) \geqq 4 \\
\iff &\frac{c+a}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{b+d}{a+b} \geqq 4\,. \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

ここで，$x>0,\ y>0$ のとき

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1^2}{x}+\frac{1^2}{y} \geqq \frac{(1+1)^2}{x+y}=\frac{4}{x+y}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
&\frac{c+a}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{b+d}{a+b} \\
&=\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)(c+a)+\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right)(b+d) \\
&\geqq \frac{4}{b+c+d+a}(c+a)+\frac{4}{c+d+a+b}(d+b) \\
&=\frac{4(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=4.
\end{aligned}$$

■

［注］　$(*)$ は

$$\frac{a+c}{a+d}+\frac{d+b}{d+c}+\frac{c+a}{c+b}+\frac{b+d}{b+a} \geqq 4$$

と変形すれば，問題 86 の不等式より成り立つことがわかる．

問題 88　(Poland 1993)

x, y, u, v が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{xy+xv+uy+uv}{x+y+u+v} \geqq \frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v}\,.$$

解 1　証明すべき不等式を次のように変形する．

$$\frac{xy+xv+uy+uv}{x+y+u+v} \geqq \frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v} \iff \frac{(x+u)(y+v)}{(x+y)+(u+v)} \geqq \frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v}\,.$$

$$
\begin{aligned}
&(x+u)(y+v)-\big[(x+y)+(u+v)\big]\left(\frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v}\right)\\
&=xv-\frac{(u+v)xy}{x+y}+yu-\frac{(x+y)uv}{u+v}\\
&=\frac{x(vx-uy)}{x+y}-\frac{u(vx-uy)}{u+v}\\
&=\frac{(vx-uy)^2}{(x+y)(u+v)}\geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

■

解 2　$\dfrac{x+y}{4}\geqq\dfrac{xy}{x+y}$, $\dfrac{u+v}{4}\geqq\dfrac{uv}{u+v}$ が成り立つことに注意して不等式を同値変形する.

$$
\begin{aligned}
&\frac{xy+xv+uy+uv}{x+y+u+v}\geqq\frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v}\\
\iff&\left(\frac{x+y}{4}-\frac{xy}{x+y}\right)+\left(\frac{u+v}{4}-\frac{uv}{u+v}\right)\geqq\frac{(x+u)+(y+v)}{4}-\frac{(x+u)(y+v)}{(x+u)+(y+v)}\\
\iff&\frac{(x-y)^2}{x+y}+\frac{(u-v)^2}{u+v}\geqq\frac{(x+u-y-v)^2}{x+u+y+v}\,.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\frac{(x-y)^2}{x+y}+\frac{(u-v)^2}{u+v}\geqq\frac{(x+u-y-v)^2}{x+u+y+v}
$$

を証明すればよい. 補助定理 1 より

$$
\frac{(x-y)^2}{x+y}+\frac{(u-v)^2}{u+v}\geqq\frac{\big[(x-y)+(u-v)\big]^2}{(x+y)+(u+v)}=\frac{(x+u-y-v)^2}{x+u+y+v}\,.
$$

■

問題 89　(KMO Weekend Program 2007)

a,b,c,x,y,z が正の実数のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$
\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z}\leqq\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}\,.
$$

解 1　$\dfrac{a+x}{4}\geqq\dfrac{ax}{a+x}$, $\dfrac{b+y}{4}\geqq\dfrac{by}{b+y}$, $\dfrac{c+z}{4}\geqq\dfrac{cz}{c+z}$ が成り立つことに注意して不等式を同値変形する.

$$
\begin{aligned}
&\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z}\leqq\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}\\
\iff&\left(\frac{a+x}{4}-\frac{ax}{a+x}\right)+\left(\frac{b+y}{4}-\frac{by}{b+y}\right)+\left(\frac{c+z}{4}-\frac{cz}{c+z}\right)
\end{aligned}
$$

$$\geqq \frac{(a+b+c)+(x+y+z)}{4} - \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{(a+b+c)+(x+y+z)}$$

$$\iff \frac{(a-x)^2}{a+x} + \frac{(b-y)^2}{b+y} + \frac{(c-z)^2}{c+z} \geqq \frac{(a+b+c-x-y-z)^2}{a+b+c+x+y+z}\,.$$

したがって

$$\frac{(a-x)^2}{a+x} + \frac{(b-y)^2}{b+y} + \frac{(c-z)^2}{c+z} \geqq \frac{(a+b+c-x-y-z)^2}{a+b+c+x+y+z}$$

を示せばよい．補助定理 1 より

$$\begin{aligned}\frac{(a-x)^2}{a+x} + \frac{(b-y)^2}{b+y} + \frac{(c-z)^2}{c+z} &\geqq \frac{\big[(a-x)+(b-y)+(c-z)\big]^2}{(a+x)+(b+y)+(c+z)}\\ &= \frac{(a+b+c-x-y-z)^2}{a+b+c+x+y+z}\,.\end{aligned}$$ ■

解 2　$p,\ q,\ X,\ Y > 0$ のとき，

$$\frac{XY}{X+Y} \leqq \frac{p^2X+q^2Y}{(p+q)^2} \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．なぜならば，コーシー・シュワルツの不等式より

$$(p^2X+q^2Y)\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}\right) \geqq (p+q)^2$$

が成り立つからである．$(*)$ において，$p=x+y+z$，$q=a+b+c$ とおくと

$$\frac{ax}{a+x} \leqq \frac{(x+y+z)^2a+(a+b+c)^2x}{(x+y+z+a+b+c)^2},$$

$$\frac{by}{b+y} \leqq \frac{(x+y+z)^2b+(a+b+c)^2y}{(x+y+z+a+b+c)^2},$$

$$\frac{cz}{c+z} \leqq \frac{(x+y+z)^2c+(a+b+c)^2z}{(x+y+z+a+b+c)^2}.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z}\\ &\leqq \frac{(x+y+z)^2(a+b+c)+(a+b+c)^2(x+y+z)}{(x+y+z+a+b+c)^2} = \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}\,.\end{aligned}$$ ■

問題 90　(Belarus 1997)

a, x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a+y}{a+z}x + \frac{a+z}{a+x}y + \frac{a+x}{a+y}z \geqq x+y+z \geqq \frac{a+z}{a+x}x + \frac{a+x}{a+y}y + \frac{a+y}{a+z}z\,.$$

解　(i)　$\dfrac{a+y}{a+z}x + \dfrac{a+z}{a+x}y + \dfrac{a+x}{a+y}z \geqq x+y+z$ の証明

$$\begin{aligned}
&\frac{a+y}{a+z}x + \frac{a+z}{a+x}y + \frac{a+x}{a+y}z \geqq x+y+z \\
\Longleftrightarrow\ &\left(\frac{a+y}{a+z}-1\right)x + \left(\frac{a+z}{a+x}-1\right)y + \left(\frac{a+x}{a+y}-1\right)z \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(y-z)x}{a+z} + \frac{(z-x)y}{a+x} + \frac{(x-y)z}{a+y} \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{xy}{a+z} + \frac{yz}{a+x} + \frac{zx}{a+y} \geqq \frac{zx}{a+z} + \frac{xy}{a+x} + \frac{yz}{a+y}\,.
\end{aligned}$$

最後の不等式は，$x \geqq y \geqq z$ と仮定すると，$xy \geqq zx \geqq yz$, $\dfrac{1}{a+z} \geqq \dfrac{1}{a+y} \geqq \dfrac{1}{a+x}$ であるから並べ替えの不等式 (rearrangement inequality) より成り立つ．

他の場合も同様である．

(ii)　$x+y+z \geqq \dfrac{a+z}{a+x}x + \dfrac{a+x}{a+y}y + \dfrac{a+y}{a+z}z$ の証明

$$\begin{aligned}
&x+y+z \geqq \frac{a+z}{a+x}x + \frac{a+x}{a+y}y + \frac{a+y}{a+z}z \\
\Longleftrightarrow\ &0 \geqq \left(\frac{a+z}{a+x}-1\right)x + \left(\frac{a+x}{a+y}-1\right)y + \left(\frac{a+y}{a+z}-1\right)z \\
\Longleftrightarrow\ &0 \geqq \frac{(z-x)x}{a+x} + \frac{(x-y)y}{a+y} + \frac{(y-z)z}{a+z} \\
\Longleftrightarrow\ &z\cdot\frac{x}{a+x} + x\cdot\frac{y}{a+y} + y\cdot\frac{z}{a+z} \leqq x\cdot\frac{x}{a+x} + y\cdot\frac{y}{a+y} + z\cdot\frac{z}{a+z}\,.
\end{aligned}$$

最後の不等式は，$x \geqq y \geqq z$ と仮定すると，$\dfrac{x}{a+x} \geqq \dfrac{y}{a+y} \geqq \dfrac{z}{a+z}$ であるから並べ替えの不等式 (rearrangement inequality) より成り立つ．

他の場合も同様である．　■

問題 91　x, y, z は正の実数で，$xy+yz+zx=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \geqq \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2} + \frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}\,.$$

解　$x=\tan\dfrac{\alpha}{2},\ y=\tan\dfrac{\beta}{2},\ z=\tan\dfrac{\gamma}{2}\quad(0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\pi)$ とおくと

$$\tan\frac{\gamma}{2}=z=\frac{1-xy}{x+y}=\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

$0<\dfrac{\gamma}{2}<\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ すなわち

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi.$$

このとき

$$\frac{x}{1+x^2}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{2},$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha,$$

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

よって，証明すべき不等式は

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geqq\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$$

となる．まず，$\sin\alpha\geqq\dfrac{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{2}$ が成り立つことを示す．

$$\frac{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{2}=\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)=\sin(\pi-\alpha)\cos(\beta-\gamma)=\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)\leqq\sin\alpha.$$

よって

$$\sin\alpha\geqq\frac{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{2}.$$

同様にして

$$\sin\beta\geqq\frac{\sin 2\gamma+\sin 2\alpha}{2},\ \sin\gamma\geqq\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{2}.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geqq\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma.$$

■

問題 92 (Serbia and Montenegro 2005, Russia 2002)

x, y, z は正の実数で，$x+y+z=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geqq xy+yz+zx\,.$$

解 1

$$\begin{aligned} & \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x} \geqq xy+yz+zx \\ \Longleftrightarrow\ & x^2+y^2+z^2+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \\ & \geqq x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2=9 \end{aligned}$$

より

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \geqq 9$$

を示せばよい．$f(t)=t^2+2\sqrt{t}\ (0<t<3)$ とおくと $f'(t)=2t+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$，$f'(1)=3$．

$y=f(t)$ 上の点 (1, 3) における接線の方程式は $y=3t$ である．次に $y=f(t)$ と $y=3t$ との上下関係を調べる．

$$f(t)-3t=t^2+2\sqrt{t}-3t=\sqrt{t}\left[(\sqrt{t})^3-3\sqrt{t}+2\right]=\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)^2(\sqrt{t}+2) \geqq 0$$

より

$$f(t) \geqq 3t\,.$$

よって

$$f(x)+f(y)+f(z) \geqq 3(x+y+z)=9\,. \qquad \blacksquare$$

［注］ $f(t) \geqq 3t$ を示すには相加平均・相乗平均の不等式を用いてもよい．

$$t^2+2\sqrt{t}=t^2+\sqrt{t}+\sqrt{t} \geqq 3\sqrt[3]{t^2\cdot\sqrt{t}\cdot\sqrt{t}}=3t\,. \qquad \square$$

解 2　$a=\sqrt{x}>0,\ b=\sqrt{y}>0,\ z=\sqrt{z}>0$ とおくと，$a^2+b^2+c^2=3$．このとき

$$a+b+c \geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

を証明すればよい．同次化 (Homonization) すると

$$\begin{aligned} & a+b+c \geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \\ \Longleftrightarrow\ & \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3(a+b+c)^2 \geqq (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & (a^2+b^2+c^2)^3(a+b+c)^2 \geqq 27(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iff & \sum_{cyclic} a^8 + 2\sum_{sym} a^7 b + 4\sum_{sym} a^6 b^2 + 6\sum_{sym} a^5 b^3 + 6\sum_{cyclic} a^4 b^4 + 2\sum_{cyclic} a^6 bc \\
&\quad + 6\sum_{sym} a^5 b^2 c + 6\sum_{cyclic} a^4 b^3 c + 12\sum_{cyclic} a^4 b^2 c^2 + 12\sum_{cyclic} a^3 b^3 c^3 \\
& \geqq 27\sum_{cyclic} a^4 b^4 + 54\sum_{cyclic} a^4 b^2 c^2 \\
\iff & [(8,\ 0,\ 0)] + 4[(7,\ 1,\ 0)] + 8[(6,\ 2,\ 0)] + 6[(5,\ 3,\ 0)] + 2[(6,\ 1,\ 1)] \\
& + 12[(5,\ 2,\ 1)] + 12[(4,\ 3,\ 1)] + 12[(3,\ 3,\ 2)] \\
& \geqq 21[(4,\ 4,\ 0)] + 42[(4,\ 2,\ 2)]\,.
\end{aligned}
$$

この不等式は

$$
\begin{aligned}
12[(5,2,1)] + 12[(3,3,2)] &\geqq 24\left[\left(\frac{5+3}{2},\frac{2+3}{2},\frac{1+2}{2}\right)\right] \\
&= 24\left[\left(4,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)\right] = 24[(4,2,2)],
\end{aligned}
$$

$$12[(4,\ 3,\ 1)] \geqq 12[(4,\ 2,\ 2)],$$

$$2[(6,\ 1,\ 1)] \geqq 2[(4,\ 2,\ 2)],$$

$$4[(5,\ 3,\ 0)] \geqq 4[(4,\ 2,\ 2)],$$

$$8[(5,\ 3,\ 0)] \geqq 8[(4,\ 4,\ 0)],$$

$$9[(6,\ 2,\ 0)] \geqq 8[(4,\ 4,\ 0)],$$

$$4[(7,\ 1,\ 0)] \geqq 4[(4,\ 4,\ 0)],$$

$$[(8,\ 1,\ 0)] \geqq [(4,\ 4,\ 0)].$$

これらの不等式の辺々を加えることによって得られる． ■

問題 93 (Die $\sqrt{WURZEL}$，Walther Janous)

x, y, z は正の実数で，$x+y+z=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geqq (1-x^2)^2 + (1-y^2)^2 + (1-z^2)^2\,.$$

解

$$
\begin{aligned}
& (1+x)(1+y)(1+z) \geqq (1-x^2)^2 + (1-y^2)^2 + (1-z^2)^2 \\
\iff & (x+y+z)(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geqq (y+z)^2(2x+y+z)^2+(z+x)^2(x+2y+z)^2+(x+y)^2(x+y+2z)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 2\sum_{cyclic} x^4 + 9\sum_{sym} x^3y + 14\sum_{cyclic} x^2y^2 + 30\sum_{cyclic} x^2yz \\
&\geqq 2\sum_{cyclic} x^4 + 8\sum_{sym} x^3y + 14\sum_{cyclic} x^2y^2 + 32\sum_{cyclic} x^2yz \\
\Longleftrightarrow\ & \sum_{sym} x^3y \geqq 2\sum_{cyclic} x^2yz \\
\Longleftrightarrow\ & [(3,\ 1,\ 0)] \geqq [(2,\ 1,\ 1)]\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

［注］ $\displaystyle\sum_{sym} x^3y \geqq 2\sum_{cyclic} x^2yz$ すなわち

$$x^3y+x^3z+y^3x+y^3z+z^3x+z^3y \geqq 2(x^2yz+y^2zx+z^2xy)$$

は相加平均・相乗平均の不等式より次のように示せる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{10}x^3y+\frac{3}{10}x^3z+\frac{1}{10}y^3x+\frac{1}{10}y^3z+\frac{1}{10}z^3x+\frac{1}{10}z^3y \\
&\geqq (x^3y)^{\frac{3}{10}}(x^3z)^{\frac{3}{10}}(y^3x)^{\frac{1}{10}}(y^3z)^{\frac{1}{10}}(z^3x)^{\frac{1}{10}}(z^3y)^{\frac{1}{10}} = x^2yz\,.
\end{aligned}
$$

同様にして

$$\frac{1}{10}x^3y+\frac{1}{10}x^3z+\frac{3}{10}y^3x+\frac{3}{10}y^3z+\frac{1}{10}z^3x+\frac{1}{10}z^3y \geqq xy^2z,$$

$$\frac{1}{10}x^3y+\frac{1}{10}x^3z+\frac{1}{10}y^3x+\frac{1}{10}y^3z+\frac{3}{10}z^3x+\frac{3}{10}z^3y \geqq xyz^2.$$

これらの不等式の辺々を加えればよい．

問題 94 (United Kingdom 1999)

$p,\ q,\ r$ は正の実数で，$p+q+r=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$7(pq+qr+rp) \leqq 2+9pqr\,.$$

解1　同次化 (Homonization) して

$$
\begin{aligned}
&7(pq+qr+rp) \leqq 2+9pqr \\
\iff &7(pq+qr+rp)(p+q+r) \leqq 2(p+q+r)^3+9pqr \\
\iff &7[pq(p+q)+qr(q+r)+rp(r+p)]+21pqr \\
&\leqq 2(p^3+q^3+r^3)+6[pq(p+q)+qr(q+r)+rp(r+p)]+21pqr^{*5} \\
\iff &pq(p+q)+qr(q+r)+rp(r+p) \leqq 2(p^3+q^3+r^3)\,.
\end{aligned}
$$

重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$
\frac{2}{3}p^3+\frac{1}{3}q^3 \geqq (p^3)^{\frac{2}{3}}(q^3)^{\frac{1}{3}} = p^2q\,.
$$

同様にして

$$
\frac{2}{3}p^3+\frac{1}{3}r^3 \geqq p^2r,\ \frac{2}{3}q^3+\frac{1}{3}p^3 \geqq q^2p,\ \frac{2}{3}q^3+\frac{1}{3}r^3 \geqq q^2r,
$$

$$
\frac{2}{3}r^3+\frac{1}{3}p^3 \geqq r^2p,\ \frac{2}{3}r^3+\frac{1}{3}q^3 \geqq r^2q\,.
$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$
2(p^3+q^3+r^3) \geqq pq(p+q)+qr(q+r)+rp(r+p)\,. \qquad \blacksquare
$$

［注］　$2(p^3+q^3+r^3) \geqq pq(p+q)+qr(q+r)+rp(r+p)$ の証明は，Schur の不等式

$$
p^3+q^3+r^3+3pqr \geqq pq(p+q)+qr(q+r)+rp(r+p)
$$

と不等式

$$
p^3+q^3+r^3 \overset{AM \geqq GM}{\geqq} 3\sqrt[3]{p^3q^3r^3} = 3pqr
$$

の辺々を加えて示してもよい.

解2　同次化 (Homonization) して

$$
\begin{aligned}
&7(pq+qr+rp) \leqq 2+9pqr \\
\iff &7(pq+qr+rp)(p+q+r) \leqq 2(p+q+r)^3+9pqr \\
\iff &7[p^2(q+r)+q^2(r+p)+r^2(p+q)]+21pqr \\
&\leqq 2(p^3+q^3+r^3)+6[p^2(q+r)+q^2(r+p)+r^2(p+q)]+21pqr \\
\iff &p^2(q+r)+q^2(r+p)+r^2(p+q) \leqq 2(p^3+q^3+r^3)\,.
\end{aligned}
$$

*5 $(p+q+r)^3 = p^3+q^3+r^3+3pq(p+q)+3qr(q+r)+3rp(r+p)+6pqr$

最後の不等式は，次のように示せる．

$$\begin{aligned}&2(p^3+q^3+r^3)-(p^2q+p^2q+q^2p+q^2r+r^2p+r^2q)\\=&(p^3+q^3-p^2q-pq^2)+(q^3+r^3-q^2r-qr^2)+(r^3+p^3-r^2p-rp^2)\\=&(p-q)^2(p+q)+(q-r)^2(q+r)+(r-p)^2(r+p)\geqq 0\,.\end{aligned}$$

■

解 3　一般性を失うことなく $p\geqq q\geqq r$ と仮定できる．

$3r\leqq p+q+r=1$ から $r\leqq\dfrac{1}{3}$. ここで，r を固定して，$r=k$ とおくと

$$p+q=1-k,\ k\leqq\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}9pqr+2-7(pq+qr+rp)&=9kpq+2-7pq-7k(1-k)\\&=(9k-7)pq+2-7k(1-k)\,.\end{aligned}$$

したがって

$$(9k-7)pq+2-7k(1-k)\geqq 0$$

を示せばよい．

$9k-7<0$ かつ $pq\leqq\dfrac{(p+q)^2}{4}=\dfrac{(1-k)^2}{4}$ より

$$\begin{aligned}(9k-7)pq+2-7k(1-k)&\geqq\frac{(1-k)^2}{4}(9k-7)+2-7k(1-k)\\&=\frac{9k^3+3k^2-5k+1}{4}\\&=\frac{(3k-1)^2(k+1)}{4}\geqq 0\,.\end{aligned}$$

■

問題 95　(Serbia 2008)

a,b,c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2+3abc\geqq\frac{4}{9}\,.$$

Karamat の不等式を使う別解については，問題 240 参照．

解 1　同次化 (Homonization) して

$$
\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2+3abc \geqq \frac{4}{9}\\
\Longleftrightarrow\ &9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+27abc \geqq 4(a+b+c)^3\\
\Longleftrightarrow\ &9(a^3+b^3+c^3)+9\bigl[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\bigr]+27abc\\
&\geqq 4(a^3+b^3+c^3)+12\bigl[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\bigr]+24abc\\
\Longleftrightarrow\ &5(a^3+b^3+c^3)+3abc \geqq 3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]\,.
\end{aligned}
$$

Schur の不等式より

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

が成り立つから

$$2(a^3+b^3+c^3) \geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

が成り立つことを示せばよい．(問題 94 の解 1 参照)
ここでは，次のように示しておく．（記号 || 　|| については，「§7　準備」参照．）

$$
\left\|\begin{matrix} a & a & b & b & c & c\\ a & b & b & c & a & c\\ b & b & c & c & a & a \end{matrix}\right\| \leqq \left\|\begin{matrix} \overline{a\ \ a\ \ b\ \ b\ \ c\ \ c}\\ \overline{a\ \ b\ \ b\ \ c\ \ a\ \ c}\\ \overline{b\ \ b\ \ c\ \ c\ \ a\ \ a} \end{matrix}\right\| \leqq \left\|\begin{matrix} a & a & b & b & c & c\\ a & a & b & b & c & c\\ a & a & b & v & c & c \end{matrix}\right\| \quad \blacksquare
$$

解 2　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる，

$3c \geqq a+b+c=1$ から $c \leqq \frac{1}{3}$. ここで, c を固定して, $c=k$ とおくと $a+b=1-k,\ k \leqq \frac{1}{3}$ である．差をとると

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2+3abc-\frac{4}{9} &= (a+b)^2-2ab+c^2+3abc-\frac{4}{9}\\
&= (1-k)^2-2ab+k^2+3kab-\frac{4}{9}\\
&= (3k-2)ab+(1-k)^2+k^2-\frac{4}{9}.
\end{aligned}
$$

$3k-2<0$ かつ $ab \leqq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(1-k)^2}{4}$ より

$$
\begin{aligned}
(3k-2)ab+(1-k)^2+k^2-\frac{4}{9} &\geqq \frac{(1-k)^2}{4}(3k-2)+(1-k)^2+k^2-\frac{4}{9}\\
&= \frac{27k^3-9k+2}{36} = \frac{(3k-1)^2(3k+2)}{36} \geqq 0\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

問題 96　(USA 1979)

x, y, z は正の実数で，$x+y+z=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^3+y^3+z^3+6xyz \geqq \frac{1}{4}\,.$$

解 1　同次化 (Homonization) して

$$\begin{aligned}
&x^3+y^3+z^3+6xyz \geqq \frac{1}{4} \\
\Longleftrightarrow\ & 4(x^3+y^3+z^3)+24xyz \geqq (x+y+z)^3 \\
\Longleftrightarrow\ & 4(x^3+y^3+z^3)+24xyz \\
&\geqq x^3+y^3+z^3+3xy(x+y)+3yz(y+z)+3zx(z+x)+6xyz \\
\Longleftrightarrow\ & x^3+y^3+z^3+6xyz \geqq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\,.
\end{aligned}$$

Schur の不等式 $x^3+y^3+z^3+3xyz \geqq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$ を使うと

$$\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3+6xyz &> x^3+y^3+z^3+3xyz \\
&\geqq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\,.
\end{aligned}$$

■

解 2　一般性を失うことなく $x \geqq y \geqq z$ と仮定できる，
$3z \leqq x+y+z=1$ から $z \leqq \frac{1}{3}$.
ここで，z を固定して，$z=k$ とおくと，$x+y=1-k$, $k \leqq \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3+6xyz &= (x+y)^3-3xy(x+y)+z^3+6xyz \\
&= (1-k)^3-3xy(1-k)+k^3+6kxy \\
&= (9k-3)xy+(1-k)^3+k^3\,.
\end{aligned}$$

$9k-3 \leqq 0$ かつ $xy \leqq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(1-k)^2}{4}$ より

$$\begin{aligned}
(9k-3)xy+(1-k)^3+k^3 &\geqq \frac{(1-k)^2}{4}(9k-3)+(1-k)^3+k^3 \\
&= \frac{9k^3-9k^2+3k+1}{4} = \frac{9k^3+3k(1-3k)+1}{4} > \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

よって

$$x^3+y^3+z^3+6xyz = (9k-3)xy+(1-k)^3+k^3 > \frac{1}{4}\,.$$ ■

問題 97　(IMO 1984)

x, y, z は負でない実数で，$x+y+z=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$0 \leqq xy+yz+zx-2xyz \leqq \frac{7}{27}\,.$$

解 1　同次化 (Homonization) して

$$\begin{aligned} & 0 \leqq 27(xy+yz+zx)(x+y+z)-54xyz \leqq 7(x+y+z)^3 \\ \iff\quad & 0 \leqq 27\sum_{sym} x^2y+27xyz \leqq 7\sum_{cyclic} x^3+21\sum_{sym} x^2y+42xyz\,. \end{aligned}$$

左側の $0 \leqq 27\displaystyle\sum_{cyclic} x^2y+27xyz$ は明らかに成り立つ．

右側の $27\displaystyle\sum_{sym} x^2y+27xyz \leqq 7\sum_{cyclic} x^3+21\sum_{sym} x^2y+42xyz$ すなわち

$$7\sum_{cyclic} x^3+15xyz-6\sum_{sym} x^2y \geqq 0$$

を示す．

$$7\sum_{cyclic} x^3+15xyz-6\sum_{sym} x^2y = 5\left(\sum_{cyclic} x^3+3xyz-\sum_{sym} x^2y\right)+\left(2\sum_{cyclic} x^3-\sum_{sym} x^2y\right)$$

と変形できて，Schur の不等式より

$$\sum_{cyclic} x^3+3xyz-\sum_{sym} x^2y \geqq 0$$

が成り立つから

$$2\sum_{cyclic} x^3-\sum_{sym} x^2y \geqq 0$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned} & 2\sum_{cyclic} x^3-\sum_{sym} x^2y = 2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y) \\ &= (x^3+y^3-x^2y-xy^2)+(y^3+z^3-y^2z-yz^2)+(z^3+x^3-z^2x-zx^2) \\ &= (x-y)^2(x+y)+(y-z)^2(y+z)+(z-x)^2(z+x) \geqq 0\,. \end{aligned}$$

■

解 2　右側の不等式の証明

一般性を失うことなく $x \geqq y \geqq z$ と仮定できる，

$3z \leqq x+y+z=1$ から $z \leqq \frac{1}{3}$.

ここで，z を固定して，$z=k$ とおくと，$x+y=1-k,\ k \leqq \frac{1}{3}$.

差をとると

$$\begin{aligned} xy+yz+zx-2xyz-\frac{7}{27} &= xy+k(1-k)-2kxy-\frac{7}{27} \\ &= (1-2k)xy+k(1-k)-\frac{7}{27}\,. \end{aligned}$$

$1-2k>0$ かつ $xy \leqq \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{(1-k)^2}{4}$ より

$$\begin{aligned} (1-2k)xy+k(1-k)-\frac{7}{27} &\leqq (1-2k)\cdot\frac{(1-k)^2}{4}+k(1-k)-\frac{7}{27} \\ &= \frac{-54k^3+27k^2-1}{108} \\ &= \frac{-(3k-1)^2(6k+1)}{108} \leqq 0\,. \end{aligned}$$

よって，$xy+yz+zx-2xyz-\frac{7}{27}=(1-2k)xy+k(1-k)-\frac{7}{27} \leqq 0$. ■

問題 98　(IMO Short List 1993)

a,b,c,d は正の実数で，$a+b+c+d=1$ のとき，次の不等式を証明せよ.

$$abc+bcd+cda+dab \leqq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd\,.$$

解　$f(a,\ b,\ c,\ d)=abc+bcd+cda+dab-\frac{176}{27}abcd$ とおくと

$$f(a,\ b,\ c,\ d)=ab(c+d)+cd\left(a+b-\frac{176}{27}ab\right)\,.$$

ここで $a+b=m,\ c+d=n\ (m+n=1)$ とおき，$m,\ n$ を固定すると

$$ab \leqq \frac{(a+b)^2}{4}=\frac{m^2}{4},\quad cd \leqq \frac{(c+d)^2}{4}=\frac{n^2}{4}$$

で

$$f(a,\ b,\ c,\ d)=nab+cd\left(m-\frac{176}{27}ab\right)\,.$$

(i) $m-\frac{176}{27}ab \leqq 0$ の場合

$$f(a,\ b,\ c,\ d) \leqq nab=(c+d)ab\,.$$

相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$1 = a + b + (c + d) \geqq 3\sqrt[3]{ab(c + d)} \quad \text{から} \quad ab(c + d) \leqq \frac{1}{27}\,.$$

よって

$$f(a,\ b,\ c,\ d) \leqq nab = ab(c + d) \leqq \frac{1}{27}\,.$$

(ii) $m - \frac{176}{27}ab > 0$ の場合

$$f(a,\ b,\ c,\ d) \leqq nab + \frac{n^2}{4}\left(m - \frac{176}{27}ab\right) = \left(n - \frac{44}{27}n^2\right)ab + \frac{mn^2}{4}\,.$$

(1) $1 - \frac{44}{27}n \leqq 0$ のとき

$$f(a,\ b,\ c,\ d) \leqq \frac{mn^2}{4}\,.$$

相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$1 = (a + b) + \frac{c + d}{2} + \frac{c + d}{2} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{(a + b)(c + d)^2}{4}} \quad \text{から} \quad \frac{(a + b)(c + d)^2}{4} \leqq \frac{1}{27}\,.$$

よって

$$f(a,\ b,\ c,\ d) \leqq \frac{mn^2}{4} = \frac{(a + b)(c + d)^2}{4} \leqq \frac{1}{27}\,.$$

(2) $1 - \frac{44}{27}n > 0$ のときは

$$\begin{aligned} f(a,\ b,\ c,\ d) &\leqq \left(n - \frac{44}{27}n^2\right)\frac{m^2}{4} + \frac{mn^2}{4} \\ &= \frac{mn(m + n)}{4} - \frac{11}{27}(mn)^2 = \frac{1}{4}mn - \frac{11}{27}(mn)^2\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}mn - \frac{11}{27}(mn)^2 \leqq \frac{1}{27} &\iff 44(mn)^2 - 27mn + 4 \geqq 0 \\ &\iff (4mn - 1)(11mn - 4) \geqq 0 \\ &\iff mn \leqq \frac{1}{4},\ \frac{4}{11} \leqq mn\,. \end{aligned}$$

mn のとる値の範囲は，$1 = m + n \geqq 2\sqrt{mn}$ から，$mn \leqq \frac{1}{4}$ となるので

$$f(a,\ b,\ c,\ d) \leqq \frac{1}{4}mn - \frac{11}{27}(mn)^2 \leqq \frac{1}{27}\,.$$ ■

問題 99 (Pham Kim Hung)

a, b, c, d は正の実数で，$a + b + c + d = 4$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1 + 3a)(1 + 3b)(1 + 3c)(1 + 3d) \leqq 125 + 131abcd\,.$$

解 $f(a,\ b,\ c,\ d)=(1+3a)(1+3b)(1+3c)(1+3d)-131abcd$ とおくと

$$f(a,\ b,\ c,\ d)=[1+3(a+b)+9ab]\,[1+3(c+d)+9cd]-131abcd\,.$$

ここで $a+b=m,\ c+d=n$ とおき，$m,\ n$ を固定すると

$$ab \leqq \frac{(a+b)^2}{4}=\frac{m^2}{4},\quad cd \leqq \frac{(c+d)^2}{4}=\frac{n^2}{4}$$

で

$$\begin{aligned} f(a,\ b,\ c,\ d) &= (1+3m+9ab)(1+3n+9cd)-131abcd \\ &= (1+3m+9ab)(1+3n)+(9+27m-50ab)\,cd\,. \end{aligned}$$

(i) $9+27m-50ab \leqq 0$ の場合

$$\begin{aligned} f(a,\ b,\ c,\ d) &\leqq (1+3m+9ab)(1+3n) \\ &\leqq \left(1+3m+\frac{9m^2}{4}\right)[1+3(4-m)] \\ &= \frac{-27m^3+81m^2+144m+52}{4}\,. \end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{-27m^3+81m^2+144m+52}{4} \leqq 125$ を示せばよい．差をとると

$$\begin{aligned} 125-\frac{-27m^3+81m^2+144m+52}{4} &= \frac{27m^3-81m^2-144m+448}{4} \\ &= \frac{(3m-8)^2(3m+7)}{4} \geqq 0 \end{aligned}$$

より

$$\frac{-27m^3+81m^2+144m+52}{4} \leqq 125\,.$$

(ii) $9+27m-50ab>0$ の場合

$$\begin{aligned} f(a,\ b,\ c,\ d) &\leqq (1+3m+9ab)(1+3n)+(9+27m-50ab)\cdot\frac{n^2}{4} \\ &= \left(9+27n-\frac{25n^2}{2}\right)ab+\frac{(9+27m)n^2}{4}+(1+3m)(1+3n)\,. \end{aligned}$$

(1) $9+27n-\frac{25}{2}n^2 \leqq 0$ ならば

$$\begin{aligned} f(a,\ b,\ c,\ d) &\leqq \frac{(9+27m)n^2}{4}+(1+3m)(1+3n) \\ &= \frac{[9+27(4-n)]n^2}{4}+[1+3(4-n)](1+3n) \end{aligned}$$

$$= \frac{-27n^3+81n^2+144n+52}{4}.$$

したがって，$\dfrac{-27n^3+81n^2+144n+52}{4} \leqq 125$ を示せばよい．差をとると

$$\begin{aligned}
125 - \frac{-27n^3+81n^2+144n+52}{4} &= \frac{27n^3-81n^2-144n+448}{4} \\
&= \frac{(3n-8)^2(3n+7)}{4} \geqq 0
\end{aligned}$$

より

$$\frac{-27n^3+81n^2+144n+52}{4} \leqq 125.$$

(2) $9+27n-\frac{25}{2}n^2>0$ のときは

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d) \\
&\leqq \left(9+27n-\frac{25n^2}{2}\right)\frac{m^2}{4}+\frac{(9+27m)n^2}{4}+(1+3m)(1+3n) \\
&= \frac{8+24(m+n)+18(m^2+n^2)+72mn+54mn(m+n)-25m^2n^2}{8} \\
&= \frac{8+24(m+n)+18[(m+n)^2-2mn]+72mn+54mn(m+n)-25m^2n^2}{8} \\
&= \frac{8+96+18(4^2-2mn)+72mn+216mn-25m^2n^2}{8} \\
&= \frac{-25m^2n^2+252mn+392}{8}.
\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{-25m^2n^2+252mn+392}{8} \leqq 125$ を示せばよい．差をとると

$$\begin{aligned}
125 - \frac{-25m^2n^2+252mn+392}{8} &= \frac{25(mn)^2-252mn+608}{8} \\
&= \frac{(mn-4)(25mn-152)}{8}.
\end{aligned}$$

mn のとる値の範囲は，$4=m+n \geqq 2\sqrt{mn}$ より，$mn \leqq 4$ であるから

$$\frac{(mn-4)(25mn-152)}{8} \geqq 0.$$

よって

$$\frac{-25m^2n^2+252mn+392}{8} \leqq 125. \qquad \blacksquare$$

問題 100　(Pham Kim Hung)

a, b, c, d, e は負でない実数で，$a+b+c+d+e=5$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$abc+bcd+cde+dea+eab \leqq 5\,.$$

解　$e=\min(a,b,c,d,e)$ と仮定する．

$$\begin{aligned} abc+bcd+cde+dea+eab &= e(ab+ad+cd+bc)+bc(a+d-e) \\ &= e(a+c)(b+d)+bc(a+d-e) \end{aligned}$$

$(a+c)+(b+d)=5-e$ であるから，$xy \leqq \dfrac{(x+y)^2}{4}$ を用いると

$$(a+c)(b+d) \leqq \frac{(a+c+b+d)^2}{4} = \frac{(5-e)^2}{4}\,.$$

相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$5-2e=b+c+(a+d-e) \geqq 3\sqrt[3]{bc(a+d-e)} \quad から \quad bc(a+d-e) \leqq \frac{(5-2e)^3}{27}\,.$$

したがって

$$\begin{aligned} e(a+c)(b+d)+bc(a+d-e) &\leqq e\frac{(5-e)^2}{4}+\frac{(5-2e)^3}{27} \\ &= \frac{-5e^3-30e^2+75e+500}{108}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5-\frac{-5e^3-30e^2+75e+500}{108} &= \frac{5e^3+30e^2-75e+40}{108} \\ &= \frac{5(e+8)(e-1)^2}{108} \geqq 0 \end{aligned}$$

より

$$\frac{-5e^3-30e^2+75e+500}{108} \leqq 5\,.$$

よって

$$abc+bcd+cde+dea+eab \leqq 5\,.$$

■

問題 101　(Poland 1992)

a, b, c が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \geqq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)\,.$$

解　$a^2+b^2-c^2,\ b^2+c^2-a^2,\ c^2+a^2-b^2$ の中に負になるものがあれば一つである．二つ以上負になるものがあれば，（例えば）$a^2+b^2-c^2<0,\ b^2+c^2-a^2<0$ ならば，

$2b^2=(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)<0$ を満たす実数 b は存在しない．

$a^2+b^2-c^2,\ b^2+c^2-a^2,\ c^2+a^2-b^2$ の中に一つだけ負になるものがあれば，$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)\leqq 0$ で $(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2\geqq 0$ より不等式は成り立つ．

よって，以下 $a^2+b^2-c^2\geqq 0,\ b^2+c^2-a^2\geqq 0,\ c^2+a^2-b^2\geqq 0$ としてよい．

まず，次の不等式

$$(a+b-c)^2(c+a-b)^2\geqq(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)$$

が成り立つことを示す．

$$(a+b-c)^2(c+a-b)^2=\left[a^2-(b-c)^2\right]^2=a^4-2a^2(b-c)^2+(b-c)^4,$$

$$(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)=a^4-(b^2-c^2)^2$$

より

$$\begin{aligned}
&(a+b-c)^2(c+a-b)^2\geqq(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)\\
\iff\ & a^4-2a^2(b-c)^2+(b-c)^4\geqq a^4-(b^2-c^2)^2\\
\iff\ & (b-c)^4+(b^2-c^2)^2\geqq 2a^2(b-c)^2\\
\iff\ & (b-c)^2\left[(b-c)^2+(b+c)^2-2a^2\right]\geqq 0\\
\iff\ & 2(b-c)^2\left[b^2+c^2-a^2\right]\geqq 0\,.
\end{aligned}$$

$b^2+c^2-a^2\geqq 0$ が成り立つから

$$(a+b-c)^2(c+a-b)^2\geqq(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)\,.$$

同様にして

$$(b+c-a)^2(c+a-b)^2\geqq(c^2+a^2-b^2)(b^2+c^2-a^2),$$

$$(b+c-a)^2(a+b-c)^2\geqq(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2).$$

これらの不等式の辺々をかけると

$$(a+b-c)^4(b+c-a)^4(c+a-b)^4\geqq(a^2+b^2-c^2)^2(b^2+c^2-a^2)^2(c^2+a^2-b^2)^2$$

となるから，求める不等式

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2\geqq(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$$

が得られる．　■

問題 102　(Canada 1999)

x, y, z は負でない実数で，$x+y+z=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^2y+y^2z+z^2x \leqq \frac{4}{27}\,.$$

解 1　一般性を失うことなく $x=\max(x,\ y,\ z)$ と仮定することができる．

$$\begin{aligned}x^2y+y^2z+z^2x &= x^2y+y^2z+\frac{z^2x}{2}+\frac{z^2x}{2}\\ &\leqq x^2y+xyz+\frac{x^2z}{2}+\frac{z^2x}{2} \qquad \left(\quad y^2z \leqq xyz,\ \frac{z^2x}{2} \leqq \frac{x^2z}{2} \quad \text{を用いた}\right)\\ &= (x^2+xz)\left(y+\frac{z}{2}\right)\\ &\leqq \left(x+\frac{z}{2}\right)^2\left(y+\frac{z}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

したがって

$$\left(x+\frac{z}{2}\right)^2\left(y+\frac{z}{2}\right) \leqq \frac{4}{27}$$

を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$1=\frac{x+\frac{z}{2}}{2}+\frac{x+\frac{z}{2}}{2}+\left(y+\frac{z}{2}\right) \geqq 3\sqrt[3]{\frac{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2\left(y+\frac{z}{2}\right)}{4}}\,.$$

よって，$\left(x+\frac{z}{2}\right)^2\left(y+\frac{z}{2}\right) \leqq \frac{4}{27}\,.$ ■

解 2　$x=\min(x,\ y,\ z)$ と仮定して，$y-x=p \geqq 0,\ z-x=q \geqq 0$ とおくと

$$\begin{aligned}&x^2y+y^2z+z^2x \leqq \frac{4}{27}\\ \iff& x^2y+y^2z+z^2x \leqq \frac{4}{27}(x+y+z)^3\\ \iff& 27\big[x^2(x+p)+(x+p)^2(x+q)+(x+q)^2x\big] \leqq 4(3x+p+q)^3\\ \iff& 4p^3-15p^2q+12pq^2+4q^3+9(p^2+2pq+q^2)x+27(p+q)x^2+27x^3 \geqq 0\\ \iff& (p-2q)^2(4p+q)+9(p+q)^2x+27(p+q)x^2+27x^3 \geqq 0\,.\end{aligned}$$

明らかに，$(p-2q)^2(4p+q)+9(p+q)^2x+27(p+q)x^2+27x^3 \geqq 0$ は成り立つ． ■

［注］　「$x,\ y,\ z \geqq 0$ のとき，不等式 $x^2y+y^2z+z^2x+xyz \leqq \dfrac{4}{27}(x+y+z)^3$ が成り立つ．」（問題 120 の注参照.）

問題 103　(Hong Kong 1994)

x, y, z は正の実数で，$xy + yz + zx = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) \leqq \frac{4\sqrt{3}}{9}\,.$$

解　証明すべき不等式の左辺を展開して変形する．

$$\begin{aligned}
&x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) \leqq \frac{4\sqrt{3}}{9} \\
\iff\ & x+y+z+xyz(xy+yz+zx) \leqq \frac{4\sqrt{3}}{9} + xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \\
\iff\ & x+y+z+xyz(xy+yz+zx) \\
&\leqq \frac{4\sqrt{3}}{9} + xy(x+y+z) + yz(y+z+x) + zx(z+x+y) - 3xyz \\
\iff\ & x+y+z+xyz(xy+yz+zx) \leqq \frac{4\sqrt{3}}{9} + (xy+yz+zx)(x+y+z) - 3xyz \\
\iff\ & x+y+z+xyz \leqq \frac{4\sqrt{3}}{9} + x+y+z-3xyz \\
\iff\ & xyz \leqq \frac{\sqrt{3}}{9}\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$xyz \leqq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$1 = xy + yz + zx \geqq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\,.$$

よって

$$xyz \leqq \frac{\sqrt{3}}{9}\,.$$

■

問題 104 (Vietnam 1996)

a, b, c, d は実数で，$2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+bcd+cda+dab=16$, $a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0,\ d \geqq 0$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a+b+c+d \geqq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\,.$$

解 $p=a+b+c+d,\ q=ab+ac+ad+bc+bd+cd,\ r=abc+bcd+cda+dab,\ s=abcd$ とおき，$f(x)=x^4-px^3+qx^2-rx+s$ を考える．

$f'(x)=4x^3-3px^2+2qx-r$ で $f(x)=0$ の解は $a,\ b,\ c,\ d$ であるから，$f'(x)=0$ は 3 つの非負の解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもつから，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3p}{4},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{q}{2},\ \alpha\beta\gamma=\frac{r}{4}\,.$$

ここで，条件は

$$\begin{aligned}&2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+bcd+cda+dab=16\\ \iff\ &2q+r=16\\ \iff\ &4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4\alpha\beta\gamma=16\\ \iff\ &\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma=4\,.\end{aligned} \qquad \cdots\cdots①$$

証明すべき不等式は $p \geqq \dfrac{2}{3}q$ すなわち

$$\alpha+\beta+\gamma \geqq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \qquad \cdots\cdots②$$

となる．

①から

$$\gamma=\frac{4-\alpha\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta}\,.$$

$\gamma \geqq 0$ であるから，$\alpha\beta \leqq 4$．

②において，差をとると

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)&=\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma-4\\ &=\alpha+\beta+\frac{4-\alpha\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta}+\frac{\alpha\beta(4-\alpha\beta)}{\alpha\beta+\alpha+\beta}-4\\ &=\frac{(\alpha+\beta-2)^2-\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha\beta+\alpha+\beta}\,.\end{aligned}$$

$T=(\alpha+\beta-2)^2-\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)$ とおき $T \geqq 0$ を示す．
$(\alpha-1)(\beta-1) \leqq 0$ のときは明らかに $T \geqq 0$ であるから，$(\alpha-1)(\beta-1)>0$ の場合を考えればよい．このとき

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta-2)^2=(\alpha-1+\beta-1)^2 &\geqq 4(\alpha-1)(\beta-1)\\
&\geqq \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)
\end{aligned}
$$

よって，$T \geqq 0$． ■

［注］「$f(x)=0$ の解は $a,\ b,\ c,\ d$ であるから，$f'(x)=0$ は3つの非負の解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもつ．」ことは次のことからわかる．

(i) $p<q$ で $f(p)=0$ かつ $f(q)=0$ のとき，平均値の定理から $f'(c)=0$ となる $c\,(p<c<q)$ が存在する．

(ii) p が $f(x)=0$ の k 重解のときは $f(p)=f'(p)=\cdots=f^{(k-1)}(p)=0,\ f^{(k)}(p)\fallingdotseq 0$ で，$f'(p)=\cdots=(f')^{(k-2)}(p)=0,\ (f')^{(k-1)}(p)\fallingdotseq 0$ より p は $f'(x)=0$ の $k-1$ 重解である．

問題 105 (Poland 1998)

a,b,c,d,e,f は正の実数で，$a+b+c+d+e+f=1,\ ace+bdf \geqq \dfrac{1}{108}$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$abc+bcd+cde+def+efa+fab \leqq \frac{1}{36}\,.$$

解　$A=ace+bdf,\ B=abc+bcd+cde+def+efa+fab$ とおくと

$$A+B=(a+d)(b+e)(c+f) \leqq \left(\frac{(a+d)+(b+e)+(c+f)}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

よって

$$B \leqq \frac{1}{27}-A \leqq \frac{1}{27}-\frac{1}{108}=\frac{1}{36}\,.$$ ■

問題 106 (Italy 1993)

a,b,c は実数で，$0 \leqq a \leqq 1,\ 0 \leqq b \leqq 1,\ 0 \leqq c \leqq 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2 \leqq a^2b+b^2c+c^2a+1\,.$$

解 $$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-(a^2b+b^2c+c^2a) &= a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a) \\ &\leqq a(1-b)+b(1-c)+c(1-a) \\ &= a+b+c-(ab+bc+ca)\,. \end{aligned}$$

したがって，$a+b+c-(ab+bc+ca) \leqq 1$ を示せばよい．

$$1-(a+b+c)+ab+bc+ca = (1-a)(1-b)(1-c)+abc \geqq 0$$

より，$a+b+c-(ab+bc+ca) \leqq 1$ は成り立つ． ■

問題 107 (BMO 2001)

a, b, c は負でない実数で，$a+b+c \geqq abc$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2 \geqq \sqrt{3}abc\,.$$

解 $(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx)$ が成り立つから $x=ab,\ y=bc,\ z=ca$ とおくと

$$ab+bc+ca \geqq \sqrt{3abc(a+b+c)}\,.$$

したがって

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &\geqq ab+bc+ca \\ &\geqq \sqrt{3abc(a+b+c)} \\ &\geqq \sqrt{3abc\cdot abc} \\ &= \sqrt{3}abc\,. \end{aligned}$$

■

類題 (Ireland 1997)

a, b, c は負でない実数で，$a+b+c \geqq abc$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2 \geqq abc\,.$$

問題 107 より，$a^2+b^2+c^2 \geqq \sqrt{3}abc \geqq abc$．

問題 108 (Belarus 1996)

x, y, z は正の実数で，$x+y+z=\sqrt{xyz}$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$xy+yz+zx \geqq 9(x+y+z)\,.$$

解 1 $xy+yz+zx \geqq 9(x+y+z)$

$$\iff xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqq 9(x+y+z)$$

$$\iff (x+y+z)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqq 9(x+y+z) \quad (\quad xyz=(x+y+z)^2 \quad \text{を用いた})$$

$$\iff (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqq 9\,.$$

したがって

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqq 9$$

を示せばよく，これはコーシー・シュワルツの不等式より

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqq \left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{y}\cdot\sqrt{\frac{1}{y}}+\sqrt{z}\cdot\sqrt{\frac{1}{z}}\right)^2 = 9\,. \quad \blacksquare$$

解 2　$X=\sqrt[4]{\dfrac{yz}{x^3}},\ Y=\sqrt[4]{\dfrac{zx}{y^3}},\ Z=\sqrt[4]{\dfrac{xy}{z^3}}$

すなわち

$$x=\frac{1}{X^2YZ},\ \ y=\frac{1}{XY^2Z},\ \ z=\frac{1}{XYZ^2}$$

とおく．

$x=\dfrac{1}{X^2YZ},\ y=\dfrac{1}{XY^2Z},\ z=\dfrac{1}{XYZ^2}$ を条件式 $x+y+z=\sqrt{xyz}$ に代入すると

$$XY+YZ+ZX=1$$

となる．また，証明すべき不等式は $X+Y+Z \geqq 9XYZ(XY+YZ+ZX)$ すなわち

$$X+Y+Z \geqq 9XYZ$$

となる．コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}\frac{X+Y+Z}{XYZ} &= (X+Y+Z)\frac{XY+YZ+ZX}{XYZ} = (X+Y+Z)\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}\right)\\ &\geqq 9\,.\end{aligned}$$

よって，$X+Y+Z \geqq 9XYZ$．　$\blacksquare$

問題 109　(Poland 1991)

x, y, z は実数で，$x^2+y^2+z^2=2$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$x+y+z \leqq 2+xyz\,.$$

解　$2xy \leqq x^2+y^2 \leqq x^2+y^2+z^2=2$ より $xy \leqq 1$.

$(x+y+z-xyz)^2 \leqq 4$ を示す．コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}(x+y+z-xyz)^2 &= [(x+y)+z(1-xy)]^2 \\ &\leqq \left[(x+y)^2+z^2\right]\left[1^2+(1-xy)^2\right] \\ &= 2(1+xy)\left[2(1-xy)+x^2y^2\right] \\ &= 4(1-x^2y^2)+2(1+xy)x^2y^2 \\ &= 4-2(1-xy)x^2y^2 \leqq 4\,.\end{aligned}$$

よって，$x+y+z-xyz \leqq 2$.　■

問題 110　(Vietnam 2002)

a, b, c は実数で，$a^2+b^2+c^2=9$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$2(a+b+c)-abc \leqq 10\,.$$

解　一般性を失うことなく $|a| \leqq |b| \leqq |c|$ と仮定することができる.

$9=a^2+b^2+c^2 \leqq 3c^2$ より $3 \leqq c^2$. よって，$2ab \leqq a^2+b^2=9-c^2 \leqq 6$ より $ab \leqq 3$.
コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}[2(a+b+c)-abc]^2 &= [2(a+b)+c(2-ab)]^2 \\ &\leqq \left[(a+b)^2+c^2\right]\left[2^2+(2-ab)^2\right] \\ &= (9+2ab)(8-4ab+a^2b^2) \\ &= 2(ab)^3+(ab)^2-20ab+72 \\ &= 2(ab)^3+(ab)^2-20ab+72-100+100 \\ &= (ab+2)^2(2ab-7)+100 \\ &\leqq 100\,.\end{aligned}$$

よって，$2(a+b+c)-abc \leqq 10$.　■

問題 111　(Mongolia 1991)

a, b, c は実数で，$a^2+b^2+c^2=2$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$|a^3+b^3+c^3-abc| \leqq 2\sqrt{2}\,.$$

解　同次化 (Homonization) して

$$|a^3+b^3+c^3-abc| \leqq 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
&\iff (a^3+b^3+c^3-abc)^2 \leqq 8 = (a^2+b^2+c^2)^3\\
&\iff 3(a^4b^2+a^4c^2+b^4a^2+b^4c^2+c^4a^2+c^4b^2)+2(a^4bc+b^4ca+c^4ab)\\
&\qquad +5a^2b^2c^2-2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) \geqq 0\\
&\iff (a^4b^2-2a^3b^3+a^2b^4)+(b^4c^2-2b^3c^3+b^2c^4)+(c^4a^2-2c^3a^3+a^4c^2)\\
&\qquad +(a^4b^2+2a^4bc+a^4c^2)+(b^4a^2+2b^4ac+b^4c^2)+(c^4a^2+2c^4ab+c^4b^2)\\
&\qquad\quad +(a^4b^2+a^4c^2+b^4a^2+b^4c^2+c^4a^2+c^4b^2)+5a^2b^2c^2 \geqq 0\\
&\iff a^2b^2(a-b)^2+b^2c^2(b-c)^2+c^2a^2(c-a)^2\\
&\qquad +a^4(b+c)^2+b^4(c+a)^2+c^4(a+b)^2\\
&\qquad\quad +(a^4b^2+a^4c^2+b^4a^2+b^4c^2+c^4a^2+c^4b^2)+5a^2b^2c^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

より，$|a^3+b^3+c^3-abc| \leqq 2\sqrt{2}$ は成り立つ． ■

[注]　a, b, c は実数で，$a^2+b^2+c^2=2$ を満たすとき，次の不等式が成り立つ．

$$|a^3+b^3+c^3-2abc| \leqq 2\sqrt{2}\,.$$

$$\begin{aligned}
&|a^3+b^3+c^3-2abc| \leqq 2\sqrt{2}\\
&\iff (a^3+b^3+c^3-2abc)^2 \leqq 8 = (a^2+b^2+c^2)^3\\
&\iff 3(a^4b^2+a^4c^2+b^4a^2+b^4c^2+c^4a^2+c^4b^2)+4(a^4bc+b^4ca+c^4ab)\\
&\qquad +2a^2b^2c^2-2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) \geqq 0\\
&\iff (a^4b^2-2a^3b^3+a^2b^4)+(b^4c^2-2b^3c^3+b^2c^4)+(c^4a^2-2c^3a^3+c^2a^4)\\
&\qquad +2(a^4b^2+2a^4bc+a^4c^2)+2(b^4a^2+2b^4ac+b^4c^2)+2(c^4a^2+2c^4ab+c^4b^2)\\
&\qquad\quad +2a^2b^2c^2 \geqq 0\\
&\iff a^2b^2(a-b)^2+b^2c^2(b-c)^2+c^2a^2(c-a)^2\\
&\qquad +2a^4(b+c)^2+2b^4(c+a)^2+2c^4(a+b)^2+2a^2b^2c^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

より，$|a^3+b^3+c^3-2abc| \leqq 2\sqrt{2}$ は成り立つ． □

問題 112　(Vietnam 1996)

a, b, c が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geqq \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)\,.$$

解 $(yanagita)$　(i) $a+b+c=0$ の場合

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geqq \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)\\
\iff &(-c)^4+(-a)^4+(-b)^4 \geqq \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)\\
\iff &a^4+b^4+c^4 \geqq 0
\end{aligned}
$$

より，不等式は成り立つ．

(ii) $a+b+c \fallingdotseq 0$ の場合

$p=\dfrac{a}{t}$，$q=\dfrac{b}{t}$，$r=\dfrac{c}{t}$，$t=a+b+c \fallingdotseq 0$ とおくと，$p+q+r=1$ が成り立ち

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geqq \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)\\
\iff &(tp+tq)^4+(tq+tr)^4+(tr+tp)^4 \geqq \frac{4}{7}(t^4p^4+t^4q^4+t^4r^4)\\
\iff &(p+q)^4+(q+r)^4+(r+p)^4 \geqq \frac{4}{7}(p^4+q^4+r^4)\,.
\end{aligned}
$$

また，一般性を失うことなく $p \geqq q \geqq r$ と仮定できる．

$$
f(p,\ q,\ r)=(p+q)^4+(q+r)^4+(r+p)^4-\frac{4}{7}(p^4+q^4+r^4)\,,
$$

$$
h(p,\ q,\ r)=f(p,\ q,\ r)-f\left(p,\ \frac{q+r}{2},\ \frac{q+r}{2}\right)
$$

とおくと

$$
f\left(p,\ \frac{q+r}{2},\ \frac{q+r}{2}\right)=2\left(p+\frac{q+r}{2}\right)^4+(q+r)^4-\frac{4}{7}\left[p^4+2\left(\frac{q+r}{2}\right)^4\right]
$$

より

$$
h(p,\ q,\ r)=(p+q)^4+(r+p)^4-2\left(p+\frac{q+r}{2}\right)^4-\frac{4}{7}\left[q^4+r^4-2\left(\frac{q+r}{2}\right)^4\right].
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
x^4+y^4-2\left(\frac{x+y}{2}\right)^4&=\frac{1}{8}(7x^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3+7y^4)\\
&=\frac{1}{8}(x-y)^2(7x^2+10xy+7y^2)
\end{aligned}
$$

を使うと

$$
(p+q)^4+(r+p)^4-2\left(p+\frac{q+r}{2}\right)^4
$$

$$= \frac{1}{8}\left[(p+q)-(p+r)\right]^2\left[7(p+q)^2+10(p+q)(p+r)+7(p+r)^2\right]$$
$$= \frac{1}{8}(q-r)^2\left(24p^2+24pq+24pr+7q^2+10qr+7r^2\right),$$
$$q^4+r^4-2\left(\frac{q+r}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}(q-r)^2(7q^2+10qr+7r^2).$$

よって

$$\begin{aligned} h(p,\ q,\ r) &= \frac{1}{8}(q-r)^2\left(24p^2+24pq+24pr+7q^2+10qr+7r^2\right) \\ &\qquad -\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{8}(q-r)^2(7q^2+10qr+7r^2) \\ &= \frac{1}{8}(q-r)^2\left[24p(p+q+r)+\frac{3}{7}(7q^2+10qr+7r^2)\right]. \end{aligned}$$

$p \geqq q \geqq r$ より $3p \geqq p+q+r=1$ となるから $24p(p+q+r)=24p>0$ である．
また，$7q^2+10qr+7r^2=5(q+r)^2+2(q^2+r^2)\geqq 0$ が成り立つから $h(p,\ q,\ r)\geqq 0$ すなわち

$$f(p,\ q,\ r) \geqq f\left(p,\ \frac{q+r}{2},\ \frac{q+r}{2}\right).$$

したがって

$$f\left(p,\ \frac{q+r}{2},\ \frac{q+r}{2}\right) \geqq 0$$

を示せばよい．$t=\frac{q+r}{2}$ とおくと，$p+2t=1$ から $p=1-2t$. これを使うと

$$\begin{aligned} f\left(p,\ \frac{q+r}{2},\ \frac{q+r}{2}\right) &= f(1-2t,\ t,\ t) \\ &= 2(1-t)^4+(2t)^4-\frac{4}{7}\left[(1-2t)^4+2t^4\right] \\ &= \frac{2}{7}\left(27t^4+36t^3-6t^2-12t+5\right) \\ &= \frac{2}{7}\left[3(t+1)^2(3t-1)^2+2\right] > 0. \end{aligned}$$

■

問題 113　(Latvia 2002)

a, b, c, d は正の実数で，$\dfrac{1}{1+a^4}+\dfrac{1}{1+b^4}+\dfrac{1}{1+c^4}+\dfrac{1}{1+d^4}=1$ のとき，次の不等式を証明せよ.

$$abcd \geqq 3.$$

解 1　$p=\dfrac{1}{1+a^4}$, $q=\dfrac{1}{1+b^4}$, $r=\dfrac{1}{1+c^4}$, $s=\dfrac{1}{1+d^4}$ とおくと，$p+q+r+s=1$.
このとき

$$a^4=\frac{1-p}{p}=\frac{q+r+s}{p},\ \ b^4=\frac{r+s+p}{q},\ \ c^4=\frac{s+p+q}{r},\ \ d^4=\frac{p+q+r}{s}\,.$$

証明すべき不等式 $a^4b^4c^4d^4 \geqq 3^4$ は

$$\frac{q+r+s}{p}\cdot\frac{r+s+p}{q}\cdot\frac{s+p+q}{r}\cdot\frac{p+q+r}{s}\geqq 81$$

すなわち

$$(p+q+r)(q+r+s)(r+s+p)(s+p+q)\geqq 81pqrs$$

となる．これは，相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}(p+q+r)(q+r+s)(r+s+p)(s+p+q) &\geqq 3\sqrt[3]{pqr}\cdot 3\sqrt[3]{qrs}\cdot 3\sqrt[3]{rsp}\cdot 3\sqrt[3]{spq}\\ &=81pqrs\,.\end{aligned}$$

■

解 2　$p=\dfrac{1}{a}$, $q=\dfrac{1}{b}$, $r=\dfrac{1}{c}$, $s=\dfrac{1}{d}$ とおくと

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1\\ \iff &\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4}+1}+\frac{\frac{1}{b^4}}{\frac{1}{b^4}+1}+\frac{\frac{1}{c^4}}{\frac{1}{c^4}+1}+\frac{\frac{1}{d^4}}{\frac{1}{d^4}+1}=1\\ \iff &\frac{p^4}{p^4+1}+\frac{q^4}{q^4+1}+\frac{r^4}{r^4+1}+\frac{s^4}{s^4+1}=1\,.\end{aligned}$$

補助定理 1 を使うと

$$\begin{aligned}1&=\frac{(p^2)^2}{p^4+1}+\frac{(q^2)^2}{q^4+1}+\frac{(r^2)^2}{r^4+1}+\frac{(s^2)^2}{s^4+1}\\ &\geqq\frac{(p^2+q^2+r^2+s^2)^2}{p^4+q^4+r^4+s^4+4}\,.\end{aligned}$$

ゆえに

$$p^4+q^4+r^4+s^4+4\geqq(p^2+q^2+r^2+s^2)^2\,,$$

$$2\geqq p^2q^2+p^2r^2+p^2s^2+q^2r^2+q^2s^2+r^2s^2\,.$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$2\geqq p^2q^2+p^2r^2+p^2s^2+q^2r^2+q^2s^2+r^2s^2$$

$$\overset{AM \geqq GM}{\geqq} \quad 6\sqrt[6]{p^2q^2 \cdot p^2r^2 \cdot p^2s^2 \cdot q^2r^2 \cdot q^2s^2 \cdot r^2s^2} = 6pqrs\,.$$

したがって，$pqrs \leqq \frac{1}{3}$ から $abcd \geqq 3$. ■

問題 114 (Proposed for 1999 USAMO)

x, y, z は実数で，$x>1$, $y>1$, $z>1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \geqq (xyz)^{xy+yz+zx}\,.$$

解 一般性を失うことなく $x \geqq y \geqq z$ と仮定できる.

$$\begin{aligned}
& x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \geqq (xyz)^{xy+yz+zx} \\
\Longleftrightarrow\ & (x^2+2yz)\log x + (y^2+2zx)\log y + (z^2+2xy)\log z \\
& \geqq (xy+yz+zx)(\log x + \log y + \log z) \\
\Longleftrightarrow\ & (x^2+yz-xy-zx)\log x + (y^2+zx-xy-yz)\log y \\
& + (z^2+xy-yz-zx)\log z \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x-y)(x-z)\log x + (y-x)(y-z)\log y + (z-x)(z-y)\log z \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x-y)\left[(x-z)\log x - (y-z)\log y\right] + (x-z)(y-z)\log z \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

$\log x > 0$, $\log y > 0$, $\log z > 0$ で $x \geqq y \geqq z$ であるから

$$\left[(x-z)\log x - (y-z)\log y\right] \geqq 0,\ (x-z)(y-z)\log z \geqq 0$$

が成り立つ.

よって

$$(x-y)\left[(x-z)\log x - (y-z)\log y\right] + (x-z)(y-z)\log z \geqq 0\,.$$ ■

問題 115 a, b, c が正の実数のとき， 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1) $a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2 \geqq 2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$.

(2) $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geqq 2(ab+bc+ca)$.

(3) $a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+2 \geqq 2(ab+bc+ca)$.

解 (1) Schr の不等式を利用する.

「$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ のとき，不等式

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geqq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

が成り立つ.」ことから，$x=a^2,\ y=b^2,\ z=c^2$ とおくと

$$\begin{aligned}a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2 &\geqq a^2b^2(a^2+b^2)+b^2c^2(b^2+c^2)+c^2a^2(c^2+a^2)\\ &\geqq a^2b^2\cdot 2ab+b^2c^2\cdot 2bc+c^2a^2\cdot 2ca\\ &=2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)\,.\end{aligned}$$

(2)　(1) の不等式から，$p>0,\ q>0,\ r>0$ のとき，不等式

$$p^6+q^6+r^6+3p^2q^2r^2\geqq 2(p^3q^3+q^3r^3+r^3p^3)$$

が成り立つから，$p=\sqrt[3]{a},\ q=\sqrt[3]{b},\ r=\sqrt[3]{c}$ とおくと

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geqq 2(ab+bc+ca)\,.\quad\cdots\cdots(*)$$

相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$\begin{aligned}2abc+1=abc+abc+1 &\geqq 3\sqrt[3]{abc\cdot abc\cdot 1}\\ &=3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\end{aligned}$$

が成り立つから，$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geqq 2(ab+bc+ca)$ を得る.

(3)　(2) の不等式 $(*)$ から

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geqq 2(ab+bc+ca)\,.$$

相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$a^2b^2c^2+2=a^2b^2c^2+1+1\geqq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

が成り立つから，$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+2\geqq 2(ab+bc+ca)$ を得る. ■

問題 116　(APMO 2004)

a,b,c が正の実数のとき， 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geqq 9(ab+bc+ca)\,.$$

解 1　左辺を展開すると

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)=a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2+b^2+c^2)+8\,.$$

右辺の式に現れている $a^2+b^2+c^2,\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ を評価する.

$$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca \quad\cdots\cdots①$$

$a^2b^2+1\geqq 2ab,\ b^2c^2+1\geqq 2bc,\ c^2a^2+1\geqq 2ca$ を使うと

$$(a^2b^2+1)+(b^2c^2+1)+(c^2a^2+1)\geqq 2(ab+bc+ca) \quad\cdots\cdots②$$

ここで，Schr の不等式を利用する．

「$x,\ y,\ z \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3+y^3+z^3+3xyz \geqq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$ が成り立つ.」ことから，$p>0,\ q>0,\ r>0$ として $x=p^2,\ y=q^2,\ z=r^2$ とおくと

$$\begin{aligned}p^6+q^6+r^6+3p^2q^2r^2 &\geqq p^2q^2(p^2+q^2)+q^2r^2(q^2+r^2)+r^2p^2(r^2+p^2)\\&\geqq p^2q^2\cdot 2pq+q^2r^2\cdot 2qr+r^2p^2\cdot 2rp\\&=2(p^3q^3+q^3r^3+r^3p^3)\,.\end{aligned}$$

ここで，$p=\sqrt[3]{a},\ q=\sqrt[3]{b},\ r=\sqrt[3]{c}$ とおくと

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geqq 2(ab+bc+ca)$$

が成り立つ．

$$a^2b^2c^2+2=a^2b^2c^2+1+1 \geqq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

より

$$\begin{aligned}a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+2 &\geqq a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\\&\geqq 2(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

よって

$$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+2 \geqq 2(ab+bc+ca) \qquad \cdots\cdots③$$

3×①+2×②+③ から題意の不等式を得る。 ■

解 2　コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}(a^2+2)(b^2+2)&=(a^2+1+1)(b^2+1+1)\\&=(a^2+1)(1+b^2)+a^2+b^2+3\\&\geqq (a+b)^2+\frac{1}{2}(a+b)^2+3=\frac{3}{2}\left[(a+b)^2+2\right]\,.\end{aligned}$$

これを利用して

$$\begin{aligned}(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) &\geqq \frac{3}{2}\left[(a+b)^2+2\right](2+c^2)\\&\geqq \frac{3}{2}\left[\sqrt{2}(a+b)+\sqrt{2}c\right]^2=3(a+b+c)^2\end{aligned}$$

したがって，$3(a+b+c)^2 \geqq 9(ab+bc+ca)$ すなわち $(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$ を示せばよいが

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geqq 0$$

から，成り立つ． ■

問題 117　(USA 2004)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geqq (a + b + c)^3\,.$$

解　$a^3 - 1$ と $a^2 - 1$ の符号は一致するから $(a^3 - 1)(a^2 - 1) \geqq 0\,.$
ゆえに

$$a^5 - a^2 + 1 \geqq a^3 \qquad \text{より} \quad a^5 - a^2 + 3 \geqq a^3 + 2\,.$$

同様にして

$$b^5 - b^2 + 3 \geqq b^3 + 2,\ c^5 - c^2 + 3 \geqq c^3 + 2\,.$$

補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
&(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3)\\
&\geqq (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)\\
&= (a^3 + 1 + 1)(1 + b^3 + 1)(1 + 1 + c^3)\\
&\geqq \left(\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} + \sqrt[3]{1 \cdot b^3 \cdot 1} + \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot c^3}\right)^3 = (a + b + c)^3\,.
\end{aligned}$$

■

[注]　$(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \geqq (a + b + c)^3$ は次のように示すことができる．
相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{a^3}{a^3 + 2} + \frac{1}{b^3 + 2} + \frac{1}{c^3 + 2} \geqq \frac{3a}{\sqrt[3]{(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)}},$$

$$\frac{1}{a^3 + 2} + \frac{b^3}{b^3 + 2} + \frac{1}{c^3 + 2} \geqq \frac{3b}{\sqrt[3]{(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)}},$$

$$\frac{1}{a^3 + 2} + \frac{1}{b^3 + 2} + \frac{c^3}{c^3 + 2} \geqq \frac{3c}{\sqrt[3]{(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)}}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$3 \geqq \dfrac{3(a + b + c)}{\sqrt[3]{(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)}}$ ゆえに $(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \geqq (a + b + c)^3$.　□

問題 118　(USA 2001)

a, b, c は実数で，$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4,\ a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$0 \leqq ab + bc + ca - abc \leqq 2\,.$

解 1　(i) $0 \leqq ab+bc+ca-abc$ の証明

$$1=\frac{a^2+b^2+c^2+abc}{4} \geqq \sqrt[4]{(abc)^3} \text{ から } abc \leqq 1\,.$$

したがって，$ab+bc+ca \geqq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geqq 3abc \geqq abc$　　$\therefore$　$ab+bc+ca \geqq abc$.

(ii)　(i) で $abc \leqq 1$ がいえたから，a, b, c のうち 2 つは 1 以下か 1 以上となる．b と c がそうであるとすると，$(b-1)(c-1) \geqq 0$.

$$4=a^2+b^2+c^2+abc \geqq a^2+2bc+abc$$

から $4-a^2 \geqq (a+2)bc$．よって $2-a \geqq bc$ を得る．すると

$$ab+bc+ca-abc \leqq ab+2-a+ca-abc$$

が成り立つから，$ab+2-a+ca-abc \leqq 2$ を示せばよい．この不等式は

$$ab+2-a+ca-abc \leqq 2 \iff a(bc-b-c+1) \geqq 0 \iff a(b-1)(c-1) \geqq 0$$

より成立する．■

解 2　$ab+bc+ca-abc \leqq 2$ の証明

$$a^2+b^2+c^2+abc=4 \iff \left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2+2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}=1\,.$$

$$\frac{a}{2}=\cos\alpha,\ \frac{b}{2}=\cos\beta,\ \frac{c}{2}=\cos\gamma$$

とおける．ただし，$0 \leqq \alpha,\ \beta,\ \gamma \leqq \frac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$(問題 28 のあとのまとめ参照).
さて，証明すべき不等式は

$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqq \frac{1}{2}$$

となるので

$$\begin{aligned}&\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\&=\cos\alpha(\cos\beta+\cos\gamma)+\cos\beta\cos\gamma(1-2\cos\alpha)\end{aligned}$$

と変形する．

$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$ と仮定しても一般性を失わない．このとき，$3\alpha \geqq \alpha+\beta+\gamma=\pi$ より $\alpha \geqq \frac{\pi}{3}$. ゆえに，$\cos\alpha \leqq \frac{1}{2}$.

$f(x)=\cos x$　$\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ は凹関数であるから，

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma) \leqq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\,.$$

ゆえに

$$\cos\beta+\cos\gamma \leqq \frac{3}{2}-\cos\alpha\,.$$

また

$$\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{2}\left[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\right] \leqq \frac{1}{2}(-\cos\alpha+1)\,.$$

よって

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\
&=\cos\alpha(\cos\beta+\cos\gamma)+\cos\beta\cos\gamma(1-2\cos\alpha)\\
&\leqq \cos\alpha\left(\frac{3}{2}-\cos\alpha\right)+\frac{1-\cos\alpha}{2}(1-2\cos\alpha)\\
&=\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

■

問題 119 (Turkey 1999)

a,b,c は実数で，$c \geqq b \geqq a \geqq 0$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geqq 60abc\,.$$

解 $x=b-a \geqq 0,\ y=c-b \geqq 0$ とおくと，$b=a+x,\ c=b+y=a+x+y$ となる.

$$\begin{aligned}
&(a+3b)(b+4c)(c+2a)-60abc\\
&=(4a+3x)(5a+5x+4y)(3a+x+y)-60a(a+x)(a+x+y)\\
&=5a^2x+20ax^2+15x^3+8a^2y+27axy+27x^2y+16ay^2+12xy^2\\
&\geqq 0\,.
\end{aligned}$$

よって

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geqq 60abc\,.$$

■

問題 120　a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$4(a+b+c)^3 \geqq 27(ab^2+bc^2+ca^2+abc)\,.$$

解 1　一般性を失うことなく $a = \min(a,\ b,\ c)$ と仮定できる．

$x = b - a \geqq 0,\ y = c - a \geqq 0$ とおくと

$$\begin{aligned}
&4(a+b+c)^3 \geqq 27(ab^2+bc^2+ca^2+abc)\\
\iff &4(3a+x+y)^3 \geqq 27\left[a(a+x)^2+(a+x)(a+y)^2+(a+y)a^2+a(a+x)(a+y)\right]\\
\iff &9(x^2-xy+y^2)a+4x^3+12x^2y-15xy^2+4y^3 \geqq 0\\
\iff &9(x^2-xy+y^2)a+(2x-y)^2(x+4y) \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

$9(x^2-xy+y^2)a+(2x-y)^2(x+4y) \geqq 0$ は明らかに成り立つから

$$4(a+b+c)^3 \geqq 27(ab^2+bc^2+ca^2+abc)\,. \qquad \blacksquare$$

解 2　一般性を失うことなく $\min(a,\ b,\ c) \leqq b \leqq \max(a,\ b,\ c)$ と仮定できる．

このとき，$a(b-a)(b-c) \leqq 0$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}
a(b-a)(b-c) \leqq 0 &\iff ab^2+ca^2 \leqq a^2b+abc\\
&\iff ab^2+bc^2+ca^2+abc \leqq a^2b+bc^2+2abc\\
&\iff ab^2+bc^2+ca^2+abc \leqq b(a+c)^2\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$b(a+c)^2 \leqq 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}
4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 &= 4\left(\frac{\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}+b}{3}\right)^3\\
&\geqq 4\left(\sqrt[3]{\frac{a+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\cdot b}\right)^3 = b(a+c)^2\,.
\end{aligned}$$

よって

$$b(a+c)^2 \leqq 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\,. \qquad \blacksquare$$

[注]　a, b, c が負でない実数のとき，問題 120 より $4(c+b+a)^3 \geqq 27(cb^2+ba^2+ac^2+cba)$ すなわち $4(a+b+c)^3 \geqq 27(a^2b+b^2c+c^2a+abc)$ が成り立つ．

問題 121　(Macedonia 1999)

a, b, c は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a+b+c+\frac{1}{abc} \geqq 4\sqrt{3}\,.$$

解 1　相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$1 = a^2+b^2+c^2 \geqq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

から

$$\frac{1}{(abc)^2} \geqq 27\,.$$

再び，相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}
a+b+c+\frac{1}{abc} &= a+b+c+\underbrace{\frac{1}{9abc}+\frac{1}{9abc}+\cdots+\frac{1}{9abc}}_{9} \\
&\geqq 12\sqrt[12]{\frac{abc}{9^9(abc)^9}} = 12\sqrt[12]{\frac{1}{9^9(abc)^8}} \\
&\geqq 12\sqrt[12]{\frac{(3^3)^4}{9^9}} \quad \left(\quad \frac{1}{(abc)^2} \geqq 27 \quad \text{を用いた}\right) \\
&= 12\sqrt[12]{\frac{1}{3^6}} \\
&= 4\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

よって

$$a+b+c+\frac{1}{abc} \geqq 4\sqrt{3}. \qquad \blacksquare$$

解 2 $a+b+c+\dfrac{1}{abc} \geqq 4\sqrt{3}$

$$\iff abc(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)^2 \geqq 4\sqrt{3}abc\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\iff \left[abc(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)^2\right]^2 \geqq 48(abc)^2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\iff \sum_{cyclic} a^8 + 4\sum_{sym} a^6b^2 + 2\sum_{cyclic} a^6bc + 2\sum_{sym} a^5b^2c + 6\sum_{cyclic} a^4b^4 + 4\sum_{sym} a^4b^3c$$
$$+ 13\sum_{cyclic} a^4b^2c^2 + 6\sum_{cyclic} a^3b^3c^2 \geqq 48\sum_{cyclic} a^4b^2c^2$$

$$\iff \sum_{cyclic} a^8 + 4\sum_{sym} a^6b^2 + 2\sum_{cyclic} a^6bc + 2\sum_{sym} a^5b^2c + 6\sum_{cyclic} a^4b^4$$
$$+ 4\sum_{sym} a^4b^3c + 6\sum_{cyclic} a^3b^3c^2 \geqq 35\sum_{cyclic} a^4b^2c^2$$

$$\iff [(8,\ 0,\ 0)]+8[(6,\ 2,\ 0)]+2[(6,\ 1,\ 1)]+4[(5,\ 2,\ 1)]+6[(4,\ 4,\ 0)]$$
$$+8[(4,\ 3,\ 1)]+6[(3,\ 3,\ 2)] \geqq 35[(4,\ 2,\ 2)]\,.$$

$[(3,\ 3,\ 2)]$ を除いて, $[(8,\ 0,\ 0)]$, $[(6,\ 2,\ 0)]$, $[(6,\ 1,\ 1)]$, $[(5,\ 2,\ 1)]$, $[(4,\ 4,\ 0)]$, $[(4,\ 3,\ 1)]$ はすべて $[(4,\ 2,\ 2)]$ 以上である.

$$[(6,\ 2,\ 0)]+[(3,\ 3,\ 2)] \geqq 2\left[\left(\frac{6+3}{2},\ \frac{2+3}{2},\ \frac{0+2}{2}\right)\right] = 2\left[\left(\frac{9}{2},\ \frac{5}{2}\ \ 1\right)\right] \geqq 2[(4,\ 2,\ 2)]$$

から

$$6[(6,\ 2,\ 0)]+6[(3,\ 3,\ 2)] \geqq 12[(4,\ 2,\ 2),$$

$$[(8,\ 0,\ 0)] \geqq [(4,\ 2,\ 2)],\ 2[(6,\ 2,\ 0)] \geqq 2[(4,\ 2,\ 2)],$$

$$2[(6,\ 1,\ 1)] \geqq 2[(4,\ 2,\ 2)],\ 4[(5,\ 2,\ 1)] \geqq 4[(4,\ 2,\ 2)],$$

$$6[(4,\ 4,\ 0)] \geqq 6[(4,\ 2,\ 2)],\ 8[(4,\ 3,\ 1)] \geqq 8[(4,\ 2,\ 2)].$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$[(8,\ 0,\ 0)]+8[(6,\ 2,\ 0)]+2[(6,\ 1,\ 1)]+4[(5,\ 2,\ 1)]+6[(4,\ 4,\ 0)]+8[(4,\ 3,\ 1)]$$
$$+6[(3,\ 3,\ 2)] \geqq 35[(4,\ 2,\ 2)]\,.$$

■

問題 122 (Poland 1999)

a, b, c は正の実数で, $a+b+c=1$ を満たすとき, 次の不等式を証明せよ.

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leqq 1\,.$$

解 1

$$
\begin{aligned}
& a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leqq 1 \\
\iff & a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leqq (a+b+c)^2 \\
\iff & \sqrt{3abc} \leqq ab+bc+ca \\
\iff & 3abc \leqq (ab+bc+ca)^2 \\
\iff & 3abc(a+b+c) \leqq (ab+bc+ca)^2 \\
\iff & 3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab) \leqq (ab+bc+ca)^2
\end{aligned}
$$

最後の不等式は $3(xy+yz+zx) \leqq (x+y+z)^2$ で $x=ab,\ y=bc,\ z=ca$ とおけば得られる. ■

解 2　$x=\sqrt{\dfrac{bc}{a}}>0,\ y=\sqrt{\dfrac{ca}{b}}>0,\ z=\sqrt{\dfrac{ab}{c}}>0$ すなわち $a=yz,\ b=zx,\ c=xy$ とおくと

$$xy+yz+zx=1\,.$$

証明すべき不等式は

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\sqrt{3}xyz \leqq 1$$

で

$$
\begin{aligned}
& x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\sqrt{3}xyz \leqq 1 \\
\iff & x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xy\cdot yz+2yz\cdot zx+2zx\cdot xy+2\sqrt{3}xyz \\
& \leqq 1+2xyz(x+y+z) \\
\iff & (xy+yz+zx)^2+2\sqrt{3}xyz \leqq 1+2xyz(x+y+z) \\
\iff & 1+2\sqrt{3}xyz \leqq 1+2xyz(x+y+z) \\
\iff & \sqrt{3} \leqq x+y+z\,.
\end{aligned}
$$

最後の不等式は

$$3=3(xy+yz+zx) \leqq (x+y+z)^2 \quad \text{より} \quad \sqrt{3} \leqq x+y+z\,.$$ ■

［注］　$xy+yz+zx=1$ より $x=\tan\dfrac{\alpha}{2},\ y=\tan\dfrac{\beta}{2},\ z=\tan\dfrac{\gamma}{2}\ \left(0<\alpha,\ \beta,\gamma<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\tan\frac{\gamma}{2}=z=\frac{1-xy}{x+y}=\frac{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}}=\frac{1}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

$0 < \dfrac{\gamma}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ すなわち

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi\,.$$

このとき，証明すべき不等式 $x+y+z \geqq \sqrt{3}$ は

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} \geqq \sqrt{3}$$

となる．$f(x) = \tan\dfrac{x}{2}\ (0<x<\pi)$ とおくと，$f''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{-3}\sin\dfrac{x}{2} > 0\,.$
$f(x)$ は凸関数であるから，

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma) \geqq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\,. \qquad \blacksquare$$

問題 123　(Macsdonia 2000)

x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^2+y^2+z^2 \geqq \sqrt{2}(xy+yz)\,.$$

解 1

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-\sqrt{2}(xy+yz) &= y^2-\sqrt{2}(x+z)y+x^2+z^2 \\ &= \left[y-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+z)\right]^2 - \frac{(x+z)^2}{2} + x^2+z^2 \\ &= \left[y-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+z)\right]^2 + \frac{(x-z)^2}{2} \geqq 0\,. \end{aligned}$$

ゆえに

$$x^2+y^2+z^2 \geqq \sqrt{2}(xy+yz)\,. \qquad \blacksquare$$

解 2

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= \left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)+\left(\frac{1}{2}y^2+z^2\right) \\ &\overset{AM\geqq GM}{\geqq} 2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{2}y^2}+2\sqrt{\frac{1}{2}y^2\cdot z^2} \\ &= \sqrt{2}(xy+yz)\,. \end{aligned}$$

よって

$$x^2+y^2+z^2 \geqq \sqrt{2}(xy+yz)\,. \qquad \blacksquare$$

問題 124 (Surányi's inequality) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^n + n\prod_{i=1}^{n} x_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\right).$$

解 数学的帰納法で証明する．

(i) $n=2$ のとき，証明すべき不等式は，$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 \geqq (x_1+x_2)^2$ で，等号が成り立つ．

(ii) n のとき成り立つと仮定して，$n+1$ のときを考える．不等式は対称的で同次式であるから

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n \geqq x_{n+1},\ x_1+x_2+\cdots+x_n = n$$

と仮定できる．証明すべき不等式は，$x = x_{n+1}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} + x^{n+1}\right) + (n+1)x\prod_{i=1}^{n} x_i \geqq (n+x)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n + x^n\right)\\
\iff &n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} + x^{n+1}\right) + xn\prod_{i=1}^{n} x_i + x\prod_{i=1}^{n} x_i - (n+x)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n + x^n\right) \geqq 0\\
\iff &n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} + x^{n+1}\right) + x\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^n + n\prod_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\right]\\
&\quad - x\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^n - n\sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\right] + x\prod_{i=1}^{n} x_i - (n+x)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n + x^n\right) \geqq 0\\
\iff &n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i^n\right) - nx\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n - \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\right)\\
&\quad + x\left[x_1x_2\cdots x_n - nx^{n-1} + (n-1)x^n\right]\\
&\qquad + x\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^n + n\prod_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\right] \geqq 0.
\end{aligned}$$

仮定から $(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^n + n\prod_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1} \geqq 0$ が成り立つから

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i^n - x\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n - \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\right) \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

と

$$x_1x_2\cdots x_n - nx^{n-1} + (n-1)x^n \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(\bigstar\bigstar)$$

を示せば，$n+1$ のときも不等式が成り立ち，$n \geqq 2$ を満たすすべての自然数に対して不等式が成り立つことになり証明が終わる．

$(\bigstar)$ の証明　$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$，$x_1^{n-1} \geqq x_2^{n-1} \geqq \cdots \geqq x_n^{n-1}$ であるから，チェビシェフの不等式より

$$n\left(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n\right) \geqq \Big(\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}_{=n}\Big)\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_{n-1}^n\right).$$

よって，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^n - \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1} \geqq 0$ となる．また，$0 < x \leqq x_n \leqq 1$ を使うと

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i^n\right) - x\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n - \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\right) \\
&\geqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i^n\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n - \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} - 2\sum_{i=1}^{n} x_i^n + \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}(x_i - 1)^2 \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

$(\bigstar\bigstar)$ の証明

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n \geqq x > 0$，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ であったから，同次化して

$$x_1x_2\cdots x_n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x^{n-1} + (n-1)x^n \geqq 0$$

を示す．$a_i = \dfrac{x_i}{x}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 1$ のとき

$$a_1a_2\cdots a_n + n - 1 \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を示せばよく，この不等式を数学的帰納法で証明する．

(1^*) $n = 2$ のとき，$a_1a_2 + 1 - (a_1 + a_2) = (a_1 - 1)(a_2 - 1) \geqq 0$ から $a_1a_2 + 1 \geqq a_1 + a_2$．

(2^*) n のとき成り立つと仮定して，$n+1$ のときを考える．

$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq a_{n+1} \geqq 1$ とすると，仮定から

$$a_1a_2\cdots a_n + n - 1 \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,.$$

$g = a_1a_2\cdots a_n (\geqq 1)$ とおくと，$g + n - 1 \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ が成り立つ．

また，(1^*) と同様にして，$ga_{n+1} + 1 \geqq g + a_{n+1}$ が成り立つから

$$ga_{n+1} + n \geqq g + n - 1 + a_{n+1} \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}\,.$$

したがって，$n+1$ のときも成り立つ．

(1^*)，(2^*) から，2 以上の自然数 n について，$a_1a_2\cdots a_n+n-1\geqq a_1+a_2+\cdots+a_n$ が成り立つ． ■

Surányi の不等式は，次のように拡張できる．

> k は実数で，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が正の実数のとき，次の不等式が成り立つ．
>
> $$(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k} + \prod_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right) \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}\right).$$

$k=0$ のとき Surányi の不等式となる．

解　$n+k-1\geqq 0$ のときは，問題 124 の解と同様に示せるので，$n+k-1<0$ とする．数学的帰納法で証明する．

(i) $n=2$ のとき，証明すべき不等式は

$x_1^{2+k}+x_2^{2+k}+x_1x_2(x_1^k+x_2^k)\geqq(x_1+x_2)(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})$ で，等号が成り立つ．

(ii) n のとき成り立つと仮定して，$n+1$ のときを考える．不等式は対称的で同次式であるから

$$x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n\leqq x_{n+1},\ x_1+x_2+\cdots+x_n=n$$

と仮定できる．証明すべき不等式は，$x=x_{n+1}$ とおくと

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k+1}+x^{n+k+1}\right)+x\prod_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^k+x^k\right)\geqq(n+x)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}+x^{n+k}\right)$$

$$\Longleftrightarrow n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k+1}+x^{n+k+1}\right)+x\prod_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} x_i^k+x^{k+1}\prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$-(n+x)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}+x^{n+k}\right)\geqq 0$$

$$\Longleftrightarrow x\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}+\prod_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} x_i^k-n\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}\right]$$

$$+n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k+1}+x^{n+k+1}\right)-x\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}-n\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}\right]$$

$$+x^{k+1}\prod_{i=1}^{n} x_i-(n+x)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}+x^{n+k}\right)\geqq 0$$

$$
\begin{aligned}
\iff x\Bigg[&\underbrace{(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}+\prod_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} x_i^{k}-n\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}}_{\geqq 0}\Bigg]\\
&+n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k+1}-\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}\right)-nx\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}\right)\\
&+x^{k+1}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i-nx^{n-1}+(n-1)x^{n}\right)\geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

仮定から，$(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{n+k}+\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{k}-n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}\geqq 0$ が成り立つから

$$
\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k+1}-\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}-x\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}\right)\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(\bigstar)
$$

と

$$
x_1x_2\cdots x_n-nx^{n-1}+(n-1)x^{n}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(\bigstar\bigstar)
$$

を示せば，$n+1$ のときも不等式が成り立ち，$n\geqq 2$ を満たすすべての自然数に対して不等式が成り立つことになり証明が終わる．

$(\bigstar)$ の証明

$x_1\geqq x_2\geqq\cdots\geqq x_n$，$x_1^{n+k-1}\geqq x_2^{n+k-1}\geqq\cdots\geqq x_n^{n+k-1}$ であるから，チェビシェフの不等式より

$$
\begin{aligned}
n\left(x_1^{n+k}+x_2^{n+k}+\cdots+x_n^{n+k}\right)\leqq&\Big(\underbrace{x_1+x_2+\cdots+x_n}_{=n}\Big)\\
&\times\left(x_1^{n+k-1}+x_2^{n+k-1}+\cdots+x_{n+k-1}^{n}\right).
\end{aligned}
$$

よって，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{n+k}-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}\leqq 0$ と $x\geqq x_n\geqq 1$ を使うと

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k+1}-\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}-x\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}\right)\\
\geqq&\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k+1}-\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}\right)\\
=&\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k+1}-2\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k}+\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}=\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}(x_i-1)^2\geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

(★★) の証明

$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq x$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ であったから，同次化して

$$x_1x_2\cdots x_n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}+(n-1)x^n \leqq 0$$

を示す．$a_i=\dfrac{x_i}{x}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq 1$ のとき

$$a_1a_2\cdots a_n+n-1 \geqq a_1+a_2+\cdots+a_n \qquad \cdots\cdots(*)$$

を示せばよく，この不等式を数学的帰納法で証明する．

(1^*) $n=2$ のとき

$$a_1a_2+1-(a_1+a_2)=(a_1-1)(a_2-1) \geqq 0 \text{ から } a_1a_2+1 \geqq a_1+a_2\,.$$

(2^*) n のとき $(*)$ が成り立つと仮定して，$n+1$ のときを考える．

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq 1$ とすると，仮定から

$$a_1a_2\cdots a_n+n-1 \geqq a_1+a_2+\cdots+a_n\,.$$

$g=a_1a_2\cdots a_n(\leqq 1)$ とおくと，$g+n-1 \geqq a_1+a_2+\cdots+a_n$ となる．(1^*) と同様にして，$ga_{n+1}+1 \geqq g+a_{n+1}$ が成り立つから

$$ga_{n+1}+n \geqq g+n-1+a_{n+1} \geqq 1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}\,.$$

したがって，$n+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(1^*)，(2^*) から，$n \geqq 2$ を満たすすべての自然数に対して $(*)$ は成り立つ． ■

問題 125 (Turkevici's inequality)

a,b,c,d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2\,.$$

解 1　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c \geqq d$ と仮定できる．

$$2(a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd) \geqq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2)$$
$$\iff (a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2+(a^2-d^2)^2+(b^2-d^2)^2 \geqq 2(ab-cd)^2$$

$x^2+y^2 \geqq \dfrac{1}{2}(x+y)^2$ を用いると

$$\begin{aligned}(a^2-d^2)^2+(b^2-d^2)^2 &\geqq \frac{1}{2}(a^2-d^2+b^2-d^2)^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2d^2)^2\\ &\geqq \frac{1}{2}(2ab-2d^2)^2 \geqq \frac{1}{2}(2ab-2cd)^2=2(ab-cd)^2\,.\end{aligned}$$

よって，$(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2+(a^2-d^2)^2+(b^2-d^2)^2 \geqq 2(ab-cd)^2$． ■

解 2　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c \geqq d$ と仮定できる．

$$\begin{aligned} f(a,\ b,\ c,\ d) &= a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-a^2b^2-b^2c^2-c^2d^2-d^2a^2-a^2c^2-b^2d^2 \\ &= a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-a^2c^2-b^2d^2-(a^2+c^2)(b^2+d^2) \end{aligned}$$

とおくと

$$f(\sqrt{ac},\ b,\ \sqrt{ac},\ d) = a^2c^2+b^4+d^4+2abcd-b^2d^2-2ac(b^2+d^2)\,.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} & f(a,\ b,\ c,\ d) - f(\sqrt{ac},\ b,\ \sqrt{ac},\ d) \\ &= a^4+c^4-2a^2c^2-(b^2+d^2)(a^2+c^2-2ac) \\ &= (a^2-c^2)^2-(b^2+d^2)(a-c)^2 \\ &= (a-c)^2\left[(a+c)^2-(b^2+d^2)\right] \\ &= (a-c)^2\left[(a^2-b^2)+(c^2-d^2)+2ac\right] \geqq 0\,. \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ac},\ b,\ \sqrt{ac},\ d) &= a^2c^2+b^4+d^4+2abcd-b^2d^2-2ac(b^2+d^2) \\ &= a^2c^2-2(b^2+d^2-bd)ac+b^4+d^4-b^2d^2 \\ &= \left[ac-(b^2+d^2-bd)\right]^2+2bd(b-d)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

が成り立つから

$$f(a,\ b,\ c,\ d) \geqq f(\sqrt{ac},\ b,\ \sqrt{ac},\ d) \geqq 0. \qquad \blacksquare$$

解 3　問題 124 で，$n=4$ とおくと，$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ が正の実数のとき

$$2\left(\sum_{i=1}^{4} x_i^4 + 2\prod_{i=1}^{4} x_i\right) \geqq \sum_{1 \leqq i<j \leqq 4} x_ix_j(x_i^2+x_j^2)$$

が成り立つ．$x_i^2+x_j^2 \geqq 2x_ix_j$ を使うと

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^4 + 2\prod_{i=1}^{4} x_i \geqq \sum_{1 \leqq i<j \leqq 4} x_i^2x_j^2\,.$$

$x_1=a,\ x_2=b,\ x_3=c,\ x_4=d$ とおけば，証明すべき不等式が得られる．　■

[注] Karamat の不等式を使う別解については，問題 228 参照.

問題 126　([ONI]，Gabriel Dospinescu，Mircea Lascu，Marian Tetiva)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3 \geqq (1+a)(1+b)(1+c)\,.$$

解 1　$f(a,\ b,\ c)=a^2+b^2+c^2+2abc+3-(1+a)(1+b)(1+c)$ とおくと

$$f(a,\ b,\ c)=a^2+b^2+c^2+abc+2-(a+b+c+ab+bc+ca)\,.$$

(i) $a>3$ の場合

$$f(a,\ b+c,\ 0)=a^2+(b+c)^2+2-[a+(b+c)+a(b+c)]$$

を使うと

$$f(a,\ b,\ c)-f(a,\ b+c,\ 0)=b^2+c^2-(b+c)^2+abc-bc=(a-3)bc>0\,.$$

$s=b+c$ とおくと

$$\begin{aligned} f(a,\ s,\ 0)&=a^2+s^2+2-(a+s+as)=s^2-(a+1)s+a^2-a+2\\ &=\left(s-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{3(a-1)^2+4}{4}>0 \end{aligned}$$

となるから，$f(a,\ b,\ c)>f(a,\ s,\ 0)>0\,.$

(ii) $a\leqq 3$ の場合

$m=\dfrac{b+c}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(a,\ m,\ m)&=a^2+2m^2+am^2+2-(a+2m+2am+m^2)\\ &=a^2+2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+a\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+2-\left[a+b+c+ab+ca+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

これを使うと

$$\begin{aligned} f(a,\ b,\ c)-f(a,\ m,\ m)&=b^2+c^2-2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+abc-a\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-\left[bc-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]\\ &=\frac{(b-c)^2}{2}-a\frac{(b-c)^2}{4}+\frac{(b-c)^2}{4}\\ &=\frac{(3-a)(b-c)^2}{4}\geqq 0\,. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(a,\ m,\ m) &= (a+1)m^2 - 2(a+1)m + a^2 - a + 2 \\
&= (a+1)(m-1)^2 + (a-1)^2 \geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

したがって

$$f(a,\ b,\ c) \geqq f(a,\ m,\ m) \geqq 0\,. \qquad \blacksquare$$

解 2　不等式を同値変形する．

$$
\begin{aligned}
& a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geqq (1+a)(1+b)(1+c) \\
\iff & a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 \geqq a + b + c + ab + bc + ca\,.
\end{aligned}
$$

ここで，Turkevici の不等式を用いる．（問題 125 参照．）

「$p,\ q,\ r,\ s$ が正の実数のとき，不等式

$$p^4 + q^4 + r^4 + s^4 + 2pqrs \geqq p^2q^2 + q^2r^2 + r^2s^2 + s^2p^2 + p^2r^2 + q^2s^2$$

が成り立つ．」

から $p = \sqrt{a},\ q = \sqrt{b},\ r = \sqrt{c},\ s = 1$ とおくと

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2\sqrt{abc} \geqq a + b + c + ab + bc + ca.$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$abc + 1 \geqq 2\sqrt{abc}$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 + 2 + abc &\geqq a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2\sqrt{abc} \\
&\geqq a + b + c + ab + bc + ca\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

問題 127　a, b, c は正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\,.$$

解　同次化 (Homonization) する．

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \iff \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5 \geqq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot abc\,.$$

不等式

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5 \geqq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot abc$$

を 条件 $abc=1$ を除いてすべての $a,\ b,\ c$ に対して成り立つことを示す．同次式なので一般性を失うことなく $a+b+c=3$ と仮定することができる．したがって

$$abc(a^2+b^2+c^2) \leqq 3$$

を示せばよい．$f(a,\ b,\ c)=abc(a^2+b^2+c^2)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f\left(a,\ \frac{b+c}{2},\ \frac{b+c}{2}\right)-f(a,\ b,\ c) &= a\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\left[a^2+2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]-abc(a^2+b^2+c^2)\\
&= a^3\left[\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-bc\right]+a\left[2\left(\frac{b+c}{2}\right)^4-bc(b^2+c^2)\right]\\
&= \frac{a^3}{4}(b-c)^2+\frac{a}{8}(b-c)^4 \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$f(a,\ b,\ c) \leqq f\left(a,\ \frac{b+c}{2},\ \frac{b+c}{2}\right).$$

したがって

$$f\left(a,\ \frac{b+c}{2},\ \frac{b+c}{2}\right) \leqq 3$$

を示せばよい．

$t=\dfrac{b+c}{2}$ とおくと，$a+2t=3,\ 0<t<\dfrac{3}{2}$．

$$\begin{aligned}
3-f\left(a,\ \frac{b+c}{2},\ \frac{b+c}{2}\right) &= 3-f(3-2t,\ t,\ t)\\
&= 3-(3-2t)t^2\left[(3-2t)^2+2t^2\right]\\
&= 12t^5-42t^4+54t^3-27t^2+3\\
&= 3(t-1)^2(4t^3-6t^2+2t+1)
\end{aligned}$$

より，$g(t)=4t^3-6t^2+2t+1\ \left(0<t<\dfrac{3}{2}\right)$ とおき $g(t)>0$ を示せばよい．

$g'(t)=2(6t^2-6t+1)$ となるから $g'(t)=0$ の解を $\alpha=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6},\ \beta=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ とおくと，$g(t)$ の増減は次のようになる．

t	0		α		β		$\frac{3}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	(1)	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$4t^3-6t^2+2t+1=(6t^2-6t+1)\left(\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}t+\frac{4}{3}$$ を利用すると

$$g(\beta)=-\frac{2}{3}\beta+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{4}{3}=\frac{9-\sqrt{3}}{9}.$$

したがって，$g(t)$ の最小値は $g(\beta)=\dfrac{9-\sqrt{3}}{9}>0$ より $g(t)>0$ である．■

問題 128　(MOSP 2007)

a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^2\geqq\frac{1}{3}\,.$$

解　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}&\sum_{cyclic}\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2\sum_{cyclic}(a+2b)\sum_{cyclic}a(a+2b)\\&\geqq\left[\sum_{cyclic}\sqrt[3]{\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2\cdot(a+2b)\cdot a(a+2b)}\,\right]^3\\&=(a+b+c)^3\,.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{cyclic}\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2&\geqq\frac{(a+b+c)^3}{3(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\right]}\\&=\frac{(a+b+c)^3}{3(a+b+c)(a+b+c)^2}\\&=\frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

■

問題 129　(Pham Kim Hung)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}} \geqq 1\,.$$

解　ヘルダーの不等式より

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}\right)^3\sum_{cyclic}a(a+2b)\\
&=\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}\sum_{cyclic}a(a+2b)\\
&\geqq\left(\sum_{cyclic}\sqrt[4]{\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}\right)^3a(a+2b)}\;\right)^4\\
&=(a+b+c)^4\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}}\right)^3\\
&\geqq\frac{(a+b+c)^4}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}\\
&=\frac{(a+b+c)^4}{(a+b+c)^2}=(a+b+c)^2=1\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}} \geqq 1. \qquad \blacksquare$$

問題 130　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geqq \sqrt{a+b+c} \geqq \frac{a}{\sqrt{2a+b}}+\frac{b}{\sqrt{2b+c}}+\frac{c}{\sqrt{2c+a}}.$$

解 (i)　$\dfrac{a}{\sqrt{a+2b}}+\dfrac{b}{\sqrt{b+2c}}+\dfrac{c}{\sqrt{c+2a}} \geqq \sqrt{a+b+c}$ の証明

補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt{a+2b}}\right)^2\sum_{cyclic}a(a+2b)\\
&=\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt{a+2b}}\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt{a+2b}}\sum_{cyclic}a(a+2b)\\
&\geqq\left(\sum_{cyclic}\sqrt[3]{\left(\frac{a}{\sqrt{a+2b}}\right)^2 a(a+2b)}\right)^3\\
&=(a+b+c)^3.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}}\right)^2\\
&\geqq\frac{(a+b+c)^3}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}\\
&=\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}=a+b+c
\end{aligned}$$

から

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geqq \sqrt{a+b+c}.$$

(ii)　$\sqrt{a+b+c} \geqq \dfrac{a}{\sqrt{2a+b}}+\dfrac{b}{\sqrt{2b+c}}+\dfrac{c}{\sqrt{2c+a}}$ の証明

コーシー・シュワルツの不等式を使うと

$$\frac{a}{\sqrt{2a+b}}+\frac{b}{\sqrt{2b+c}}+\frac{c}{\sqrt{2c+a}} \leqq \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\right)}$$

が成り立つから

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a} \leqq 1$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a} \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{a}{2a+b}-\frac{1}{2}+\frac{b}{2b+c}-\frac{1}{2}+\frac{c}{2c+a}-\frac{1}{2} \leqq 1-\frac{3}{2} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{-b}{2(2a+b)}+\frac{-c}{2(2b+c)}+\frac{-a}{2(2c+a)} \leqq -\frac{1}{2} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a} \geqq 1
\end{aligned}$$

より

$$\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a} \geqq 1$$

を示せばよい．補助定理 1 を使うと

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a} \\
&=\frac{b^2}{b(2a+b)}+\frac{c^2}{c(2b+c)}+\frac{a^2}{a(2c+a)} \\
&\geqq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} \\
&=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1\,.
\end{aligned}$$

■

問題 131 (Mathematical and Physical Jounal for Secondary Schools，Problem A . 561.)

a, b, c, p が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^p}+\frac{b^3c}{(3b+c)^p}+\frac{c^3a}{(3c+a)^p} \geqq \frac{a^2bc}{(2a+b+c)^p}+\frac{b^2ca}{(2b+c+a)^p}+\frac{c^2ab}{(2c+a+b)^p}\,.$$

解　$\dfrac{a^3b}{(3a+b)^p}+\dfrac{c^2ab}{(2c+a+b)^p} \geqq \dfrac{2a^2bc}{(2a+b+c)^p}$ を示す．

相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}
\frac{a^3b}{(3a+b)^p}+\frac{c^2ab}{(2c+a+b)^p} &\geqq 2\sqrt{\frac{a^3b}{(3a+b)^p}\cdot\frac{c^2ab}{(2c+a+b)^p}} \\
&= \frac{2a^2bc}{\left(\sqrt{(3a+b)(a+b+2c)}\right)^p} \\
&\geqq \frac{2a^2bc}{\left(\dfrac{(3a+b)+(a+b+2c)}{2}\right)^p} \\
&= \frac{2a^2bc}{(2a+b+c)^p}\,.
\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{b^3c}{(3b+c)^p}+\frac{a^2bc}{(2a+b+c)^p} \geqq \frac{2b^2ca}{(2b+c+a)^p},\quad \frac{c^3a}{(3c+a)^p}+\frac{b^2ca}{(2b+c+a)^p} \geqq \frac{2c^2ab}{(2c+a+b)^p}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると，求める不等式が得られる．■

問題 132　(Yugoslavia 2007)

k は正の整数とする．x, y, z は正の実数で，$x+y+z=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k} \geqq \frac{1}{7}\,.$$

解　不等式の左辺は x, y, z についての対称式であるから，$x \geqq y \geqq z$ と仮定する．このとき

$$x^{k+1}+y^k+z^k \leqq y^{k+1}+z^k+x^k \leqq z^{k+1}+x^k+y^k$$

が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}
x^{k+1}+y^k+z^k \leqq y^{k+1}+z^k+x^k &\Longleftrightarrow y^k(1-y) \leqq x^k(1-x) \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^k \leqq \frac{1-x}{1-y}\,.
\end{aligned}$$

$0<\dfrac{y}{x} \leqq 1$ より $\left(\dfrac{y}{x}\right)^k \leqq \dfrac{y}{x}$ であるから $\dfrac{y}{x} \leqq \dfrac{1-x}{1-y}$ が証明できればよい．これは

$$\frac{y}{x} \leqq \frac{1-x}{1-y} \quad \Longleftrightarrow y-y^2 \leqq x-x^2 \Longleftrightarrow (x-y)(1-x-y)=(x-y)z \geqq 0$$

から成り立つ．$y^{k+1}+z^k+x^k \leqq z^{k+1}+x^k+y^k$ についても同様に示せる．

$$x^{k+2} \geqq y^{k+2} \geqq z^{k+2},\ \frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k} \geqq \frac{1}{y^{k+1}+z^k+x^k} \geqq \frac{1}{z^{k+1}+x^k+y^k}$$

であるから，チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k}\\
&\geqq \frac{1}{3}\left(x^{k+2}+y^{k+2}+z^{k+2}\right)\left(\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{1}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{1}{z^{k+1}+x^k+y^k}\right)\\
&\overset{Chebyshev}{\geqq} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}\right)(x+y+z)\\
&\qquad\times\left(\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{1}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{1}{z^{k+1}+x^k+y^k}\right)\\
&=\frac{1}{9}\left(x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}\right)\left(\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{1}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{1}{z^{k+1}+x^k+y^k}\right)\\
&=\frac{1}{9}\cdot\frac{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}}{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}+2(x^k+y^k+z^k)}\\
&\qquad\times\left[(x^{k+1}+y^k+z^k)+(y^{k+1}+z^k+x^k)+(z^{k+1}+x^k+y^k)\right]\\
&\qquad\qquad\times\left(\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{1}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{1}{z^{k+1}+x^k+y^k}\right)\\
&\overset{Schwarz}{\geqq} \frac{1}{9}\cdot\frac{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}}{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}+2(x^k+y^k+z^k)}\cdot(1+1+1)^2\\
&=\frac{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}}{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}+2(x^k+y^k+z^k)}\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}}{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}+2(x^k+y^k+z^k)} \geqq \frac{1}{7}$$

すなわち

$$3(x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}) \geqq x^k+y^k+z^k$$

を示せばよい．この不等式は，$x \geqq y \geqq z,\ x^k \geqq y^k \geqq z^k$ であるから，チェビシェフの不等式を使用すると次のように示すことができる．

$$3(x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}) \geqq (x^k+y^k+z^k)(x+y+z)=(x^k+y^k+z^k)\,. \qquad \blacksquare$$

問題 133　(第 16 回日本数学オリンピック本選 2006)

任意の正の実数 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ に対して不等式

$$\begin{aligned}&(x_1^3+x_2^3+x_3^3+1)(y_1^3+y_2^3+y_3^3+1)(z_1^3+z_2^3+z_3^3+1)\\ &\geqq A(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)(z_1+z_2+z_3)\end{aligned}$$

が常に成り立つような実数 A の最大値を求めよ．また A をそのようにとるとき，等号が成立する条件を求めよ．

解　A の最大値の可能性についてついて調べる．

$$\begin{aligned}&(x_1^3+x_2^3+x_3^3+1)(y_1^3+y_2^3+y_3^3+1)(z_1^3+z_2^3+z_3^3+1)\\ \geqq\ &A(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)(z_1+z_2+z_3) \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

① において $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = y_3 = z_1 = z_2 = z_3 = x$ とおくと

$$(3x^3+1)^3 \geqq A(3x)^3 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{3x^3+1}{3x}\right)^3 \geqq A\,.$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$\left(\frac{3x^3+1}{3x}\right)^3 = \left(x^2+\frac{1}{3x}\right)^3 = \left(x^2+\frac{1}{6x}+\frac{1}{6x}\right)^3 \geqq \left(3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{6x}\cdot\frac{1}{6x}}\right)^3 = \frac{3}{4}\,.$$

等号は $x^2 = \dfrac{1}{6x}$ から $x = \dfrac{1}{6^{\frac{1}{3}}} = 6^{-\frac{1}{3}}$ のときに限る．A については，$A \leqq \dfrac{3}{4}$．

さて，$t = 6^{-\frac{1}{3}}$ とおき，補助定理 2 を適用すると

$$\begin{aligned}&(x_1^3+x_2^3+x_3^3+1)(y_1^3+y_2^3+y_3^3+1)(z_1^3+z_2^3+z_3^3+1)\\ =\ &\quad(x_1^3+x_2^3+x_3^3+t^3+t^3+t^3+t^3+t^3+t^3)\\ &\times(t^3+t^3+t^3+y_1^3+y_2^3+y_3^3+t^3+t^3+t^3)\\ &\times(t^3+t^3+t^3+t^3+t^3+t^3+z_1^3+z_2^3+z_3^3)\\ \geqq\ &(t^2x_1+t^2x_2+t^2x_3+t^2y_1+t^2y_2+t^2y_3+t^2z_1+t^2z_2+t^2z_3)^3\\ =\ &\frac{1}{36}\left[(x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2)+(x_3+y_3+z_3)\right]^3\\ \overset{AM\geqq GM}{\geqq}\ &\frac{1}{36}\left[3\sqrt[3]{(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)}\right]^3\\ =\ &\frac{3}{4}(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)\,.\end{aligned}$$

等号が成立するのは $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = y_3 = z_1 = z_2 = z_3 = t$ のときで，A の最大値は $\dfrac{3}{4}$ である．　■

問題 134 (第 11 回日本数学オリンピック本選 2001)

0 以上の実数 a, b, c があり，$a^2 \leqq b^2 + c^2,\ b^2 \leqq c^2 + a^2,\ c^2 \leqq a^2 + b^2$ を満たしているとする．このとき

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \geqq 4(a^6+b^6+c^6)$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立する条件を求めよ．

解　補助定理 3 より

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) &\geqq \left(\sqrt[3]{a\cdot a^2\cdot a^3}+\sqrt[3]{b\cdot b^2\cdot b^3}+\sqrt[3]{c\cdot c^2\cdot c^3}\right)^3 \\ &= (a^2+b^2+c^2)^3\,.\end{aligned}$$

したがって

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \geqq 4(a^6+b^6+c^6)$$

を示せばよい．

$b^2+c^2-a^2 = 2x \geqq 0,\ c^2+a^2-b^2 = 2y \geqq 0,\ a^2+b^2-c^2 = 2z \geqq 0$ とおくと

$$a^2 = y+z,\ b^2 = z+x,\ c^2 = x+y\,.$$

この不等式は

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)^3 \geqq 4(a^6+b^6+c^6) \\ \Longleftrightarrow\ &(2x+2y+2z)^3 \geqq 4\left[(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3\right] \\ \Longleftrightarrow\ &12\left[x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+4xyz\right] \geqq 0\end{aligned}$$

から成立する．

等号成立は

(i) $a=b=c=0$ または $(a,\ b,\ c) \mathbin{/\!/} (a^2,\ b^2,\ c^2),\ (a,\ b,\ c) \mathbin{/\!/} (a^3,\ b^3,\ c^3)$

かつ

(ii) $x^2(y+z)=0,\ y^2(z+x)=0,\ z^2(x+y)=0,\ xyz=0$

のときに限る．$xyz=0$ から $x=0$ 仮定しても一般性を失わない．このとき，$y^2z = z^2y = 0$ から $y=0$ または $z=0$ となる．

$y=0$ とすると $b^2+c^2=a^2,\ c^2+a^2=b^2$ から $c=0,\ a=b$ を得る．このとき，(i) は成り立つ．

よって，等号成立は，$a,\ b,\ c$ のうち一つが 0 で，他の二つが等しいことである．　■

問題 135　(SMO(s) 2008)

a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geqq \frac{1}{2}(1+abc)\,.$$

解　補助定理 3 より

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geqq \left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\right)^3 = (1+abc)^3\,. \qquad \cdots\cdots(*)$$

まず

「 $x \geqq 0$ のとき $2^{\frac{1}{3}}\dfrac{1+x^2}{1+x} \geqq \sqrt[3]{1+x^3}$ 」

すなわち

$$2(1+x^2)^3 \geqq (1+x^3)(1+x)^3$$

を示す．この不等式は

$$\begin{aligned} &2(1+x^2)^3 \geqq (1+x^3)(1+x)^3 \\ \Longleftrightarrow\ &x^6-3x^5+3x^4-2x^3+3x^2-3x+1 \geqq 0 \\ \Longleftrightarrow\ &(x-1)^4(x^2+x+1) \geqq 0 \end{aligned}$$

から成り立つことがわかる．この不等式を使うと

$$\begin{aligned} \frac{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}{(1+a)(1+b)(1+c)} &= \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\frac{1+a^2}{1+a}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\frac{1+b^2}{1+b}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\frac{1+c^2}{1+c} \\ &\geqq \frac{1}{2}\sqrt[3]{1+a^3}\,\sqrt[3]{1+b^3}\,\sqrt[3]{1+c^3} \\ &\geqq \frac{1}{2}(1+abc)\,. \end{aligned}$$

■

［注］　証明すべき不等式で，$a=b=c=x$ とおくと, 不等式は $2(1+x^2)^3 \geqq (1+x^3)(1+x)^3$ となる．

問題 136　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c, d が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)} \geqq \frac{1}{2}(1+abcd)\,.$$

解　ヘルダーの不等式より

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geqq \left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{a^4b^4c^4d^4}\right)^4 = (1+abcd)^4\,. \ (*)$$

まず

「$x \geqq 0$ のとき $2^{\frac{1}{4}}\dfrac{1+x^3}{1+x^2} \geqq \sqrt[4]{1+x^4}$　」

すなわち

$$2(1+x^3)^4 \geqq (1+x^4)(1+x^2)^4$$

を示す．この不等式は

$$\begin{aligned}
&2(1+x^3)^4 \geqq (1+x^4)(1+x^2)^4\\
\iff &x^{12}-4x^{10}+8x^9-7x^8+4x^6-7x^4+8x^3-4x^2+1 \geqq 0\\
\iff &(x-1)^2(x^{10}+2x^9-x^8+4x^7+2x^6+2x^4+4x^3-x^2+2x+1) \geqq 0\\
\iff &(x-1)^2\left[2x^9+4x^7+x^6+x^4+4x^3+2x+x^6\underbrace{(x^4-x^2+1)}_{>0}+\underbrace{(x^4-x^2+1)}_{>0}\right]\\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

から成り立つことがわかる．この不等式を使うと

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)}\\
&=\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\frac{1+a^3}{1+a^2}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\frac{1+b^3}{1+b^2}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\frac{1+c^3}{1+c^2}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\frac{1+d^3}{1+d^2}\\
&\geqq \frac{1}{2}\sqrt[4]{1+a^4}\sqrt[4]{1+b^4}\sqrt[4]{1+c^4}\sqrt[4]{1+d^4}\\
&\geqq \frac{1}{2}(1+abcd)\,.
\end{aligned}$$

■

問題 137　(Czech-Slovak-Polish Match 2001)

n を 2 以上の整数とする．$a_1, a_2, \ldots, a_n$ が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdots(a_n^3+1) \geqq (a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\cdots(a_n^2a_1+1)\,.$$

解 1　補助定理 3 より

$$\begin{aligned}(a_1^3+1)^2(a_2^3+1) &= (a_1^3+1)(a_1^3+1)(a_2^3+1)\\ &\geqq \left(\sqrt[3]{a_1^3\cdot a_1^3\cdot a_2^3}+\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot 1}\right)^3=(a_1^2a_2+1)^3\,.\end{aligned}$$

同様にして

$$(a_2^3+1)^2(a_3^3+1)\geqq(a_2^2a_3+1)^3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$(a_n^3+1)^2(a_1^3+1)\geqq(a_n^2a_1+1)^3.$$

これらの不等式の辺々をかけると

$$\left[(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdots(a_n^3+1)\right]^3\geqq\left[(a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\cdots(a_n^2a_1+1)\right]^3\,.$$

よって

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdots(a_n^3+1)\geqq(a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\cdots(a_n^2a_1+1)\,.\qquad\blacksquare$$

問題 138　(Centro American Match Olympiad 2009)

x,y,z は実数で，$xyz=1$ を満たすとき，

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\geqq\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\,.$$

が成り立つことを証明せよ．また，等号が成立する条件を求めよ．

解　$xyz=1$ より

$$\begin{aligned}&(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\geqq\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\\ \iff &(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\geqq(x+y)(y+z)(z+x)\,.\end{aligned}$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$(x^2+1)(y^2+1)=(x^2+1)(1+y^2)\geqq(x+y)^2\,.$$

同様にして

$$(y^2+1)(z^2+1)\geqq(y+z)^2,\quad(z^2+1)(x^2+1)\geqq(z+x)^2\,.$$

これらの不等式の辺々をかけると

$$\left[(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\right]^2\geqq\left[(x+y)(y+z)(z+x)\right]^2\,.$$

よって

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) \geqq |\,(x+y)(y+z)(z+x)\,| \geqq (x+y)(y+z)(z+x)\,.$$

等号成立は $xy=1$ かつ $yz=1$ かつ $zx=1$ かつ $(x+y)(y+z)(z+x) \geqq 0$（かつ $xyz=1$ ）より $x=y=z=1$ のときに限る． ■

問題 139　(IMO shortlist Estonia 2009)

a, b, c は正の実数で，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=a+b+c$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqq \frac{3}{16}\,.$$

解　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=a+b+c$ を利用し，不等式を同次化 (Homonization) する．

$$\frac{(a+b+c)^2}{(2a+b+c)^2}+\frac{(a+b+c)^2}{(2b+c+a)^2}+\frac{(a+b+c)^2}{(2c+a+b)^2} \leqq \frac{3}{16}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

がすべての正の実数 $a,\ b,\ c$ に対して成り立つことを証明する．一般性を失うことなく $a+b+c=1$ と仮定できる．このとき証明すべき不等式は

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2} \leqq \frac{3}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

となる．次に $x=\dfrac{1}{a}$，$y=\dfrac{1}{b}$，$z=\dfrac{1}{c}$ とおくと $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ で

$$\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{y^2}{(y+1)^2}+\frac{z^2}{(z+1)^2} \leqq \frac{3}{16}\,(x+y+z)$$

を示せばよい．

$f(t)=\dfrac{t^2}{(t+1)^2}$　$(t>1)$ とおくと $f'(t)=\dfrac{2t}{(t+1)^3}$，$f'(3)=\dfrac{3}{32}$.

$y=f(t)$ 上の点 $\left(3,\ \dfrac{9}{16}\right)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{3t+9}{32}$ となるから，$y=f(t)$ との上下関係を関係を調べる．

$$f(t)-\frac{3t+9}{32}=\frac{t^2}{(t+1)^2}-\frac{3t+9}{32}=\frac{-3t^3+17t^2-21t-9}{32(t+1)^2}=\frac{-(t-3)^2(3t+1)}{32(t+1)^2} \leqq 0$$

から

$$f(t) \leqq \frac{3t+9}{32}\,.$$

この不等式を用いると

$$f(x)+f(y)+f(z) \leqq \frac{3(x+y+z)}{32}+\frac{27}{32}$$

が成り立つから

$$\frac{3}{32}(x+y+z)+\frac{27}{32} \leqq \frac{3}{16}(x+y+z) \quad \text{すなわち} \quad 9 \leqq x+y+z$$

を示せばよい．この不等式は，コーシー・シュワルツの不等式より

$$x+y+z=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqq (1+1+1)^2=9\,. \qquad \blacksquare$$

問題 140　n を 2 以上の整数とする．a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt[n]{ab+bc+ca} \geqq a\sqrt[n]{\frac{b+c}{2}}+b\sqrt[n]{\frac{c+a}{2}}+c\sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}\,.$$

解　ヘルダーの不等式より

$$ab+bc+ca=(ab+bc+ca)(a+b+c)^{n-1}$$

$$=\left[\frac{a(b+c)}{2}+\frac{b(c+a)}{2}+\frac{c(a+b)}{2}\right]\underbrace{(a+b+c)(a+b+c)\cdots(a+b+c)}_{n-1}$$

$$\geqq \left(\sqrt[n]{\frac{a(b+c)}{2}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n-1}}+\sqrt[n]{\frac{b(c+a)}{2}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{n-1}}+\sqrt[n]{\frac{c(a+b)}{2}\cdot\underbrace{c\cdot c\cdots c}_{n-1}}\right)^n$$

$$=\left(a\sqrt[n]{\frac{b+c}{2}}+b\sqrt[n]{\frac{c+a}{2}}+c\sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}\right)^n.$$

よって

$$\sqrt[n]{ab+bc+ca} \geqq a\sqrt[n]{\frac{b+c}{2}}+b\sqrt[n]{\frac{c+a}{2}}+c\sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}\,. \qquad \blacksquare$$

問題 141　(APMO 2005)

a, b, c は正の実数で，$abc=8$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geqq \frac{4}{3}\,.$$

解　$\sqrt{1+a^3} = \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \overset{GM \leqq AM}{\leqq} \dfrac{(a+1)+(a^2-a+1)}{2} = \dfrac{a^2+2}{2}$

より

$$\sqrt{1+a^3} \leqq \frac{a^2+2}{2}\,.$$

同様にして

$$\sqrt{1+b^3} \leqq \frac{b^2+2}{2},\ \sqrt{1+c^3} \leqq \frac{c^2+2}{2}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \\
&\geqq \frac{4a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} + \frac{4b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} + \frac{4c^2}{(c^2+2)(a^2+2)}\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} + \frac{b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} + \frac{c^2}{(c^2+2)(a^2+2)} \geqq \frac{1}{3}$$

を示せばよい．$x=a^2,\ y=b^2,\ z=c^2$ とおくと $xyz=(abc)^2=64$．

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} + \frac{b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} + \frac{c^2}{(c^2+2)(a^2+2)} \geqq \frac{1}{3} \\
\iff& \frac{x}{(x+2)(y+2)} + \frac{y}{(y+2)(z+2)} + \frac{z}{(z+2)(x+2)} \geqq \frac{1}{3} \\
\iff& 3\left[x(z+2)+y(x+2)+z(y+2)\right] \geqq (x+2)(y+2)(z+2) \\
\iff& 3(xy+yz+zx)+6(x+y+z) \geqq xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8 \\
\iff& xy+yz+zx+2(x+y+z) \geqq xyz+8(=72)\,.
\end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$x+y+z \geqq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{64} = 12,\ xy+yz+zx \geqq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3\sqrt[3]{64^2} = 48\,.$$

よって，$xy+yz+zx+2(x+y+z) \geqq 72$ は成り立つ． ■

問題 142　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geqq 1\,.$$

解

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geqq 1 \\
\iff& \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} + \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{c+a}{b}\right)^3}} + \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{a+b}{c}\right)^3}} \geqq 1\,.
\end{aligned}$$

$$\sqrt{1+x^3}=\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} \leqq \frac{(x+1)+(x^2-x+1)}{2}=1+\frac{x^2}{2}$$

を用いると

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geqq \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}$$

$$\geqq \frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

同様にして

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} \geqq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \qquad \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geqq \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

これら 3 つの不等式の辺々を加えると

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geqq \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1\,. \quad \blacksquare$$

問題 143 (Bulgaria 2007)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1} \geqq a+b+c+3\,.$$

解　相加平均・相乗平均の不等式より $ca+c+a \geqq 3\sqrt[3]{c^2a^2}$. この不等式を使うと

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1} \geqq \frac{(a+1)(b+1)^2}{ca+c+a+1}=\frac{(a+1)(b+1)^2}{(c+1)(a+1)}=\frac{(b+1)^2}{c+1}\,.$$

同様にして

$$\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1} \geqq \frac{(c+1)^2}{a+1}, \quad \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1} \geqq \frac{(a+1)^2}{b+1}\,.$$

よって

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}$$

$$\geqq \frac{(b+1)^2}{c+1}+\frac{(c+1)^2}{a+1}+\frac{(a+1)^2}{b+1}$$

$$\overset{\text{補助定理 2}}{\geqq} \frac{(a+b+c+3)^2}{a+b+c+3}$$
$$= a+b+c+3\,. \qquad \blacksquare$$

問題 144 (France Team Selection Test 2007)

a,b,c,d は正の実数で，$a+b+c+d=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geqq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}\,.$$

解 $f(x)=6x^3-x^2$ $(0<x<1)$ とおくと

$$f'(x)=18x^2-2x,\ f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}\,.$$

$y=f(x)$ 上の点 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{32}\right)$ における接線の方程式は $y=\frac{5x-1}{8}$ となるから，$y=f(x)$ との上下関係を調べる.

$$\begin{aligned} f(x)-\frac{5x-1}{8}=6x^3-x^2-\frac{5x-1}{8} &= \frac{48x^3-8x^2-5x+1}{8} \\ &= \frac{(3x+1)(4x-1)^2}{8} \geqq 0 \end{aligned}$$

から，$f(x) \geqq \frac{5x-1}{8}$.

よって

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geqq \frac{5(a+b+c+d)-4}{8} = \frac{5-4}{8} = \frac{1}{8}\,. \qquad \blacksquare$$

問題 145 (Klamkin's inequality)

x,y,z は実数で，$-1<x<1$, $-1<y<1$, $-1<z<1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geqq 2\,.$$

解 相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}} \geqq 2\,. \qquad \blacksquare$$

問題 146 (Mathlinks Contest)

a, b, c は正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geqq 3\,.$$

解 1　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}} &\geqq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{c+1}}} \\ &= 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+1)(b+1)(c+1)}}\,.\end{aligned}$$

したがって

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq (a+1)(b+1)(c+1)$$

を証明すればよい．

$$\begin{aligned}&(a+b)(b+c)(c+a) \geqq (a+1)(b+1)(c+1) \\ \Longleftrightarrow\ & a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc \geqq abc+ab+bc+ca+a+b+c+1 \\ \Longleftrightarrow\ & a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geqq ab+bc+ca+a+b+c \\ \Longleftrightarrow\ & 2[(2,\ 1,\ 0)] \geqq [(1,\ 1,\ 0)]+[(1,\ 0,\ 0)]\,.\end{aligned}$$

Muirhead の定理と (M1) より

$$[(2,\ 1,\ 0)] \geqq \left[\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\right] = \left[\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)\right] = [(1,\ 0,\ 0)],$$

$$[(2,\ 1,\ 0)] \geqq \left[\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)\right] = \left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\right] = [(1,\ 1,\ 0)].$$

よって，$2[(2,\ 1,\ 0)] \geqq [(1,\ 1,\ 0)]+[(1,\ 0,\ 0)]$ は成り立つ． ■

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}} &\geqq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{c+1}}} \\ &= 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+1)(b+1)(c+1)}}.\end{aligned}$$

したがって，$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq (a+1)(b+1)(c+1)$ を証明すればよい．

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(b+c)(c+a) \geqq (a+1)(b+1)(c+1) \\
\iff &a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geqq ab+bc+ca+a+b+c\,.
\end{aligned}
$$

重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{12}a^2b+\frac{1}{12}b^2c+\frac{1}{12}c^2b+\frac{5}{12}a^2c &\geqq (a^2b)^{\frac{5}{12}}(b^2c)^{\frac{1}{12}}(c^2b)^{\frac{1}{12}}(a^2c)^{\frac{5}{12}} \\
&= a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} = a(abc)^{\frac{2}{3}} = a\,.
\end{aligned}
$$

同様にして

$$
\frac{5}{12}b^2a+\frac{1}{12}c^2a+\frac{1}{12}a^2c+\frac{5}{12}b^2c \geqq b,\ \frac{5}{12}c^2a+\frac{1}{12}a^2b+\frac{1}{12}b^2a+\frac{5}{12}c^2b \geqq c\,.
$$

これら 3 つの不等式の辺々を加えると

$$
\frac{1}{2}(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b) \geqq a+b+c \qquad \cdots\cdots①
$$

$$
\frac{1}{3}a^2b+\frac{1}{3}b^2a+\frac{1}{6}a^2c+\frac{1}{6}b^2c \geqq (a^2b)^{\frac{1}{3}}(b^2a)^{\frac{1}{3}}(a^2c)^{\frac{1}{3}}(b^2c)^{\frac{1}{3}} = ab(abc)^{\frac{2}{3}} = ab\,.
$$

同様にして

$$
\frac{1}{3}b^2c+\frac{1}{3}c^2b+\frac{1}{6}b^2a+\frac{1}{6}c^2a \geqq bc,\ \frac{1}{3}c^2a+\frac{1}{3}a^2c+\frac{1}{6}c^2b+\frac{1}{6}a^2b \geqq ca\,.
$$

これら 3 つの不等式の辺々を加えて

$$
\frac{1}{2}(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b) \geqq ab+bc+ca \qquad \cdots\cdots②
$$

①+② から

$$
a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geqq ab+bc+ca+a+b+c\,. \qquad \blacksquare
$$

［注］　解 1 において，Muirhead の定理から得られる

$$
[(2,\ 1,\ 0)] \geqq \left[\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\right] = \left[\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)\right] = [(1,\ 0,\ 0)],
$$

$$
[(2,\ 1,\ 0)] \geqq \left[\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)\right] = \left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\right] = [(1,\ 1,\ 0)].
$$

を参考にして，相加平均・相乗平均の不等式の適用を考えた．

解 3　相加平均・相乗平均の不等式より

$$
\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geqq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{c+1}}}
$$

$$= 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+1)(b+1)(c+1)}}\,.$$

したがって

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq (a+1)(b+1)(c+1)$$

を証明すればよい．

$$S = a+b+c,\ T = ab+bc+ca$$

とおくと，相加平均・相乗平均の不等式より

$$S = a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{abc} = 3,\ T = ab+bc+ca \geqq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3\,.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)} &\boldsymbol{= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc}\\ &= ST - 1\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)(c+1) &= abc+ab+bc+ca+a+b+c+1\\ &= a+b+c+ab+bc+ca+2\\ &= S+T+2\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)-(a+1)(b+1)(c+1) &= ST-S-T-3\\ &= (S-1)(T-1)-4\\ &\geqq (3-1)(3-1)-4 = 0\,.\end{aligned}$$

■

問題 147　(Radon's inequality)

$p>0$ とする．$a_i>0, x_i>0 \ \ (i=1,2,\ldots,n)$ に対して次の不等式を証明せよ．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{p+1}}{a_i^p} \geqq \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{p+1}}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{p}}\,.$$

解 1　数学的帰納法で証明する．

(i) $n=2$ のとき　$\dfrac{x_1^{p+1}}{a_1^p}+\dfrac{x_2^{p+1}}{a_2^p} \geqq \dfrac{(x_1+x_2)^{p+1}}{(a_1+a_2)^p}$ を証明する．

$f(x)=\dfrac{x^{p+1}}{a_1^p}+\dfrac{x_2^{p+1}}{a_2^p}-\dfrac{(x+x_2)^{p+1}}{(a_1+a_2)^p} \quad (x>0)$ とおくと

$$f'(x)=(p+1)\left(\frac{x^p}{a_1^p}-\frac{(x+x_2)^p}{(a_1+a_2)^p}\right).$$

$f'(x)=0$ を解くと $x=\dfrac{a_1x_2}{a_2}$. また $f'(x)$ の符号を調べる.

$$f'(x) \lesseqqgtr 0 \iff \frac{x}{a_1} \lesseqqgtr \frac{x+x_2}{a_1+a_2} \iff x \lesseqqgtr \frac{a_1}{a_2}x_2\,.$$

x	0	$\cdots$	$\frac{a_1x_2}{a_2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

$x=\dfrac{a_1x_2}{a_2}$ で最小値 $f\left(\dfrac{a_1x_2}{a_2}\right)=0$ をとるから，$f(x)\geqq 0$.

よって，$\dfrac{x_1^{p+1}}{a_1^p}+\dfrac{x_2^{p+1}}{a_2^p}\geqq\dfrac{(x_1+x_2)^{p+1}}{(a_1+a_2)^p}$ は成り立つ.

等号は $x_1=\dfrac{a_1x_2}{a_2}$ すなわち $\dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}$ のときに限る.

(ii) n のとき成り立つと仮定して，$n+1$ のときを考える．仮定から

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{p+1}}{a_i^p}\geqq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{p+1}}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p} \qquad \cdots\cdots①$$

また，(i) から b_1，b_2，y_1，$y_2>0$ のとき

$$\frac{y_1^{p+1}}{b_1^p}+\frac{y_2^{p+1}}{b_2^p}\geqq\frac{(y_1+y_2)^{p+1}}{(b_1+b_2)^p}$$

が成り立つから，$b_1=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$b_2=a_{n+1}$，$y_1=x_1+x_2+\cdots+x_n$，$y_2=x_{n+1}$ とおくと

$$\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{p+1}}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}+\frac{x_{n+1}^{p+1}}{a_{n+1}^p}\geqq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})^{p+1}}{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^p} \qquad \cdots\cdots②$$

したがって，①，② を用いると

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i^{p+1}}{a_i^p}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{p+1}}{a_i^p}+\frac{x_{n+1}^{p+1}}{a_{n+1}^p}$$

$$\geqq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{p+1}}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}+\frac{x_{n+1}^{p+1}}{a_{n+1}^p}$$

$$\geqq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})^{p+1}}{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^p}$$

となり $n+1$ のときも成り立つ．

等号成立は，$\dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{a_n}$ かつ $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\dfrac{x_{n+1}}{a_{n+1}}$ より $\dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{a_n}=\dfrac{x_{n+1}}{a_{n+1}}$ のときに限る．

(i)，(ii) より 2 以上のすべての自然数 n について不等式は成り立つ． ■

解 2　定理 10（ヘルダーの不等式）より

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{p+1}}{a_i^p}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i\cdots\sum_{i=1}^{n} a_i}_{p}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{p+1}}{a_i^p}$$

$$\geqq \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[p+1]{\underbrace{a_i\cdot a_i\cdots a_i}_{p}\cdot\frac{x_i^{p+1}}{a_i^p}}\right)^{p+1}=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{p+1}.$$

よって

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{p+1}}{a_i^p}\geqq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{p+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p}.$$ ■

［注］　等号成立は

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\ /\!/ \left(\frac{x_1^{p+1}}{a_1^p},\ \frac{x_2^{p+1}}{a_2^p},\ \ldots,\ \frac{x_n^{p+1}}{a_n^p}\right)$$

すなわち

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\ /\!/\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

から，$\dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{a_n}$ のときに限る．

問題 148　(IMO 2011)

a, b, c は正の実数で，$\min(a+b,\ b+c,\ c+a)>\sqrt{2}$，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2}\geqq\frac{3}{(abc)^2}.$$

解 1　まず，$b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0$ を示す．条件 $b+c>\sqrt{2}$ を使うと $2(b^2+c^2)\geqq(b+c)^2>2$ から $b^2+c^2>1$．したがって，$a^2=3-(b^2+c^2)<2$ となるから $a<\sqrt{2}<b+c$．よって， $b+c-a>0$．同様にして $c+a-b>0,\ a+b-c>0$ が示せる．

ヘルダーの不等式より（問題 147 において，$p=2,\ n=3$ の場合）

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2}\\
&=\frac{a^6}{a^5(b+c-a)^2}+\frac{b^6}{b^5(c+a-b)^2}+\frac{c^6}{c^5(a+b-c)^2}\\
&=\frac{(a^2)^3}{\left[a^{\frac{5}{2}}(b+c-a)\right]^2}+\frac{(b^2)^3}{\left[b^{\frac{5}{2}}(c+a-b)\right]^2}+\frac{(c^2)^3}{\left[c^{\frac{5}{2}}(a+b-c)\right]^2}\\
&\geqq\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{\left[a^{\frac{5}{2}}(b+c-a)+b^{\frac{5}{2}}(c+a-b)+c^{\frac{5}{2}}(a+b-c)\right]^2}\\
&=\frac{27}{\left[a^{\frac{5}{2}}(b+c-a)+b^{\frac{5}{2}}(c+a-b)+c^{\frac{5}{2}}(a+b-c)\right]^2}.
\end{aligned}$$

Schur の不等式より，$\displaystyle\sum_{cyclic}a^{\frac{3}{2}}(a-b)(a-c)\geqq 0$ すなわち

$$a^{\frac{3}{2}}(a-b)(a-c)+b^{\frac{3}{2}}(b-a)(b-c)+c^{\frac{3}{2}}(c-a)(c-b)\geqq 0.$$

変形すると

$$\begin{aligned}
&a^{\frac{3}{2}}(a-b)(a-c)+b^{\frac{3}{2}}(b-a)(b-c)+c^{\frac{3}{2}}(c-a)(c-b)\geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &a^{\frac{5}{2}}[a-(b+c)]+abc\sqrt{a}+b^{\frac{5}{2}}[b-(c+a)]+abc\sqrt{b}+c^{\frac{5}{2}}[c-(a+b)]+abc\sqrt{c}\geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &a^{\frac{5}{2}}(b+c-a)+b^{\frac{5}{2}}(c+a-b)+c^{\frac{5}{2}}(a+b-c)\leqq abc(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{27}{\left[a^{\frac{5}{2}}(b+c-a)+b^{\frac{5}{2}}(c+a-b)+c^{\frac{5}{2}}(a+b-c)\right]^2}\geqq\frac{27}{\left[abc(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\right]^2}.$$

したがって

$$\frac{27}{\left[abc(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\right]^2}\geqq\frac{3}{(abc)^2}$$

すなわち，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leqq 3$ を示せばよい．ヘルダーの不等式より

$$\begin{aligned}81 = 27(a^2+b^2+c^2) &= (1+1+1)(1+1+1)(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)\\ &\geqq \left(\sqrt[4]{1\cdot1\cdot1\cdot a^2}+\sqrt[4]{1\cdot1\cdot1\cdot b^2}+\sqrt[4]{1\cdot1\cdot1\cdot c^2}\right)^4\\ &= (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^4.\end{aligned}$$

よって，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leqq 3$ は成り立つ， ■

解 2　まず，$b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0$ を示す (解 1 参照)．
補助定理 2 より

$$\sum_{cyclic} a^2(b+c-a)\sum_{cyclic} a^3(b+c-a)\sum_{cyclic}\frac{a}{(b+c-a)^2}$$

$$\geqq \left(\sum_{cyclic}\sqrt[3]{\left[a^2(b+c-a)\right]\left[a^3(b+c-a)\right]\left[\frac{a}{(b+c-a)^2}\right]}\ \right)^3 = (a^2+b^2+c^2)^3 = 27\,.$$

よって

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{(b+c-a)^2} \geqq \frac{27}{\left(\sum_{cyclic} a^2(b+c-a)\right)\left(\sum_{cyclic} a^3(b+c-a)\right)}\,.$$

Schur の不等式より

$$\boldsymbol{\sum_{cyclic} a^2(b+c-a) \leqq 3abc, \qquad \sum_{cyclic} a^3(b+c-a) \leqq (a+b+c)abc}$$

が成り立つから

$$\frac{27}{\left(\sum_{cyclic} a^2(b+c-a)\right)\left(\sum_{cyclic} a^3(b+c-a)\right)} \geqq \frac{9}{(a+b+c)(abc)^2}\,.$$

したがって

$$\frac{9}{(a+b+c)(abc)^2} \geqq \frac{3}{(abc)^2}$$

すなわち，$a+b+c \leqq 3$ を示せばよい．これは

$$9 = 3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$$

から得られる． ■

[注]　Schur の不等式 $x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0$ を変形すると

$$\begin{aligned}
&x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ & x^{r+1}\bigl[x-(y+z)\bigr]+x^r yz+y^{r+1}\bigl[y-(z+x)\bigr]+y^r zx\\
&\quad +z^{r+1}\bigl[z-(x+y)\bigr]+z^r xy \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ & x^{r+1}(y+z-x)+y^{r+1}(z+x-y)+z^{r+1}(x+y-z)\\
&\leqq xyz(x^{r-1}+y^{r-1}+z^{r-1})\,.
\end{aligned}$$

特に，$r=1,\ 2$ とおくと

$$x^2(y+z-x)+y^2(z+x-y)+z^2(x+y-z) \leqq 3xyz\,.$$

$$x^3(y+z-x)+y^3(z+x-y)+z^3(x+y-z) \leqq xyz(x+y+z)\,.$$

問題 149　(Balkan 2012)

x, y, z が正の実数のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+x)(y+z)}$$
$$\geqq 4(xy+yz+zx)\,.$$

解

$$\begin{aligned}
(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} &\overset{Schwarz}{\geqq} (x+y)\cdot(z+\sqrt{xy})\\
&=(x+y)z+(x+y)\sqrt{xy}\\
&\overset{AM\geqq GM}{\geqq} (x+y)z+2\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}\\
&=(x+y)z+2xy\,.
\end{aligned}$$

同様にして

$$(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} \geqq (y+z)x+2yz,$$

$$(z+x)\sqrt{(y+x)(y+z)} \geqq (z+x)y+2zx.$$

これら 3 つの不等式の辺々を加えればよい．　■

問題 150　(日本数学オリンピック本選 2005)

正の実数 a, b, c が $a+b+c=1$ を満たしているとき

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leqq 1\,.$$

を示せ.

解 1　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{a+a+a(1+b-c)}{3} \geqq \sqrt[3]{a^3(1+b-c)} = a\sqrt[3]{1+b-c}\,,$$

$$\frac{b+b+b(1+c-a)}{3} \geqq \sqrt[3]{b^3(1+c-a)} = b\sqrt[3]{1+c-a}\,,$$

$$\frac{c+c+c(1+a-b)}{3} \geqq \sqrt[3]{c^3(1+a-b)} = b\sqrt[3]{1+a-b}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$a+b+c \geqq a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\,.$$

$a+b+c=1$ であるから

$$1 \geqq a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}.$$

■

解 2　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(a+b+c)[a(1+b-c)+b(1+c-a)+c(1+a-b)] \\
&\geqq \left(\sqrt[3]{a\cdot a\cdot a(1+b-c)}+\sqrt[3]{b\cdot b\cdot b(1+c-a)}+\sqrt[3]{c\cdot c\cdot c(1+a-b)}\right)^3 \\
&= \left(a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\right)^3\,.
\end{aligned}$$

$a+b+c=1$ と $a(1+b-c)+b(1+c-a)+c(1+a-b)=a+b+c=1$ から

$$1 \geqq \left(a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\right)^3\,.$$

よって

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leqq 1$$

を得る.

■

問題 151　(Lithuania 2006)

a, b, c が正の実数であるとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$

(解)　相加平均・相乗平均の不等式より

$$a^2+bc \geqq 2\sqrt{a^2bc} = 2\sqrt{ab}\sqrt{ca}\,.$$

同様にして

$$b^2+ca \geqq 2\sqrt{bc}\sqrt{ab},\ c^2+ab \geqq 2\sqrt{ca}\sqrt{bc}$$

が成り立つから

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{bc}\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ca}\sqrt{bc}}\right)(*)\,.$$

$x,\ y,\ z$ が実数のとき， $xy+yz+zx \leqq x^2+y^2+z^2$ が成り立つから
$x=\dfrac{1}{\sqrt{ab}},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{bc}},\ z=\dfrac{1}{\sqrt{ca}}$ とおくことにより

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{bc}\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ca}\sqrt{bc}}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \qquad (**)\,.$$

$(*),\ (**)$ から

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$ ■

問題 152 (Balkan 2006)

a, b, c が正の実数であるとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geqq \frac{3}{1+abc}\,.$$

解

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geqq \frac{3}{1+abc}\\
\iff& \frac{1+abc}{a(b+1)}+\frac{1+abc}{b(c+1)}+\frac{1+abc}{c(a+1)} \geqq 3\\
\iff& 1+\frac{1+abc}{a(b+1)}+1+\frac{1+abc}{b(c+1)}+1+\frac{1+abc}{c(a+1)} \geqq 6\\
\iff& \frac{ab+a+1+abc}{a(b+1)}+\frac{bc+b+1+abc}{b(c+1)}+\frac{ca+c+1+abc}{c(a+1)} \geqq 6\\
\iff& \frac{a+1+ab(c+1)}{a(b+1)}+\frac{b+1+bc(a+1)}{b(c+1)}+\frac{c+1+ca(b+1)}{c(a+1)} \geqq 6\\
\iff& \frac{a+1}{a(b+1)}+\frac{ab(c+1)}{a(b+1)}+\frac{b+1}{b(c+1)}+\frac{bc(a+1)}{b(c+1)}+\frac{c+1}{c(a+1)}+\frac{ca(b+1)}{c(a+1)} \geqq 6\\
\iff& \frac{a+1}{a(b+1)}+\frac{b(c+1)}{b+1}+\frac{b+1}{b(c+1)}+\frac{c(a+1)}{c+1}+\frac{c+1}{c(a+1)}+\frac{a(b+1)}{a+1} \geqq 6\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{a+1}{a(b+1)}+\frac{b(c+1)}{b+1}+\frac{b+1}{b(c+1)}+\frac{c(a+1)}{c+1}+\frac{c+1}{c(a+1)}+\frac{a(b+1)}{a+1} \geqq 6$$

を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}
&\frac{a+1}{a(b+1)}+\frac{b(c+1)}{b+1}+\frac{b+1}{b(c+1)}+\frac{c(a+1)}{c+1}+\frac{c+1}{c(a+1)}+\frac{a(b+1)}{a+1}\\
&\geqq 6\sqrt[6]{\frac{a+1}{a(b+1)}\cdot\frac{b(c+1)}{b+1}\cdot\frac{b+1}{b(c+1)}\cdot\frac{c(a+1)}{c+1}\cdot\frac{c+1}{c(a+1)}\cdot\frac{a(b+1)}{a+1}}\\
&=6\,.
\end{aligned}$$

■

問題 153 (Ireland 2007)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{3}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geqq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqq \frac{a+b+c}{3}\,.$$

解 $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\right) \geqq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ の証明

$$\frac{1}{3}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geqq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \Longleftrightarrow \left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)^2 \geqq 3(a^2+b^2+c^2)$$

から $\left(\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\right)^2 \geqq 3(a^2+b^2+c^2)$ を示せばよい．$(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx)$ が成り立つことから

$$\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)^2 \geqq 3\left(\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}+\frac{ca}{b}\cdot\frac{ab}{c}+\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}\right) = 3(a^2+b^2+c^2)\,.$$

$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqq \dfrac{a+b+c}{3}$ の証明

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqq \frac{a+b+c}{3} \Longleftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$$

から，$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$ を示せばよい．コーシー・シュワルツの不等式より

$$3(a^2+b^2+c^2) = (1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2. \qquad \blacksquare$$

問題 154 (Romania 2008)

a, b, c は正の実数で，$abc = 8$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1} \leqq 0\,.$$

解 証明すべき不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned}
&\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1} \leqq 0\\
&\Longleftrightarrow 1-\frac{3}{a+1}+1-\frac{3}{b+1}+1-\frac{3}{c+1} \leqq 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \geqq 1\\
&\Longleftrightarrow (b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)+(a+1)(b+1) \geqq (a+1)(b+1)(c+1)\\
&\Longleftrightarrow 2+a+b+c \geqq abc\\
&\Longleftrightarrow a+b+c \geqq 6\,.
\end{aligned}$$

したがって， $a+b+c \geqq 6$ を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{8} = 6\,. \qquad \blacksquare$$

問題 155　(Poland 2006)

a, b, c は正の実数で，$ab+bc+ca=abc$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geqq 1\,.$$

解　$ab+bc+ca=abc \iff \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ より

$$x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ z=\frac{1}{c}\quad \text{とおくと}\quad x+y+z=1\,.$$

このとき，証明すべき不等式は

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3} \geqq 1$$

となる．一般性を失うことなく $x \geqq y \geqq z$ と仮定すると，$x^3 \geqq y^3 \geqq y^3$ も成立するから，チェビシェフの不等式より

$$2(x^4+y^4) \geqq (x^3+y^3)(x+y)\,.$$

よって

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} \geqq \frac{x+y}{2}\,.$$

同様にして

$$\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3} \geqq \frac{y+z}{2},\ \ \frac{z^4+x^4}{z^3+x^3} \geqq \frac{z+x}{2}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3} \geqq x+y+z=1\,.$$ ■

問題 156　(China 1989)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqq \frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\right)\,.$$

解　$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}\quad(0<x<1)$ とおくと $f''(x)=\dfrac{4-x}{4(1-x)^{\frac{5}{2}}}>0$.
$f(x)$ は凸関数であるから

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\geqq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

したがって

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\geqq\frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\right)$$

すなわち

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqq\sqrt{n}=\sqrt{n(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$$

を示せばよい．コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}\sqrt{n(x_1+x_2+\cdots+x_n)}&=\sqrt{(1+1+\cdots+1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\\&\geqq\sqrt{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})^2}\\&=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}.\end{aligned}$$

■

問題 157　(Darij Grinberg)
　a,b,c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geqq\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

解 1　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}&=\frac{a^2}{a(b+c)^2}+\frac{b^2}{b(c+a)^2}+\frac{c^2}{c(a+b)^2}\\&\geqq\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2}\\&=\frac{(a+b+c)^2}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+6abc}.\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(a+b+c)^2}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+6abc}\geqq\frac{9}{4(a+b+c)}$$

すなわち

$$4(a+b+c)^3 \geqq 9\left[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\right]+54abc$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&4(a+b+c)^3 \geqq 9\left[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\right]+54abc \\
\Longleftrightarrow\ &4(a^3+b^3+c^3)+12\left[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\right]+24abc \\
&\geqq 9\left[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\right]+54abc \\
\Longleftrightarrow\ &4(a^3+b^3+c^3)+3\left[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\right] \geqq 30abc \\
\Longleftrightarrow\ &4(a^3+b^3+c^3-3abc)+3\left[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-6abc\right] \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &4(a^3+b^3+c^3-3abc) \\
&+3\left[a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)\right] \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &4(a^3+b^3+c^3-3abc)+3\left[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\right] \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の不等式より $a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc$ が成り立つから

$$\begin{aligned}
&4(a+b+c)^3-9\left[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\right]-54abc \\
&=4(a^3+b^3+c^3-3abc)+3\left[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\right] \geqq 0
\end{aligned}$$

は成り立つ． ■

解 2　不等式は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b+c=3$ と仮定できる．このとき，証明すべき不等式は

$$\frac{a}{(3-a)^2}+\frac{b}{(3-b)^2}+\frac{c}{(3-c)^2} \geqq \frac{3}{4}$$

となる．

$f(x)=\dfrac{x}{(3-x)^2}$ $(0<x<3)$ とおくと $f''(x)=\dfrac{2(x+6)}{(x-3)^4}>0$ なので $f(x)$ は凸関数である．

よって

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f(1)=\frac{3}{4}\,.$$ ■

解 3　コーシー・シュワルツの不等式より

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right) \geqq \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

Nesbitt の不等式より

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}\,.$$

したがって

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right) \geqq \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2 \geqq \frac{9}{4}\,.$$

よって，$\dfrac{a}{(b+c)^2}+\dfrac{b}{(c+a)^2}+\dfrac{c}{(a+b)^2} \geqq \dfrac{9}{4(a+b+c)}\,.$ ■

問題 158　(IMO 1984)

a, b, c が三角形の三辺の長さのとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqq 0\,.$$

解　$b+c-a=2x>0,\ c+a-b=2y>0,\ a+b-c=2z>0$ とおくと

$$a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y\,.$$

証明すべき不等式を，$x,\ y,\ z$ で書き直す．

$$\begin{aligned}
& a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqq 0 \\
\iff & (y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z) \geqq 0 \\
\iff & zx^3+xy^3+yz^3 \geqq xyz(x+y+z) \\
\iff & \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geqq x+y+z\,.
\end{aligned}$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$(y+z+x)\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right) \geqq (x+y+z)^2.$$

よって，$\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x} \geqq x+y+z$ は成り立つ． ■

［注］ $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x} \geqq x+y+z$ の証明は相加平均・相乗平均の不等式を用いてもよい．

$\dfrac{x^2}{y}+y \geqq 2x,\ \dfrac{y^2}{z}+z \geqq 2y,\ \dfrac{z^2}{x}+x \geqq 2z$ の辺々を加えればよい． □

問題 159 (Junior Balkan MO 2002 Shortlist)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geqq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\,.$$

解 1 コーシー・シュワルツの不等式より

$$(a+b+c)\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right) \geqq \left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2\,.$$

また，$(b+c+a)\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\right) \geqq (a+b+c)^2$ から

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqq a+b+c\,.$$

よって

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geqq \frac{\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\right)^2}{a+b+c} \geqq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\,. \qquad \blacksquare$$

解 2 $(a^2-b^2)(a-b) \geqq 0$ が成り立つから $a^3+b^3 \geqq a^2b+ab^2$．両辺を b^2 で割ると

$$\frac{a^3}{b^2} \geqq \frac{a^2}{b}+a-b\,.$$

同様にして

$$\frac{b^3}{c^2} \geqq \frac{b^2}{c}+b-c,\ \ \frac{c^3}{a^2} \geqq \frac{c^2}{a}+c-a$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えればよい． ■

Karamat の不等式を使う別解については，問題 238 参照．

［注］ この不等式は次のように一般化できる．($a,\ b,\ c$ の 3 個から m 個への拡張もできる.)

a, b, c が正の実数のとき，$A_n=\dfrac{a^{n+1}}{b^n}+\dfrac{b^{n+1}}{c^n}+\dfrac{c^{n+1}}{a^n} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

とおくと，数列 $\{A_n\}$ は単調増加である．すなわち

$$A_0 \leqq A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots \leqq A_n \leqq A_{n+1} \leqq \cdots$$

［証明 1］ 数学的帰納法で $A_{n-1} \leqq A_n$ 証明する．

(i) $n=1$ のとき，コーシー・シュワルツの不等式より

$$(b+c+a)\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right) \geqq (a+b+c)^2 .$$

よって，$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a} \geqq a+b+c$ から，$A_0 \leqq A_1$.

(ii) $n-1$ 以下に対して成り立つとすると，$A_0 \leqq A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots \leqq A_{n-1}$.
ヘルダーの不等式より

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)\left(\frac{a^{n+1}}{b^n}+\frac{b^{n+1}}{c^n}+\frac{c^{n+1}}{a^n}\right)^{n-1} \\
&=(a+b+c)\underbrace{\left(\frac{a^{n+1}}{b^n}+\frac{b^{n+1}}{c^n}+\frac{c^{n+1}}{a^n}\right)\cdots\left(\frac{a^{n+1}}{b^n}+\frac{b^{n+1}}{c^n}+\frac{c^{n+1}}{a^n}\right)}_{n-1} \\
&\geqq \left(\sqrt[n]{a\cdot\frac{a^{(n+1)(n-1)}}{b^{(n-1)n}}}+\sqrt[n]{b\cdot\frac{b^{(n+1)(n-1)}}{c^{(n-1)n}}}+\sqrt[n]{c\cdot\frac{c^{(n+1)(n-1)}}{a^{(n-1)n}}}\right)^n \\
&=\left(\frac{a^n}{b^{n-1}}+\frac{b^n}{c^{n-1}}+\frac{c^n}{a^{n-1}}\right)^n .
\end{aligned}$$

よって，$\left(A_n^{n-1}\right) \geqq \dfrac{(A_{n-1})^n}{a+b+c}$ が成り立つから，$\dfrac{(A_{n-1})^n}{a+b+c} \geqq (A_{n-1})^{n-1}$ すなわち $A_{n-1} \geqq a+b+c=A_0$ を示せばよい．この不等式は，仮定から成り立つので n のときも成り立つ． □

［証明 2］ $(a^n-b^n)(a-b) \geqq 0$ が成り立つから

$$a^{n+1}+b^{n+1} \geqq a^n b+ab^n .$$

両辺を b^n で割ることにより

$$\frac{a^{n+1}}{b^n} \geqq \frac{a^n}{b^{n-1}}+a-b .$$

同様にして

$$\frac{b^{n+1}}{c^n} \geqq \frac{b^n}{c^{n-1}}+b-c,\ \frac{c^{n+1}}{a^n} \geqq \frac{c^n}{a^{n-1}}+c-a$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a^{n+1}}{b^n}+\frac{b^{n+1}}{c^n}+\frac{c^{n+1}}{a^n} \geqq \frac{a^n}{b^{n-1}}+\frac{b^n}{c^{n-1}}+\frac{c^n}{a^{n-1}} .$$ ■

問題 160　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\,.$$

解 1　$\displaystyle \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$

$$\Longleftrightarrow a^3b^2+a^3c^2+b^3c^2+b^3a^2+c^3a^2+c^3b^2 \geqq 2(a^2b^2c+ab^2c^2+a^2bc^2)$$

$$\Longleftrightarrow [(3,\ 2,\ 0)] \geqq [(2,\ 2,\ 1)].$$

これは，Muirhead の定理から成り立つ　■

［注］ 相加平均・相乗平均の不等式を使ってもよい．

$$\frac{1}{4}a^3b^2+\frac{1}{4}b^3a^2+\frac{1}{4}a^3c^2+\frac{1}{4}b^3c^2 \geqq (a^3b^2)^{\frac{1}{4}}(a^2b^3)^{\frac{1}{4}}(a^3c^2)^{\frac{1}{4}}(b^3c^2)^{\frac{1}{4}} = a^2b^2c\,.$$

同様にして

$$\frac{1}{4}b^3c^2+\frac{1}{4}c^3b^2+\frac{1}{4}b^3a^2+\frac{1}{4}c^3a^2 \geqq b^2c^2a\,,$$

$$\frac{1}{4}c^3a^2+\frac{1}{4}a^3c^2+\frac{1}{4}c^3b^2+\frac{1}{4}a^3b^2 \geqq c^2a^2b\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a^3b^2+a^3c^2+b^3c^2+b^3a^2+c^3a^2+c^3b^2}{2} \geqq a^2b^2c+ab^2c^2+a^2bc^2$$

すなわち，$a^3b^2+a^3c^2+b^3c^2+b^3a^2+c^3a^2+c^3b^2 \geqq 2(a^2b^2c+ab^2c^2+a^2bc^2)$.　□

解 2　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．

$\alpha=(2a,\ 2b,\ 2c)$, $\beta=(a+b,\ c+a,\ b+c)$ とおくと $\alpha \succ \beta$.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ は凸関数であるから，Karamat の不等式より

$$f(2a)+f(2b)+f(2c) \geqq f(a+b)+f(c+a)+f(b+c)\,.$$　■

解 3　$\displaystyle f(t)=\frac{t^{2a}}{2a}+\frac{t^{2b}}{2b}+\frac{t^{2c}}{2c}-\frac{t^{a+b}}{a+b}-\frac{t^{b+c}}{b+c}-\frac{t^{c+a}}{c+a}$ $(t \geqq 0)$ とおき，$t>0$ のとき，$f'(t) \geqq 0$ を示す．$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geqq 0$ を使うと

$$\begin{aligned} f'(t) &= t^{2a-1}+t^{2b-1}+t^{2c-1}-t^{a+b-1}-t^{b+c-1}-t^{c+a-1} \\ &= \left(t^{a-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(t^{b-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(t^{c-\frac{1}{2}}\right)^2-t^{a-\frac{1}{2}}t^{b-\frac{1}{2}}-t^{b-\frac{1}{2}}t^{c-\frac{1}{2}}-t^{c-\frac{1}{2}}t^{a-\frac{1}{2}} \geqq 0. \end{aligned}$$

$f(t)$ は $t \geqq 0$ で単調増加であるから，$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \geqq f(0)=0$.

よって，$f(1) \geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる．　■

問題 161　(Gabriel Dospinescu)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{a+b+c}\\ &\geqq \frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{2c+a}+\frac{1}{c+2a}.\end{aligned}$$

解　証明すべき不等式は，Schur の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}&\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}+\frac{3t^{a+b+c}}{a+b+c}\\ &-\left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{a+2b}}{a+2b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{b+2c}}{b+2c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}+\frac{t^{c+2a}}{c+2a}\right)\geqq 0.\end{aligned}$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$\begin{aligned}f(t)=&\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}+\frac{3t^{a+b+c}}{a+b+c}\\ &-\left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{a+2b}}{a+2b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{b+2c}}{b+2c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}+\frac{t^{c+2a}}{c+2a}\right)\quad (t \geqq 0)\end{aligned}$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t) \geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned}f'(t)=&t^{3a-1}+t^{3b-1}+t^{3c-1}+3t^{a+b+c-1}\\ &-\left(t^{2a+b-1}+t^{a+2b-1}+t^{b+2c-1}+t^{2b+c-1}+t^{2c+a-1}+t^{c+2a-1}\right).\end{aligned}$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{3}}>0,\ y=t^{b-\frac{1}{3}}>0,\ z=t^{c-\frac{1}{3}}>0$ とおくと，不等式 $f'(t) \geqq 0$ は

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geqq xy^2+x^2y+yz^2+y^2z+zx^2+z^2x$$

となる．これは，Schur の不等式より成り立つ．

$f(t)$ は $t \geqq 0$ で単調増加であるから，$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \geqq f(0)=0$．

よって，$f(1) \geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる．■

問題 162　(APMO 1996)

a, b, c が三角形の三辺の長さのとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\,.$$

解 1　$b+c-a=2x>0,\ c+a-b=2y>0,\ a+b-c=2z>0$ とおくと

$$a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y\,.$$

証明すべき不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\\
\iff &\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} \leqq \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\\
\iff &\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\right)^2 \leqq \left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)^2\\
\iff &2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}\\
&\leqq \sqrt{(x+y)(y+z)}+\sqrt{(y+z)(z+x)}+\sqrt{(z+x)(x+y)}\,.
\end{aligned}$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$\sqrt{(x+y)(y+z)} \geqq \sqrt{xy}+\sqrt{yz},\ \sqrt{(y+z)(z+x)} \geqq \sqrt{yz}+\sqrt{zx}\,,$$

$$\sqrt{(z+x)(x+y)} \geqq \sqrt{zx}+\sqrt{xy}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\sqrt{(x+y)(y+z)}+\sqrt{(y+z)(z+x)}+\sqrt{(z+x)(x+y)} \geqq 2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}\,. \quad \blacksquare$$

［注］ $\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} \leqq \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}$ の証明は次のようにできる．コーシー・シュワルツの不等式を使うと，$2(x+y)=(1+1)(x+y) \geqq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ が成り立つから

$$\sqrt{x+y} \geqq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2}\,.$$

同様にして，$\sqrt{y+z} \geqq \dfrac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2}$，$\sqrt{z+x} \geqq \dfrac{\sqrt{2z}+\sqrt{2x}}{2}$．

これらの不等式の辺々を加えると

$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} \leqq \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\,. \qquad \square$$

解 2　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．すると

$$a+b-c \geqq c+a-b \geqq b+c-a,\ a \geqq b \geqq c\,,$$

$$a+b-c \geqq a,\ (a+b-c)+(c+a-b) \geqq a+b\,,$$

$$(a+b-c)+(c+a-b)+(b+c-a)=a+b+c$$

より　$(a+b-c,\ c+a-b,\ b+c-a) \succ (a,\ b,\ c)\,.$

$f(x)=\sqrt{x}\quad(x>0)$ とおくと $f''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}<0$ より $f(x)$ は凹関数である．Karamata の不等式より

$$f(a+b-c)+f(c+a-b)+f(b+c-a) \leqq f(a)+f(b)+f(c)\,. \qquad \blacksquare$$

問題 163　(APMO 2003)

n を 2 以上の整数とする．a, b, c は三角形の三辺の長さで，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}\,.$$

解　まず，次の不等式を証明する．

「$x \geqq 1$ のとき，$\sqrt[n]{x^n+1} \leqq x+\sqrt[n]{2}-1$ が成り立つ．」

$f(x)=\sqrt[n]{x^n+1}-x\quad(x \geqq 1)$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{x^{n-1}}{(x^n+1)^{\frac{n-1}{n}}}-1<0\,.$

ゆえに，$f(x)$ は減少関数であるから

$$f(x) \leqq f(1)=\sqrt[n]{2}-1\,.$$

$p \geqq q>0$ のとき，$x=\dfrac{p}{q}$ とおくと $\sqrt[n]{p^n+q^n} \leqq p+(\sqrt[n]{2}-1)q$ が成り立つ．

この不等式を利用して，問題の不等式を証明する．一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定すると

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \leqq a+(\sqrt[n]{2}-1)b,\ \sqrt[n]{b^n+c^n} \leqq b+(\sqrt[n]{2}-1)c,$$

$$\sqrt[n]{c^n+a^n} \leqq c+(\sqrt[n]{2}-1)a\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n} \leqq \sqrt[n]{2}(a+b+c)=\sqrt[n]{2}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

問題 164　(Austria 2005)

a, b, c, d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \geqq \frac{a+b+c+d}{abcd}\,.$$

解 1　$p=\dfrac{1}{a},\ q=\dfrac{1}{b},\ r=\dfrac{1}{c},\ s=\dfrac{1}{d}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$p^3+q^3+r^3+s^3 \geqq pqrs\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)$$
$$\iff p^3+q^3+r^3+s^3 \geqq pqr+pqs+prs+qrs$$

より

$$p^3+q^3+r^3+s^3 \geqq pqr+pqs+prs+qrs$$

となる．相加平均・相乗平均の不等式より

$$p^3+q^3+r^3 \geqq 3pqr,\ p^3+q^3+s^3 \geqq 3pqs,$$
$$p^3+r^3+s^3 \geqq 3prs,\ q^3+r^3+s^3 \geqq 3qrs.$$

これらの不等式の辺々を加えることにより

$$p^3+q^3+r^3+s^3 \geqq pqr+pqs+prs+qrs$$

を得る． ■

解 2　$a=e^{a_1},\ b=e^{b_1},\ c=e^{c_1},\ d=e^{d_1}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}&e^{-3a_1}+e^{-3b_1}+e^{-3c_1}+e^{-3d_1}\\ \geqq\ &e^{-(b_1+c_1+d_1)}+e^{-(a_1+c_1+d_1)}+e^{-(a_1+b_1+d_1)}+e^{-(a_1+b_1+c_1)}\end{aligned}$$

となる．$a_1 \geqq b_1 \geqq c_1 \geqq d_1$ と仮定すると

$$(3a_1,\ 3b_1,\ 3c_1,\ 3d_1) \succ (a_1+b_1+c_1,\ a_1+b_1+d_1,\ a_1+c_1+d_1,\ b_1+c_1+d_1)\,.$$

$f(x)=e^{-x}$ とおくと，$f''(x)=e^{-x}>0$ より $f(x)$ は凸関数である．Karamata の不等式より

$$\begin{aligned}&f(3a_1)+f(3b_1)+f(3c_1)+f(3d_1)\\ \geqq\ &f(b_1+c_1+d_1)+f(a_1+c_1+d_1)+f(a_1+b_1+d_1)+f(a_1+b_1+c_1)\,.\end{aligned}$$ ■

問題 165　(Romania 2005)

a, b, c, d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b+2c+d}+\frac{b}{c+2d+a}+\frac{c}{d+2a+b}+\frac{d}{a+2b+c} \geqq 1\,.$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+2c+d}+\frac{b}{c+2d+a}+\frac{c}{d+2a+b}+\frac{d}{a+2b+c}\\
&=\frac{a^2}{a(b+2c+d)}+\frac{b^2}{b(c+2d+a)}+\frac{c^2}{c(d+2a+b)}+\frac{d^2}{d(a+2b+c)}\\
&\geqq \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+2c+d)+b(c+2d+a)+c(d+2a+b)+d(a+2b+c)}\\
&=\frac{(a+b+c+d)^2}{2(ab+bc+cd+da)+4(ac+bd)}\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{2(ab+bc+cd+da)+4(ac+bd)} \geqq 1$$

すなわち

$$(a+b+c+d)^2 \geqq 2(ab+bc+cd+da)+4(ac+bd)$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&(a+b+c+d)^2-2(ab+bc+cd+da)-4(ac+bd)\\
&=a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd\\
&=a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2\\
&=(a-c)^2+(b-d)^2 \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

よって，$(a+b+c+d)^2 \geqq 2(ab+bc+cd+da)+4(ac+bd)\,.$ ■

問題 166　(Karachi 2006)

a, b, c は実数で，$a \geqq b \geqq c$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2b+b^2c+c^2a \geqq ab^2+bc^2+ca^2.$$

解　差をとると

$$\begin{aligned} a^2b+b^2c+c^2a-(ab^2+bc^2+ca^2) &= (b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c) \\ &= (b-c)\bigl[a^2-(b+c)a+bc\bigr] \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) \geqq 0\,. \end{aligned}$$

よって，$a^2b+b^2c+c^2a \geqq ab^2+bc^2+ca^2$． ■

問題 167　(Irish MO 2011)

x, y, z は正の実数で，$1=2xyz+xy+yz+zx$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

(i)　$\dfrac{3}{4} \leqq xy+yz+zx<1$

(ii)　$xyz \leqq \dfrac{1}{8}$

(iii)　$x+y+z \geqq \dfrac{3}{2}$

解 1　(i) 相加平均・相乗平均の不等式より

$$\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3 \geqq \left(\sqrt[3]{(xyz)^2}\right)^3=(xyz)^2=\left(\frac{1-xy-yz-zx}{2}\right)^2.$$

$T=xy+yz+zx$ とおくと $\left(\dfrac{T}{3}\right)^3 \geqq \left(\dfrac{1-T}{2}\right)^2$ から

$$4T^3-27T^2+54T-27 \geqq 0. \qquad (4T-3)(T-3)^2 \geqq 0\,.$$

よって，$T \geqq \dfrac{3}{4}$.

また

$$xy+yz+zx<xy+yz+zx+2xyz=1$$

よって，$\dfrac{3}{4} \leqq xy+yz+zx<1$．

(ii) (i) の結果を使うと

$$2xyz=1-(xy+yz+zx) \leqq 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \quad \text{から} \quad xyz \leqq \frac{1}{8}\,.$$

(iii) (i) の結果を使うと

$$(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx) \geqq \frac{9}{4}\,.$$

よって，$x+y+z \geqq \dfrac{3}{2}$． ■

解 2 (ii) $1-2xyz=xy+yz+zx \overset{AM \geqq GM}{\geqq} 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$ が成り立つから，$U=\sqrt[3]{xyz}$ とおくと，

$1-2U^3 \geqq 3U^2$. $(U+1)^2(2U-1) \leqq 0$ から $U \leqq \frac{1}{2}$. よって，$xyz \leqq \frac{1}{8}$.

［注］ (iii) は次のようにも示すこともできる． $x+y+z<\frac{3}{2}$ と仮定すると．

$xy+yz+zx \leqq \dfrac{(x+y+z)^2}{3} < \dfrac{3}{4}$.

また，$\sqrt[3]{xyz} \leqq \dfrac{x+y+z}{3} < \dfrac{1}{2}$ から $2xyz < \dfrac{1}{4}$.

これらの不等式を使うと

$$1 = xy+yz+zx+2xyz < \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$$

となり矛盾する．したがって，$x+y+z \geqq \frac{3}{2}$ となる． □

問題 168 (Mircea Lascu ,Marian Tetiva)

x,y,z は正の実数で，$xy+yz+zx+2xyz=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqq 4(x+y+z)$$

解 $xy+yz+zx+2xyz=1$ の両辺を xyz で割ると $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}$ となるから，$X=\frac{1}{x}$, $Y=\frac{1}{y}$, $Z=\frac{1}{z}$ とおくと，$X+Y+Z+2=XYZ$.

この式を

$$\frac{1}{1+X}+\frac{1}{1+Y}+\frac{1}{1+Z}=1$$

と変形し，$a=\dfrac{1}{1+X}$，$b=\dfrac{1}{1+Y}$，$c=\dfrac{1}{1+Z}$ とおくと $a+b+c=1$.

$a=\dfrac{1}{1+X}$ から $X=\dfrac{1-a}{a}=\dfrac{b+c}{a}$. よって，$x=\dfrac{1}{X}=\dfrac{a}{b+c}$ となる．同様にして，$y=\dfrac{b}{c+a}$，$z=\dfrac{c}{a+b}$ を得るから，結局

$$x=\frac{a}{b+c},\ y=\frac{b}{c+a},\ z=\frac{c}{a+b} \quad (a+b+c=1).$$

証明すべき不等式を a, b, c で書き直すと

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqq 4(x+y+z)\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geqq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\end{aligned}$$

$$\iff \left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right) \geqq \frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}\,.$$

ここで，$p>0,\ q>0$ のとき，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1^2}{p}+\dfrac{1^2}{q} \geqq \dfrac{(1+1)^2}{p+q}=\dfrac{4}{p+q}$ が成り立つから

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c} \geqq \frac{4a}{b+c},\ \ \frac{b}{c}+\frac{b}{a} \geqq \frac{4b}{c+a},\ \ \frac{c}{a}+\frac{c}{b} \geqq \frac{4c}{a+b}\,.$$

よって，$\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}\right)+\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\right) \geqq \dfrac{4a}{b+c}+\dfrac{4b}{c+a}+\dfrac{4c}{a+b}$ は成り立つ． ■

問題 169 (Irish MO 2010)

x, y, z は正の実数で，$x+y+z=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

(a) $xy+yz+zx \geqq 9xyz$

(b) $xy+yz+zx < \dfrac{1}{4}+3xyz$

解 (a) コーシー・シュワルツの不等式より

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqq 9\,.$$

よって，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geqq 9$ から $xy+yz+zx \geqq 9xyz\,.$

(b) 一般性を失うことなく $x \geqq y \geqq z$ と仮定できる，このとき，$3z \leqq x+y+z=1$ より $z \leqq \dfrac{1}{3}\,.$

$z=k$ として，z を固定すると，$x+y=1-k,\ 0<k \leqq \dfrac{1}{3}\,.$

$$xy+yz+zx-3xyz=(1-3k)xy+k(x+y)=(1-3k)xy+k(1-k)$$

と変形すると，$1-3k \geqq 0$ であるから $xy \leqq \dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{(1-k)^2}{4}$ を用いると

$$\begin{aligned}
xy+yz+zx-3xyz &= (1-3k)xy+k(1-k) \\
&\leqq (1-3k)\cdot\frac{(1-k)^2}{4}+k(1-k) \\
&= \frac{-3k^3+3k^2-k+1}{4} \\
&= \frac{-k(3k^2-3k+1)+1}{4} \\
&= \frac{-k\big[3(2k-1)^2+1\big]+4}{16} < \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

■

問題 170 (Irish MO 2009)

a, b, c は実数で，$a+b+c=0,\ a^2+b^2+c^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2b^2c^2 \leqq \frac{1}{54}\,.$$

解 $a+c=2x,\ a-c=2y$ とおくと，$a=x+y,\ c=x-y,\ b=-2x\,.$
条件式 $a^2+b^2+c^2=1$ は $6x^2+2y^2=1$ となり，証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}(x+y)^2(-2x)^2(x-y)^2 \leqq \frac{1}{54} &\iff 4x^2(x^2-y^2)^2 \leqq \frac{1}{54}\\ &\iff 4x^2\left(x^2-\frac{1-6x^2}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{54}\\ &\iff x^2(8x^2-1)^2 \leqq \frac{1}{54}\,.\end{aligned}$$

$x^2=t$ ，$f(t)=t(8t-1)^2 \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{6}\right)$ とおくと，$f'(t)=(8t-1)(24t-1)\,.$

t	0		$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{6}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\frac{1}{54}$

$t=\dfrac{1}{24}$ で極大値 $\dfrac{1}{54}$ をとるから，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{24},\ \dfrac{1}{6}$ で最大値 $\dfrac{1}{54}$ をとる．
よって，$f(t) \leqq \frac{1}{54}$． ■

問題 171 (China Western MO 2004)

$a,\ b,\ c$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}\,.$$

解 1 $x=\dfrac{b}{a},\ y=\dfrac{c}{b},\ z=\dfrac{a}{c}$ とおくと，$xyz=1$ で，証明すべき不等式は

$$1 \leqq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

となる．

(i) $1 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ の証明

一般性を失うことなく $x \leqq y \leqq z$ と仮定すると，$z^3 \geqq xyz = 1$ より $z \geqq 1$. $xy = A$ とおくと

$$A = xy = \frac{1}{z} \leqq 1\,.$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} &> \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+A^2}} \\ &\geqq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} > 1\,.\end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ の証明

$xyz = 1,\ x \geqq y \geqq z > 0$ のとき，次の 2 つの不等式を証明すればよい.

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{2}{\sqrt{1+yz}} \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+yz}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \cdots\cdots(\bigstar\bigstar)$$

なぜならば，$(\bigstar) + (\bigstar\bigstar)$ から

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

が得られるからである.

$(\bigstar)$ の証明

$a > 0,\ b > 0$ のとき $\dfrac{1}{2}(a+b)^2 \leqq a^2 + b^2$ が成り立つから

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 \leqq \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2}.$$

$$\frac{2}{1+yz} - \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+z^2} = \frac{(1-yz)(y-z)^2}{(1+y^2)(1+z^2)(1+yz)}$$

したがって，$yz \leqq 1$ を示せばよい．
これは
$x^3 \geqq xyz = 1$ から $x \geqq 1$ なので，$yz = \dfrac{1}{x} \leqq 1$ となる．

(★★) の証明
$yz = \dfrac{1}{x}$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2\sqrt{\frac{x}{1+x}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

を示せばよい．コーシー・シュワルツの不等式より

$$2(1+x^2) = (1^2+1^2)(1^2+x^2) \geqq (1+x)^2 .$$

よって

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqq \frac{\sqrt{2}}{1+x}$$

が成り立つから

$$\frac{1}{1+x} + \sqrt{\frac{2x}{1+x}} \leqq \frac{3}{2}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} + \sqrt{\frac{2x}{1+x}} \leqq \frac{3}{2} &\iff 2 + 2\sqrt{2x(1+x)} \leqq 3(1+x) \\ &\iff 2\sqrt{2x(1+x)} \leqq 3x+1 \\ &\iff (\sqrt{2x} - \sqrt{1+x})^2 \geqq 0 . \end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{1+x} + \sqrt{\frac{2x}{1+x}} \leqq \frac{3}{2}$$

は成り立つ． ■

解 2　$p = \dfrac{b^2}{a^2} > 0,\ q = \dfrac{c^2}{b^2} > 0,\ r = \dfrac{a^2}{c^2} > 0$ とおくと，$pqr = 1$ で証明すべき不等式は

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+q}} + \frac{1}{\sqrt{1+r}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

となる．一般性を失うことなく $p \leqq q \leqq r$ と仮定すると，$r^3 \geqq pqr = 1$ より $r \geqq 1$．
$pq = A$ とおくと

$$A = pq = \frac{1}{r} \leqq 1\,.$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+q}} + \frac{1}{\sqrt{1+r}} &> \frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+q}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{A}{p}}} = \frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p+A}} \\
&\geqq \frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p+1}} = \frac{1+\sqrt{p}}{\sqrt{1+p}} > 1\,.
\end{aligned}$$

次に $\dfrac{1}{\sqrt{1+p}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+q}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+r}} \leqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ を証明する．（A を固定する．）

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+q}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{A}{p}}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+\frac{A}{p}} + \frac{2}{\sqrt{1+A+p+\frac{A}{p}}} \\
&= \frac{2+p+\frac{A}{p}}{1+A+p+\frac{A}{p}} + \frac{2}{\sqrt{1+A+p+\frac{A}{p}}} \\
&= 1 + \frac{1-A}{1+A+p+\frac{A}{p}} + \frac{2}{\sqrt{1+A+p+\frac{A}{p}}}
\end{aligned}$$

であるから，$u = \dfrac{1}{\sqrt{1+A+p+\frac{A}{p}}}$ とおくと

$$1+A+p+\frac{A}{p} \geqq 1+A+2\sqrt{p\cdot\frac{A}{p}} = 1+A+2\sqrt{A} = (1+\sqrt{A})^2\,.$$

ゆえに，$\dfrac{1}{\sqrt{1+A+p+\frac{A}{p}}} \leqq \dfrac{1}{1+\sqrt{A}}$.

よって，$0 < u \leqq \dfrac{1}{1+\sqrt{A}}$ で

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+q}}\right)^2 &= 1 + \frac{1-A}{1+A+p+\dfrac{A}{p}} + \frac{2}{\sqrt{1+A+p+\dfrac{A}{p}}} \\
&= 1 + (1-A)u^2 + 2u = (1-A)u^2 + 2u + 1\,.
\end{aligned}$$

$f(u) = (1-A)u^2 + 2u + 1$ は $\left(0,\ \dfrac{1}{1+\sqrt{A}}\right]$ で増加関数であるから

$$f(u) \leqq f\left(\frac{1}{1+\sqrt{A}}\right).$$

$u = \frac{1}{1+\sqrt{A}} \iff p = \sqrt{A}$ に注意すると

$$f\left(\frac{1}{1+\sqrt{A}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{A}{p}}}\right)^2_{p=\sqrt{A}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{A}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{A}{\sqrt{A}}}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}}\right)^2.$$

よって

$$\frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+q}} \leqq \sqrt{f\left(\frac{1}{1+\sqrt{A}}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}}.$$

$v = \sqrt{A}$ とおくと，$0 < v \leqq 1$ で

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+q}} + \frac{1}{\sqrt{1+r}} &\leqq \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{A}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}} + \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{1+A}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+v}} + \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+v}} + \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{2(1+v^2)}} \\
&\leqq \frac{2}{\sqrt{1+v}} + \frac{\sqrt{2}v}{1+v} \qquad \left(\quad 2(1+v^2) \geqq (1+v)^2 \quad \text{を用いた}\right).
\end{aligned}$$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{1+v}}$ とおくと，$x \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+p}} + \frac{1}{\sqrt{1+q}} + \frac{1}{\sqrt{1+r}} &\leqq \frac{2}{\sqrt{1+v}} + \frac{\sqrt{2}v}{1+v} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+v}} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{1+v} \\
&= -\sqrt{2}x^2 + 2x + \sqrt{2} \\
&= -\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

■

問題 172　(Vietnam 2005)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geqq \frac{3}{8}\,.$$

解　$x=\dfrac{b}{a}>0,\ y=\dfrac{c}{b}>0,\ z=\dfrac{a}{c}>0$ とおくと，$xyz=1$．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geqq \frac{3}{8}\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3} \geqq \frac{3}{8}\,.\end{aligned}$$

累乗平均の不等式「 $p,\ q,\ r>0$ のとき，$\sqrt[3]{\dfrac{p^3+q^3+r^3}{3}} \geqq \sqrt{\dfrac{p^2+q^2+r^2}{3}}$ 」より $p^3+q^3+r^3 \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}(p^2+q^2+r^2)^{\frac{3}{2}}$ が成り立つから

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3} \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

したがって，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}+\dfrac{1}{(1+z)^2}\right]^{\frac{3}{2}} \geqq \dfrac{3}{8}$ すなわち

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2} \geqq \frac{3}{4}$$

を示せばよい．1.1 基本的な恒等式･不等式 12 より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2} \geqq \dfrac{1}{1+xy}}$ が成り立つから

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2} &\geqq \frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(1+z)^2}\\ &=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}+\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(1+z)^2}\\ &=\frac{z^2+z+1}{(1+z)^2}\,.\end{aligned}$$

$\dfrac{z^2+z+1}{(1+z)^2}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{z^2-2z+1}{4(1+z)^2}=\dfrac{(z-1)^2}{4(1+z)^2} \geqq 0$ が成り立つから

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2} \geqq \frac{z^2+z+1}{(1+z)^2} \geqq \frac{3}{4}\,.$$

■

問題 173　(China 2005)

a, b, c, d は正の実数で，$abcd = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \geqq 1\,.$$

解　$x>0,\ y>0$ のとき，$\boldsymbol{\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2} \geqq \dfrac{1}{1+xy}}$ が成り立つから

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} &\geqq \frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+cd}\\ &= \frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{ab}}\\ &= \frac{1}{1+ab}+\frac{ab}{ab+1}=1\,.\end{aligned}$$

■

問題 174　(Romania 2005)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2b^2c^2 \geqq (3-2a)(3-2b)(3-2c)\,.$$

解 1　$x=3-2a,\ y=3-2b,\ z=3-2c$ とおくと，$x+y+z=3$ で

$$a=\frac{3-x}{2}=\frac{y+z}{2},\ b=\frac{3-y}{2}=\frac{z+x}{2},\ c=\frac{3-z}{2}=\frac{x+y}{2}\,.$$

証明すべき不等式を $x,\ y,\ z$ の式に書き直すと

$$\begin{aligned}&a^2b^2c^2 \geqq (3-2a)(3-2b)(3-2c)\\ \Longleftrightarrow\ &\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\left(\frac{z+x}{2}\right)^2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geqq xyz\\ \Longleftrightarrow\ &(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geqq 64xyz\,.\end{aligned}$$

$x,\ y,\ z$ の符号を調べる．$x \geqq y \geqq z$ とすると，$3x \geqq x+y+z=3$ から $x>0$．

$y,\ z$ については，$y+z=2a>0$ より 2 つとも負になることはない．

$y,\ z$ のうち 1 つだけが負になるときは，$xyz \leqq 0$ であるから，明らかに

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geqq 64xyz$$

は成り立つ．したがって，$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ と仮定してよい．

同次化 (Homonization) して

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geqq 64xyz \Longleftrightarrow (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geqq \frac{64}{27}xyz(x+y+z)^3\,.$$

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geqq \frac{64}{27}xyz(x+y+z)^3$$

を示す．

$$\boldsymbol{9(x+y)(y+z)(z+x) \geqq 8(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

と $(xy+yz+zx)^2 \geqq 3(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)=3xyz(x+y+z)$ が成り立つから

$$\begin{aligned}(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 &\geqq \frac{64}{81}(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2\\ &\geqq \frac{64}{81}(x+y+z)^2\cdot 3xyz(x+y+z)\\ &= \frac{64}{27}xyz(x+y+z)^3\,. \end{aligned}$$

■

解 2　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．このとき，$3c \leqq a+b+c=3$ より $c \leqq 1$．

$a+b=A=3-c$ とおくと，$2 \leqq A < 3$．まず， A を固定する．

$$\begin{aligned}& a^2b^2c^2 \geqq (3-2a)(3-2b)(3-2c)\\ \iff & (3-A)^2a^2b^2 \geqq [9-6(a+b)+4ab][3-2(3-A)]\\ \iff & (3-A)^2a^2b^2 \geqq (9-6A+4ab)(2A-3)\\ \iff & (3-A)^2(ab)^2-4(2A-3)ab+3(2A-3)^2 \geqq 0\,.\end{aligned}$$

$x=ab$ とおき $f(x)=(3-A)^2x^2-4(2A-3)x+3(2A-3)^2$ を考える．$ab \leqq \dfrac{(a+b)^2}{4}$ より

$$0 < x \leqq \frac{A^2}{4}.$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=\dfrac{2(2A-3)}{(3-A)^2}$ で

$$\begin{aligned}\frac{2(2A-3)}{(3-A)^2}-\frac{A^2}{4} &= \frac{-A^4+6A^3-9A^2+16A-24}{4(3-A)^2}\\ &= \frac{-A^4+6A^3-9A^2+16A-28+4}{4(3-A)^2}\\ &= \frac{-(A-2)(A^3-4A^2+A-14)+4}{4(3-A)^2}\\ &= \frac{(A-2)[A^2(4-A)+(14-A)]+4}{4(3-A)^2} > 0\end{aligned}$$

から $\dfrac{2(2A-3)}{(3-A)^2} > \dfrac{A^2}{4}$ が成り立つので，$f(x)$ は $0 < x \leqq \dfrac{A^2}{4}$ で減少関数である．したがって，$f\left(\dfrac{A^2}{4}\right) \geqq 0$ を示せば，$f(x) \geqq 0$ がいえる．

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{A^2}{4}\right) &= (3-A)^2\left(\frac{A^2}{4}\right)^2 - 4(2A-3)\cdot\frac{A^2}{4} + 3(2A-3)^2 \\
&= \frac{1}{16}(A^6 - 6A^5 + 9A^4 - 32A^3 + 240A^2 - 576A + 432) \\
&= \frac{1}{16}(A-2)^2(A-3)^2(A^2+4A+12) \geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

■

問題 175 (Poland 2005)

a, b, c は正の実数で，$ab+bc+ca=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geqq 9\,.$$

解 Schur の不等式より

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3+6abc &\geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc \\
&= ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(c+a+b) \\
&= (a+b+c)(ab+bc+ca) \\
&= 3(a+b+c)\,.
\end{aligned}
$$

したがって，$3(a+b+c) \geqq 9$ すなわち $a+b+c \geqq 3$ を示せばよい．

$(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca) = 9$ から $a+b+c \geqq 3$ は成り立つ． ■

問題 176 (Romania 2005)

a, b, c は正の実数で，$1=(a+b)(b+c)(c+a)$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$ab+bc+ca \leqq \frac{3}{4}\,.$$

解 1 $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ を利用することを考え，$a+b+c$, abc のとる値の範囲を調べる．相加平均・相乗平均の不等式より

$$1 = (a+b)(b+c)(c+a) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca} = 8abc\,,$$

$$2(a+b+c)=(a+b)+(b+c)+(c+a) \geqq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}=3\,.$$

ゆえに，$abc \leqq \dfrac{1}{8}$，$a+b+c \geqq \dfrac{3}{2}$．
したがって

$$1=(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc \geqq \frac{3}{2}(ab+bc+ca)-\frac{1}{8}$$

から $ab+bc+ca \leqq \dfrac{3}{4}$ を得る． ■

解 2　不等式を同次化して

$$(ab+bc+ca)^3 \leqq \frac{27}{64}(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

を証明する．この不等式は同次式なので，$ab+bc+ca=1$ と仮定しても一般性を失わない．すると

$$a=\tan\frac{\alpha}{2},\ b=\tan\frac{\beta}{2},\ c=\tan\frac{\gamma}{2}$$

とおける．ただし，$\alpha,\ \beta,\ \gamma>0,\ \alpha+\beta+\gamma=\pi$. (例題 4 のあとのまとめ参照 .)
このとき

$$a+b=\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\,.$$

同様にして

$$b+c=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},\ \ c+a=\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

が成り立つから

$$(a+b)(b+c)(c+a)=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\,.$$

したがって

$$1 \leqq \frac{27}{64}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

すなわち

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

を示せばよい，

$f(x) = \log\cos\frac{x}{2} \quad (0 < x < \pi)$ とおくと，$f''(x) = -\dfrac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}} < 0$.

$f(x)$ は凹関数であるから

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \leqq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\log\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}. \qquad \blacksquare$$

問題 177 (Serbia and Montenegro 2005)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}.$$

解 1　補助定理 2 より

$$\begin{aligned}\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sum_{cyclic}a(b+c) &\geqq \left(\sum_{cyclic}\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b+c}}\cdot\frac{a}{\sqrt{b+c}}\cdot a(b+c)}\right)^3 \\ &= (a+b+c)^3.\end{aligned}$$

ゆえに，$(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$ を用いると

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2 &\geqq \frac{(a+b+c)^3}{2(ab+bc+ca)} = (a+b+c)\cdot\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \\ &\geqq (a+b+c)\cdot\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{3(a+b+c)}{2}.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}. \qquad \blacksquare$$

解 2　補助定理 2 より

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sum_{cyclic}a\sqrt{b+c}\sum_{cyclic}a \geqq \left(\sum_{cyclic}\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b+c}}\cdot a\sqrt{b+c}\cdot a}\right)^3$$

$$= (a+b+c)^3$$

ゆえに

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geqq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}}\,.$$

したがって

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$$

すなわち

$$\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)^2 \leqq \frac{2}{3}(a+b+c)^3$$

を示せばよい．コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}
&\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{a}\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b}\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c}\sqrt{c(a+b)}\right)^2 \\
&\leqq (a+b+c)\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right] \\
&= 2(a+b+c)(ab+bc+ca) \\
&\leqq 2(a+b+c)\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{2}{3}(a+b+c)^3\,.
\end{aligned}$$

■

解3　一般性を失うことなく $a+b+c=1$ と仮定することができる．コーシー・シュワルツの不等式より

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)$$
$$\geqq (a+b+c)^2 = 1\,.$$

ゆえに

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geqq \frac{1}{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}}\,.$$

したがって

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

すなわち

$$\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)^2 \leqq \frac{2}{3}$$

を示せばよい．コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}
&\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{a}\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b}\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c}\sqrt{c(a+b)}\right)^2 \\
&\leqq (a+b+c)\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right] \\
&= 2(ab+bc+ca) \\
&\leqq 2\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

■

解 4　一般性を失うことなく $a+b+c=1$ と仮定することができる．このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)} \\
\iff &\frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}}\,.
\end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$　$(0<x<1)$ とおくと $f''(x)=\dfrac{4-x}{4(1-x)^{\frac{5}{2}}}>0$．したがって，$f(x)$ は凸関数であるから

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

■

［注］　問題 156 参照.

［類題］ (Romania 2005 Unused)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

問題 178　(Bosnia and Hercegovina 2005)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

解 1　コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}\left(a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}\right)^2 &= \left(\sqrt{a}\sqrt{ab}+\sqrt{b}\sqrt{bc}+\sqrt{c}\sqrt{ca}\right)^2\\ &\leqq (a+b+c)(ab+bc+ca) = ab+bc+ca\\ &\leqq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

よって，$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ■

解 2　$f(x)=\sqrt{x}\quad(x>0)$ は凹関数であるから

$$\begin{aligned}a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} &= af(b)+bf(c)+cf(a)\\ &\leqq f(ab+bc+ca) = \sqrt{ab+bc+ca}\\ &\leqq \sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$

よって，$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ■

問題 179　(Mihai Piticari, Dan Popescu)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$5(a^2+b^2+c^2) \leqq 6(a^3+b^3+c^3)+1\,.$$

解　証明すべき不等式を同次化 (Homonization) する．

$$\begin{aligned}&5(a^2+b^2+c^2) \leqq 6(a^3+b^3+c^3)+1\\ \Longleftrightarrow\ &5(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \leqq 6(a^3+b^3+c^3)+(a+b+c)^3\\ \Longleftrightarrow\ &5(a^3+b^3+c^3)+5a^2(b+c)+5b^2(c+a)+5c^2(a+b)\\ &\leqq 6(a^3+b^3+c^3)+a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc\\ \Longleftrightarrow\ &a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \leqq a^3+b^3+c^3+3abc\end{aligned}$$

最後の不等式は，Schur の不等式より成り立つ． ■

問題 180 (China 2005)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5) \geqq 1\,.$$

解 証明すべき不等式を同次化 (Homonization) する．

$$10(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)^2 \geqq 9(a^5+b^5+c^5)+(a+b+c)^5\,.$$

展開すると

$$\begin{aligned}
&10(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)^2 \geqq 9(a^5+b^5+c^5)+(a+b+c)^5\\
\Longleftrightarrow\ &10\sum_{cyclic} a^5 + 20\sum_{sym} a^4b + 10\sum_{sym} a^3b^2 + 20\sum_{cyclic} a^3bc\\
&\geqq 10\sum_{cyclic} a^5 + 5\sum_{sum} a^4b + 10\sum_{sym} a^3b^2 + 20\sum_{cyclic} a^3bc + 30\sum_{cyclic} a^2b^2c\\
\Longleftrightarrow\ &\sum_{sym} a^4b \geqq 2\sum_{cyclic} a^2b^2c\\
\Longleftrightarrow\ &[(4,\ 1,\ 0)] \geqq [(2,\ 2,\ 1)].
\end{aligned}$$

$[(4,\ 1,\ 0)] \geqq [(2,\ 2,\ 1)]$ は Muirhead の定理から成り立つ． ■

［注］ $\displaystyle\sum_{sym} a^4b \geqq 2\sum_{cyclic} a^2b^2c$ すなわち

$$a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b) \geqq 2(a^2b^2c+b^2c^2a+c^2a^2b)$$

は相加平均・相乗平均の不等式より示してもよい．

$$a^4c+b^4c \geqq 2a^2b^2c,\ b^4a+c^4a \geqq 2b^2c^2a,\ a^4b+c^4b \geqq 2c^2a^2b$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えればよい． □

問題 181 (Iran 2005)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geqq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\,.$$

解 1

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geqq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
\iff &\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geqq 3+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}
\end{aligned}
$$

より， $x=\dfrac{a}{b}$, $y=\dfrac{b}{c}$, $z=\dfrac{c}{a}$ とおくと $xyz=1$. 証明すべき不等式を x, y, z の不等式に直す.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geqq 3+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\\
\iff &(x+y+z)^2 \geqq 3+x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\\
\iff &(x+y+z)^2 \geqq 3+x+y+z+xy+yz+zx\,.
\end{aligned}
$$

$\dfrac{(x+y+z)^2}{3} \geqq xy+yz+zx$ を用いると

$$
3+x+y+z+\frac{(x+y+z)^2}{3} \geqq 3+x+y+z+xy+yz+zx
$$

が成立するから

$$
(x+y+z)^2 \geqq 3+x+y+z+\frac{(x+y+z)^2}{3}
$$

を示せばよい．$t=x+y+z>0$ とおくと

$$
t^2 \geqq 3+t+\frac{t^2}{3} \iff 2t^2-3t-9 \geqq 0 \iff (t-3)(2t+3) \geqq 0\,.
$$

したがって，$t \geqq 3$ を示せばよい．これは，相加平均・相乗平均の不等式より

$$
x+y+z \geqq 3\sqrt[3]{xyz}=3\,.
$$

■

解 2　$x=\dfrac{a}{b}$, $y=\dfrac{b}{c}$, $z=\dfrac{c}{a}$ とおくと $xyz=1$. 証明すべき不等式を x, y, z の不等式に直す.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geqq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
\iff &\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geqq 3+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\\
\iff &(x+y+z)^2 \geqq 3+x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\\
\iff &(x+y+z)^2 \geqq 3+x+y+z+xy+yz+zx\\
\iff &x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \geqq 3+x+y+z\,.
\end{aligned}
$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$xy + yz + zx \geqq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3$$

が成立するから

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq x + y + z = \sqrt[3]{xyz}(x + y + z)$$

を示せばよい．重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}z^2 \geqq (x^2)^{\frac{2}{3}}(y^2)^{\frac{1}{6}}(z^2)^{\frac{1}{6}} = (xyz)^{\frac{1}{3}}x = x.$$

ゆえに

$$\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}z^2 \geqq x.$$

同様にして

$$\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{6}z^2 \geqq y,$$

$$\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{2}{3}z^2 \geqq z.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq x + y + z$$

を得る． ■

次の解答の間違いがわかりますか？

解　解 2 の途中から

相加平均・相乗平均の不等式より

$$xy + yz + zx \geqq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3$$

が成立するから

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq x + y + z$$

を示せばよい．

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$$

から

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq x + y + z + \frac{3}{4} \geqq x + y + z.$$

問題 182　(Romania 2005)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2} \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2} \geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

が成り立つので，この不等式を証明する．

解 1　コーシー・シュワルツの不等式より

$$\left(\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) \geqq \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2.$$

ゆえに

$$\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2} \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

同様にして

$$\frac{c}{a^2}+\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2} \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2} \geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$ ■

解 2　$x=\dfrac{1}{a},\ y=\dfrac{1}{b},\ z=\dfrac{1}{c}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq 2(x+y+z)$$

すなわち

$$x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y) \geqq 2xyz(x+y+z)$$

となる．これは，$[(3,\ 1,\ 0)] \geqq [(2,\ 1,\ 1)]$ と同値であり，$[(3,\ 1,\ 0)] \geqq [(2,\ 1,\ 1)]$ は Miurhead の定理から成り立つ． ■

［注］ $x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y) \geqq 2xyz(x+y+z)$ は重みつきの相加平均・相乗平均の不等式を用いて示すことができる.

$$\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{3}x^3z+\frac{1}{6}y^3z+\frac{1}{6}z^3y \geqq (x^3y)^{\frac{1}{3}}(x^3z)^{\frac{1}{3}}(y^3z)^{\frac{1}{6}}(z^3y)^{\frac{1}{6}}=x^2yz\,.$$

同様にして

$$\frac{1}{3}y^3x+\frac{1}{3}y^3z+\frac{1}{6}x^3z+\frac{1}{6}z^3x \geqq xy^2z,$$

$$\frac{1}{3}z^3x+\frac{1}{3}z^3y+\frac{1}{6}x^3y+\frac{1}{6}y^3x \geqq xyz^2$$

が成り立つから，これらの 3 つの不等式の辺々を加えると

$$\frac{x^3y+x^3z+y^3z+y^3x+z^3x+z^3y}{2} \geqq x^2yz+xy^2z+xy^2z$$

すなわち

$$x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y) \geqq 2xyz(x+y+z). \qquad \square$$

解 3　$x=\dfrac{1}{a},\ y=\dfrac{1}{b},\ z=\dfrac{1}{c}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2} \geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
\iff& x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq 2(x+y+z)\\
\iff& \left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)+\left(\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}\right) \geqq 2(x+y+z)\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geqq x+y+z,\ \ \frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y} \geqq x+y+z$$

を示せばよい.

問題 234

「$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ が正の実数で，$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ を $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ の順列とするとき，次の不等式

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqq a_1+a_2+\cdots+a_n$$

が成り立つ.」

を使うと，この不等式は成り立つ. ■

[注]　問題 181 の解答の誤り

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$$

から，　$x^2+y^2+z^2 \geqq x+y+z+\frac{3}{4} \geqq x+y+z$ ではなく

$$x^2+y^2+z^2 \geqq x+y+z-\frac{3}{4}(<x+y+z)$$

となるので，不等式は証明できていない．

問題 183　(Romania 2005)

a, b, c は正の実数で，$abc \geqq 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \leqq 1\,.$$

解 1

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \leqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &(1+b+c)(1+c+a)+(1+c+a)(1+a+b)+(1+a+b)(1+b+c)\\
&\leqq (1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)\\
\Longleftrightarrow\ &a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc \geqq 2+2(a+b+c)\,.
\end{aligned}$$

仮定から $2abc \geqq 2$ が成立するので

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geqq 2(a+b+c)$$

すなわち

$$[(2,\ 1,\ 0)] \geqq [(1,\ 0,\ 0)]$$

を示せばよい．Muirhead の定理と (M2) より

$$[(2,\ 1,\ 0)] \geqq \left[\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\right] \geqq \left[\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)\right] = [(1,\ 0,\ 0)]\,. \qquad \blacksquare$$

解 2

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \leqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &(1+b+c)(1+c+a)+(1+c+a)(1+a+b)+(1+a+b)(1+b+c)\\
&\leqq (1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)\\
\Longleftrightarrow\ &a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc \geqq 2+2(a+b+c).
\end{aligned}$$

仮定から， $2abc \geqq 2$ が成立するので

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geqq 2(a+b+c)$$

を示せばよい．

重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}\frac{5}{12}a^2b+\frac{5}{12}a^2c+\frac{1}{12}b^2c+\frac{1}{12}c^2b &\geqq (a^2b)^{\frac{5}{12}}(a^2c)^{\frac{5}{12}}(b^2c)^{\frac{1}{12}}(c^2b)^{\frac{1}{12}}\\ &= a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} = a(abc)^{\frac{2}{3}} \geqq a\,.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{5}{12}a^2b+\frac{5}{12}a^2c+\frac{1}{12}b^2c+\frac{1}{12}c^2b \geqq a.$$

同様にして

$$\frac{5}{12}b^2c+\frac{5}{12}b^2a+\frac{1}{12}c^2a+\frac{1}{12}a^2c \geqq b,$$

$$\frac{5}{12}c^2a+\frac{5}{12}c^2b+\frac{1}{12}a^2b+\frac{1}{12}b^2a \geqq c$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b}{2} \geqq a+b+c$$

すなわち

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geqq 2(a+b+c). \qquad \blacksquare$$

［注］ Muirhead の定理から成り立つ不等式

$$[(2,\ 1,\ 0)] \geqq \left[\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\right]$$

を参考にして，重みつきの相加平均・相乗平均の不等式を利用して

$$\begin{aligned}\frac{5}{12}a^2b+\frac{5}{12}a^2c+\frac{1}{12}b^2c+\frac{1}{12}c^2b &\geqq (a^2b)^{\frac{5}{12}}(a^2c)^{\frac{5}{12}}(b^2c)^{\frac{1}{12}}(c^2b)^{\frac{1}{12}}\\ &= a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} = a(abc)^{\frac{2}{3}} \geqq a\,.\end{aligned}$$

等，導いている．

問題 184 (Vasile Cîrtoaje , Romania TST 2006)

a,b,c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqq a^2+b^2+c^2\,.$$

解　$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ を利用すると

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

が成り立つから

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geqq a^2+b^2+c^2$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geqq a^2+b^2+c^2 &\iff a+b+c \geqq abc(a^2+b^2+c^2)\\ &\iff 3 \geqq abc(a^2+b^2+c^2)\,.\end{aligned}$$

一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定すると $3c \leqq a+b+c=3$ から $c \leqq 1$．

$a+b=A=3-c$ とおくと $2 \leqq A < 3$．

$$\begin{aligned}abc(a^2+b^2+c^2) &= (3-A)ab\left[A^2-2ab+(3-A)^2\right]\\ &= (3-A)[-2(ab)^2+(2A^2-6A+9)ab]\end{aligned}$$

となるから，$x=ab,\ f(x)=-2x^2+(2A^2-6A+9)x$ とおくと，$ab \leqq \dfrac{(a+b)^2}{4}=\dfrac{A^2}{4}$ から

$$0 < x \leqq \frac{A^2}{4}\,.$$

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸の方程式は $x=\frac{2A^2-6A+9}{4}$ である．

$$\frac{2A^2-6A+9}{4}-\frac{A^2}{4}=\frac{A^2-6A+9}{4}=\frac{(A-3)^2}{4}>0$$

より，$f(x)$ は $0 < x \leqq \dfrac{A^2}{4}$ において増加関数である．よって

$$\begin{aligned}(3-A)f(x) \leqq (3-A)f\left(\frac{A^2}{4}\right) &= \frac{-3A^5+21A^4-54A^3+54A^2}{8}\\ &= \frac{-3A^5+21A^4-54A^3+54A^2-24}{8}+3\\ &= \frac{-3(A-2)^2(A^3-3A^2+2A+2)}{8}+3\\ &= \frac{-3(A-2)^2[A(A-1)(A-2)+2]}{8}+3 \leqq 3\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

問題 185 (Bulgaria TST 2003)
a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \geqq \frac{3}{2}\,.$$

解 (Cauchy reverse technique を使用する.)
$1+b^2 \geqq 2b$ が成り立つから

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2} \geqq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}\,.$$

同様にして

$$\frac{b}{1+c^2} \geqq b-\frac{bc}{2},\ \frac{c}{1+a^2} \geqq c-\frac{ca}{2}$$

が成り立つから，これらの 3 つの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \geqq a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2}\,.$$

したがって

$$3-\frac{ab+bc+ca}{2} \geqq \frac{3}{2}$$

すなわち

$$ab+bc+ca \leqq 3$$

を示せばよい．これは

$$9=(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$$

から得られる. ■

問題 186 a, b, c, d は正の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2} \geqq 2\,.$$

解 (Cauchy reverse technique を使用する．)

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geqq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}\,.$$

同様にして

$$\frac{b}{1+c^2} \geqq b - \frac{bc}{2},\ \frac{c}{1+d^2} \geqq c - \frac{cd}{2},\ \frac{d}{1+a^2} \geqq d - \frac{da}{2}$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{d}{1+a^2} &\geqq a+b+c+d - \frac{ab+bc+cd+da}{2}\\ &= 4 - \frac{ab+bc+cd+da}{2}\,.\end{aligned}$$

したがって

$$4 - \frac{ab+bc+cd+da}{2} \geqq 2$$

すなわち

$$ab+bc+cd+da \leqq 4$$

を示せばよい．これは $16 = (a+b+c+d)^2 \geqq 4(ab+bc+cd+da)$ を示せばよく

$$(a+b+c+d)^2 - 4(ab+bc+cd+da) = (a-b+c-d)^2 \geqq 0$$

から $(a+b+c+d)^2 \geqq 4(ab+bc+cd+da)$ は成り立つ． ■

問題 187 a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geqq \frac{1}{2}\,.$$

解 (Cauchy reverse technique を使用する.)

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \geqq a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{b}{2}\,.$$

同様にして

$$\frac{b^3}{b^2+c^2} \geqq b - \frac{c}{2},\ \frac{c^3}{c^2+a^2} \geqq c - \frac{a}{2}$$

が成り立つから，これらの 3 つの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geqq \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}\,.$$ ■

問題 188 (Pham Kim Hung)

$a,\ b,\ c$ は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geqq 1\,.$$

解 (Cauchy reverse technique を使用する.)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3+2}&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^3}{a^3+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^3}{a^3+1+1}\right)\\&\overset{AM\geqq GM}{\geqq}\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^3}{3a}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{3}\right).\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{1}{b^3+2}\geqq\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2}{3}\right),\quad \frac{1}{c^3+2}\geqq\frac{1}{2}\left(1-\frac{c^2}{3}\right)$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geqq\frac{1}{2}\left(3-\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)=1\,.$$ ■

問題 189 (IMO Shortlist)

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ は正の実数で，$x_1\geqq 1,\ x_2\geqq 1,\ \ldots,\ x_n\geqq 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqq\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\,.$$

解 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}\quad(x\geqq 1)$ とおく．

$a\geqq 1,\ b\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}-\frac{2}{1+ab}&=\frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3-(a^2-2ab+b^2)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}\\&=\frac{ab(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}\\&=\frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}\geqq 0\,.\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2} \geqq \dfrac{2}{1+ab}$ が成り立つから，$a=\sqrt{x_1}$，$b=\sqrt{x_2}$ とおくと，

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2} \geqq \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}}$$

すなわち

$$f(x_1)+f(x_2) \geqq 2f(\sqrt{x_1x_2})$$

が成り立つ．

$n=4$ のとき，$\sqrt{x_1x_2} \geqq 1$，$\sqrt{x_3x_4} \geqq 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4) &\geqq 2f(\sqrt{x_1x_2})+2f(\sqrt{x_3x_4}) \\ &= 2[f(\sqrt{x_1x_2})+f(\sqrt{x_3x_4})] \\ &\geqq 4f\left(\sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}}\right) = 4f(\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}). \end{aligned}$$

したがって，任意の自然数 m に対して $n=2^m$ のとき不等式は成り立つから (厳密には帰納法を使う)，$n=k+1$ のとき不等式が成り立つと仮定して $n=k$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$g=\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}$ とおき，$x_{k+1}=g$ とおいて仮定を使う．

$\sqrt[k+1]{x_1x_2\cdots x_k\cdot g}=\sqrt[k+1]{g^k\cdot g}=g$ に注意して

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(g) \geqq (k+1)f(\sqrt[k+1]{x_1x_2\cdots x_k\cdot g})=(k+1)f(g).$$

よって

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k) \geqq kf(g)=kf(\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}). \qquad \blacksquare$$

上記の解答は次のようにまとめることができる．

(L 1)　関数 $f:[a,b]\subset\{x\in\mathbb{R},\ x\geqq 0\}\to\mathbb{R}$ が，
任意の $x,y\in[a,b]$ に対して $f(x)+f(y)\geqq 2f(\sqrt{xy})$ を満たすならば，
すべての $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,\ b]$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \geqq nf(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}).$$

問題 190　（2007　早稲田大・教育）

次の問いに答えよ．

(1)　$a \geqq 1,\ b \geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right) \geqq 2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$$

(2)　$a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)+\left(c^3-\frac{1}{c^3}\right) \geqq 3\left(abc-\frac{1}{abc}\right)$$

解　(1) 差をとると

$$\begin{aligned}&\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right)-2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)\\ &=a^2-2ab+b^2-\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2b^2}=(a-b)^2\left(1-\frac{1}{a^2b^2}\right)\geqq 0\end{aligned}$$

よって，$\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right) \geqq 2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$．

(2) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$ $(x \geqq 1)$ とおくと (1) の結果から $a \geqq 1,\ b \geqq 1$ のとき

$$f(a)+f(b) \geqq 2f(\sqrt{ab})$$

が成り立つ．

$a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1,\ d \geqq 1$ のときは

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geqq 2f(\sqrt{ab})+2f(\sqrt{cd}) \geqq 4f\left(\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}\right)=f(\sqrt[4]{abcd})$$

から

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geqq 4f(\sqrt[4]{abcd})$$

が成り立つ．

$a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1$ のときは　$p=a,\ q=b,\ r=c,\ s=\sqrt[3]{abc}$ に対して
$f(p)+f(q)+f(r)+f(s) \geqq 4f(\sqrt[4]{pqrs})$ が成り立つことを用いると

$$f(\sqrt{a})+f(\sqrt{b})+f(\sqrt{c})+f(\sqrt[3]{abc}) \geqq 4f\left(\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}\right)=4f(\sqrt[3]{abc})\,.$$

よって $f(a)+f(b)+f(c) \geqq 3f(\sqrt[3]{abc})$ が成り立つ．　■

$f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2} \quad (x \geqq 1)$ とおくと (1) の結果から $n = 2$ のとき不等式

$$f(a) + f(b) \geqq 2f(\sqrt{ab})$$

が成り立つから，(L 1) を適用すると，次のように一般化した不等式

$x_1 \geqq 1, x_2 \geqq 1, \ldots, x_n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\left(x_1^n - \frac{1}{x_1^n}\right) + \left(x_2^n - \frac{1}{x_2^n}\right) + \cdots + \left(x_n^n - \frac{1}{x_n^n}\right) \geqq n\left(x_1 x_2 \cdots x_n - \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n}\right)$$

が成り立つ．

問題 191 (Vasile Cîrtoaje)

a, b, c, d は正の実数で，$abcd = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{(1+a)(1+a^2)} + \frac{1}{(1+b)(1+b^2)} + \frac{1}{(1+c)(1+c^2)} + \frac{1}{(1+d)(1+d^2)} \geqq 1\,.$$

解　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c \geqq d$ と仮定できる．このとき

$$a^4 \geqq abcd = 1,\ (ab)^2 \geqq abcd = 1,\ d^4 \leqq abcd = 1,\ abc = \frac{1}{d} \geqq 1$$

より

$$a \geqq 1,\ ab \geqq 1,\ abc \geqq 1,\ d \leqq 1\,.$$

$a \geqq b \geqq c$ から $1+a \geqq 1+b \geqq 1+c,\ 1+a^2 \geqq 1+b^2 \geqq 1+c^2$ なので，チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1+a)(1+a^2)} + \frac{1}{(1+b)(1+b^2)} + \frac{1}{(1+c)(1+c^2)} \\ &\geqq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right)\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．さて

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geqq \frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

を証明することにする．そうすれば，この不等式から

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geqq \frac{3}{1+\sqrt[3]{(abc)^2}}$$

も成り立つことが言える．まず，

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} \geqq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

を示す．

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}-\frac{2}{1+\sqrt{ab}} &= \frac{a\sqrt{ab}-2ab+b\sqrt{ab}-(a-2\sqrt{ab}+b)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(a-2\sqrt{ab}+b)-(a-2\sqrt{ab}+b)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \geqq 0.\end{aligned}$$

から

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} \geqq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}\,.$$

よって

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \geqq \frac{1}{1+c}+\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

となるから

$$\frac{1}{1+c}+\frac{2}{1+\sqrt{ab}} \geqq \frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

を示す．$x=\sqrt{ab},\ y=\sqrt[3]{abc}$ とおくと，$c=\dfrac{y^3}{x^2}$，$x \geqq 1,\ y \geqq 1\,.$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+c}+\frac{2}{1+\sqrt{ab}}-\frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}} &= \frac{x^2}{x^2+y^3}+\frac{2}{1+x}-\frac{3}{1+y} \\ &= \frac{-2x^3+3x^2y+x^3y-y^3-3xy^3+2y^4}{(x^2+y^3)(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{(x-y)^2[2y^2-y+(y-2)x]}{(x^2+y^3)(1+x)(1+y)}\,.\end{aligned}$$

$P=2y^2-y+(y-2)x$ とおき，$P \geqq 0$ を示す．

$y \geqq 2$ のときは，明らかに

$$P=2y(y-1)+y+(y-2)x>0\,.$$

$y<2$ のときは，$c \geqq d$ から

$$c \geqq d \Longleftrightarrow abc^2 \geqq abcd=1 \Longleftrightarrow (abc)^2 \geqq ab \Longleftrightarrow abc \geqq \sqrt{ab} \Longleftrightarrow y^3 \geqq x\,.$$

$y^3 \geqq x$ を使うと

$$\begin{aligned} P &= 2y^2 - y + (y-2)x \\ &\geqq 2y^2 - y + (y-2)y^3 = y^4 - 2y^3 + 2y^2 - y = y(y-1)(y^2-y+1) \geqq 0\,. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geqq \frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}\,.$$

同様にして

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geqq \frac{3}{1+\sqrt[3]{(abc)^2}}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1+a)(1+a^2)} + \frac{1}{(1+b)(1+b^2)} + \frac{1}{(1+c)(1+c^2)} \\ &\geqq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right)\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}\right) \\ &\geqq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{3}{1+\sqrt[3]{(abc)^2}} = \frac{3}{(1+\sqrt[3]{abc})[1+\sqrt[3]{(abc)^2}]} \\ &= \frac{3}{(1+y)(1+y^2)}\,. \end{aligned}$$

$y = \sqrt[3]{abc}$ であったから，$d = \dfrac{1}{abc} = \dfrac{1}{y^3}$ となることに注意して

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1+a)(1+a^2)} + \frac{1}{(1+b)(1+b^2)} + \frac{1}{(1+c)(1+c^2)} \frac{1}{(1+d)(1+d^2)} \\ &\geqq \frac{3}{(1+y)(1+y^2)} + \frac{1}{(1+d)(1+d^2)} \\ &= \frac{3}{(1+y)(1+y^2)} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{y^3}\right)\left(1+\frac{1}{y^6}\right)} = \frac{3}{(1+y)(1+y^2)} + \frac{y^9}{(1+y^3)(1+y^6)}\,. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{3}{(1+y)(1+y^2)} + \frac{y^9}{(1+y^3)(1+y^6)} \geqq 1$$

を示せばよい．差をとると

$$\frac{3}{(1+y)(1+y^2)} + \frac{y^9}{(1+y^3)(1+y^6)} - 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3(y^2-y+1)(y^4-y^2+1)+y^9-(y^3+1)(y^6+1)}{(1+y^3)(1+y^6)} \\
&= \frac{2y^6-3y^5+2y^3-3y+2}{(1+y^3)(1+y^6)} \\
&= \frac{(y-1)^2(2y^4+y^3+y+2)}{(1+y^3)(1+y^6)} \geqq 0\,.
\end{aligned}
$$
■

問題 192 (Macedonia Team Selection Test 2007)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca} \geqq \frac{6}{a+b+c}\,.$$

解 1 証明すべき不等式は次の不等式と同値である．

$$a+b+c+\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca} \geqq 6\,.$$

相加平均・相乗平均の不等式と $(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$ より

$$
\begin{aligned}
a+b+c+\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca} &\geqq 2\sqrt{(a+b+c)\cdot\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}} \\
&= 2\sqrt{\frac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}} \\
&\geqq 2\sqrt{\frac{3\cdot 3(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}} \\
&= 6\,.
\end{aligned}
$$
■

解 2 $(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)$ より $1+\frac{3}{ab+bc+ca} \geqq 1+\frac{9}{(a+b+c)^2}$ であるから

$$1+\frac{9}{(a+b+c)^2} \geqq \frac{6}{a+b+c}$$

を示せばよい．差をとると

$$1+\frac{9}{(a+b+c)^2}-\frac{6}{a+b+c} = \left(\frac{3}{a+b+c}-1\right)^2 \geqq 0\,.$$

よって，$1+\frac{9}{(a+b+c)^2} \geqq \frac{6}{a+b+c}$． ■

問題 193 (MOSP 2001)

$a,\ b,\ c$ は正の実数で $abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 4(a+b+c-1)\,.$$

解 $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)-1$ より $(a+b+c)(ab+bc+ca)-1 \geqq 4(a+b+c-1)$ すなわち

$$ab+bc+ca+\frac{3}{a+b+c} \geqq 4$$

を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{ab+bc+ca}{3}+\frac{ab+bc+ca}{3}+\frac{ab+bc+ca}{3}+\frac{3}{a+b+c} \geqq 4\sqrt[4]{\frac{(ab+bc+ca)^3}{9(a+b+c)}}\,.$$

したがって

$$4\sqrt[4]{\frac{(ab+bc+ca)^3}{9(a+b+c)}} \geqq 4$$

すなわち

$$(ab+bc+ca)^3 \geqq 9(a+b+c)$$

を示せばよい．$(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx)$ が成り立つから

$$(ab+bc+ca)^2 \geqq 3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)=3abc(a+b+c)=3(a+b+c)\,.$$

また，相加平均・相乗平均の不等式より

$$ab+bc+ca \geqq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3\,.$$

よって

$$(ab+bc+ca)^3=(ab+bc+ca)^2\cdot(ab+bc+ca) \geqq 3(a+b+c)\cdot 3=9(a+b+c)\,. \qquad \blacksquare$$

問題 194 (Romania TST 2002)

$n \geqq 4$ を整数とし，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+1} \geqq \frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}+\cdots+a_n\sqrt{a_n}\right)^2\,.$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+1} &= \frac{\left(a_1^{\frac{3}{2}}\right)^2}{a_1^2(a_2^2+1)}+\frac{\left(a_2^{\frac{3}{2}}\right)^2}{a_2^2(a_3^2+1)}+\cdots+\frac{\left(a_n^{\frac{3}{2}}\right)^2}{a_n^2(a_1^2+1)} \\
&\geqq \frac{\left(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}+\cdots+a_n\sqrt{a_n}\right)^2}{a_1^2(a_2^2+1)+a_2^2(a_3^2+1)+\cdots+a_n^2(a_1^2+1)} \\
&= \frac{\left(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}+\cdots+a_n\sqrt{a_n}\right)^2}{a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+\cdots+a_n^2a_1^2+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \\
&= \frac{\left(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}+\cdots+a_n\sqrt{a_n}\right)^2}{a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+\cdots+a_n^2a_1^2+1}\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\left(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}+\cdots+a_n\sqrt{a_n}\right)^2}{a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+\cdots+a_n^2a_1^2+1} \geqq \frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}+\cdots+a_n\sqrt{a_n}\right)^2$$

すなわち

$$1 \geqq 4(a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+\cdots+a_n^2a_1^2)$$

を示せばよい．

$x_i=a_i^2>0$ $(1\leqq i\leqq n)$ とおくと，$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ のとき
$1\geqq 4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)$ すなわち

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \geqq 4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1) \qquad \cdots\cdots(*)$$

を示せばよい．$(*)$ は同次式であるから，$(*)$ が，正の実数 x_1，x_2，…，x_n に対して（条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ を抜かして）成り立つことを示せばよい．この不等式を数学的帰納法で証明する．

(i) $n=4$ のとき

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2\geqq 0$$

より $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n-1$ $(n\geqq 5)$ のとき，不等式が成り立つと仮定する．

$S=x_1+x_2+\cdots+x_n$ とおく．$n-1$ のときの仮定を使うために，n 個の変数のどれを 1 個減らしたらよいのか考えてみる．

(1) x_1 を除く場合

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)$$

$$= (S - x_1 + x_1)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1)$$

$$= (S - x_1)^2 + 2x_1(S - x_1) + x_1^2 - 4(x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_2)$$

$$\quad + 4x_nx_2 - 4(x_1x_2 + x_nx_1)$$

$$= \underline{(S - x_1)^2 - 4(x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_2)}$$

$$\quad + 2x_1(S - x_1 - 2x_2 - 2x_n) + x_1^2 + 4x_nx_2 .$$

(2) x_k $(2 \leqq k \leqq n-1)$ を除く場合

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1)$$

$$= (S - x_k + x_k)^2$$

$$- 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{k-2}x_{k-1} + x_{k-1}x_k + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_{k+2} + \cdots + x_nx_1)$$

$$= (S - x_k)^2 + 2x_k(S - x_k) + x_k^2 - 4(x_{k-1}x_k + x_kx_{k+1})$$

$$- 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{k-2}x_{k-1} + x_{k+1}x_{k+2} \cdots + x_nx_1)$$

$$= \underline{(S - x_k)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{k-2}x_{k-1} + x_{k+1}x_{k+2} + \cdots + x_nx_1)}$$

$$+ 2x_k(S - x_k - 2x_{k-1} - 2x_{k+1}) + x_k^2 .$$

(3) x_n を除く場合

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1)$$

$$= (S - x_n + x_n)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_n + x_nx_1)$$

$$= (S - x_n)^2 + 2x_n(S - x_n) + x_n^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_1)$$

$$+ 4x_{n-1}x_1 - 4(x_{n-1}x_n + x_nx_1)$$

$$= \underline{(S - x_n)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_1)}$$

$$+ 2x_n(S - x_n - 2x_{n-1} - 2x_1) + x_n^2 + 4x_{n-1}x_1 .$$

下線部は，$n-1$ のときの仮定から非負なので残りの項を考える．$1 \leqq k \leqq n$ のときに考えられるように，数列 $\{x_m\}$ $(1 \leqq m \leqq n)$ を

$$x_0 = x_n,\ x_{n+1} = x_1$$

のように拡張する．このとき，$S - x_i - 2x_{i-1} - 2x_{i+1} \geqq 0$ となる i が存在することを示す．

もしもすべての i $(1 \leqq i \leqq n)$ について，$S < x_i + 2x_{i-1} + 2x_{i+1}$ が成り立つとする．$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ とおいた n 個の不等式の辺々を加えると

$$nS < S + 2S + 2S .$$

これから $n<5$ となり $n \geqq 5$ に反する．

したがって，$S-x_i-2x_{i-1}-2x_{i+1} \geqq 0$ となる i が存在するから，これを k とおけば，

$k=1$ のときは，下線部 $\geqq 0$，$2x_1(S-x_1-2x_2-2x_n)+x_1^2+4x_nx_2>0$ より

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)>0\,.$$

$2 \leqq k \leqq n-1$ のときは，下線部 $\geqq 0$，$2x_k(S-x_k-2x_{k-1}-2x_{k+1})+x_k^2>0$ より

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)>0\,.$$

$k=n$ のときは，下線部 $\geqq 0$，$2x_n(S-x_n-2x_{n-1}-2x_1)+x_n^2+4x_{n-1}x_1>0$ より

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)>0\,.$$

よって，n のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より 4 以上のすべての自然数について，$(*)$ は成り立つ． ■

問題 195　$n \geqq 4$ を整数とし，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が正の実数であるとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x_1}{x_n+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_1} \geqq 2\,.$$

解　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1}{x_n+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_1}\\
&=\frac{x_1^2}{x_1(x_n+x_2)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_1+x_3)}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_n(x_{n-1}+x_1)}\\
&\geqq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{x_1(x_n+x_2)+x_2(x_1+x_3)+\cdots+x_n(x_{n-1}+x_1)}\\
&=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)}\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)} \geqq 2$$

すなわち

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \geqq 4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)$$

を示せばよい．問題 194 の解答参照． ■

問題 196 (Ireland 2008)

x, y, z は正の実数で $xyz \geqq 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

(a) $27 \leqq (1+x+y)^2 + (1+y+z)^2 + (1+z+x)^2$,

(b) $(1+x+y)^2 + (1+y+z)^2 + (1+z+x)^2 \leqq 3(x+y+z)^2$.

等号は $x = y = z = 1$ のときに限り成り立つ.

解 (a) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$ を用いると

$$\begin{aligned}(1+x+y)^2 + (1+y+z)^2 + (1+z+x)^2 &\geqq \frac{[3+2(x+y+z)]^2}{3}\\ &\overset{AM \geqq GM}{\geqq} \frac{(3+2\cdot 3\sqrt[3]{xyz})^2}{3}\\ &\geqq \frac{(3+2\cdot 3)^2}{3} = 27\,.\end{aligned}$$

等号は，$1+x+y = 1+y+z = 1+z+x$ かつ $x = y = z$ かつ $xyz = 1$ のとき，すなわち， $x = y = z = 1$ のときに限り成り立つ.

(b) 左辺を展開する.

$$\begin{aligned}&(1+x+y)^2 + (1+y+z)^2 + (1+z+x)^2 \leqq 3(x+y+z)^2\\ \iff &2(x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) + 3 \leqq 3(x+y+z)^2\\ \iff &2(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) + 3 \leqq 3(x+y+z)^2\\ \iff &(x+y+z)^2 + 2(xy+yz+zx) \geqq 4(x+y+z) + 3.\end{aligned}$$

$s = x+y+z,\ t = xy+yz+zx$ とおくと，相加平均・相乗平均の不等式より

$$x+y+z \geqq 3\sqrt[3]{xyz} \geqq 3,\ xy+yz+zx \geqq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \geqq 3\,.$$

ゆえに $s \geqq 3,\ t \geqq 3$. これを用いると

$$\begin{aligned}&(x+y+z)^2 + 2(xy+yz+zx) - 4(x+y+z) - 3\\ &= s^2 + 2t - 4s - 3 = (s-2)^2 + 2t - 7 \geqq 1 + 2\cdot 3 - 7 = 0\,.\end{aligned}$$

等号は，$s = t = 3$ すなわち $x = y = z$ かつ $xy = yz = zx$ かつ $xyz = 1$ のとき，つまり $x = y = z = 1$ のときに限り成り立つ. ■

問題 197　(Poland 1995)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = n$ を満たすとき

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \cdots + \frac{x_n^n}{n}$$

の最小値を求めよ.

解 1　相加平均・相乗平均の不等式より

$$x_k^k + (k-1) = x_k^k + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k-1} \geqq k\sqrt[k]{x_k^k \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1} = kx_k\,.$$

よって

$$\frac{x_k^k}{k} \geqq x_k - 1 + \frac{1}{k}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \cdots + \frac{x_n^n}{n} &\geqq x_1 + x_2 - 1 + \frac{1}{2} + x_3 - 1 + \frac{1}{3} + \cdots + x_n - 1 + \frac{1}{n} \\ &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (n-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

ここで，コーシー・シュワルツの不等式より

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n}\right) \geqq \frac{1}{n} \cdot n^2 = n\,.$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \cdots + \frac{x_n^n}{n} &\geqq x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\geqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

よって

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \cdots + \frac{x_n^n}{n} \geqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ のとき成り立つから，$x_1 + \dfrac{x_2^2}{2} + \dfrac{x_3^3}{3} + \cdots + \dfrac{x_n^n}{n}$ の最小値は $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ である. ■

解 2　$m=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，$w_i=\dfrac{\frac{1}{i}}{m}$ とおくと．$w_1+w_2+\cdots+w_n=1$．
重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} x_1+\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_3^3}{3}+\cdots+\frac{x_n^n}{n} &= m(w_1x_1+w_2x_2^2+\cdots+w_nx_n^n) \\ &\geqq m\left[(x_1)^{w_1}(x_2^2)^{w_2}\cdots(x_n^n)^{w_n}\right]=m(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{m}}\,. \end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$n=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\geqq n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}} \quad \text{から} \quad x_1x_2\cdots x_n\geqq 1\,.$$

よって，$x_1x_2\cdots x_n\geqq 1$ を使うと

$$x_1+\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_3^3}{3}+\cdots+\frac{x_n^n}{n}\geqq m(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{m}}\geqq m\,.$$

等号は $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ のとき成り立つから，$x_1+\dfrac{x_2^2}{2}+\dfrac{x_3^3}{3}+\cdots+\dfrac{x_n^n}{n}$ の最小値は $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ である． ■

問題 198　(IMO 1999)　$n\geqq 2$ を整数とする．

(a)　すべての実数 $x_1\geqq 0$, $x_2\geqq 0$, $\ldots$, $x_n\geqq 0$ に対して，不等式

$$\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leqq C\left(\sum_{1\leqq i\leqq n} x_i\right)^4$$

が成り立つような定数 C の最小値を求めよ．

(b)　(a) で求めた C に対して，等号が成り立つ場合を調べよ．

解 1　(a) $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ のとき，不等式で等号が成り立つ．

$x_1+x_2+\cdots+x_n>0$ のとき，不等式は同次式であるから，$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ と仮定できる．このとき

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2) &= \sum_{1\leqq i<j\leqq n}(x_i^3x_j+x_ix_j^3) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^3(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_{k+1}+\cdots+x_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^3(1-x_k) \end{aligned}$$

より，条件の不等式は

$$x_1^3(1-x_1)+x_2^3(1-x_2)+\cdots+x_n^3(1-x_n)\leqq C$$

となる．一般性を失うことなく $x_1\geqq x_2\geqq\cdots\geqq x_n$ と仮定できる．$f(x)=x^3(1-x)$ とおくと，$f''(x)=6x(1-2x)$．となるから，$f(x)$ は $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$ で凸関数である．

(i) $x_1>\dfrac{1}{2}$ の場合

$x_2+x_3+\cdots+x_n=1-x_1<\dfrac{1}{2}$ より $(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)\prec(1-x_1,\ \underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n-2})$．

Karamat の不等式より

$$f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)\leqq f(1-x_1)+(n-2)f(0)=f(1-x_1)\,.$$

よって

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leqq f(1-x_1)+f(x_1)\,.$$

$g(x_1)=f(x_1)+f(1-x_1)\ \left(\dfrac{1}{2}<x_1<1\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}g'(x_1)&=f'(x_1)-f'(1-x_1)\\&=3x_1^2-4x_1^3-[3(1-x_1)^2-4(1-x_1)^3]=-(2x_1-1)^3<0\,.\end{aligned}$$

$g(x_1)$ は減少関数であるから，$g(x_1)<g\left(\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$.

ゆえに，$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)<\dfrac{1}{8}$．

(ii) $x_1\leqq\dfrac{1}{2}$ の場合

$\dfrac{1}{2}\geqq x_1\geqq x_2\geqq\cdots\geqq x_n\geqq 0$ より $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\prec(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n-2})$．

Karamat の不等式より

$$\begin{aligned}f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)&\leqq f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+(n-2)f(0)\\&=2f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\,.\end{aligned}$$

(i)，(ii) から C の最小値は $\dfrac{1}{8}$．

(b) 等号は，$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ がすべて 0 か $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ の中に等しいものが 2 つあって，残りが 0 となるときである． ■

解 2　$(A+B)^2\geqq 4AB$ を用いると

$$\left(\sum_{1\leqq i\leqq n}x_i\right)^4=\left(\sum_{1\leqq i\leqq n}x_i^2+2\sum_{1\leqq i<j\leqq n}x_ix_j\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(A+B)^2\geqq 4AB}{\geqq} 4\left(\sum_{1\leqq i\leqq n} x_i^2\right)\left(2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_ix_j\right)\\
&= 8\left(\sum_{1\leqq i\leqq n} x_i^2\right)\left(\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_ix_j\right)\\
&= 8\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_ix_j(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\\
&\geqq 8\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\,.
\end{aligned}
$$

等号成立は

$$
\sum_{1\leqq i\leqq n} x_i^2 = 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_ix_j
$$

かつ

$$
x_ix_j(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) = x_ix_j(x_i^2+x_j^2),\ (1\leqq i<j\leqq n)
$$

のときである．

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ のとき，不等式で等号が成り立つ．

$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ の中に 0 でないものが存在する場合は，$\sum_{1\leqq i\leqq n} x_i^2 = 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_ix_j$ より少なくとも 2 個 0 でないものがある．これを $x_l,\ x_m$ とすると，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = x_l^2+x_m^2$ から $x_l,\ x_m$ 以外は 0 となる．再び，$\sum_{1\leqq i\leqq n} x_i^2 = 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_ix_j$ から $x_l^2+x_m^2=2x_lx_m$．よって，$x_l=x_m$．

まとめると，等号成立条件は

$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ がすべて 0 か $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ の中に等しいものが 2 つあって，残りが 0 となるときである．■

問題 199 (IMO 2012)

$a_2,\ldots,a_n$ は正の実数で $a_2\cdots a_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$
(a_2+1)^2(a_3+1)^3\cdots(a_n+1)^n \geqq n^n\,.
$$

解　相加平均・相乗平均の不等式より

$$(a_k+1)^k = \Bigg(a_k + \underbrace{\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-1}+\cdots+\frac{1}{k-1}}_{k-1}\Bigg)^k$$
$$\geqq \left(k\sqrt[k]{a_k\cdot\frac{1}{(k-1)^{k-1}}}\right)^k = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\,a_k\,.$$

よって

$$\begin{aligned}&(a_2+1)^2(a_3+1)^3\cdots(a_n+1)^n\\ &\geqq \frac{2^2}{1^1}\,a_2\cdot\frac{3^3}{2^2}\,a_3\cdot\frac{4^4}{3^3}\,a_4\cdots\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\,a_k\cdots\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\,a_n\\ &=\frac{2^2}{1^1}\cdot\frac{3^3}{2^2}\cdot\frac{4^4}{3^3}\cdots\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\cdots\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\,a_2a_3a_4\cdots a_n\\ &=n^n\,.\end{aligned}$$

■

問題 200　(Romania 2005)

a,b,c は正の実数で $(a+b)(b+c)(c+a)=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$ab+bc+ca \leqq \frac{3}{4}\,.$$

解

$$\begin{aligned}&9(a+b)(b+c)(c+a)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)\\ &=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc\\ &=a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)\\ &=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geqq 0.\end{aligned}$$

よって

$$9(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

が成り立つから

$$\frac{9}{8}\geqq(a+b+c)(ab+bc+ca)\,.$$

また，$(a+b+c)^2\geqq 3(ab+bc+ca)$ が成り立つから

$$a+b+c\geqq\sqrt{3(ab+bc+ca)}\,.$$

これらの不等式を使うと

$$\frac{9}{8} \geqq (a+b+c)(ab+bc+ca) \geqq \sqrt{3(ab+bc+ca)}(ab+bc+ca)\,.$$

$$\begin{aligned}\frac{9}{8} \geqq \sqrt{3(ab+bc+ca)}(ab+bc+ca) &\iff \frac{81}{64} \geqq 3(ab+bc+ca)^3 \\ &\iff ab+bc+ca \leqq \frac{3}{4}\,.\end{aligned}$$

よって

$$ab+bc+ca \leqq \frac{3}{4}\,. \qquad \blacksquare$$

問題 201 (Popa Alexandru)

a, b, c は正の実数で $(a+b)(b+c)(c+a)=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{3}{16abc} \geqq a+b+c \geqq \frac{3}{2} \geqq 12abc\,.$$

解 $\displaystyle \frac{1}{8} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geqq \frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{8} = abc$ から $\displaystyle \frac{1}{8} \geqq abc\,.$

次に，$(a+b)+(b+c)+(c+a) \geqq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = 3$ から $\displaystyle a+b+c \geqq \frac{3}{2}\,.$

問題 200 から

$$ab+bc+ca \leqq \frac{3}{4}\,.$$

ここで，$(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx)$ が成り立つから

$$(ab+bc+ca)^2 \geqq 3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab) = 3abc(a+b+c)\,.$$

よって

$$3abc(a+b+c) \leqq (ab+bc+ca)^2 \leqq \frac{9}{16}$$

から

$$\frac{3}{16abc} \geqq a+b+c\,. \qquad \blacksquare$$

問題 202　(India 2007)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 \leqq 3(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\,.$$

解　$4(a^2+ab+b^2)-3(a+b)^2 = a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \geqq 0$ より

$$a^2+ab+b^2 \geqq \frac{3}{4}(a+b)^2\,.$$

同様にして

$$b^2+bc+c^2 \geqq \frac{3}{4}(b+c)^2,\ c^2+ca+a^2 \geqq \frac{3}{4}(c+a)^2\,.$$

これらの不等式の辺々をかけ合わせると

$$3(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \geqq \frac{81}{64}(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

が成り立つから

$$\frac{81}{64}(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geqq (a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2$$

すなわち

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

を示せばよい．これは

$$\begin{aligned}
&9(a+b)(b+c)(c+a)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)\\
&= a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc\\
&= a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)\\
&= a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

から成り立つ．■

問題 203 (Romanian Regional Mathematic Olympiad 2006)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{4a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2+2c^2}\,.$$

解 1 $2a^2+b^2+c^2 \geqq 2a^2+2bc \overset{AM\geqq GM}{\geqq} 4\sqrt{a^2\cdot bc}=4a\sqrt{bc}\,.$

よって

$$\frac{4a}{2a^2+b^2+c^2} \leqq \frac{4a}{4a\sqrt{bc}}=\frac{1}{\sqrt{bc}}\,.$$

同様にして

$$\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2} \leqq \frac{1}{\sqrt{bc}},\ \frac{4c}{a^2+b^2+2c^2} \leqq \frac{1}{\sqrt{bc}}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{4a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2+2c^2} \leqq \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\,. \quad \cdots\cdots①$$

また，$xy+yz+zx \leqq x^2+y^2+z^2$ が成り立つから

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}} \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\,. \qquad \cdots\cdots②$$

①，②から

$$\frac{4a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2+2c^2} \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\,.$$ ■

解 2 $x>0, y>0$ のとき，$\dfrac{4}{x+y} \leqq \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \quad \cdots(*)$ が成り立つことを利用する.

$(*)$ から

$$\frac{4a}{2a^2+b^2+c^2}=\frac{4a}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \leqq \frac{a}{a^2+b^2}+\frac{a}{a^2+c^2}\,.$$

同様にして

$$\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2} \leqq \frac{b}{b^2+a^2}+\frac{b}{b^2+c^2}\,,\ \frac{4c}{a^2+2b^2+c^2} \leqq \frac{c}{c^2+a^2}+\frac{c}{c^2+b^2}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{4a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2+2c^2} \leqq \frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\,.$$

$$\cdots\cdots①$$

ここで，$2(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2$ と $(*)$ を使うと

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \leqq \frac{2}{a+b} \leqq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\,.$$

同様にして

$$\frac{b+c}{b^2+c^2} \leqq \frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\,,\quad \frac{c+a}{c^2+a^2} \leqq \frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\,. \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②から

$$\frac{4a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2+2c^2} \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\,. \qquad ■$$

解 3　$2a^2+b^2+c^2 = a^2+a^2+b^2+c^2 \geqq a^2+ab+bc+ca = (a+b)(a+c)$ を利用すると

$$\frac{4a}{2a^2+b^2+c^2} \leqq \frac{4a}{(a+b)(a+c)}\,.$$

同様にして

$$\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2} \leqq \frac{4b}{(b+a)(b+c)}\,,\quad \frac{4c}{a^2+b^2+2c^2} \leqq \frac{4c}{(c+a)(c+b)}\,.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}
&\frac{4a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2+2c^2}\\
&\leqq \frac{4a}{(a+b)(a+c)}+\frac{4b}{(b+a)(b+c)}+\frac{4c}{(c+a)(c+b)}\\
&= \frac{4a(b+c)+4b(c+a)+4c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{8(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\,.
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{8(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc}$$

すなわち

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$

を示せばよい．これは，相加平均・相乗平均の不等式より

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca} = 8abc\,. \qquad ■$$

問題 204 (Pham Kim Hung)

a,b,c,d は正の実数で $a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{11+a^2}+\frac{1}{11+b^2}+\frac{1}{11+c^2}+\frac{1}{11+d^2} \leqq \frac{1}{3}\,.$$

解　不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{11+a^2}+\frac{1}{11+b^2}+\frac{1}{11+c^2}+\frac{1}{11+d^2} \leqq \frac{1}{3}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{11+a^2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{11+b^2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{11+c^2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{11+d^2}-\frac{1}{12} \leqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &(1-a)\cdot\frac{1+a}{11+a^2}+(1-b)\cdot\frac{1+b}{11+b^2}+(1-c)\cdot\frac{1+c}{11+c^2}+(1-d)\cdot\frac{1+d}{11+d^2} \leqq 0\,.
\end{aligned}$$

$a \geqq b \geqq c \geqq d$ と仮定しても一般性を失わない．このとき

$$\frac{1+a}{11+a^2} \geqq \frac{1+b}{11+b^2} \geqq \frac{1+c}{11+c^2} \geqq \frac{1+d}{11+d^2}$$

が成り立つことを示す．

$$\frac{1+a}{11+a^2}-\frac{1+b}{11+b^2}=\frac{(a-b)(11-a-b-ab)}{(11+a^2)(11+b^2)}\,.$$

$(a+b)+c+d=4$ から $a+b<4$．これを使うと

$$4>a+b \geqq 2\sqrt{ab}.\quad \text{から}\quad ab<4\,.$$

よって，$a+b+ab<8<11$ となるから

$$\frac{1+a}{11+a^2} \geqq \frac{1+b}{11+b^2}\,.$$

同様にして

$$\frac{1+b}{11+b^2} \geqq \frac{1+c}{11+c^2} \geqq \frac{1+d}{11+d^2}\,.$$

また，$1-a \leqq 1-b \leqq 1-c \leqq 1-d$ であるから，チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned}
&(1-a)\cdot\frac{1+a}{11+a^2}+(1-b)\cdot\frac{1+b}{11+b^2}+(1-c)\cdot\frac{1+c}{11+c^2}+(1-d)\cdot\frac{1+d}{11+d^2}\\
&\leqq \frac{1}{3}\{(1-a)+(1-b)+(1-c)+(1-d)\}\\
&\qquad\times\left(\frac{1+a}{11+a^2}+\frac{1+b}{11+b^2}+\frac{1+c}{11+c^2}+\frac{1+d}{11+d^2}\right)=0\,.
\end{aligned}$$

■

問題 205　(Milne's inequality)

$a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_1, b_2, \ldots, b_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right) \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right).$$

解　次の等式を証明すれば不等式は証明できる．

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right)=\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\frac{(a_ib_j-a_jb_i)^2}{(a_i+b_i)(a_j+b_j)}.$$

$$\cdots\cdots(*)$$

数学的帰納法を用いて，$(*)$ を示す．

(i) $n=2$ のとき，$(a_1+a_2)(b_1+b_2)-[(a_1+b_1)+(a_2+b_2)]\left(\dfrac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\dfrac{a_2b_2}{a_2+b_2}\right)$

$=\dfrac{(a_1b_2-a_2b_1)^2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$ となり，$(*)$ は成り立つ．

(ii) n のとき $(*)$ が成り立つと仮定して，$n+1$ のときを考える．

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}b_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n+1}(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+a_{n+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i+b_{n+1}\right)\\
&\quad-\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+(a_{n+1}+b_{n+1})\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}+\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}}\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\left[a_{n+1}b_i+b_{n+1}a_i-\frac{(a_{n+1}+b_{n+1})a_ib_i}{a_i+b_i}-\frac{(a_i+b_i)a_{n+1}b_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}}\right]\\
&=\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\frac{(a_ib_j-a_jb_i)^2}{(a_i+b_i)(a_j+b_j)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_ib_{n+1}-a_{n+1}b_i)^2}{(a_i+b_i)(a_{n+1}+b_{n+1})}\\
&=\sum_{1\leqq i<j\leqq n+1}\frac{(a_ib_j-a_jb_i)^2}{(a_i+b_i)(a_j+b_j)}.
\end{aligned}$$

$n+1$ のときも $(*)$ は成り立つ

(i)，(ii) からすべての自然数 $n(\geqq 2)$ について，$(*)$ は成り立つ． ■

次の解答の間違いがわかりますか？

問題　(Iran 2007)

a, b, c を異なる 3 つの正の数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right|>1\,.$$

解　$\dfrac{a+b}{a-b}=x,\ \dfrac{b+c}{b-c}=y,\ \dfrac{c+a}{c-a}=z$ とおくと

$$xy+yz+zx=1\,.$$

$$(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx)=3$$

から

$$|x+y+z| \geqq \sqrt{3}>1\,.$$ ■

[注]　$xy+yz+zx=1$ ではなく，$xy+yz+zx=-1$ である．したがって，この解法では不等式は証明できない．

証明すべき不等式は a, b, c の対称式であるから，$a>b>c$ と仮定しても一般性を失わない．$a-b=x>0,\ b-c=y>0$ とおくと，$a=c+x+y,\ b=c+y$．

$$\begin{aligned}
&\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}-1=\frac{2c+x+2y}{x}+\frac{2c+y}{y}-\frac{2c+x+y}{x+y}-1\\
&=\frac{2cx^2+2cxy+2cy^2+x^2y+3xy^2+2y^3}{xy(x+y)}-1\\
&=\frac{2cx^2+2cxy+2cy^2+2xy^2+2y^3}{xy(x+y)}>0
\end{aligned}$$

より

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right|>1$$

は成り立つ． □

7　並べ替えの不等式（The Rearrangement Inequality）

定理 1　$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$，$y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ とし，$y_1, y_2, \ldots, y_n$ を並べかえたものを $z_1, z_2, \ldots, z_n$ とするとき，不等式

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n \tag{7.1}$$

$$\geqq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1 \tag{7.2}$$

が成り立つ．左側の等号は $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$，
右側の等号は $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1)$ のとき成り立つ．

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n$$

を示すことを考える．$z_1 \fallingdotseq y_1$ のとき，$x_1z_1+x_jy_1$ $(j \fallingdotseq 1)$ について $x_1 \geqq x_j$，$y_1 \geqq z_1$ なので，$(x_1-x_j)(y_1-z_1) \geqq 0$ より $x_1y_1+x_jz_1 \geqq x_1z_1+x_jy_1$．よって，$x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_nz_n$ において，かける相手を交換して x_1y_1 があるようにしたほうが大きいかまたは等しい．残りの項について，も同様にして x_2y_2 があるほうが大きいかまたは等しい．これを繰り返すと $x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n$ は $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ 以下であることがわかる．この程度の説明で証明になると思われるが，ここでは帰納法を用いて証明しておく．

［証明］　数学的帰納法を用いてまず次の不等式が成り立つことを示す．

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n \tag{7.1}$$

(i) $n = 1$ のときは等号が成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定して，$n = k+1$ のときを考える．

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_k \geqq x_{k+1}$，$y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_k \geqq y_{k+1}$ とし，y_1，y_2，…，y_k，y_{k+1} を並べかえたものを z_1，z_2，…，z_k，z_{k+1} とする．

$z_{k+1} = y_{k+1}$ ならば，仮定より $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k \geqq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_kz_k$ が成り立つから，両辺に $x_{k+1}y_{k+1}(= x_{k+1}z_{k+1})$ を加えると

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1} \geqq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_kz_k + x_{k+1}\underbrace{z_{k+1}}_{=y_{k+1}}.$$

したがって，$n = k+1$ のときも成り立つ．

$z_{k+1} = y_l$ $(l \leqq k)$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i z_i = \sum_{i=1}^{k} x_i z_i + x_{k+1} z_{k+1}$$

(帰納法の仮定)

$$\leqq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{l-1} y_{l-1} + x_l y_{l+1} + \cdots + x_k y_{k+1} + x_{k+1} y_l$$

$(x_k - x_{k+1})(y_l - y_{k+1}) \geqq 0$ より $x_k y_{k+1} + x_{k+1} y_l \leqq x_k y_l + x_{k+1} y_{k+1}$ が成り立つから y_{k+1} と y_l を交換する．

$$\begin{aligned} & x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{l-1} y_{l-1} + x_l y_{l+1} + \cdots + x_k y_{k+1} + x_{k+1} y_l \\ \leqq\ & x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{l-1} y_{l-1} + x_l y_{l+1} + \cdots + x_k y_l + x_{k+1} y_{k+1} \end{aligned}$$

(帰納法の仮定)

$$\leqq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{l-1} y_{l-1} + x_l y_l + \cdots + x_k y_k + x_{k+1} y_{k+1}\,.$$

よって，$n = k+1$ のときも成り立つ．
(i)，(ii) よりすべての自然数 n について (7.1) は成り立つ．

次に，

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 \leqq x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n \tag{7.2}$$

が成り立つことを示す．

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$，$y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ のとき
$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$，$-y_n \geqq -y_{n-1} \geqq \cdots \geqq -y_1$ であるから不等式 (7.1) を用いると

$$x_1(-y_n) + x_2(-y_{n-1}) + \cdots + x_n(-y_1) \geqq x_1(-z_1) + x_2(-z_2) + \cdots + x_n(-z_n)$$

したがって

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 \leqq x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n$$

が成り立つ． ■

補題 7(アーベルの公式) を用いても証明できる．

[証明]　補題 7 より

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)x_i &= \underbrace{(y_1-z_1)}_{\geqq 0}\underbrace{(x_1-x_2)}_{\geqq 0}+\underbrace{(y_1+y_2-z_1-z_2)}_{\geqq 0}\underbrace{(x_2-x_3)}_{\geqq 0}+\cdots \\ &\quad +\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i-\sum_{i=1}^{n-1}z_i\right)}_{\geqq 0}\underbrace{(x_{n-1}-x_n)}_{\geqq 0}+\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}z_i\right)}_{=0}x_n \\ &\geqq 0\,.\end{aligned}$$

よって

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \geqq x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_nz_n$$

後半は省略．■

(7.1) を使うと，チェビシェフの不等式

「 $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$，$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ のとき，不等式

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \leqq n(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

が成り立つ．」が証明できる．

[証明]　左辺を展開する．

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\ =\ &(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n)\\ &+(a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+\cdots+a_nb_1)\\ &+(a_1b_3+a_2b_4+a_3b_5+\cdots+a_nb_2)\\ &+\cdots\cdots\\ &+(a_1b_{n-1}+a_2b_n+a_3b_1+\cdots+a_nb_{n-2})\\ &+(a_1b_n+a_2b_1+a_3b_2+\cdots+a_nb_{n-1})\end{aligned}$$

において，展開した式の第 2 項からはすべて $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$ 以下であるから

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \leqq n(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

が成り立つ．■

8　並べ替えの不等式の拡張

次の記号を導入する（慣例の記号ではないことに注意）．

$$
\begin{Vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn}
\end{Vmatrix}
$$

$$
= x_{11}x_{21}\cdots x_{m1} + x_{12}x_{22}\cdots x_{m2} + \cdots\cdots + x_{1n}x_{2n}\cdots x_{mn}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{l=1}^{m} x_{l\,k}\right)
$$

（縦に掛けてから加える）

次に，実数 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ を大きい順に並べたものを $s_1, s_2, \ldots, s_n$ とするとき，

$$
\overline{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n} = s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n\ \left[\overline{r_1\, r_2\ \ldots\ r_n} = s_1\, s_2\ \ldots\ s_n\right]
$$

と書くことにする．［$\overline{}$ は大きい順に並べる操作を表す．］たとえば，

$$
\overline{2.5,\ \frac{3}{4},\ -\frac{10}{3},\ \sqrt{5}} = 2.5,\ \sqrt{5},\ \frac{3}{4},\ -\frac{10}{3}\ .
$$

並べ替えに関して次の基本的な不等式が成り立つ．（前セクション参照．）

定理　$2n$ 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$
\begin{Vmatrix}
x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\
y_1 & y_2 & \ldots & y_n
\end{Vmatrix}
\leqq
\begin{Vmatrix}
\overline{x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n} \\
\overline{y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n}
\end{Vmatrix}\ .
$$

この定理は次のように拡張される．

定理 2　$m,\, n$ は自然数で，$x_{ij} \geqq 0\ (1 \leqq i \leqq m,\, 1 \leqq j \leqq n)$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{array} \right\| \leqq \left\| \begin{array}{c} \overline{x_{11} \quad x_{12} \quad \ldots \quad x_{1n}} \\ \overline{x_{21} \quad x_{22} \quad \ldots \quad x_{2n}} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \\ \overline{x_{m1} \quad x_{m2} \quad \ldots \quad x_{mn}} \end{array} \right\| . \tag{8.1}$$

［証明］　命題を $P(m,\ n)$ として，二重帰納法によって証明する．

左辺の式において，列の入れ替えを行うことによって，$x_{1\,1} \geqq x_{1\,2} \geqq x_{1\,3} \geqq \cdots \geqq x_{1\,n}$ と仮定しても一般性を失わない．このとき

$z_{1\,j} = x_{1\,j} - x_{1\,n}\,(1 \leqq j \leqq n-1)$　とおくと　$z_{1\,1} \geqq z_{1\,2} \geqq z_{1\,3} \geqq \cdots \geqq z_{1\,n-1} \geqq 0\,.$

また,$\overline{x_{i1},\, x_{i2},\, \ldots,\, x_{in}} = r_{i1},\, r_{i2},\, \ldots,\, r_{in}$,$\overline{x_{i1},\, x_{i2},\, \ldots,\, x_{in-1}} = r^*_{i1},\, r^*_{i2},\, \ldots,\, r^*_{in-1}$ $(2 \leqq i \leqq m)$ とおくと

$$r^*_{i1} \leqq r_{i1},\, r^*_{i2} \leqq r_{i2},\, \ldots,\, r^*_{in-1} \leqq r_{in-1} \quad (1 \leqq i \leqq m)\,.$$

よって

$$\begin{gathered} r^*_{21} r^*_{31} \cdots r^*_{m1} \leqq r_{21} r_{31} \cdots r_{m1} \\ r^*_{22} r^*_{32} \cdots r^*_{m2} \leqq r_{22} r_{32} \cdots r_{m2} \\ \cdots\cdots \\ r^*_{2n-1} r^*_{3n-1} \cdots r^*_{mn-1} \leqq r_{2n-1} r_{3n-1} \cdots r_{mn-1}\,. \end{gathered} \tag{$*$}$$

(i)　$P(m,\ 1)$，$P(1,\ n)$ とも等号が成り立ち真である．

(ii)　$P(m,\ n-1)$，$P(m-1,\ n)$ がともに真であると仮定して，$m,\ n$ のときを考える．

(8.1) の左辺

$$= \left\| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1\,n-1} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2\,n-1} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{m\,n-1} \end{array} \right\| + x_{1n} x_{2n} \cdots x_{mn}$$

$$
= \left\| \begin{matrix} z_{11}+x_{1n} & z_{12}+x_{1n} & \ldots & z_{1\,n-1}+x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2\,n-1} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{m\,n-1} \end{matrix} \right\| + x_{1n}x_{2n}\cdots x_{mn}
$$

$$
= \left\| \begin{matrix} z_{11} & z_{12} & \ldots & z_{1\,n-1} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2\,n-1} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{m\,n-1} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} x_{1n} & x_{1n} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2\,n-1} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{m\,n-1} \end{matrix} \right\|
$$

$$
+ x_{1n}x_{2n}\cdots x_{mn}
$$

$$
= \left\| \begin{matrix} z_{11} & z_{12} & \ldots & z_{1\,n-1} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2\,n-1} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{m\,n-1} \end{matrix} \right\| + x_{1n} \left\| \begin{matrix} x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2\,n-1} & x_{2\,n} \\ & & \ldots & & \\ & & \ldots & & \\ & & \ldots & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{m\,n-1} & x_{m\,n} \end{matrix} \right\|
$$

(ここで，$P(m,\ n-1)$, $P(m-1,\ n)$ が真であることを使う．)

$$
\leqq \left\| \begin{array}{cccc} \hline z_{11} & z_{12} & \ldots & z_{1\,n-1} \\ \hline x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2\,n-1} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ \hline x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{m\,n-1} \end{array} \right\| + x_{1n} \left\| \begin{array}{ccccc} \hline x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2\,n-1} & x_{2n} \\ & & \ldots & & \\ & & \ldots & & \\ & & \ldots & & \\ \hline x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{m\,n-1} & x_{mn} \end{array} \right\|
$$

$$
= \left\| \begin{matrix} z_{11} & z_{12} & \ldots & z_{1\,n-1} \\ r^*_{21} & r^*_{22} & \ldots & r^*_{2\,n-1} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ r^*_{m1} & r^*_{m2} & \ldots & r^*_{m\,n-1} \end{matrix} \right\| + x_{1n} \left\| \begin{matrix} r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2\,n-1} & r_{2n} \\ & & \ldots & & \\ & & \ldots & & \\ & & \ldots & & \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{m\,n-1} & r_{mn} \end{matrix} \right\|
$$

$$
\overset{(*)}{\leqq}
\left\|\begin{matrix}
z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1\,n-1} \\
r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,n-1} \\
 & & \cdots & \\
 & & \cdots & \\
 & & \cdots & \\
 & & & \\
r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{m\,n-1}
\end{matrix}\right\|
+ x_{1n}
\left\|\begin{matrix}
r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,n-1} & r_{2n} \\
 & & \cdots & & \\
 & & \cdots & & \\
 & & \cdots & & \\
 & & & & \\
r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{m\,n-1} & r_{mn}
\end{matrix}\right\|
$$

$$
=
\left\|\begin{matrix}
z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1\,n-1} \\
r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,n-1} \\
 & & \cdots & \\
 & & \cdots & \\
 & & \cdots & \\
 & & & \\
r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{m\,n-1}
\end{matrix}\right\|
+
\left\|\begin{matrix}
x_{1n} & x_{1n} & \cdots & x_{1n} & x_{1\,n} \\
r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,n-1} & r_{2n} \\
 & & \cdots & & \\
 & & \cdots & & \\
 & & \cdots & & \\
 & & & & \\
r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{m\,n-1} & r_{mn}
\end{matrix}\right\|
$$

$$
=
\left\|\begin{matrix}
z_{11} + x_{1n} & z_{12} + x_{1n} & \cdots & z_{1\,n-1} + x_{1n} \\
r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,n-1} \\
 & & \cdots & \\
 & & \cdots & \\
 & & \cdots & \\
 & & & \\
r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{m\,n-1}
\end{matrix}\right\|
$$

$$
+ x_{1n} r_{2n} r_{3n} \cdots r_{mn}
$$

$$
=
\left\|\begin{matrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1\,n-1} & x_{1\,n} \\
r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,n-1} & r_{2\,n} \\
 & & \cdots & & \\
 & & \cdots & & \\
 & & \cdots & & \\
 & & & & \\
r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{m\,n-1} & r_{m\,n}
\end{matrix}\right\|
=
\left\|\begin{array}{cccc}
\hline
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
\hline
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\
 & & \cdots & \\
 & & \cdots & \\
 & & \cdots & \\
 & & & \\
\hline
x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}
\end{array}\right\| .
$$

したがって，$P(m,\ n)$ も真である．

(i)，(ii) からすべての自然数 m，n について，$P(m,\ n)$ は真である． ■

［注］　定理 2 を使うと，相加平均・相乗平均の不等式が証明できる．

n を自然数として，$a_i \geqq 0\ (1 \leqq i \leqq n)$ のとき

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{matrix} \right\| \leqq \left\| \begin{matrix} \overline{a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n} \\ \overline{a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \overline{a_n \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{matrix} \right\|.$$

したがって，$a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0, \ldots,$ $a_n \geqq 0$ のとき不等式

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geqq n a_1 a_2 \cdots a_n \tag{8.2}$$

が成り立つ．

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ のとき，$a_1 = \sqrt[n]{x_1}, a_2 = \sqrt[n]{x_2}, \ldots, a_n = \sqrt[n]{x_n}$ とおくと，(8.2) より次の不等式を得る．

「**(相加平均・相乗平均の不等式)**

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ のとき，不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

が成り立つ．」

9　チェビシェフの不等式（Chebyshev's Inequality）

定理 3　(1) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$，$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ のとき，不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leqq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} \tag{9.1}$$

が成り立つ．

(2) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$，$b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n$ のとき，不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geqq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} \tag{9.2}$$

が成り立つ．

［証明］ (1)　すべての i，j に対して $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqq 0$．
左辺を展開して変形すると，$a_i b_i + a_j b_j \geqq a_i b_j + a_j b_i$ が成り立つ．
すべての i，j についての和を考えると

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_i + a_j b_j) \geqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j + a_j b_i)\,.$$

左辺と右辺を計算する．

$$\begin{aligned}
\text{左辺} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_i + a_j b_j) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sum_{j=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \cdot n + n \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right) \\
&= 2n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j + a_j b_i) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_j b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} a_j
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$$
$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

したがって

$$2n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqq 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

から

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

を得る.

(2)　$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$, $b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n$ から

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n,\ -b_1 \geqq -b_2 \geqq \cdots \geqq -b_n .$$

したがって，(1) の不等式より

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{(-b_1) + (-b_2) + \cdots + (-b_n)}{n}$$
$$\leqq \frac{a_1(-b_1) + a_2(-b_2) + \cdots + a_n(-b_n)}{n} .$$

ゆえに

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geqq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} .$$ ■

10　相加平均と相乗平均の不等式 (AM-GM Inequality)

定理 4　（相加平均と相乗平均の不等式）　n 個の任意の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ について

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

が成り立つ．等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限る．

[注]　上の不等式は，n 個の任意の負でない実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ について成り立つ．

次の証明方法をよく理解しておきたい．

例題 5　（1987 横浜国立大）　「n 個の任意の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ について，

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

が成り立つ」という命題を $P(n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$P(2)$ が正しいことを証明せよ．

(2)　$P(k)$ が正しいとき，$P(2k)$ も正しいことを証明せよ．

(3)　$P(k+1)$ が正しいとき，$P(k)$ も正しいことを証明せよ．

解 (1)　$\dfrac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \dfrac{\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2}{2} \geqq 0$ から $P(2)$ は正しい．

(2)　$P(k)$ が正しいと仮定すると

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{2k} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{k}\right) \\
&\geqq \frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}\right) \\
&\geqq \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}\,\sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}} \\
&= \sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{2k}}.
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{2k} \geqq \sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{2k}}$$

が成り立つから $P(2k)$ も正しい．

(3)　k 個の正の数 $a_1\,, a_2\,, \ldots, a_k$ に対して $a_{k+1} = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$ とおくと

$$\frac{1}{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}) = \frac{1}{k+1}(ka_{k+1} + a_{k+1}) = a_{k+1}.$$

一方，$P(k+1)$ が正しいから

$$\frac{1}{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}) \geqq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}},$$

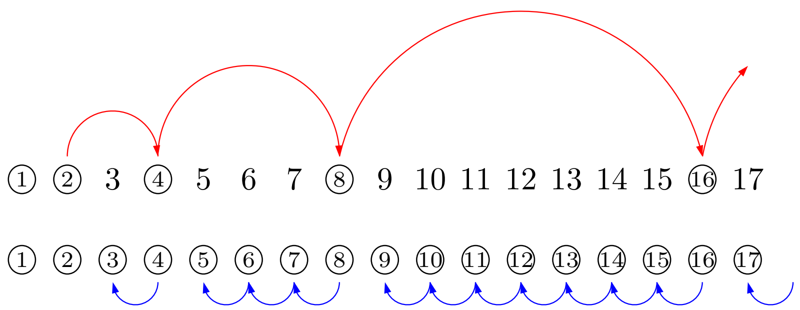
$$\begin{aligned} a_{k+1} &\geqq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}}, \\ (a_{k+1})^{k+1} &\geqq a_1 a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1}, \\ a_{k+1}^k &\geqq a_1 a_2 \cdots a_k, \\ a_{k+1} &\geqq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k}. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \geqq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

が成り立つから $P(k)$ も正しい．　■

以上のことから，下図のようにして，すべての自然数 n について $P(n)$ が正しいことがわかる．



11　凸関数（Convex functions）

実軸上の区間 I で定義された関数 $f(x)$ が I で凸関数 (convex function) であるとは

$\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \alpha+\beta=1$ を満足する任意の 2 数 α, β と任意の 2 数 $x, y \in I$ に対して

$$f(\alpha x+\beta y) \leqq \alpha f(x)+\beta f(y)$$

が成り立つときをいう.

とくに，$\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1$ を満たす任意の 2 数 α, β と相異なる任意の 2 数 $x, y \in I$ に対して

$$f(\alpha x+\beta y)<\alpha f(x)+\beta f(y)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は I で狭義凸関数 (strictly convex function) であるという.

$-f(x)$ が凸 (狭義凸) 関数のとき，$f(x)$ を凹 (狭義凹) 関数 ((strictly)concave function) という.

定義から，区間 I で定義された関数 $f(x)$ が I で凹関数 (concave function) であるとは

$\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \alpha+\beta=1$ を満たす任意の 2 数 $\alpha,\ \beta$ と任意の 2 数 $x,\ y \in I$ に対して

$$f(\alpha x+\beta y) \geqq \alpha f(x)+\beta f(y)$$

が成り立つときをいう.

定理 5　(Jensen's inequality)

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i=1$ を満たす正の実数とする．$f(x)$ が区間 I で凸関数ならば，任意の $x_i \in I$ $(i=1,2, \ldots, n)$ に対して

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \tag{11.1}$$

が成り立つ.

$f(x)$ が狭義凸関数のとき，等号は $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときに限り成り立つ.

［注］　もし関数 $f(x)$ が区間 I で凹関数ならば，不等号の向きは逆になる.

［証明］ $f(x)$ は狭義凸関数であるとする．

(i) $n=2$ のときは，凸関数の定義から不等式は成り立つ．等号は $x_1=x_2$ のときに限り成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき成り立つとして，$n=k+1$ のときを考える．

$A=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ とおくと，$A+\alpha_{k+1}=1$.

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i x_i\right) &= f\left(A\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{A}x_i+\alpha_{k+1}x_{k+1}\right)\\
&\leqq Af\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{A}x_i\right)+\alpha_{k+1}f(x_{k+1})\\
&\leqq A\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{A}f\left(x_i\right)+\alpha_{k+1}f(x_{k+1})\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i f(x_i)
\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも成り立つ．

等号成立は，$\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{\alpha_i}{A}x_i=x_{k+1}$ かつ $x_1=x_2=\cdots=x_k$ のときであるから，$x_1=x_2=\cdots=x_k=x_{k+1}$ のときに限る． ■

定理 5 において，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ とおくと

定理 6　$f(x)$ が区間 I で凸関数ならば，任意の $x_i\in I$ $(i=1,2,\ldots,n)$ に対して

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqq\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)}{n}\tag{11.2}$$

が成り立つ．

$f(x)$ が狭義凸関数のとき，等号は $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときに限り成り立つ．

補題 2　関数 $f: I \to \mathbb{R}$ が I で凸関数のとき，I に含まれる任意の x_1，x，x_2 $(x_1 < x < x_2)$ に対して

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{11.3}$$

が成り立つ．　$f(x)$ が狭義凸関数のとき，

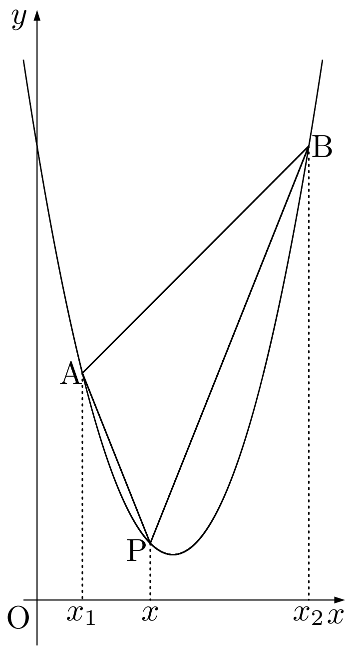
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{11.4}$$

が成り立つ．

［証明］ $x = \dfrac{(x_2-x)x_1+(x-x_1)x_2}{(x-x_1)+(x_2-x)}$

$= \dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2$ より

$$f(x) \leqq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)\,. \qquad \cdots(*)$$



$(*)$ の両辺から $f(x_1)$ を引いて変形すると

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,.$$

$(*)$ の両辺から $f(x_2)$ を引いて変形すると

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\,.$$

したがって

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

が成り立つ．　■

(11.3) は図形的には，A$(x_1\ \ f(x_1))$，P$(x\ \ f(x))$，B$(x_2\ \ f(x_2))$ とおくと，

$$(\text{AP の傾き}) \leqq (\text{AB の傾き}) \leqq (\text{PB の傾き})$$

ということを表している．

補題 3　(1°)　関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が凸関数であることと，$y \in I$ に対し，$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ が $I \setminus \{y\} = I \cap \{y\}^c$ で単調増加であることは同値である．

(2°)　関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が狭義凸関数であることと，$y \in I$ に対し，$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ が $I \setminus \{y\} = I \cap \{y\}^c$ で増加関数であることは同値である．

［証明］ (2°) の証明．$f(x)$ が狭義凸関数であると仮定する．

$x_1 < x_2$ として，$\dfrac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} < \dfrac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$ を示す．

(i) $x_1 < y < x_2$ の場合，(11.4) から

$$\frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}\ .$$

よって

$$\frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} < \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$$

は成り立つ．

(ii) $y < x_1 < x_2$ の場合，(11.4) から

$$\frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} < \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ .$$

よって

$$\frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} < \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$$

は成り立つ．

(iii) $x_1 < x_2 < y$ の場合，(11.4) から

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} < \frac{f(y)-f(x_2)}{y-x_2}\ .$$

よって

$$\frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} < \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$$

は成り立つ．

次に，$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ が $I\setminus\{y\}=I\cap\{y\}^c$ で増加関数であると仮定する．任意の 2 数 $u,\ v\ (u<v)$ と $\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1$ を満たす $\alpha,\ \beta$ に対して，

$$u-(\alpha u+\beta v)=(\alpha+\beta)u-(\alpha u+\beta v)=-\beta(v-u)<0\,.$$

$$v-(\alpha u+\beta v)=(\alpha+\beta)v-(\alpha u+\beta v)=\alpha(v-u)>0$$

より，$u<\alpha u+\beta v<v\,.$

仮定から

$$\frac{f(u)-f(\alpha u+\beta v)}{u-(\alpha u+\beta v)}<\frac{f(v)-f(\alpha u+\beta v)}{v-(\alpha u+\beta v)}$$

が成り立つ．この式を変形すると

$$\begin{aligned}
&\frac{f(u)-f(\alpha u+\beta v)}{u-(\alpha u+\beta v)}<\frac{f(v)-f(\alpha u+\beta v)}{v-(\alpha u+\beta v)}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{f(u)-f(\alpha u+\beta v)}{-\beta(v-u)}<\frac{f(v)-f(\alpha u+\beta v)}{\alpha(v-u)}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{f(\alpha u+\beta v)-f(u)}{\beta}<\frac{f(v)-f(\alpha u+\beta v)}{\alpha}\\
\Longleftrightarrow\ &\alpha[f(\alpha u+\beta v)-f(u)]<\beta[f(v)-f(\alpha u+\beta v)]\\
\Longleftrightarrow\ &(\alpha+\beta)f(\alpha u+\beta v)<\alpha f(u)+\beta f(v)\\
\Longleftrightarrow\ &f(\alpha u+\beta v)<\alpha f(u)+\beta f(v)
\end{aligned}$$

となり，$f(x)$ 狭義凸関数である． ■

次の補題は，$f'(x)$ が存在する場合に $f(x)$ が凸関数であるための必要十分条件を与えている．

補題 4　関数 $f:I\to\mathbb{R}$ について，$f'(x)$ が存在する場合には

(1°)　$f(x)$ が凸関数であるための必要十分条件は，$f'(x)$ が単調増加であることである．

(2°)　$f(x)$ が狭義凸関数であるための必要十分条件は，$f'(x)$ が増加関数であることである．

［証明］ (2°) を示す．

(必要性の証明) I に含まれる任意の $x_1,x,x_2\ (x_1<x<x_2)$ に対して，(11.4) より

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

左側の不等式で $x \to x_1+0$ とすると

$$f'(x_1) \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,.$$

右側の不等式で $x \to x_2-0$ とすると

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq f'(x_2)\,.$$

これらの不等式より，$f'(x_1) \leqq f'(x_2)$ が成り立つので $f'(x)$ は単調増加である．

もしも，$f'(x_1)=f'(x_2)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(=m)$ となるとすれば，$f'(x)$ は単調増加であるから，区間 $[x_1,\ x_2]$ で $f'(x)=m$ すなわち，$f(x)=mx+n$ となる．これは，$f(x)$ が狭義凸関数であることに反する．したがって，$f'(x_1)<f'(x_2)$ となるので，$f'(x)$ は増加関数である．

(十分性の証明) $x_1<x_2$ として，2 数を固定する．また，α, β は $\alpha+\beta=1$ を満たす正の実数とする．

$F(x)=\alpha f(x)+\beta f(x_2)-f(\alpha x+\beta x_2) \quad (\,x_1 \leqq x \leqq x_2\,)$ とおくと

$$F'(x)=\alpha\left[f'(x)-f'(\alpha x+\beta x_2)\right]\,.$$

$x-(\alpha x+\beta x_2)=(\alpha x+\beta x)-(\alpha x+\beta x_2)=\beta(x-x_2) \leqq 0\,.$

よって，$x \leqq \alpha x+\beta x_2$. (等号は $x=x_2$ のときに限る．)

$f'(x)$ は増加関数であるから，$x_1 \leqq x<x_2$ で $f'(x)<f'(\alpha x+\beta x_2)$.

したがって，$x_1 \leqq x<x_2$ で $F'(x)<0$ から $F(x)$ は 閉区間 $[x_1,\ x_2]$ で減少関数となり，$F(x_2)=0$ より

$x_1 \leqq x<x_2$ で $F(x)>0\,.$

よって，$F(x_1)>0$ より $f(\alpha x_1+\beta x_2)<\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)\,.$ ■

（必要性の証明）で，次のことを示した．

関数 $f: I \to \mathbb{R}$ が凸関数のとき，$x_1<x_2$ なるすべての $x_1, x_2 \in I$ に対して

$$f'(x_1) \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq f'(x_2) \tag{11.5}$$

が成り立つ．

$f''(x)$ が存在する場合には，すべての $x \in I$ について $f''(x) \geqq 0$ であることと，$f'(x)$ が単調増加であることは同値であるから，次の系を得る．

系 1　関数 $f : I \to \mathbb{R}$ について，$f''(x)$ が存在する場合には
$f(x)$ が凸関数であるための必要十分条件は，I で $f''(x) \geqq 0$ となることである．

開区間 (a, b) において，$f''(x) > 0$ のとき，$f'(x)$ は (a, b) で増加関数であるから，$f(x)$ は 狭義凸関数である．

系 2　開区間 (a, b) において，$f''(x) > 0$ ならば，$f(x)$ は (a, b) で狭義凸関数である．

［注］ この系では，開区間であることに注意が必要である．

系 2 を使うと重みつきの相加平均・相乗平均の不等式が証明できる．

定理 7　(Weighted AM-GM inequality)　$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ は $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ を満たす正の実数とする．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が正の実数のとき

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geqq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

が成り立つ． 等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限り成り立つ．

［証明］　$f(x) = -\log x$ ($x > 0$) とおくと， $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ から $f(x)$ は狭義凸関数である．よって

$$-\log\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqq -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log x_i = -\sum_{i=1}^{n} \log x_i^{\alpha_i} = -\log \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}.$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geqq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

が成り立つ．等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限り成り立つ．■

$\alpha_i = 1/n\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ のとき，よく知られている相加平均・相乗平均の不等式となる．

12　コーシ・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality)

定理 8　(Cauchy-Schwarz Inequality) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ が実数のとき

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right) \geqq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

が成り立つ.

　等号は $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mathbin{/\!/} (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ または $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ または $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ のときに限り成り立つ.

　$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mathbin{/\!/} (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ となるのは $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \fallingdotseq (0, 0, \ldots, 0)$ かつ $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \fallingdotseq (0, 0, \ldots, 0)$ で $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = k(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ $(k \fallingdotseq 0)$ を満たす k が存在するときである.

　[証明]　$A = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$, $B = \sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$ とおく.

　(i) $A = 0$ または $B = 0$ の場合

　$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ または $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ となるから，不等式は明らかに成り立つ.

　(ii) $A > 0$ かつ $B > 0$ の場合

　$x_i = \dfrac{a_i}{A}$, $y_i = \dfrac{b_i}{B}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = \dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{A^2} = 1$,

　$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2 = \dfrac{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}{B^2} = 1$ となるから

$$\begin{aligned}
&\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right) \geqq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \\
\iff& (x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2 \leqq 1 \\
\iff& -1 \leqq x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \leqq 1\,.
\end{aligned}$$

　$xy \leqq \dfrac{x^2+y^2}{2}$ (等号は $x = y$ のときに限る) から

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \leqq \frac{x_1^2+y_1^2}{2}+\frac{x_2^2+y_2^2}{2}+\cdots+\frac{x_n^2+y_n^2}{2} = 1\,.$$

　$xy \geqq -\dfrac{x^2+y^2}{2}$ (等号は $x = -y$ のときに限る.) から

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \geqq -\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}+\frac{x_2^2+y_2^2}{2}+\cdots+\frac{x_n^2+y_n^2}{2}\right) = -1\,.$$

よって，$-1 \leqq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \leqq 1$ は成り立つ．

等号成立は，$y_i = x_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ または $y_i = -x_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ すなわち $b_i = \dfrac{B}{A}a_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ または $b_i = -\dfrac{B}{A}a_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ のときである．まとめると $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \not\!\parallel (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$ すなわち $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \parallel (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$ のときとなる． ■

系 3　$b_1, b_2, \ldots, b_n$ が正の実数のとき

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

が成り立つ．等号は $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ のときに限り成り立つ．

［証明］ コーシー・シュワルツの不等式を使うと

$$\left[\left(\sqrt{b_1}\right)^2 + \left(\sqrt{b_2}\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{b_n}\right)^2\right]\left[\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2\right]$$

$$\geqq \left(\sqrt{b_1} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{b_1}} + \sqrt{b_2} \cdot \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} + \cdots + \sqrt{b_n} \cdot \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2.$$

これから証明すべき不等式を得る．

等号は $\left(\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \ldots, \sqrt{b_n}\right) \parallel \left(\dfrac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \dfrac{a_2}{\sqrt{b_2}}, \ldots, \dfrac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$ または $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, 0)$ のときに限り成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \ldots, \sqrt{b_n}\right) \parallel \left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right) \\
\iff\ & (a_1, a_2, \ldots, a_n) \parallel (b_1, b_2, \ldots, b_n) \\
\iff\ & \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{かつ} \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)
\end{aligned}$$

より等号成立条件は，$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ となる． ■

［注］　系 3 は補助定理 1 として既に扱ったものと同じものである．

13　ヘルダーの不等式 (Hölder's Inequality)

コーシー・シュワルツの不等式の証明と同じ解法を使うと，コーシー・シュワルツの不等式の一般化ができる．

定理 9　(Hölder) a_{ij} $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ は正の実数で，$w_1, w_2, \ldots, w_m$ は $w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 1$ を満たす正の実数とすると

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{w_i} \geqq \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} a_{ij}^{w_i}\right)$$

が成り立つ．

等号は，すべての i，j について $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \mathbin{/\!/} (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$ のときに限り成り立つ．

［証明］ $\sum$ を使わず不等式を書くと

$$(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n})^{w_1}(a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n})^{w_2} \cdots (a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn})^{w_m}$$
$$\geqq a_{11}^{w_1}a_{21}^{w_2}\cdots a_{m1}^{w_m} + a_{12}^{w_1}a_{22}^{w_2}\cdots a_{m2}^{w_m} + \cdots + a_{1n}^{w_1}a_{2n}^{w_2}\cdots a_{mn}^{w_m}.$$

不等式は同次であるから，$1 \leqq j \leqq n$ として

$$x_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}}\quad x_{2j} = \frac{a_{2j}}{a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}},\ \cdots,$$

$$x_{mj} = \frac{a_{mj}}{a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}}$$

とおくと，各 $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ に対して，$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = 1$ を満たす．

また，証明すべき不等式は

$$1 \geqq x_{11}^{w_1}x_{21}^{w_2}\cdots x_{m1}^{w_m} + x_{12}^{w_1}x_{22}^{w_2}\cdots x_{m2}^{w_m} + \cdots + x_{1n}^{w_1}x_{2n}^{w_2}\cdots x_{mn}^{w_m}$$

となる．重みつきの相加平均・相乗平均の不等式から

$$w_1x_{11} + w_2x_{21} + \cdots + w_mx_{m1} \geqq x_{11}^{w_1}x_{21}^{w_2}\cdots x_{m1}^{w_m},$$

$$w_1x_{12} + w_2x_{22} + \cdots + w_mx_{m2} \geqq x_{12}^{w_1}x_{22}^{w_2}\cdots x_{m2}^{w_m},$$

$$\cdots\cdots$$

$$w_1x_{1n} + w_2x_{2n} + \cdots + w_mx_{mn} \geqq x_{1n}^{w_1}x_{2n}^{w_2}\cdots x_{mn}^{w_m}.$$

不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&w_1(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n})+w_2(x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n})+\cdots\\&\quad+w_m(x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn})\\&\geqq x_{11}^{w_1}x_{21}^{w_2}\cdots x_{m1}^{w_m}+x_{12}^{w_1}x_{22}^{w_2}\cdots x_{m2}^{w_m}+\cdots+x_{1n}^{w_1}x_{2n}^{w_2}\cdots x_{mn}^{w_m}\end{aligned}$$

となる．左辺は

$$\begin{aligned}&w_1(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n})+w_2(x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n})\\&\quad+\cdots+w_m(x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn})\\&=w_1+w_2+\cdots+w_m\\&=1\end{aligned}$$

であるから

$$1\geqq x_{11}^{w_1}x_{21}^{w_2}\cdots x_{m1}^{w_m}+x_{12}^{w_1}x_{22}^{w_2}\cdots x_{m2}^{w_m}+\cdots+x_{1n}^{w_1}x_{2n}^{w_2}\cdots x_{mn}^{w_m}$$

が示された.

等号は $x_{11}=x_{21}=\cdots=x_{m1}$，$x_{12}=x_{22}=\cdots=x_{m2}$，$\cdots$，$x_{1n}=x_{2n}=\cdots=x_{mn}$ から

$$(a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n})\ /\!/\ (a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n})\ /\!/\ \cdots\ /\!/\ (a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots,\ a_{mn}).$$

■

定理 9 で $w_1=w_2=\cdots=w_m=\dfrac{1}{m}$ とおくと

定理 10 (Hölder) a_{ij} $(1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n)$ が正の実数のとき

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)\geqq\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{ij}}\right)^{m}$$

が成り立つ.

等号は，すべての i，j について $(a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in})\ /\!/\ (a_{j1},\ a_{j2},\ \ldots,\ a_{jn})$ のときに限り成り立つ.

14　Schur の不等式

定理 (Schur)　$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ で r が実数のとき，次の不等式が成り立つ．

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0\,.$$

［証明］ $x \geqq y \geqq z$ と仮定しても一般性を失わない．

(i) $r>0$ の場合

$$\begin{aligned}&x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y)\\&=(x-y)[x^r(x-z)-y^r(y-z)]+z^r(x-z)(y-z).\end{aligned}$$

$x^r \geqq y^r \geqq 0,\ x-z \geqq y-z \geqq 0$ であるから $(x-y)[x^r(x-z)-y^r(y-z)] \geqq 0\,.$
また $z^r(x-z)(y-z) \geqq 0$ が成り立つから

$$(x-y)[x^r(x-z)-y^r(y-z)]+z^r(x-z)(y-z) \geqq 0\,.$$

したがって，$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0\,.$

(ii) $r \leqq 0$ の場合

$$\begin{aligned}&x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y)\\&=x^r(x-y)(x-z)+(y-z)[z^r(x-z)-y^r(x-y)].\end{aligned}$$

$z^r \geqq y^r \geqq 0,\ x-z \geqq x-y \geqq 0$ であるから $(y-z)[z^r(x-z)-y^r(x-y)] \geqq 0\,.$
また $x^r(x-y)(x-z) \geqq 0$ が成り立つから

$$x^r(x-y)(x-z)+(y-z)[z^r(x-z)-y^r(x-y)] \geqq 0\,.$$

したがって，$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0\,.$ ■

$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0$ を変形すると

$$\begin{aligned}&x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0\\ \Longleftrightarrow\ & x^{r+1}\big[x-(y+z)\big]+x^ryz+y^{r+1}\big[y-(z+x)\big]+y^rzx\\&\qquad +z^{r+1}\big[z-(x+y)\big]+z^rxy \geqq 0\\ \Longleftrightarrow\ & x^{r+1}(y+z-x)+y^{r+1}(z+x-y)+z^{r+1}(x+y-z)\\&\leqq xyz(x^{r-1}+y^{r-1}+z^{r-1})\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow x^{r+1}(y+z)+y^{r+1}(z+x)+z^{r+1}(x+y)$$
$$\leqq x^{r+2}+y^{r+2}+z^{r+2}+xyz(x^{r-1}+y^{r-1}+z^{r-1})$$
$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{2[(r+1,1,0)] \leqq [(r+2,0,0)]+[(r,1,1)]}.$$

特に，$r=1,\ 2,\ 3\ ,4,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$ とおくと

(1) $r=1$ のとき

$$x^2(y+z-x)+y^2(z+x-y)+z^2(x+y-z) \leqq 3xyz$$
$$\Longleftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz \geqq xy(x+y)+yz(z+x)+zx(x+y)$$
$$\Longleftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz \geqq x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y).$$

(2) $r=2$ のとき

$$x^3(y+z-x)+y^3(z+x-y)+z^3(x+y-z) \leqq xyz(x+y+z)$$
$$\Longleftrightarrow x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geqq xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)$$
$$\Longleftrightarrow x^4+y^4+z^4+2xyz(x+y+z) \geqq (xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2),$$
$$x^3(y+z-x)+y^3(z+x-y)+z^3(x+y-z) \leqq xyz(x+y+z)$$
$$\Longleftrightarrow x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geqq x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y)$$
$$\Longleftrightarrow 2(x^4+y^4+z^4)+xyz(x+y+z) \geqq (x^3+y^3+z^3)(x+y+z).$$

(3) $r=3$ のとき

$$x^4(y+z-x)+y^4(z+x-y)+z^4(x+y-z) \leqq xyz(x^2+y^2+z^2)$$
$$\Longleftrightarrow x^5+y^5+z^5+xyz(x^2+y^2+z^2) \geqq x^4(y+z)+y^4(z+x)+z^4(x+y).$$

(4) $r=4$ のとき

$$x^5(y+z-x)+y^5(z+x-y)+z^5(x+y-z) \leqq xyz(x^3+y^3+z^3)$$
$$\Longleftrightarrow x^6+y^6+z^6+xyz(x^3+y^3+z^3) \geqq x^5(y+z)+y^5(z+x)+z^5(x+y).$$

(5) $r=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$x^{\frac{3}{2}}(y+z-x)+y^{\frac{3}{2}}(z+x-y)+z^{\frac{3}{2}}(x+y-z) \leqq xyz\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right).$$

(6) $r=\dfrac{3}{2}$ のとき

$$x^{\frac{5}{2}}(y+z-x)+y^{\frac{5}{2}}(z+x-y)+z^{\frac{5}{2}}(x+y-z) \leqq xyz\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right).$$

定理 (Generalized Schur Inequality) $a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ で $(a,\ b,\ c)$，$(x,\ y,\ z)$ が単調数列のとき，次の不等式が成り立つ．

$$a(x-y)(x-z)+b(y-x)(y-z)+c(z-x)(z-y) \geqq 0\,.$$

［証明］ $x \geqq y \geqq z$ と仮定しても一般性を失わない．

(i) $a \geqq b \geqq c$ のとき，$c(z-x)(z-y)=c(x-z)(y-z) \geqq 0$ で

$$\begin{aligned} a(x-y)(x-z)+b(y-x)(y-z) &= (x-y)[a(x-z)-b(y-z)] \\ &\geqq (x-y)[a(y-z)-b(y-z)] \\ &= (a-b)(x-y)(y-z) \geqq 0 \end{aligned}$$

であるから

$$a(x-y)(x-z)+b(y-x)(y-z)+c(z-x)(z-y) \geqq 0\,.$$

(ii) $a \leqq b \leqq c$ のとき，$a(x-y)(x-z) \geqq 0$ で

$$\begin{aligned} b(y-x)(y-z)+c(z-x)(z-y) &= (y-z)[c(x-z)-b(x-y)] \\ &\geqq (y-z)[c(x-y)-b(x-y)] \\ &= (c-b)(x-y)(y-z) \geqq 0 \end{aligned}$$

であるから

$$a(x-y)(x-z)+b(y-x)(y-z)+c(z-x)(z-y) \geqq 0. \qquad \blacksquare$$

問題 206 (Russia 1999)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

解 1 $\displaystyle \frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3$

$$\begin{aligned}
\iff &(a^2+2bc)(c^2+a^2)(a^2+b^2)+(b^2+2ca)(a^2+b^2)(b^2+c^2)\\
&\quad +(c^2+2ab)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\\
&>3(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\\
\iff &a^6+b^6+c^6+2(a^4bc+ab^4c+abc^4)+2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)\\
&\quad +2(a^3b^2c+a^3bc^2+a^2b^3c+ab^3c^2+a^2bc^3+ab^2c^3)\\
&>2(a^4b^2+a^2b^4+b^4c^2+b^2c^4+c^4a^2+c^2a^4)+3a^2b^2c^2\\
\iff &[(6,0,0)]+2[(4,1,1)]+2[(3,3,0)]+4[(3,2,1)]>4[(4,2,0)]+[(2,2,2)].
\end{aligned}$$

Schur の不等式から

$$[(6,0,0)]+[(4,1,1)] \geqq 2[(5,1,0)]. \qquad \cdots\cdots ①$$

(M3) から

$$(5,1,0)]+[(3,3,0)] \geqq 2\left[\left(\frac{5+3}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{0+0}{2},\right)\right]=2[(4,2,0)].$$

ゆえに

$$2(5,1,0)]+2[(3,3,0)] \geqq 4[(4,2,0)]. \qquad \cdots\cdots ②$$

Muirhead の定理から

$$[(4,1,1)] \geqq [(2,2,2)]. \qquad \cdots\cdots ③$$

また

$$4[(3,2,1)]>0. \qquad \cdots\cdots ④$$

①+②+③+④ から

$$[(6,0,0)]+2[(4,1,1)]+2[(3,3,0)]+4[(3,2,1)]>4[(4,2,0)]+[(2,2,2)]$$

を得る． ■

解 2　($yanagita$) $a=\min(a,b,c)$ と仮定しても一般性を失わない．

$$x=\frac{b}{a}\geqq 1,\ y=\frac{c}{a}\geqq 1$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$\frac{1+2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+2y}{y^2+1}+\frac{y^2+2x}{x^2+1}>3$$

となる．この不等式の左辺は x,y の対称式であるから，$x\geqq y\geqq 1$ と仮定してもよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{1+2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+2y}{y^2+1}+\frac{y^2+2x}{x^2+1}>3\\
\iff &(1+2xy)(x^2+1)(y^2+1)+(x^2+2y)(x^2+y^2)(x^2+1)\\
&\quad+(y^2+2x)(x^2+y^2)(y^2+1)\\
&>3(x^2+y^2)(x^2+1)(y^2+1)\\
\iff &x^6+y^6+2x^3y^3+2(x^4y+xy^4)+2(x^3y^2+x^2y^3)+2(x^3y+xy^3)\\
&\quad+2(x^3+y^3)+2(x^2y+xy^2)+2xy+1\\
&>2(x^4y^2+x^2y^4)+2(x^4+y^4)+3x^2y^2+2(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

最後の不等式で差をとり，$y=k$ とおいた式を $f(x)$ とおく．すなわち

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^6+2kx^4+2(1+k+k^2+k^3)x^3+2(k+k^3)x^2+2(k+k^2+k^3+k^4)x\\
&\quad+1+2k^3+k^6-2(1+k^2)x^4-(2+3k^2+2k^4)x^2-2k^2-2k^4\quad(x\geqq k)
\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
f'(x)&=6x^5+8kx^3+6(1+k+k^2+k^3)x^2+4(k+k^3)x+2(k+k^2+k^3+k^4)\\
&\quad-8(1+k^2)x^3-2(2+3k^2+2k^4)x,\\
f''(x)&=30x^4+24kx^2+12(1+k+k^2+k^3)x+4(k+k^3)\\
&\quad-24(1+k^2)x^2-2(2+3k^2+2k^4),\\
f'''(x)&=120x^3+48kx+12(1+k+k^2+k^3)-48(1+k^2)x,\\
f''''(x)&=360x^2+48k-48(1+k^2).
\end{aligned}$$

$x \geqq k,\ k \geqq 1$ であることに注意する．

$$f''''(x) = 360x^2 + 48k - 48(1+k^2) = 312x^2 + 48(x^2 - k^2) + 48(k-1) > 0.$$

したがって，$f'''(x)$ は $[k, \infty)$ において増加関数で

$$f'''(k) = 84k^3 + 60k^2 - 36k + 12 = 84k^3 + 24k^2 + 36(k^2 - k) + 12 > 0.$$

したがって，$f''(x)$ は $[k, \infty)$ において増加関数で

$$f''(k) = 14k^4 + 40k^3 - 18k^2 + 16k - 4 = 14k^4 + 22k^3 + 18(k^3 - k^2) + 16k - 4 > 0.$$

したがって，$f'(x)$ は $[k, \infty)$ において増加関数で

$$f'(k) = 20k^4 - 6k^3 + 12k^2 - 2k = 14k^4 + 6(k^4 - k^3) + 10k^2 + 2(k^2 - k) > 0.$$

したがって，$f(x)$ は $[k, \infty)$ において増加関数で

$$f(k) = 8k^5 - 3k^4 + 8k^3 - 2k^2 + 1 = 5k^5 + 3(k^5 - k^4) + 6k^3 + 2(k^3 - k^2) + 1 > 0. \quad \blacksquare$$

問題 207　(APMO 2007)

x, y, z は正の実数で，$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x^2 + yz}{x\sqrt{2(y+z)}} + \frac{y^2 + zx}{y\sqrt{2(z+x)}} + \frac{z^2 + xy}{z\sqrt{2(x+y)}} \geqq 1.$$

解　証明すべき不等式は対称式であるから，一般性を失うことなく $x \geqq y \geqq z$ と仮定できる．

$$\begin{aligned}
\sum_{cyclic} \frac{x^2 + yz}{x\sqrt{2(y+z)}} &= \sum_{cyclic} \frac{(x-y)(x-z) + x(y+z)}{x\sqrt{2(y+z)}} \\
&= \sum_{cyclic} \frac{(x-y)(x-z)}{x\sqrt{2(y+z)}} + \sum_{cyclic} \sqrt{\frac{x+y}{2}}.
\end{aligned}$$

したがって，次の 2 つの不等式を示せばよい．

$$\sum_{cyclic} \frac{(x-y)(x-z)}{x\sqrt{2(y+z)}} \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

$$\sum_{cyclic} \sqrt{\frac{x+y}{2}} \geqq 1 \qquad \cdots\cdots(\bigstar\bigstar)$$

(★) の証明

$$\left(x\sqrt{2(y+z)}\right)^2-\left(y\sqrt{2(z+x)}\right)^2=2x^2(y+z)-2y^2(z+x)$$
$$=2(x^2-y^2)z+2xy(x-y)$$
$$=2(x-y)(xy+yz+zx)\geqq 0$$

より

$$x\sqrt{2(y+z)}\geqq y\sqrt{2(z+x)}.$$

同様にして $y\sqrt{2(z+x)}\geqq z\sqrt{2(x+y)}$.

$$a=\frac{1}{x\sqrt{2(y+z)}},\ b=\frac{1}{y\sqrt{2(z+x)}},\ c=\frac{1}{z\sqrt{2(x+y)}}$$

とおくと， $x\geqq y\geqq z$, $a\leqq b\leqq c$ であるから，一般化された Schur の不等式より

$$\sum_{cyclic}\frac{(x-y)(x-z)}{x\sqrt{2(y+z)}}=a(x-y)(x-z)+b(y-x)(y-z)+c(z-x)(z-y)\geqq 0.$$

(★★) の証明
次に

$$\sum_{cyclic}\sqrt{\frac{x+y}{2}}\geqq 1$$

を示す．コーシー・シュワルツの不等式より

$$2(x+y)=(1+1)(x+y)\geqq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$$

$$\sqrt{2(x+y)}\geqq\sqrt{x}+\sqrt{y}\text{ から }\sqrt{\frac{x+y}{2}}\geqq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.$$

よって

$$\sum_{cyclic}\sqrt{\frac{x+y}{2}}\geqq\sum_{cyclic}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1 \qquad \blacksquare$$

問題 208　(Tigran Sloyan)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leqq \frac{1}{3}.$$

解 1　両辺に $3(2a+b)(2a+c)(2b+c)(2b+a)(2c+a)(2c+b)$ をかけた

$$\begin{aligned}&3a^2(2b+c)(2b+a)(2c+a)(2c+b)+3b^2(2c+a)(2c+b)(2a+b)(2a+c)\\&+3c^2(2a+b)(2a+c)(2b+c)(2b+a)\\&\leqq (2a+b)(2a+c)(2b+c)(2b+a)(2c+a)(2c+b) \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&3a^2(3a+2p+q)(3a+2p)(3a+2q)(3a+p+2q)\\&\quad+3(a+p)^2(3a+2q)(3a+p+2q)(3a+p)(3a+q)\\&\qquad+3(a+q)^2(3a+p)(3a+q)(3a+2p+q)(3a+2p)\\&\leqq (3a+p)(3a+q)(3a+2p+q)(3a+2p)(3a+2q)(3a+p+2q)\\ \Longleftrightarrow\ &27(p^2-pq+q^2)a^4+36(p^3+q^3)a^3\\&\quad+9(p^4+4p^3q-3p^2q^2+4pq^3+q^4)a^2\\&\qquad+9pq(p^3+q^3)a\\&\qquad\quad+2p^2q^2(p-q)^2 \geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$27Aa^4+36Ba^3+9Ca^2+9Da+E \geqq 0$ とおくと

$$A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ D \geqq 0,\ E \geqq 0,$$

$$C=(p^2-pq+q^2)(p^2+5pq+q^2) \geqq 0.$$

よって，不等式 $27Aa^4+36Ba^3+9Ca^2+9Da+E \geqq 0$ は成り立つ．■

解 2　a, b, c の中に 0 と等しいものがある場合
$c=0$ としてよく，この場合不等式は明らかに成り立つ．

$a>0, b>0, c>0$ の場合

証明すべき不等式は対称式であるから，一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．

$$
\begin{aligned}
1-3\sum_{cyclic}\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} &= \sum_{cyclic}\left(\frac{a}{a+b+c}-\frac{3a^2}{(2a+b)(2a+c)}\right)\\
&= \sum_{cyclic}\frac{a(a-b)(a-c)}{(a+b+c)(2a+b)(2a+c)}\\
&= \frac{abc}{a+b+c}\sum_{cyclic}\frac{a^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}{(2a+b)(2a+c)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^2(2b+a)(2b+c)-b^2(2a+b)(2a+c) &= (a-b)(2a^2b+2ab^2+a^2c+b^2c+3abc)\\
&= (a-b)\Big[2ab(a+b+c)+c(a^2+ab+b^2)\Big] \geqq 0
\end{aligned}
$$

から

$$
\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \geqq \frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)}.
$$

同様にして

$$
\frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)} \geqq \frac{c^2}{(2c+a)(2c+c)}.
$$

$$
x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ z=\frac{1}{c},
$$

$$
A=\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)},\ B=\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)},\ C=\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}
$$

とおくと

$$
x \leqq y \leqq z,\ A \geqq B \geqq C
$$

であるから，一般化された Schur の不等式より

$$
\begin{aligned}
&\sum_{cyclic}\frac{a^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}{(2a+b)(2a+c)}\\
&= A(x-y)(x-z)+B(y-x)(y-z)+C(z-x)(z-y) \geqq 0.
\end{aligned}
$$

■

15　3変数の対称不等式

補題 5　$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ とし，$p = x+y+z,\ q = xy+yz+zx,\ r = xyz$ とおくと，次の等式が成り立つ．

(1)　$p^3 - 4pq + 9r \geqq 0$.

(2)　$p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geqq 0$.

(3)　$pq - 9r \geqq 0$.

［証明］　(1)，(2) は Schur の不等式
「$x,\ y,\ z \geqq 0$ で $r > 0$ のとき, $x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0$.」
から得られる．

(1)　$p^3 - 4pq + 9r \geqq 0$

$$\begin{aligned}
&\iff (x+y+z)^3 - 4(x+y+z)(xy+yz+zx) + 9xyz \geqq 0 \\
&\iff x^3+y^3+z^3+3xyz \geqq x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) \\
&\iff x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y) \geqq 0 .
\end{aligned}$$

Schur の不等式で，$r=1$ とおいたものである．

(2)　$p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geqq 0$

$$\begin{aligned}
&\iff (x+y+z)^4 - 5(x+y+z)^2(xy+yz+zx) + 4(xy+yz+zx)^2 + 6(x+y+z)xyz \geqq 0 \\
&\iff x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geqq x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y) \\
&\iff x^4-(y+z)x^3+x^2yz+y^4-(z+x)y^3+xy^2z+z^4-(x+y)z^3+xyz^2 \geqq 0 \\
&\iff x^2(x-y)(x-z)+y^2(y-z)(y-x)+z^2(z-x)(z-y) \geqq 0 .
\end{aligned}$$

Schur の不等式で，$r=2$ とおいたものである．

(3)　$pq - 9r \geqq 0$

$\iff (x+y+z)(xy+yz+zx) - 9xyz \geqq 0$.

相加平均・相乗平均の不等式より

$$x+y+z \geqq 3\sqrt[3]{xyz},\ xy+yz+zx \geqq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}.$$

よって，$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geqq 3\sqrt[3]{xyz}\cdot 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 9xyz$ から

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) - 9xyz \geqq 0.$$

■

16　Karamata の不等式 (Karamat's Majorization Inequality)

16.1　アーベルの公式 (Abel Formula)

Karamata の不等式を証明するするときに使えるアーベルの公式をまず証明しておく．

補題 6　（Abel formula）

$a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_1, b_2, \ldots, b_n$ が実数のとき，次の等式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1 - a_2)b_1 + (a_2 - a_3)(b_1 + b_2) + (a_3 - a_4)(b_1 + b_2 + b_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right) + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

［証明］　$c_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i$ とおくと，$2 \leqq i \leqq n$ のとき，$c_i - c_{i-1} = b_i$.

$$\begin{aligned}
&(a_1 - a_2)b_1 + (a_2 - a_3)(b_1 + b_2) + (a_3 - a_4)(b_1 + b_2 + b_3) \\
&\quad + \cdots + (a_{n-1} - a_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right) + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \\
&= (a_1 - a_2)c_1 + (a_2 - a_3)c_2 + (a_3 - a_4)c_3 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)c_{n-1} + a_n c_n \\
&= a_1 c_1 + a_2(c_2 - c_1) + \cdots + a_n(c_n - c_{n-1}) \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n .
\end{aligned}$$

■

補題 6 で $b_i = x_i - y_i$ とおくと，補題 6 は次のようになる．

補題 7　$a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ が実数のとき，次の等式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)a_i = (x_1 - y_1)(a_1 - a_2) + (x_1 + x_2 - y_1 - y_2)(a_2 - a_3) + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)(a_{n-1} - a_n) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\right) a_n .$$

補題 7 が使える大学入試問題を 1 題紹介しておく.

問題 209　(2008 東工大・後期)　次の問いに答えよ.

(1)　実数 $a_1, a_2, x_1, x_2, y_1, y_2$ が

$0 < a_1 \leqq a_2$，$a_1x_1 \leqq a_1y_1$，$a_1x_1 + a_2x_2 \leqq a_1y_1 + a_2y_2$ をみたしているとする.

このとき $x_1 + x_2 \leqq y_1 + y_2$ であることを証明せよ.

(2)　n を 2 以上の整数とし，$3n$ 個の実数　$a_1, a_2, \ldots, a_n$，$x_1, x_2, \ldots, x_n$，

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ が $0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ および n 個の不等式

$\sum_{i=1}^{j} a_ix_i \leqq \sum_{i=1}^{j} a_iy_i$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をみたしているならば，$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} y_i$ であることを証明せよ.

解　(1) $a_1x_1 \leqq a_1y_1$，$a_1 > 0$ より $x_1 \leqq y_1$.

次に $a_1x_1 + a_2x_2 \leqq a_1y_1 + a_2y_2$ を同値変形する.

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leqq a_1y_1 + a_2y_2 \iff a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2) \leqq 0$$

(補題 7 の変形をおこなう)

$$\iff (a_1 - a_2)(x_1 - y_1) + a_2(x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \leqq 0$$

$$\iff (a_1 - a_2)(x_1 - y_1) \leqq a_2(y_1 + y_2 - x_1 - x_2) .$$

ここで，$(a_1 - a_2)(x_1 - y_1) \geqq 0$ であるから，$a_2(y_1 + y_2 - x_1 - x_2) \geqq 0$ となる.

$a_2 > 0$ より $x_1 + x_2 \leqq y_1 + y_2$ が得られた.　(2) 数学的帰納法で証明する，

(i) $n = 2$ のとき，(1) より成り立つ.

(ii) $m \geqq 3$ とする．$2 \leqq n \leqq m - 1$ のとき成り立つと仮定して，$n = m$ のときを考える.

$3m$ 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_m, x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m$ が

$0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_m$ および m 個の不等式

$$\sum_{i=1}^{j} a_ix_i \leqq \sum_{i=1}^{j} a_iy_i \ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

をみたすものとする.

$2 \leqq k \leqq m - 1$ となる k に対して，帰納法の仮定を適用すれば

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leqq \sum_{i=1}^{k} y_i \ (k = 2,\ 3,\ \ldots,\ m - 1)$$

が成り立ち，(1) で示したように，$x_1 \leqq y_1$ も成立するので

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leqq \sum_{i=1}^{k} y_i \quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ m-1)$$

が成り立つ．

次に，条件 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i \leqq \sum\limits_{i=1}^{m} a_i y_i$ を補題 7 を用いて変形する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leqq \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \\
\iff &\sum_{i=1}^{m} a_i (x_i - y_i) \leqq 0 \\
\iff &(a_1 - a_2)(x_1 - y_1) + (a_2 - a_3)(x_1 + x_2 - y_1 - y_2) + \cdots \\
&\quad + (a_{m-1} - a_m)\left(\sum_{i=1}^{m-1} x_i - \sum_{i=1}^{m-1} y_i\right) + a_m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{m} y_i\right) \leqq 0 \\
\iff &\sum_{k=1}^{m-1} (\underbrace{a_k - a_{k+1}}_{\leqq 0}) \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{k} y_i\right]}_{\leqq 0} \leqq a_m \left(\sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i\right). \qquad (*)
\end{aligned}$$

$$a_k - a_{k+1} \leqq 0,\ \sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{k} y_i \leqq 0\ \ (k=1,\ 2,\ \dots,\ m-1)$$

から

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{m-1} (\underbrace{a_k - a_{k+1}}_{\leqq 0}) \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{k} y_i\right]}_{\leqq 0}.$$

したがって，$(*)$ から $a_m \left(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i - \sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right) \geqq 0$ となる．

$a_m > 0$ より，$0 \leqq \sum\limits_{i=1}^{m} y_i - \sum\limits_{i=1}^{m} x_i$ すなわち $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \leqq \sum\limits_{i=1}^{m} y_i$ を得る．

(i)，(ii) より，命題は成り立つ． ■

問題 210　$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ は実数で

$$a_1 \geqq \frac{a_1+a_2}{2} \geqq \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \cdots \geqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$b_1 \geqq \frac{b_1+b_2}{2} \geqq \frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geqq \cdots \geqq \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$$

を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqq \frac{1}{n}\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

解　$b_{n+1}=0,\ S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k\ (1 \geqq k \geqq n)$ とおく．

アーベルの公式より

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i &= (b_1-b_2)a_1+(b_2-b_3)(a_1+a_2)+(b_3-b_4)(a_1+a_2+a_3)+\cdots+\\ &\qquad +(b_{n-1}-b_n)\sum_{i=1}^{n-1}a_i+\underbrace{b_n}_{=b_n-b_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}a_i\\ &=\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i+1})S_i\\ &=\sum_{i=1}^{n}i(b_i-b_{i+1})\cdot\frac{S_i}{i}\\ &=\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\frac{S_i}{i}-\frac{S_{i+1}}{i+1}\right)\sum_{j=1}^{i}j(b_j-b_{j+1})\right]+\frac{S_n}{n}\sum_{j=1}^{n}j(b_j-b_{j+1}).\end{aligned}$$

$1 \leqq i \leqq n-1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i}j(b_j-b_{j+1}) &= \sum_{j=1}^{i}jb_j-\sum_{j=1}^{i}jb_{j+1}\\ &=(b_1+2b_2+3b_3+\cdots+ib_i)-(b_2+2b_3+3b_4+\cdots+ib_{i+1})\\ &=b_1+b_2+\cdots+b_i-ib_{i+1}.\end{aligned}$$

仮定の $\dfrac{1}{i}\sum\limits_{j=1}^{i}b_j \geqq \dfrac{1}{i+1}\sum\limits_{j=1}^{i+1}b_j$ を変形すると

$$(i+1)\sum_{j=1}^{i}b_j \geqq i\left(\sum_{j=1}^{i}b_j+b_{i+1}\right)\quad \text{から}\quad \sum_{j=1}^{i}b_j \geqq ib_{i+1}.$$

よって

$$\sum_{j=1}^{i} j(b_j - b_{j+1}) \geqq 0$$

と，$\dfrac{S_i}{i} - \dfrac{S_{i+1}}{i+1} \geqq 0$ から

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqq \frac{S_n}{n} \sum_{j=1}^{n} j(b_j - b_{j+1}) \qquad \cdots\cdots(*)$$

がいえる．

$$\sum_{j=1}^{n} j(b_j - b_{j+1}) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n - nb_{n+1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

を使って $(*)$ を書き直すと

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqq \frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\,. \qquad \blacksquare$$

[注]　$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots a_n$ のとき

$$a_1 \geqq \frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqq \cdots \geqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

が成り立つから，問題 210 の不等式はチェビシェフの不等式の拡張されたものになっている．

16.2　Karamata の不等式の証明

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

(MJ1) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$，$y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$，
(MJ2) $x_1 \geqq y_1$，$x_1 + x_2 \geqq y_1 + y_2$，$\ldots$，$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geqq y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}$，
(MJ3) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$

を満たすとき，x は y の優数列である (x majorizes y) といい，
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ または $x \succ y$ と書くことにする．

定理 11　(Karamata's Majorization Inequality) $I \subset \mathbb{R}$ を区間，$f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数とする．$x_i \in I$，$y_i \in I$ $(1 \leqq i \leqq n)$ で $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ならば

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n) \tag{16.1}$$

が成り立つ．
$f(x)$ が狭義凸関数の場合，等号成立は $x_i = y_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ のときに限る．

定理 12　$I \subset \mathbb{R}$ を区間，$f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数とする．$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$，$y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ を I に属する実数からなる 2 つの単調減少列とする．すべての j $(1 \leqq j \leqq n)$ に対して，$x_1 + x_2 + \cdots + x_j \geqq y_1 + y_2 + \cdots + y_j$ ならば

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n) \tag{16.2}$$

が成り立つ．
$f(x)$ が狭義凸関数の場合，等号成立は $x_i = y_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ のときに限る．

定理 12 は，Karamata の定理の条件の一つの
（MJ3）$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ を
（MJ3'）$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq y_1 + y_2 + \cdots + y_n$
にゆるめたものである．

［証明］ (i) $x_i = y_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ のとき，(16.2) で等号が成り立つ．

(ii) ある $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ に対して $x_i = y_i$ となるときは，(16.2) ，(MJ1)，(MJ2)，(MJ3') で x_i と y_i を取り除いても影響を受けないから，最初からすべての

$i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ について， $x_i \fallingdotseq y_i$ と仮定する．

$$c_i = \frac{f(x_i) - f(y_i)}{x_i - y_i}$$

とおくと，補題 3 より，関数 $f(x)$ が凸関数であるから，ある固定した $y \in I$ に対し，$\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ が $I \setminus \{y\} = I \cap \{y\}^c$ で単調増加である．

$x_{i+1} \fallingdotseq y_i$ の場合

$$\begin{aligned} c_i = \frac{f(x_i) - f(y_i)}{x_i - y_i} &\geqq \frac{f(x_{i+1}) - f(y_i)}{x_{i+1} - y_i} = \frac{f(y_i) - f(x_{i+1})}{y_i - x_{i+1}} \\ &\geqq \frac{f(y_{i+1}) - f(x_{i+1})}{y_{i+1} - x_{i+1}} = \frac{f(x_{i+1}) - f(y_{i+1})}{x_{i+1} - y_{i+1}} \\ &= c_{i+1} \end{aligned}$$

より，$c_i \geqq c_{i+1}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$.

$x_{i+1} = y_i$ の場合，$x_{i+1} \fallingdotseq y_{i+1}$ であるから，$y_i \fallingdotseq y_{i+1}$. よって，$y_i > y > y_{i+1}$ となる y をとると，$x_i \geqq x_{i+1} = y_i > y$ を満たし，

$$\begin{aligned} c_i = \frac{f(x_i) - f(y_i)}{x_i - y_i} = \frac{f(y_i) - f(x_i)}{y_i - x_i} &\geqq \frac{f(y) - f(x_i)}{y - x_i} = \frac{f(x_i) - f(y)}{x_i - y} \\ &\geqq \frac{f(x_{i+1}) - f(y)}{x_{i+1} - y} = \frac{f(y) - f(x_{i+1})}{y - x_{i+1}} \\ &\geqq \frac{f(y_{i+1}) - f(x_{i+1})}{y_{i+1} - x_{i+1}} = \frac{f(x_{i+1}) - f(y_{i+1})}{x_{i+1} - y_{i+1}} \\ &= c_{i+1} \end{aligned}$$

より，$c_i \geqq c_{i+1}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$.

ここで，$S_0 = T_0 = 0$,

$$S_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i,\ T_i = y_1 + y_2 + \cdots + y_i\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

と定めると，$x_i = S_i - S_{i-1}$, $y_i = T_i - T_{i-1}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

(MJ2)， (MJ3') から，$S_i \geqq T_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ が成り立つ．よって

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(y_i)] = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i[S_i - S_{i-1} - (T_i - T_{i-1})]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} c_i(S_i - T_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i(S_{i-1} - T_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} c_i(S_i - T_i) + c_n(S_n - T_n) - \left[c_1(S_0 - T_0) + \sum_{i=2}^{n} c_i(S_{i-1} - T_{i-1})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} c_i(S_i - T_i) + c_n(S_n - T_n) - \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1}(S_i - T_i) \quad (\quad S_0 = T_0 = 0 \quad \text{を用いた}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1})(S_i - T_i) + c_n(S_n - T_n) \geqq 0 \quad (\quad c_i \geqq c_{i+1},\ S_i \geqq T_i \quad \text{を用いた}).
\end{aligned}
$$

したがって，$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \geqq 0$ すなわち $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$ が成り立つ．

次に，関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が狭義凸関数である場合を考える．

(i) $x_i = y_i \quad (1 \leqq i \leqq n)$ のとき，(16.2) で等号が成り立つ．

(ii) ある $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ に対して $x_i = y_i$ となるときは，(16.2) ，(MJ1)，(MJ2)，(MJ3’) で x_i と y_i を取り除いても影響を受けないから，最初からすべての $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ について，$x_i \neq y_i$ と仮定する．

(16.2) は成り立ち，等号は成立しないことを示す．

まず，ある固定した $y \in I$ に対し，$\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ が $I \setminus \{y\} = I \cap \{y\}^c$ で増加関数であるから

$$
c_i > c_{i+1} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).
$$

すべての $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ について，$x_i \neq y_i$ であるから，$x_1 \neq y_1$ で (MJ2) より $x_1 \geqq y_1$ なので $x_1 > y_1$.

よって，$(c_1 - c_2)(S_1 - T_1) = (c_1 - c_2)(x_1 - y_1) > 0$ であるから，

$\sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1})(S_i - T_i) > 0$ となり，$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(y_i)] > 0$. ■

Karamata の不等式の証明をもう一つ紹介したい．アーベルの公式（Abel formula）を使う魅力的な方法である．ただし，$f(x)$ の微分可能性をを必要とする．Karamata の不等式の証明の前に，凸関数に関する補題を示しておく．

補題 8　関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$f'(x)$ が存在すれば

$x \in I,\ y \in I$ に対して $f(x) - f(y) \geqq (x - y)f'(y)$

が成り立つ．

［証明］ 補題 4 の証明で得られた (11.5) を利用する．

(i) $x > y$ の場合 $f'(y) \leqq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ から $f(x)-f(y) \geqq (x-y)f'(y)$.

(ii) $x < y$ の場合 $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqq f'(y)$ から $f(x)-f(y) \geqq (x-y)f'(y)$.

(iii) $x = y$ の場合，明らかに不等式は成り立つ． ■

［定理 11 の証明］ 補題 8 より $f(x_i)-f(y_i) \geqq (x_i-y_i)f'(y_i)$ が成り立つ．
$i = 1, 2, \cdots, n$ とおいたものの辺々を加えると

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \geqq \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)f'(y_i)\,. \tag{$*$}$$

補題 7 より

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)f'(y_i) \\
&= (x_1-y_1)\left(f'(y_1)-f'(y_2)\right) + (x_1+x_2-y_1-y_2)\left(f'(y_2)-f'(y_3)\right) + \cdots \\
&\qquad + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)\left(f'(y_{n-1})-f'(y_n)\right) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\right)}_{=0} f'(y_n) \\
&= (x_1-y_1)\left(f'(y_1)-f'(y_2)\right) + (x_1+x_2-y_1-y_2)\left(f'(y_2)-f'(y_3)\right) + \cdots \\
&\qquad + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)\left(f'(y_{n-1})-f'(y_n)\right) \qquad\qquad (**)
\end{aligned}$$

と変形できる．
仮定から，$\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geqq \sum\limits_{i=1}^{k} y_i \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ が成り立つ．
また，$f'(x)$ は単調増加であるから，$f'(y_k) \geqq f'(y_{k+1}) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$.
よって，$(**)$ から

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)f'(y_i) \geqq 0\,.$$

したがって，$(*)$ から $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum\limits_{i=1}^{n} f(y_i) \geqq 0$ すなわち $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq \sum\limits_{i=1}^{n} f(y_i)$ が成り立つ． ■

16.3 絶対値記号を含む不等式 1

絶対値記号を含む不等式を扱うさいに役立つ等式をあげておく．

補題 9 (*yanagita*)

(i) a, b が実数のとき，次の等式を証明せよ．

$$\max(|a|, |b|) = \frac{|a+b|+|a-b|}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

ただし，$\max(p, q)$ は p, q のうち小さくない方を表す．

(ii) s, t が実数のとき，次の等式を証明せよ．

$$|s|+|t| = \max(|s+t|, |s-t|) \qquad \cdots\cdots ②$$

$\min(p, q)$ は p, q のうち大きくない方を表すことにすると

$$\max(p, q) = \frac{p+q+|p-q|}{2}, \quad \min(p, q) = \frac{p+q-|p-q|}{2}$$

が成り立つ．なぜならば

$$p \geqq q \text{ のとき，} \max(p, q) = p, \quad \frac{p+q+|p-q|}{2} = \frac{p+q+p-q}{2} = p,$$

$$p < q \text{ のとき，} \max(p, q) = q, \quad \frac{p+q+|p-q|}{2} = \frac{p+q-(p-q)}{2} = q$$

であるから，$\max(p, q) = \dfrac{p+q+|p-q|}{2}$ が成り立つ．

$\min(p, q) = \dfrac{p+q-|p-q|}{2}$ についても同様に示せる．

［証明］ (i) $f(a, b) = \max(|a|, |b|)$, $\quad g(a, b) = \dfrac{|a+b|+|a-b|}{2}$ とおくと

$$f(-a, b) = f(a, -b) = f(-a, -b) = f(a, b),$$

$$g(-a, b) = g(a, -b) = g(-a, -b) = g(a, b)$$

が成り立つから

$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき $f(a, b) = g(a, b)$ すなわち $\max(a, b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ を示せばよく[*6]，この式は明らかに成り立つ．

(ii) (i) で $a = s+t,\ b = s-t$ とおけばよい． ■

---

*6 たとえば，$a \geqq 0, b \leqq 0$ のときは，$f(a, b) = f(a, -b) = g(a, -b) = g(a, b)$.

max を使うと $|x|$ は，$\boxed{\boldsymbol{|x| = \max(x, -x)}}$ と表すことができる．なぜならば

$$\max(x, -x) = \frac{x + (-x) + |x - (-x)|}{2} = |x|$$

となるからである．

［(ii) の別証明 1］ $p \geqq 0,\ q \geqq 0$ のとき $[\max(p, q)]^2 = \max(p^2, q^2)$ が成り立つから

$$\begin{aligned}[\max(|s+t|, |s-t|)]^2 &= \max(|s+t|^2, |s+t|^2) \\ &= \max(s^2 + 2st + t^2, s^2 - 2st + t^2) \\ &= s^2 + t^2 + 2\max(st, -st) \\ &= s^2 + t^2 + 2|st| \\ &= (|s| + |t|)^2.\end{aligned}$$

$\max(|s+t|, |s-t|) \geqq 0,\ |s| + |t| \geqq 0$ であるから $|s| + |t| = \max(|s+t|, |s-t|)$ が成り立つ． ■

［(ii) の別証明 2］ $|x| = \max(x, -x)$ を利用すると

$$\begin{aligned}\max(|s+t|, |s-t|) &= \max(\max(s+t, -s-t),\ \max(s-t, -s+t)) \\ &= \max(s+t, -s-t, s-t, -s+t) \\ &= \max(s+t, -s+t, s-t, -s-t) \\ &= \max[\max(s+t, -s+t), \max(s-t,\ -s-t)] \\ &= \max[\max(s, -s) + t, \max(s,\ -s) - t] \\ &= \max(|s| + t, |s| - t) \\ &= |s| + \max(t, -t) \\ &= |s| + |t|.\end{aligned}$$

ただし，$\max(p, q, r, s)$ は p, q, r, s のうち最も大きな値を表す． ■

※①は筆者がある問題を解いているときに見つけたものである．（大学への数学 1976 年 6 月号 $pp.62 - 63$ 参照）

問題 211　x, y, z が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$|x|+|y|+|z|+|x+y+z| \geqq |x+y|+|y+z|+|z+x|.$$

解 1　$x+y=2p,\ y+z=2q,\ z+x=2r$ とおくと，$x+y+z=p+q+r$，

$$x=p-q+r,\ y=p+q-r,\ z=-p+q+r$$

であるから，証明すべき不等式は

$$|p-q+r|+|p+q-r|+|-p+q+r|+|p+q+r| \geqq 2|p|+2|q|+2|r|$$

となる．補題 9 より

$$\begin{aligned}
&|p-q+r|+|p+q-r|+|-p+q+r|+|p+q+r| \geqq 2|p|+2|q|+2|r| \\
\iff &|p-(q-r)|+|p+(q-r)|+|(q+r)-p|+|(q+r)-p| \geqq 2|p|+2|q|+2|r| \\
\iff &2\max(|p|,\ |q-r|)+2\max(|q+r|,\ |p|) \geqq 2|p|+2|q|+2|r|.
\end{aligned}$$

$$f(p,q,r)=\max(|p|,|q-r|)+\max(|p|,|q+r|)-|p|-|q|-|r|$$

とおくと

$$\begin{aligned}
f(-p,q,r)=f(p,-q,r)=f(p,q,-r)=f(p,q,r), \\
f(-p,-q,r)=f(-p,q,-r)=f(p,-q,-r)=f(p,q,r), \\
f(-p,-q,-r)=f(p,q,r)
\end{aligned}$$

より，$p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0$ のとき，$f(p,q,r) \geqq 0$ を示せばよい．[*7]
このとき，$\max(p,|q-r|) \geqq p,\ \max(p,q+r) \geqq q+r$ であるから

$$\begin{aligned}
f(p,q,r)&=\max(p,|q-r|)+\max(p,q+r)-p-q-r \\
&\geqq p+q+r-p-q-r=0.
\end{aligned}$$

■

解 2　$x,\ y,\ z$ の中に 0 がある場合は，明らかに不等式は成り立つから，$x,\ y,\ z$ はすべて 0 に等しくないとする．

$$\begin{aligned}
&(|x|+|y|+|z|)^2-(|x+y+z|)^2 \\
&=x^2+y^2+z^2+2|x||y|+2|y||z|+2|z||x| \\
&\quad-\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\right)
\end{aligned}$$

[*7] この他の場合，たとえば $p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \leqq 0$ のときは，$f(p,q,r)=f(p,q,-r) \geqq 0$.

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(|x||y| - xy + |y||z| - yz + |z||x| - zx\right)\\
&= \left[(|x| + |y|)^2 - |x+y|^2\right] + \left[(|y| + |z|)^2 - |y+z|^2\right]\\
&\qquad + \left[(|z| + |x|)^2 - |z+x|^2\right]\\
&= \left[(|x| + |y| + |x+y|)(|x| + |y| - |x+y|)\right]\\
&\qquad + \left[(|y| + |z| + |y+z|)(|y| + |z| - |y+z|)\right]\\
&\qquad\quad + \left[(|z| + |x| + |z+x|)(|z| + |x| - |z+x|)\right].
\end{aligned}
$$

ここで，$|x+y| = |x+y+z-z| \leqq |x+y+z| + |z|$ が成り立つから

$$|x| + |y| + |x+y| \leqq |x| + |y| + |z| + |x+y+z|.$$

同様にして

$$|y| + |z| + |y+z| \leqq |x| + |y| + |z| + |x+y+z|,$$

$$|z| + |x| + |z+x| \leqq |x| + |y| + |z| + |x+y+z|.$$

これを使うと

$$
\begin{aligned}
&(|x| + |y| + |z|)^2 - (|x+y+z|)^2\\
&\leqq (|x| + |y| + |z| + |x+y+z|)(|x| + |y| - |x+y|)\\
&\quad + (|x| + |y| + |z| + |x+y+z|)(|y| + |z| - |y+z|)\\
&\quad + (|x| + |y| + |z| + |x+y+z|)(|z| + |x| - |z+x|).
\end{aligned}
$$

この不等式の両辺を $|x| + |y| + |z| + |x+y+z| (> 0)$ で割ると

$$
\begin{aligned}
&|x| + |y| + |z| - |x+y+z|\\
&\leqq |x| + |y| - |x+y| + |y| + |z| - |y+z| + |z| + |x| - |z+x|
\end{aligned}
$$

すなわち

$$|x| + |y| + |z| + |x+y+z| \geqq |x+y| + |y+z| + |z+x|. \qquad \blacksquare$$

［注］　別解については，問題 216 参照.

問題 212　x, y, z が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$3|x| + 3|y| + 3|z| + |x+y+z| \geqq 2|x+y| + 2|y+z| + 2|z+x|.$$

解　$|x|+|y|+|z| \geqq |x+y+z|$ と問題 211 の不等式を用いると

$$\begin{aligned}3|x|+3|y|+3|z|+|x+y+z| &= 2|x|+2|y|+2|z|+|x|+|y|+|z|+|x+y+z| \\ &\geqq 2|x|+2|y|+2|z|+2|x+y+z| \\ &\geqq 2|x+y|+2|y+z|+2|z+x|. \end{aligned}$$ ■

問題 213　n は正の整数で，x, y, z が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned}&|(n+1)x-ny|+|(n+1)y-nz|+|(n+1)z-nx| \\ &\geqq |nx-(n-1)y|+|ny-(n-1)z|+|nz-(n-1)x|.\end{aligned}$$

解　$nx-(n-1)y=p,\ ny-(n-1)z=q,\ nz-(n-1)x=r$ とおくと

$$x=\frac{n^2p+n(n-1)q+(n-1)^2r}{3n^2-3n+1},\ y=\frac{(n-1)^2p+n^2q+n(n-1)r}{3n^2-3n+1},$$
$$z=\frac{n(n-1)p+(n-1)^2q+n^2r}{3n^2-3n+1}.$$

証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}&|(3n^2-n)p-nq-(n-1)r|+|(3n^2-n)q-nr-(n-1)p| \\ &\quad+|(3n^2-n)r-np-(n-1)q| \\ &\geqq (3n^2-3n+1)\left(|p|+|q|+|r|\right)\end{aligned}$$

となる．ここで，$|\alpha-\beta| \geqq |\alpha|-|\beta|$ を用いると

$$\begin{aligned}|(3n^2-n)p-nq-(n-1)r| &\geqq |(3n^2-n)p-nq|-(n-1)|r| \\ &\geqq (3n^2-n)|p|-n|q|-(n-1)|r|.\end{aligned}$$

同様にして

$$|(3n^2-n)q-nr-(n-1)p| \geqq (3n^2-n)|q|-n|r|-(n-1)|p|,$$
$$|(3n^2-n)r-np-(n-1)q| \geqq (3n^2-n)|r|-n|p|-(n-1)|q|.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&|(3n^2-n)p-nq-(n-1)r|+|(3n^2-n)q-nr-(n-1)p| \\ &\quad+|(3n^2-n)r-np-(n-1)q| \\ &\geqq (3n^2-3n+1)\left(|p|+|q|+|r|\right).\end{aligned}$$ ■

問題 214　x, y, z, t が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned} &2(|x|+|y|+|z|+|t|)+|x+y+z+t| \\ &\geqq |x+y|+|y+z|+|z+t|+|t+x|+|x+z|+|y+t|. \end{aligned}$$

解　問題 211 の不等式

$$|x|+|y|+|z|+|x+y+z| \geqq |x+y|+|y+z|+|z+x| \qquad (*)$$

において，z のところに $z+t$ を代入すると

$$|x|+|y|+|z+t|+|x+y+z+t| \geqq |x+y|+|y+z+t|+|z+t+x| \qquad \cdots\cdots ①$$

$|y+z+t|$, $|z+t+x|$ に対して $(*)$ を使うと

$$|y|+|z|+|t|+|y+z+t| \geqq |y+z|+|z+t|+|t+y| \qquad \cdots\cdots ②$$

$$|z|+|t|+|x|+|z+t+x| \geqq |z+t|+|t+x|+|x+z| \qquad \cdots\cdots ③$$

①+②+③ より

$$\begin{aligned} &2(|x|+|y|+|z|+|t|)+|x+y+z+t| \\ &\geqq |x+y|+|y+z|+|z+t|+|t+x|+|x+z|+|y+t|. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

問題 215　x_1, x_2, x_3, x_4 が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned} &(|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|)+2|x_1+x_2+x_3+x_4| \\ &\geqq |x_1+x_2+x_3|+|x_1+x_2+x_4|+|x_1+x_3+x_4|+|x_2+x_3+x_4|. \end{aligned}$$

解 1　$S=x_1+x_2+x_3+x_4$ とおく．問題 211 の不等式

$$|x|+|y|+|z|+|x+y+z| \geqq |x+y|+|y+z|+|z+x|$$

において

$x=x_1+x_2,\ y=x_3,\ z=x_4,$

$x=x_1+x_3,\ y=x_2,\ z=x_4,$

$x=x_1+x_4,\ y=x_2,\ z=x_3,$

$x=x_2+x_3,\ y=x_1,\ z=x_4,$

$x=x_2+x_4,\ y=x_1,\ z=x_3,$

$x=x_3+x_4,\ y=x_1,\ z=x_2$ とおく．

$$|x_1+x_2|+|x_3|+|x_4|+|S| \geqq |x_1+x_2+x_3|+|x_3+x_4|+|x_1+x_2+x_4| \qquad \cdots ①$$

$$|x_1+x_3|+|x_2|+|x_4|+|S| \geqq |x_1+x_2+x_3|+|x_2+x_4|+|x_1+x_3+x_4| \qquad \cdots ②$$

$$|x_1+x_4|+|x_2|+|x_3|+|S| \geqq |x_1+x_2+x_4|+|x_2+x_3|+|x_1+x_3+x_4| \qquad \cdots ③$$

$$|x_2+x_3|+|x_1|+|x_4|+|S| \geqq |x_1+x_2+x_3|+|x_1+x_4|+|x_2+x_3+x_4| \qquad \cdots ④$$

$$|x_2+x_4|+|x_1|+|x_3|+|S| \geqq |x_1+x_2+x_4|+|x_1+x_3|+|x_2+x_3+x_4| \qquad \cdots ⑤$$

$$|x_3+x_4|+|x_1|+|x_2|+|S| \geqq |x_1+x_3+x_4|+|x_1+x_2|+|x_2+x_3+x_4| \qquad \cdots ⑥$$

(①+②+$\cdots$+⑥) $\div$ 3 より

$$\begin{aligned}&(|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|)+2|x_1+x_2+x_3+x_4|\\ \geqq\ &|x_1+x_2+x_3|+|x_1+x_2+x_4|+|x_1+x_3+x_4|+|x_2+x_3+x_4|.\end{aligned}$$ ■

解 2　$S=x_1+x_2+x_3+x_4$ とおくと証明すべき不等式は

$$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+2|S| \geqq |S-x_1|+|S-x_2|+|S-x_3|+|S-x_4|$$

となる．ここで，$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4$ と仮定しても一般性を失わない．

(i) $x_4 \geqq S$ のとき，$x_i \geqq S \quad (1 \leqq i \leqq 4)$ であるから

$$\begin{aligned}|S-x_1|+|S-x_2|+|S-x_3|+|S-x_4| &= x_1-S+x_2-S+x_3-S+x_4-S\\ &= -3S\\ &\leqq 3|S| \leqq \sum_{i=1}^{4}|x_i|+2|S|.\end{aligned}$$

(ii) $x_1 \leqq S$ のとき，$x_i \leqq S \quad (1 \leqq i \leqq 4)$ であるから

$$\begin{aligned}|S-x_1|+|S-x_2|+|S-x_3|+|S-x_4| &= S-x_1+S-x_2+S-x_3+S-x_4\\ &= 3S\\ &\leqq 3|S| \leqq \sum_{i=1}^{4}|x_i|+2|S|.\end{aligned}$$

(iii) $x_k \geqq S \geqq x_{k+1}$ を満たす $k\ (1 \leqq k \leqq 3)$ が存在するとき

$$\sum_{i=1}^{4}|S-x_i| = \sum_{i=1}^{k}|S-x_i| + \sum_{i=k+1}^{4}|S-x_i|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k}(x_i - S) + \sum_{i=k+1}^{4}(S - x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i - kS + (4-k)S - \sum_{i=k+1}^{4} x_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{4} x_i + (4-2k)S \\
&\leqq \sum_{i=1}^{k} |x_i| + \sum_{i=k+1}^{4} |x_i| + |4-2k||S| \\
&= \sum_{i=1}^{4} |x_i| + |4-2k||S| \leqq \sum_{i=1}^{4} |x_i| + 2|S|. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

問題 215 の解 2 の方法を使うと，一般の場合も証明できる．

問題 216　$n \geqq 3$ は正の整数，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が実数で，$S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ とおくとき，次の不等式を証明せよ．

$$
\sum_{i=1}^{n} |x_i| + (n-2)\,|S| \geqq \sum_{i=1}^{n} |S - x_i|.
$$

解　$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ と仮定しても一般性を失わない．

(i) $x_n \geqq S$ のとき，$x_i \geqq S \quad (1 \leqq i \leqq n)$ であるから

$$
\begin{aligned}
|S - x_1| + |S - x_2| + \cdots + |S - x_n| &= x_1 - S + x_2 - S + \cdots + x_n - S \\
&= -(n-1)S \\
&\leqq (n-1)|S| \leqq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + (n-2)|S|.
\end{aligned}
$$

(ii) $x_1 \leqq S$ のとき，$x_i \leqq S \quad (1 \leqq i \leqq n)$ であるから

$$
\begin{aligned}
|S - x_1| + |S - x_2| + \cdots + |S - x_4| &= S - x_1 + S - x_2 + \cdots + S - x_n \\
&= (n-1)S \\
&\leqq (n-1)|S| \leqq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + (n-1)|S|.
\end{aligned}
$$

(iii) $x_k \geqq S \geqq x_{k+1}$ を満たす $k \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$ が存在するとき，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|S-x_i| &= \sum_{i=1}^{k}|S-x_i| + \sum_{i=k+1}^{n}|S-x_i| \\
&= \sum_{i=1}^{k}(x_i-S) + \sum_{i=k+1}^{n}(S-x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k}x_i - kS + (n-k)S - \sum_{i=k+1}^{n}x_i \\
&= \sum_{i=1}^{k}x_i - \sum_{i=k+1}^{n}x_i + (n-2k)S \\
&\leqq \sum_{i=1}^{k}|x_i| + \sum_{i=k+1}^{n}|x_i| + |n-2k||S| \\
&= \sum_{i=1}^{n}|x_i| + |n-2k||S| \leqq \sum_{i=1}^{n}|x_i| + (n-2)|S|. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

問題 217 $n \geqq 3$ は正の整数，x_1，x_2，$\ldots$，x_n が実数で，$S=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ とおくとき，次の不等式を証明せよ．

$$n\sum_{i=1}^{n}|x_i| - |S| \geqq \sum_{i=1}^{n}|S-x_i|.$$

解　問題 216 の不等式から

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i| + (n-2)\,|S| \geqq \sum_{i=1}^{n}|S-x_i|.$$

したがって

$$n\sum_{i=1}^{n}|x_i| - |S| \geqq \sum_{i=1}^{n}|x_i| + (n-2)\,|S| \quad \text{すなわち} \quad \sum_{i=1}^{n}|x_i| \geqq |S|$$

を示せばよい．この不等式は明らかに成り立つ． $\blacksquare$

問題 218 p，q は $p>q>0$ 満たす実数，$n \geqq 2$ は正の整数で，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$|px_1-qx_2| + |px_2-qx_3| + \cdots + |px_n-qx_1| \geqq (p-q)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|).$$

解　$|\alpha - \beta| \geqq |\alpha| - |\beta|$ を用いると

$$|px_1 - qx_2| \geqq p|x_1| - q|x_2|,$$

$$|px_2 - qx_3| \geqq p|x_2| - q|x_3|,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|px_n - qx_1| \geqq p|x_n| - q|x_1|.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$|px_1 - qx_2| + |px_2 - qx_3| + \cdots + |px_n - qx_1| \geqq (p-q)(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)$$

が得られる．■

問題 219　$n \geqq 3$ は正の整数で，x_1，x_2，…，x_n が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n}|x_i| + \left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right| \geqq \sum_{1 \leqq i < j \leqq n}|x_i + x_j|.$$

解　数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 3$ のときは，問題 211 から成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定すると

$$\left|\sum_{i=1}^{k}t_i\right| \geqq \sum_{1 \leqq i < j \leqq k}|t_i + t_j| - (k-2)\sum_{i=1}^{k}|t_i|.$$

この式で，$t_i = x_i$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$，$t_k = x_k + x_{k+1}$ とおくと

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{k+1}x_i\right| &\geqq \sum_{1 \leqq i < j \leqq k-1}|x_i + x_j| + \sum_{1 \leqq i < k}|x_i + x_k + x_{k+1}| \\ &\qquad - (k-2)\left[\sum_{i=1}^{k-1}|x_i| + |x_k + x_{k+1}|\right] \\ &\geqq \sum_{1 \leqq i < j \leqq k-1}|x_i + x_j| \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{k-1}\left[|x_i + x_k| + |x_i + x_{k+1}| + |x_k + x_{k+1}| - (|x_i| + |x_k| + |x_{k+1}|)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad -(k-2)\left[\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|+|x_k+x_{k+1}|\right] \\
&=\sum_{1\leqq i<j\leqq k-1}|x_i+x_j|+\sum_{i=1}^{k-1}\left[|x_i+x_k|+|x_i+x_{k+1}|\right] \\
&\qquad +(k-1)|x_k+x_{k+1}|-\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|-(k-1)|x_k|-(k-1)|x_{k+1}| \\
&\qquad -(k-2)\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|-(k-2)|x_k+x_{k+1}| \\
&=\sum_{1\leqq i<j\leqq k-1}|x_i+x_j|+\sum_{i=1}^{k-1}\Big[|x_i+x_k|+|x_i+x_{k+1}|\Big]+|x_k+x_{k+1}| \\
&\qquad -(k-1)\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|-(k-1)|x_k|-(k-1)|x_{k+1}| \\
&=\sum_{1\leqq i<j\leqq k+1}|x_i+x_j|-(k-1)\sum_{i=1}^{k+1}|x_i|.
\end{aligned}
$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) から，3 以上のすべての整数 n について不等式は成り立つ． ■

問題 220 $n\geqq 3$, m は正の整数で，$2\leqq m\leqq n-1$ とする．$x_1,x_2,\ldots,x_n$ が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\binom{n-2}{m-1}^{*8}\sum_{i=1}^{n}|x_i|+\binom{n-2}{m-2}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\geqq\sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n}|x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_m}|.$$

*8 $\binom{n}{r}$ は二項係数で $\binom{n}{r}\overset{\text{def}}{=}{}_n\mathrm{C}_r$

解 $(yanagita)$　数学的帰納法で証明する．

(i) $n=3$ のときは，$m=2$ で，不等式は問題 211 から成り立つ．

(ii) n のとき成り立つと仮定して $n+1$ のときを考える．
仮定から，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ が実数のとき

$$\binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n}|t_i| + \binom{n-2}{m-2}\left|\sum_{i=1}^{n} t_i\right| \geqq \sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n} |t_{i_1}+t_{i_2}+\cdots+t_{i_m}|. \quad (*)$$

$(*)$ において

$t_1=x_1, t_2=x_2, \ldots, t_{n-1}=x_{n-1}, t_n=x_n$ (x_{n+1} を除く) とおいた不等式を [1],

$t_1=x_1, t_2=x_2, \ldots, t_{n-1}=x_{n-1}, t_n=x_{n+1}$ (x_n を除く) とおいた不等式を [2],

$$\cdots\cdots$$

$t_1=x_2, t_2=x_3$, $\ldots, t_{n-1}=x_n, t_n=x_{n+1}$ (x_1 を除く) とおいた不等式を $[n+1]$ とおき，[1] から $[n+1]$ の不等式の辺々を加えた不等式を [F] とする．

$S=\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i$ とおくと例えば不等式 [1] は

$$\binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n}|x_i| + \binom{n-2}{m-2}|S-x_{n+1}| \geqq \sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n} |x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_m}|$$

となる．

不等式 [F] の左辺において，$|S-x_1|$ は $[n+1]$ に $\binom{n-2}{m-2}$ 回，$|x_1|$ は [1] から $[n]$ にあわせて $n\binom{n-2}{m-1}$ 回現れる．同様にして，$|S-x_k|$ は $\binom{n-2}{m-2}$ 回，$|x_k|$ は $n\binom{n-2}{m-1}$ 回現れる．

次に $\sum\limits_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n+1} |x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_m}|$ の各項は不等式 [F] の右辺に何回現れるか調べる．まず，$\sum\limits_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n+1} |x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_m}|$ の項数は $\binom{n+1}{m}$ である．
[1] から $[n+1]$ の右辺の項数はそれぞれ $\binom{n}{m}$ であるから，[F] の右辺の項数は $(n+1)\binom{n}{m}$ となる．
したがって，$\sum\limits_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n+1} |x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_m}|$ の各項は不等式 [F] の右辺に

$$\frac{(n+1)\binom{n}{m}}{\binom{n+1}{m}} = n+1-m$$

回現れることに注意すると，不等式 [F] は

$$
\begin{aligned}
&n\binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|+\binom{n-2}{m-2}\sum_{i=1}^{n+1}|S-x_i| \\
&\geqq (n+m-1)\sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n+1}|x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_m}|
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
&(n+1-m)\binom{n-1}{m-1}\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|+(n+1-m)\binom{n-1}{m-2}|S| \\
&\geqq n\binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|+\binom{n-2}{m-2}\sum_{i=1}^{n+1}|S-x_i| \qquad (**)
\end{aligned}
$$

を示せばよい，

ところで

$$
\begin{aligned}
&(n+1-m)\binom{n-1}{m-1}-n\binom{n-2}{m-1} \\
&=\frac{(n+1-m)(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}-\frac{n(n-2)!}{(n-m-1)!(m-1)!} \\
&=\frac{(n-2)!}{(n-m)!(m-1)!}\big[(n+1-m)(n-1)-n(n-m)\big] \\
&=\frac{(m-1)(n-2)!}{(n-m)!(m-1)!}=\frac{(n-2)!}{(n-m)!(m-2)!}=\binom{n-2}{m-2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(n+1-m)\binom{n-1}{m-2}&=\frac{(n+1-m)(n-1)!}{(n-m+1)!(m-2)!}=\frac{(n-1)(n-2)!}{(n-m)!(m-2)!} \\
&=(n-1)\binom{n-2}{m-2}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
(**)\iff\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|+(n-1)|S|\geqq\sum_{i=1}^{n+1}|S-x_i|.
$$

$$
\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|+(n-1)|S|\geqq\sum_{i=1}^{n+1}|S-x_i|
$$

は，問題 216 より成り立つ．■

大関信雄・大関清太：不等式への招待 ［6］に次の不等式が紹介されている．

(Hlawka の不等式)　$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を 3 次元のベクトルとするとき

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|-|\vec{c}+\vec{a}|-|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| \geqq 0.$$

この不等式は，問題 211 の不等式のベクトル版になっているが，問題 211 の解 1 の方法では，Hlawka の不等式は示せない．（解 2 で積を内積と考えれば Hlawka の不等式は証明できる．）しかし，問題 219 の不等式の帰納法による証明では，第 1 段階を Hlawka の不等式の n 次元版を使えば，第 2 段階はそのまま適用できる．したがって，次の D.D. Adamović の不等式は Hlawka の不等式と，問題 219 の帰納法による証明で示すことができる．

(D.D. Adamović)　$\vec{a}_k$ を n 次元のベクトルとするとき

$$(m-2)\sum_{k=1}^{m}|\vec{a}_k|+\left|\sum_{k=1}^{m}\vec{a}_k\right| \geqq \sum_{1\leqq i<j\leqq m}|\vec{a}_i+\vec{a}_j| \quad (m \geqq 2).$$

この不等式は，問題 219 の不等式のベクトル版になっている．

(D.Ž. Djoković)　$\vec{a}_k$ を n 次元のベクトルとするとき

$$\binom{m-2}{k-2}\left(\frac{m-k}{k-1}\sum_{i=1}^{m}|\vec{a}_i|+\left|\sum_{i=1}^{m}\vec{a}_i\right|\right) \geqq \sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq m}|\vec{a}_{i_1}+\vec{a}_{i_2}+\cdots+\vec{a}_{i_k}|.$$

ただし，$m=3,\ 4,\ \ldots,\ k=2,\ 3,\ \ldots,\ m-1$.

$\displaystyle\binom{m-2}{k-2}\frac{m-k}{k-1}=\binom{m-2}{k-1}$ であるから，不等式は

$$\binom{m-2}{k-1}\sum_{i=1}^{m}|\vec{a}_i|+\binom{m-2}{k-2}\left|\sum_{i=1}^{m}\vec{a}_i\right| \geqq \sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq m}|\vec{a}_{i_1}+\vec{a}_{i_2}+\cdots+\vec{a}_{i_k}|$$

と変形できる．この不等式は，問題 220 の不等式のベクトル版になっている．

以下，ベクトルは実数を成分とする n 次元のベクトルを扱う．

$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ のとき，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,\ \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

であるから，コーシー・シュワルツの不等式より

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geqq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

ゆえに，$\left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \geqq \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$ から

$$\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| \leqq \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|.$$

これを使うと

$$\begin{aligned}
\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 &= \left|\vec{a}\right|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 \\
&\leqq \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| + \left|\vec{b}\right|^2 \\
&\leqq \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| + \left|\vec{b}\right|^2 \\
&= \left(\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|\right)^2
\end{aligned}$$

から

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leqq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|.$$

(Hlawka の不等式の拡張)　$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を n 次元のベクトルとするとき

$$\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| + \left|\vec{c}\right| - \left|\vec{b} + \vec{c}\right| - \left|\vec{c} + \vec{a}\right| - \left|\vec{a} + \vec{b}\right| + \left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right| \geqq 0.$$

[証明]　$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, の中に $\vec{0}$ がある場合は，明らかに不等式は成り立つから，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, はすべて $\vec{0}$ に等しくないとする．

$$\begin{aligned}
&\left(\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| + \left|\vec{c}\right|\right)^2 - \left(\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|\right)^2 \\
&= \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| + 2\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right| + 2\left|\vec{c}\right|\left|\vec{a}\right| \\
&\quad - \left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}\right) \\
&= 2\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| - \vec{a} \cdot \vec{b} + \left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right| - \vec{b} \cdot \vec{c} + \left|\vec{c}\right|\left|\vec{a}\right| - \vec{c} \cdot \vec{a}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2\right]+\left[\left(|\vec{b}|+|\vec{c}|\right)^2-|\vec{b}+\vec{c}|^2\right]+\left[\left(|\vec{c}|+|\vec{a}|\right)^2-|\vec{c}+\vec{a}|^2\right]\\
&= \left[\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}|\right)\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{a}+\vec{b}|\right)\right]\\
&\quad+\left[\left(|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{b}+\vec{c}|\right)\left(|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|\right)\right]\\
&\quad+\left[\left(|\vec{c}|+|\vec{a}|+|\vec{c}+\vec{a}|\right)\left(|\vec{c}|+|\vec{a}|-|\vec{c}+\vec{a}|\right)\right].
\end{aligned}
$$

ここで，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{c}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|+|\vec{c}|$ が成り立つから

$$
|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|.
$$

同様にして

$$
|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|,
$$

$$
|\vec{c}|+|\vec{a}|+|\vec{c}+\vec{a}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|.
$$

これを使うと

$$
\begin{aligned}
&\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|\right)^2-\left(|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\right)^2\\
&\leqq\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\right)\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{a}+\vec{b}|\right)\\
&\quad+\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\right)\left(|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|\right)\\
&\quad+\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\right)\left(|\vec{c}|+|\vec{a}|-|\vec{c}+\vec{a}|\right).
\end{aligned}
$$

この不等式の両辺を $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|(>0)$ で割ると

$$
\begin{aligned}
&|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\\
&\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|+|\vec{c}|+|\vec{a}|-|\vec{c}+\vec{a}|
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|-|\vec{c}+\vec{a}|-|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\geqq 0. \qquad \blacksquare
$$

(D.D. Adamović)　$m\geqq 3$ は正の整数で，$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n$ が 実数を成分とする n 次元のベクトルのとき，次の不等式を証明せよ．

$$
(m-2)\sum_{i=1}^{m}|\vec{x}_i|+\left|\sum_{i=1}^{m}\vec{x}_i\right|\geqq\sum_{1\leqq i<j\leqq n}|\vec{x}_i+\vec{x}_j|.
$$

解　数学的帰納法で証明する．

(i) $m=3$ のときは，Hlawka の不等式から成り立つ．

(ii) $m=k$ のとき成り立つと仮定すると

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\vec{t}_i\right| \geqq \sum_{1\leqq i<j\leqq k}|\vec{t}_i+\vec{t}_j|-(k-2)\sum_{i=1}^{k}|\vec{t}_i|.$$

この式で，$\vec{t}_i=\vec{x}_i\ (1\leqq i\leqq k-1)$，$\vec{t}_k=\vec{x}_k+\vec{x}_{k+1}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{k+1}\vec{x}_i\right| &\geqq \sum_{1\leqq i<j\leqq k-1}|\vec{x}_i+\vec{x}_j|+\sum_{1\leqq i<k}|\vec{x}_i+\vec{x}_k+\vec{x}_{k+1}| \\
&\qquad -(k-2)\left[\sum_{i=1}^{k-1}|\vec{x}_i|+|\vec{x}_k+\vec{x}_{k+1}|\right] \\
&\geqq \sum_{1\leqq i<j\leqq k-1}|\vec{x}_i+\vec{x}_j| \\
&\quad +\sum_{i=1}^{k-1}\left[|\vec{x}_i+\vec{x}_k|+|\vec{x}_i+\vec{x}_{k+1}|+|\vec{x}_k+\vec{x}_{k+1}|-(|\vec{x}_i|+|\vec{x}_k|+|\vec{x}_{k+1}|)\right] \\
&\qquad -(k-2)\left[\sum_{i=1}^{k-1}|\vec{x}_i|+|\vec{x}_k+\vec{x}_{k+1}|\right] \\
&= \sum_{1\leqq i<j\leqq k-1}|\vec{x}_i+\vec{x}_j|+\sum_{i=1}^{k-1}\left[|\vec{x}_i+\vec{x}_k|+|\vec{x}_i+\vec{x}_{k+1}|\right] \\
&\quad +(k-1)|\vec{x}_k+\vec{x}_{k+1}|-\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|-(k-1)|\vec{x}_k|-(k-1)|\vec{x}_{k+1}| \\
&\qquad -(k-2)\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|-(k-2)|\vec{x}_k+\vec{x}_{k+1}| \\
&= \sum_{1\leqq i<j\leqq k-1}|\vec{x}_i+\vec{x}_j|+\sum_{i=1}^{k-1}\Big[|\vec{x}_i+\vec{x}_k|+|\vec{x}_i+\vec{x}_{k+1}|\Big]+|\vec{x}_k+\vec{x}_{k+1}| \\
&\quad -(k-1)\sum_{i=1}^{k-1}|\vec{x}_i|-(k-1)|\vec{x}_k|-(k-1)|\vec{x}_{k+1}|) \\
&= \sum_{1\leqq i<j\leqq k+1}|\vec{x}_i+\vec{x}_j|-(k-1)\sum_{i=1}^{k+1}|\vec{x}_i|.
\end{aligned}$$

よって，$m=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) から，3 以上のすべての整数 m について不等式は成り立つ．　■

16.4　絶対値記号を含む不等式 2

問題 221　(1) x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x_1+2x_2+2x_3+x_4+3(|x_4-x_5|+|x_1-x_5|)$$
$$\geqq 2(|x_3+x_4-x_5|+|x_4-x_5+x_1|+|-x_5+x_1+x_2|).$$

(2) x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6 が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x_1+2x_2+2x_3+x_4+3x_5+3x_6+3(|x_4-x_5|+|x_1-x_6|)$$
$$\geqq 2(|x_3+x_4-x_5|+|x_4-x_5-x_6|+|-x_5-x_6+x_1|+|-x_6+x_1+x_2|).$$

(3) x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7 が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5+4x_6+x_7+3(|x_4-x_5|+|x_1-x_7|)$$
$$\geqq 2(|x_3+x_4-x_5|+|x_4-x_5-x_6|+|-x_6-x_7+x_1|+|-x_7+x_1+x_2|).$$

(4) x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8 が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5+2x_6+2x_7+x_8+3(|x_4-x_5|+|x_1-x_8|)$$
$$\geqq 2(|x_3+x_4-x_5|+|x_4-x_5-x_6|+|-x_7-x_8+x_1|+|-x_8+x_1+x_2|).$$

解 (1)

$$2|x_3+x_4-x_5| \leqq 2|x_4-x_5|+2|x_3| = 2|x_4-x_5|+2x_3 \qquad \cdots\cdots①$$
$$2|-x_5+x_1+x_2| \leqq 2|x_1-x_5|+2|x_2| = 2|x_1-x_5|+2x_2 \qquad \cdots\cdots②$$
$$2|x_4-x_5+x_1| \leqq 2|x_4-x_5|+2|x_1| = 2|x_4-x_5|+2x_1 \qquad \cdots\cdots③$$
$$2|x_4-x_5+x_1| \leqq 2|x_1-x_5|+2|x_4| = 2|x_1-x_5|+2x_4 \qquad \cdots\cdots③'$$

(i) $|x_4-x_5|+x_1 \leqq |x_1-x_5|+x_4$ の場合

①+②+③ から

$$2(|x_3+x_4-x_5|+|x_4-x_5+x_1|+|-x_5+x_1+x_2|)$$
$$\leqq x_1+2x_2+2x_3+3|x_4-x_5|+2|x_1-x_5|+\underbrace{|x_4-x_5|+x_1}_{\leqq|x_1-x_5|+x_4}$$
$$\leqq x_1+2x_2+2x_3+x_4+3(|x_4-x_5|+|x_1-x_5|).$$

(ii) $|x_4-x_5|+x_1 \geqq |x_1-x_5|+x_4$ の場合

①+②+③$'$ から

$$
\begin{aligned}
&2(|x_3+x_4-x_5|+|x_4-x_5+x_1|+|-x_5+x_1+x_2|)\\
&\leqq 2x_2+2x_3+x_4+2|x_4-x_5|+3|x_1-x_5|+\underbrace{|x_1-x_5|+x_4}_{\leqq|x_4-x_5|+x_1}\\
&\leqq x_1+2x_2+2x_3+x_4+3(|x_4-x_5|+|x_1-x_5|).
\end{aligned}
$$

(2) $\quad 2|x_3+x_4-x_5| \leqq 2|x_4-x_5|+2x_3,$

$2|-x_6+x_1+x_2| \leqq 2|x_1-x_6|+2x_2,$

$2|x_4-x_5-x_6| \leqq 2|x_4-x_5|+2x_6 \leqq |x_4-x_5|+x_4+x_5+2x_6,$

$2|-x_5-x_6+x_1| \leqq 2|x_1-x_6|+2x_5 \leqq |x_1-x_6|+x_1+x_6+2x_5.$

これらの不等式の辺々を加えると

$$
\begin{aligned}
&x_1+2x_2+2x_3+x_4+3x_5+3x_6+3(|x_4-x_5|+|x_1-x_6|)\\
&\geqq 2(|x_3+x_4-x_5|+|x_4-x_5-x_6|+|-x_5+x_6+x_1|+|-x_6+x_1+x_2|).
\end{aligned}
$$

(3) $\quad 2|x_3+x_4-x_5| \leqq 2|x_4-x_5|+2x_3,$

$2|-x_7+x_1+x_2| \leqq 2|x_1-x_7|+2x_2,$

$2|x_4-x_5-x_6| \leqq 2|x_4-x_5|+2x_6 \leqq |x_4-x_5|+x_4+x_5+2x_6,$

$2|-x_6-x_7+x_1| \leqq 2|x_1-x_7|+2x_6 \leqq |x_1-x_7|+x_1+x_7+2x_6.$

これらの不等式の辺々を加えると

$$
\begin{aligned}
&x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5+4x_6+x_7+3(|x_4-x_5|+|x_1-x_7|)\\
&\geqq 2(|x_3+x_4-x_5|+|x_4-x_5-x_6|+|-x_6-x_7+x_1|+|-x_7+x_1+x_2|).
\end{aligned}
$$

(4) $\quad 2|x_3+x_4-x_5| \leqq 2|x_4-x_5|+2x_3,$

$2|-x_8+x_1+x_2| \leqq 2|x_1-x_8|+2x_2,$

$2|x_4-x_5-x_6| \leqq 2|x_4-x_5|+2x_6 \leqq |x_4-x_5|+x_4+x_5+2x_6,$

$2|-x_7-x_8+x_1| \leqq 2|x_1-x_8|+2x_7 \leqq |x_1-x_8|+x_1+x_8+2x_7.$

これらの不等式の辺々を加えると

$$
\begin{aligned}
&x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5+2x_6+2x_7+x_8+3(|x_4-x_5|+|x_1-x_8|)\\
&\geqq 2(|x_3+x_4-x_5|+|x_4-x_5-x_6|+|-x_7-x_8+x_1|+|-x_8+x_1+x_2|).
\end{aligned}
$$
■

［**注 1**］　(2) は (4) で $x_7=x_5$，$x_8=x_6$ とおけば得られる．

また，(3) は (4) で $x_7=x_6$，$x_8=x_7$ とおけば得られる．

［**注 2**］　問題 221 の結果を，問題 222，223 で利用する．

問題 222　$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ は実数で，$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ を満たすとき，$n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ に対して，次の不等式を証明せよ．

$$3\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+x_{i+1}|\right) \geqq 2\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+x_{i+1}+x_{i+2}|\right). \tag{16.3}$$

ただし，$x_{n+1}=x_1,\ x_{n+2}=x_2$ とする．

解　$c_i=|x_i|\ (1 \leqq i \leqq n)$ とおく．

(i) $n=3$ のとき

$$(16.3) \iff |x_1+x_2|+|x_2+x_3|+|x_3+x_1| \geqq 2|x_1+x_2+x_3|.$$

$$2|x_1+x_2+x_3| = |(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)| \leqq |x_1+x_2|+|x_2+x_3|+|x_3+x_1|$$

より，(16.3) は成り立つ．

(ii) $n=4$ のとき

$$\begin{aligned}
&(16.3)\\
\iff& 3(|x_1+x_2|+|x_2+x_3|+|x_3+x_4|+|x_4+x_1|)\\
&\geqq 2(|x_1+x_2+x_3|+|x_2+x_3+x_4|+|x_3+x_4+x_1|+|x_4+x_1+x_2|)\cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

(a) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq 0$ のとき，①で等号が成り立つ．

(b) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq 0 \geqq x_4$ のとき

$$\begin{aligned}
① \iff& 3(c_1+c_2+c_2+c_3+|c_3-c_4|+|-c_4+c_1|)\\
&\geqq 2(c_1+c_2+c_3+|c_2+c_3-c_4|+|c_3-c_4+c_1|+|-c_4+c_1+c_2|)\\
\iff& c_1+4c_2+c_3+3(|c_3-c_4|+|-c_4+c_1|)\\
&\geqq 2(|c_2+c_3-c_4|+|c_3-c_4+c_1|+|-c_4+c_1+c_2|).
\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (1) で $x_1=c_1,\ x_2=c_2,\ x_3=c_2,\ x_4=c_3,\ x_5=c_4$ とおけば得られる．

(c) $x_1 \geqq x_2 \geqq 0 \geqq x_3 \geqq x_4$ のとき

$$\begin{aligned}
① \iff& 3(c_1+c_2+|c_2-c_3|+c_3+c_4+|-c_4+c_1|)\\
&\geqq 2(|c_1+c_2-c_3|+|c_2-c_3-c_4|+|-c_3-c_4+c_1|+|-c_4+c_1+c_2|)\\
\iff& 3c_1+3c_2+3c_3+3c_4+3(|c_2-c_3|+|-c_4+c_1|)\\
&\geqq 2(|c_1+c_2-c_3|+|c_2-c_3-c_4|+|-c_3-c_4+c_1|+|-c_4+c_1+c_2|).
\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (2) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_1$，$x_4=c_2$，$x_5=c_3$，$x_6=c_4$ とおけば得られる．

(d) (a)，(b)，(c) 以外のときは，x_1，x_2，x_3，x_4 のかわりに $-x_1$，$-x_2$，$-x_3$，$-x_4$ を考えればよい．

(iii) $n=5$ のとき

$$\begin{aligned}&(16.3)\\ \iff\ & 3(|x_1+x_2|+|x_2+x_3|+|x_3+x_4|+|x_4+x_5|+|x_5+x_1|)\\ &\geqq 2(|x_1+x_2+x_3|+|x_2+x_3+x_4|+|x_3+x_4+x_5|+|x_4+x_5+x_1|\\ &+|x_5+x_1+x_2|). \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

(a) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq x_5 \geqq 0$ のとき，②で等号が成り立つ．

(b) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq 0 \geqq x_5$ のとき

$$\begin{aligned}② \iff\ & 3(c_1+c_2+c_2+c_3+c_3+c_4+|c_4-c_5|+|-c_5+c_1|)\\ &\geqq 2(c_1+c_2+c_3+c_2+c_3+c_4+|c_3+c_4-c_5|+|c_4-c_5+c_1|\\ &\quad+|-c_5+c_1+c_2|)\\ \iff\ & c_1+2c_2+2c_3+c_4+3(|c_4-c_5|+|-c_5+c_1|)\\ &\geqq 2(|c_3+c_4-c_5|+|c_4-c_5+c_1|+|-c_5+c_1+c_2|).\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (1) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_3$，$x_4=c_4$，$x_5=c_5$ とおけば得られる．

(c) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq 0 \geqq x_4 \geqq x_5$ のとき

$$\begin{aligned}② \iff\ & 3(c_1+c_2+c_2+c_3+|c_3-c_4|+c_4+c_5+|-c_5+c_1|)\\ &\geqq 2(c_1+c_2+c_3+|c_2+c_3-c_4|+|c_3-c_4-c_5|+|-c_4-c_5+c_1|\\ &\quad+|-c_5+c_1+c_2|)\\ \iff\ & c_1+4c_2+c_3+3c_4+3c_5+3(|c_3-c_4|+|-c_5+c_1|)\\ &\geqq 2(|c_2+c_3-c_4|+|c_3-c_4-c_5|+|-c_4-c_5+c_1|+|-c_5+c_1+c_2|).\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (2) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_2$，$x_4=c_3$，$x_5=c_4$，$x_6=c_5$ とおけば得られる．

(d) (a), (b), (c) 以外のときは，x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 のかわりに $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5$ を考えればよい．

(iii) $n=6$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(16.3)\\
\iff & 3(|x_1+x_2|+|x_2+x_3|+|x_3+x_4|+|x_4+x_5|+|x_5+x_6|+|x_6+x_1|)\\
&\geqq 2(|x_1+x_2+x_3|+|x_2+x_3+x_4|+|x_3+x_4+x_5|+|x_4+x_5+x_6|\\
&\qquad +|x_5+x_6+x_1|+|x_6+x_1+x_2|). \qquad \cdots\cdots ③
\end{aligned}
$$

(a) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq x_5 \geqq x_6 \geqq 0$ のとき，③で等号が成り立つ．

(b) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq x_5 \geqq 0 \geqq x_6$ のとき

$$
\begin{aligned}
③ \iff & 3(c_1+c_2+c_2+c_3+c_3+c_4+c_4+c_5+|c_5-c_6|+|-c_6+c_1|)\\
&\geqq 2(c_1+c_2+c_3+c_2+c_3+c_4+c_3+c_4+c_5+|c_4+c_5-c_6|\\
&\qquad +|c_5-c_6+c_1|+|-c_6+c_1+c_2|)\\
\iff & c_1+2c_2+2c_4+c_5+3(|c_5-c_6|+|-c_6+c_1|)\\
&\geqq 2(|c_4+c_5-c_6|+|c_5-c_6+c_1|+|-c_6+c_1+c_2|).
\end{aligned}
$$

この不等式は，問題 221 の (1) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_4$，$x_4=c_5$，$x_5=c_6$ とおけば得られる．

(c) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq 0 \geqq x_5 \geqq x_6$ のとき

$$
\begin{aligned}
③ \iff & 3(c_1+c_2+c_2+c_3+c_3+c_4+|c_4-c_5|+c_5+c_6+|-c_6+c_1|)\\
&\geqq 2(c_1+c_2+c_3+c_2+c_3+c_4+|c_3+c_4-c_5|+|c_4-c_5-c_6|\\
&\qquad +|-c_5-c_6+c_1|+|-c_6+c_1+c_2|)\\
\iff & c_1+2c_2+2c_3+c_4+3c_5+3c_6+3(|c_4-c_5|+|-c_6+c_1|)\\
&\geqq 2(|c_3+c_4-c_5|+|c_4-c_5-c_6|+|-c_5-c_6+c_1|+|-c_6+c_1+c_2|).
\end{aligned}
$$

この不等式は，問題 221 の (2) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_3$，$x_4=c_4$，$x_5=c_5$，$x_6=c_6$ とおけば得られる．

(d) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq 0 \geqq x_4 \geqq x_5 \geqq x_6$ のとき

$$
\begin{aligned}
③ \iff & 3(c_1+c_2+c_2+c_3+|c_3-c_4|+c_4+c_5+c_5+c_6+|-c_6+c_1|)\\
&\geqq 2(c_1+c_2+c_3+|c_2+c_3-c_4|+|c_3-c_4-c_5|+c_4+c_5+c_6\\
&\qquad +|-c_5-c_6+c_1|+|-c_6+c_1+c_2|)\\
\iff & c_1+4c_2+c_3+c_4+4c_5+c_6+3(|c_3-c_4|+|-c_6+c_1|)\\
&\geqq 2(|c_2+c_3-c_4|+|c_3-c_4-c_5|+|-c_5-c_6+c_1|+|-c_6+c_1+c_2|).
\end{aligned}
$$

この不等式は，問題 221 の (3) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_2$，$x_4=c_3$，$x_5=c_4$，$x_6=c_5$, $x_7=c_6$ とおけば得られる．

(e) (a), (b), (c), (d) 以外のときは, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ のかわりに $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5, -x_6$ を考えればよい．

(iii) $n=7$ のとき

(16.3)

$$\begin{aligned}\iff &3(|x_1+x_2|+|x_2+x_3|+|x_3+x_4|+|x_4+x_5|+|x_5+x_6|+|x_6+x_7|+|x_7+x_1|)\\ &\geqq 2(|x_1+x_2+x_3|+|x_2+x_3+x_4|+|x_3+x_4+x_5|+|x_4+x_5+x_6|\\ &\quad+|x_5+x_6+x_7|+|x_6+x_7+x_1|+|x_7+x_1+x_2|). \qquad \cdots\cdots ④\end{aligned}$$

(a) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq x_5 \geqq x_6 \geqq x_7 \geqq 0$ のとき，④で等号が成り立つ．

(b) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq x_5 \geqq x_6 \geqq 0 \geqq x_7$ のとき

$$\begin{aligned}④ \iff &3(c_1+c_2+c_2+c_3+c_3+c_4+c_4+c_5+c_5+c_6+|c_6-c_7|+|-c_7+c_1|)\\ &\geqq 2(c_1+c_2+c_3+c_2+c_3+c_4+c_3+c_4+c_5+c_4+c_5+c_6\\ &\quad+|c_5+c_6-c_7|+|c_6-c_7+c_1|+|-c_7+c_1+c_2|)\\ \iff &c_1+2c_2+2c_5+c_6+3(|c_6-c_7|+|-c_7+c_1|)\\ &\geqq 2(|c_5+c_6-c_7|+|c_6-c_7+c_1|+|-c_7+c_1+c_2|).\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (1) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_5$，$x_4=c_6$，$x_5=c_7$ とおけば得られる．

(c) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq x_5 \geqq 0 \geqq x_6 \geqq x_7$ のとき

$$\begin{aligned}④ \iff &3(c_1+c_2+c_2+c_3+c_3+c_4+c_4+c_5+|c_5-c_6|+c_6+c_7\\ &\quad+|-c_7+c_1|)\\ &\geqq 2(c_1+c_2+c_3+c_2+c_3+c_4+c_3+c_4+c_5+|c_4+c_5-c_6|\\ &\quad+|c_5-c_6-c_7|+|-c_6-c_7+c_1|+|-c_7+c_1+c_2|)\\ \iff &c_1+2c_2+2c_4+c_5+3c_6+3c_7+3(|c_5-c_6|+|-c_7+c_1|)\\ &\geqq 2(|c_4+c_5-c_6|+|c_5-c_6-c_7|+|-c_6-c_7+c_1|+|-c_7+c_1+c_2|).\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (2) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_4$，$x_4=c_5$，$x_5=c_6$，$x_6=c_7$ とおけば得られる．

(d) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq 0 \geqq x_5 \geqq x_6 \geqq x_7$ のとき

$$\begin{aligned}
④ \iff & 3(c_1 + c_2 + c_2 + c_3 + c_3 + c_4 + |c_4 - c_5| + c_5 + c_6 + c_6 + c_7 \\
&\quad + |-c_7 + c_1|) \\
&\geqq 2(c_1 + c_2 + c_3 + c_2 + c_3 + c_4 + |c_3 + c_4 - c_5| + |c_4 - c_5 - c_6| \\
&\qquad + c_5 + c_6 + c_7 + |-c_6 - c_7 + c_1| + |-c_7 + c_1 + c_2|) \\
\iff & c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4 + c_5 + 4c_6 + c_7 + 3(|c_4 - c_5| + |-c_7 + c_1|) \\
&\geqq 2(|c_3 + c_4 - c_5| + |c_4 - c_5 - c_6| + |-c_6 - c_7 + c_1| + |-c_7 + c_1 + c_2|).
\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (3) で $x_1 = c_1$，$x_2 = c_2$，$x_3 = c_3$，$x_4 = c_4$，$x_5 = c_5$，$x_6 = c_6$，$x_7 = c_6$，$x_8 = c_7$ とおけば得られる．

(e) (a), (b), (c), (d) 以外のときは, x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7 のかわりに $-x_1$，$-x_2$，$-x_3$，$-x_4$，$-x_5$，$-x_6$，$-x_7$ を考えればよい． ■

問題 223 x_1, x_2, $\ldots$, x_n は実数で，$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$3\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i + x_{i+1}|\right) \geqq 2\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i + x_{i+1} + x_{i+2}|\right). \tag{16.4}$$

ただし，$x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ とする．

解　問題 222 で $n = 3, 4, 5, 6, 7$ のときは証明済みであるから，$n \geqq 8$ と仮定する．$c_i = |x_i|$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおく．

(a) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n \geqq 0$ のとき，(16.4) で等号が成り立つ．

(b) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_{n-1} \geqq 0 \geqq x_n$ のとき

$$\begin{aligned}
&(16.4)\\
\iff &3(c_1 + c_2 + c_2 + c_3 + c_3 + c_4 + \cdots + c_{n-4} + c_{n-3} + c_{n-3} + c_{n-2}\\
&\quad + c_{n-2} + c_{n-1} + |c_{n-1} - c_n| + |-c_n + c_1|)\\
&\geqq 2(c_1 + c_2 + c_3 + c_2 + c_3 + c_4 + c_3 + c_4 + c_5 + \cdots\\
&\quad + c_{n-5} + c_{n-4} + c_{n-3} + c_{n-4} + c_{n-3} + c_{n-2} + c_{n-3} + c_{n-2} + c_{n-1}\\
&\quad + |c_{n-2} + c_{n-1} - c_n| + |c_{n-1} - c_n + c_1| + |-c_n + c_1 + c_2|)\\
\iff &c_1 + 2c_2 + 2c_{n-2} + c_{n-1} + 3(|c_{n-1} - c_n| + |-c_n + c_1|)\\
&\geqq 2(|c_{n-2} + c_{n-1} - c_n| + |c_{n-1} - c_n + c_1| + |-c_n + c_1 + c_2|).
\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (1) で $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = c_{n-2}$, $x_4 = c_{n-1}$, $x_5 = c_n$ とおけば得られる．

(c) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_{n-2} \geqq 0 \geqq x_{n-1} \geqq x_n$ のとき

$$\begin{aligned}
&(16.4)\\
\iff &3(c_1 + c_2 + c_2 + c_3 + c_3 + c_4 + \cdots + c_{n-5} + c_{n-4} + c_{n-4} + c_{n-3}\\
&\quad + c_{n-3} + c_{n-2} + |c_{n-2} - c_{n-1}| + c_{n-1} + c_n + |-c_n + c_1|)\\
&\geqq 2(c_1 + c_2 + c_3 + c_2 + c_3 + c_4 + c_3 + c_4 + c_5 + \cdots + c_{n-6} + c_{n-5} + c_{n-4}\\
&\quad + c_{n-5} + c_{n-4} + c_{n-3} + c_{n-4} + c_{n-3} + c_{n-2} + |c_{n-3} + c_{n-2} - c_{n-1}|\\
&\quad + |c_{n-2} - c_{n-1} - c_n| + |-c_{n-1} - c_n + c_1| + |-c_n + c_1 + c_2|)\\
\iff &c_1 + 2c_2 + 2c_{n-3} + c_{n-2} + 3c_{n-1} + 3c_n + 3(|c_{n-2} - c_{n-1}| + |c_n - c_1|)\\
&\geqq 2(|c_{n-3} + c_{n-2} - c_{n-1}| + |c_{n-2} - c_{n-1} - c_n| + |-c_{n-1} - c_n + c_1|
\end{aligned}$$

$$+|-c_n+c_1+c_2|).$$

この不等式は，問題 221 の (2) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_{n-3}$，$x_4=c_{n-2}$，$x_5=c_{n-1}$, $x_6=c_n$ とおけば得られる．

(d) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_{n-3} \geqq 0 \geqq x_{n-2} \geqq x_{n-1} \geqq x_n$ のとき

$$\begin{aligned}
&(16.4)\\
\iff & 3(c_1+c_2+c_2+c_3+c_3+c_4+\cdots\\
&\quad +c_{n-6}+c_{n-5}+c_{n-5}+c_{n-4}+c_{n-4}+c_{n-3}\\
&\quad +|c_{n-3}-c_{n-2}|+c_{n-2}+c_{n-1}+c_{n-1}+c_n+|-c_n+c_1|)\\
&\geqq 2(c_1+c_2+c_3+c_2+c_3+c_4+c_3+c_4+c_5+\cdots\\
&\quad +c_{n-7}+c_{n-6}+c_{n-5}+c_{n-6}+c_{n-5}+c_{n-4}+c_{n-5}+c_{n-4}+c_{n-3}\\
&\quad +|c_{n-4}+c_{n-3}-c_{n-2}|+|c_{n-3}-c_{n-2}-c_{n-1}|+c_{n-2}+c_{n-1}+c_n\\
&\quad +|-c_{n-1}-c_n+c_1|+|-c_n+c_1+c_2|)\\
\iff & c_1+2c_2+2c_{n-4}+c_{n-3}+c_{n-2}+4c_{n-1}+c_n\\
&\quad +3(|c_{n-3}-c_{n-2}|+|-c_n+c_1|)\\
&\geqq 2(|c_{n-4}+c_{n-3}-c_{n-2}|+|c_{n-3}-c_{n-2}-c_{n-1}|+|-c_{n-1}-c_n+c_1|\\
&\quad +|-c_n+c_1+c_2|).
\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (3) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_{n-4}$，$x_4=c_{n-3}$，$x_5=c_{n-2}$, $x_6=c_{n-1}$，$x_7=c_n$ とおけば得られる．

(e) (i) $n=2k \quad (k \geqq 4)$ の場合

$0 \leqq i \leqq k-4$ として，$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_{k+i} \geqq 0 \geqq x_{k+i+1} \geqq \cdots \geqq x_{2k}$ のとき

$$\begin{aligned}
&(16.4)\\
\iff & 3(c_1+c_2+c_2+c_3+c_3+c_4+\cdots+c_{k+i-3}+c_{k+i-2}+c_{k+i-2}+c_{k+i-1}\\
&\quad +c_{k+i-1}+c_{k+i}+|c_{k+i}-c_{k+i+1}|+c_{k+i+1}+c_{k+i+2}+c_{k+i+2}+c_{k+i+3}\\
&\quad +\cdots+c_{2k-1}+c_{2k}+|-c_{2k}+c_1|)\\
&\geqq 2(c_1+c_2+c_3+c_2+c_3+c_4+\cdots+c_{k+i-3}+c_{k+i-2}+c_{k+i-1}\\
&\quad +c_{k+i-2}+c_{k+i-1}+c_{k+i}+|c_{k+i-1}+c_{k+i}-c_{k+i+1}|\\
&\quad +|c_{k+i}-c_{k+i+1}-c_{k+i+2}|+c_{k+i+1}+c_{k+i+2}+c_{k+i+3}\\
&\quad +c_{k+i+2}+c_{k+i+3}+c_{k+i+4}+\cdots+c_{2k-2}+c_{2k-1}+c_{2k}\\
&\quad +|-c_{2k-1}-c_{2k}+c_1|+|-c_{2k}+c_1+c_2|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff & c_1+2c_2+2c_{k+i-1}+c_{k+i}+c_{k+i+1}+2c_{k+i+2}+2c_{2k-1}+c_{2k} \\
&\quad +3(|c_{k+i}-c_{k+i+1}|+|-c_{2k}+c_1|) \\
&\geqq 2(|c_{k+i-1}+c_{k+i}-c_{k+i+1}|+|c_{k+i}-c_{k+i+1}-c_{k+i+2}| \\
&\quad +|-c_{2k-1}-c_{2k}+c_1|+|-c_{2k}+c_1+c_2|).
\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (4) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_{k+i-1}$，$x_4=c_{k+i}$，$x_5=c_{k+i+1}$，$x_6=c_{k+i+2}$，$x_7=c_{2k-1}$，$x_8=c_{2k}$ とおけば得られる．

(ii) $n=2k+1 \quad (k \geqq 4)$ の場合

$1 \leqq i \leqq k-3$ として，$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_{k+i} \geqq 0 \geqq x_{k+i+1} \geqq \cdots \geqq x_{2k+1}$ のとき

$$\begin{aligned}
&(16.4) \\
\iff & 3(c_1+c_2+c_2+c_3+c_3+c_4+\cdots+c_{k+i-3}+c_{k+i-2}+c_{k+i-2}+c_{k+i-1} \\
&\quad +c_{k+i-1}+c_{k+i}+|c_{k+i}-c_{k+i+1}|+c_{k+i+1}+c_{k+i+2} \\
&\quad +c_{k+i+2}+c_{k+i+3}+\cdots+c_{2k}+c_{2k+1}+|-c_{2k+1}+c_1|) \\
&\geqq 2(c_1+c_2+c_3+c_2+c_3+c_4+\cdots+c_{k+i-3}+c_{k+i-2}+c_{k+i-1} \\
&\quad +c_{k+i-2}+c_{k+i-1}+c_{k+i}+|c_{k+i-1}+c_{k+i}-c_{k+i+1}| \\
&\quad +|c_{k+i}-c_{k+i+1}-c_{k+i+2}|+c_{k+i+1}+c_{k+i+2}+c_{k+i+3} \\
&\quad +c_{k+i+2}+c_{k+i+3}+c_{k+i+4}+\cdots+c_{2k-2}+c_{2k-1}+c_{2k} \\
&\quad +c_{2k-1}+c_{2k}+c_{2k+1}+|-c_{2k}-c_{2k+1}+c_1|+|-c_{2k+1}+c_1+c_2|) \\
\iff & c_1+2c_2+2c_{k+i-1}+c_{k+i}+c_{k+i+1}+2c_{k+i+2}+2c_{2k}+c_{2k+1} \\
&\quad +3(|c_{k+i}-c_{k+i+1}|+|-c_{2k+1}+c_1|) \\
&\geqq 2(|c_{k+i-1}+c_{k+i}-c_{k+i+1}|+|c_{k+i}-c_{k+i+1}-c_{k+i+2}| \\
&\quad +|-c_{2k}-c_{2k+1}+c_1|+|-c_{2k+1}+c_1+c_2|).
\end{aligned}$$

この不等式は，問題 221 の (4) で $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$x_3=c_{k+i-1}$，$x_4=c_{k+i}$，$x_5=c_{k+i+1}$，$x_6=c_{k+i+2}$，$x_7=c_{2k}$，$x_8=c_{2k+1}$ とおけば得られる．

(f) (a), (b), (c), (d), (e) 以外のときは，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ のかわりに $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$ を考えればよい． ■

16.5　Karamata の不等式の実践的な使い方

$a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して，$(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n})$ を $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ の順列で $a_{i_1}\geqq a_{i_2}\geqq\cdots\geqq a_{i_n}$ を満たすものとするとき

$$a^*\overset{\text{def}}{=}(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n})$$

で a^* を定義する．

定理 13　(Symmetric Majorization Criterion)

$a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$，$b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ とする．

$a^*\succ b^*$ であるための必要十分条件は，すべての実数 x に対して

$$|a_1-x|+|a_2-x|+\cdots+|a_n-x|\geqq|b_1-x|+|b_2-x|+\cdots+|b_n-x| \tag{16.5}$$

が成り立つことである．

［証明］ 一般性を失うことなく $a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_n$，$b_1\geqq b_2\geqq\cdots\geqq b_n$ と仮定できる．

(i) 必要性の証明

$F(t)=|t-x|$ とおくと，$F(t)$ は凸関数である．なぜならば，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$，$\alpha+\beta=1$ を満たす α,β と t_1，$t_2\in\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}F(\alpha t_1+\beta t_2)&=|\alpha t_1+\beta t_2-x|=|\alpha t_1+\beta t_2-(\alpha+\beta)x|\\&=|\alpha(t_1-x)+\beta(t_2-x)|\\&\leqq\alpha|t_1-x|+\beta|t_2-x|=\alpha F(t_1)+\beta F(t_2)\end{aligned}$$

が成り立つからである．

したがって，Karamat の不等式より

$$F(a_1)+F(a_2)+\cdots+F(a_n)\geqq F(b_1)+F(b_2)+\cdots+F(b_n)$$

すなわち (16.5) が成り立つ．

(ii) 十分性の証明

$f(x)=|a_1-x|+|a_2-x|+\cdots+|a_n-x|$，$g(x)=|b_1-x|+|b_2-x|+\cdots+|b_n-x|$ とおき，常に $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つと仮定する．

$x\geqq a_1$ のとき

$$f(x)=x-a_1+x-a_2+\cdots+x-a_n=nx-(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

$x \geqq b_1$ のとき

$$g(x) = x - b_1 + x - b_2 + \cdots + x - b_n = nx - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

したがって，$x \geqq \max(a_1, b_1)$ のとき，$f(x) \geqq g(x)$ より

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqq b_1 + b_2 + \cdots + b_n \qquad \cdots\cdots ①$$

$x \leqq a_n$ のとき

$$f(x) = a_1 - x + a_2 - x + \cdots + a_n - x = -nx + a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,.$$

$x \leqq b_n$ のとき

$$g(x) = b_1 - x + b_2 - x + \cdots + b_n - x = -nx + b_1 + b_2 + \cdots + b_n\,.$$

したがって，$x \leqq \min(a_n, b_n)$ のとき，$f(x) \geqq g(x)$ より

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq b_1 + b_2 + \cdots + b_n \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②から

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \qquad \cdots\cdots ③$$

$1 \leqq k \leqq n-1$ として $a_{k+1} \leqq x \leqq a_k$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 - x + a_1 - x + \cdots + a_k - x + x - a_{k+1} + x - a_{k+2} + \cdots + x - a_n \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - kx + (n-k)x - (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n) \\ &= (n-2k)x + (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n) \\ &= (n-2k)x + 2\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{i=1}^{n} |b_i - x| = \sum_{i=1}^{k} |b_i - x| + \sum_{i=k+1}^{n} |b_i - x| \\ &\geqq \sum_{i=1}^{k} (b_i - x) + \sum_{i=k+1}^{n} (x - b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} b_i - kx + (n-k)x - \sum_{i=k+1}^{n} b_i \\ &= (n-2k)x + 2\sum_{i=1}^{k} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i. \end{aligned}$$

したがって，$f(x) \geqq g(x)$ より

$$(n-2k)x + 2\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \geqq (n-2k)x + 2\sum_{i=1}^{k} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

よって，③を用いると

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geqq \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

③ も成り立つから，$a \succ b$ である． ■

命題　1　$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$a = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ とおくと

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^* \succ (\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n}).$$

[証明]　定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$|a_1 - x| + |a_2 - x| + \cdots + |a_n - x| \geqq n|a - x| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nx|$$

が成り立つことを示せばよい．$x_i = a_i - x \quad (1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \geqq |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|$$

となり，これは明らかに成り立つ． ■

命題　2　$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$，$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n,$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geqq b_1 + b_2 + \cdots + b_k \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

を満たすならば，$a^* \succ b$.

(解説)　$a^* = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ とおけば，$(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ は $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ の順列で，$a_{i_1} \geqq a_{i_2} \geqq \cdots \geqq a_{i_n}$ を満たすから

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$
$$a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geqq b_1 + b_2 + \cdots + b_k \quad (1 \leqq k \leqq n-1).$$

したがって，$a^* \succ b$ が成り立つ．

問題 224　(Popoviciu's inequality)

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$a \in I$，$b \in I$，$c \in I$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$f(a) + f(b) + f(c) + 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geqq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{b+c}{2}\right) + 2f\left(\frac{c+a}{2}\right).$$

解　$x=(a,b,c,t,t,t),\ y=(\alpha,\alpha,\beta,\beta,\gamma,\gamma)$

$$t=\frac{a+b+c}{3},\ \alpha=\frac{a+b}{2},\ \beta=\frac{b+c}{2},\ \gamma=\frac{c+a}{2}$$

とおき，$x^* \succ y^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$|a-x|+|b-x|+|c-x|+3|t-x| \geqq 2|\alpha-x|+2|\beta-x|+2|\gamma-x|$$

すなわち

$$|a-x|+|b-x|+|c-x|+|a+b+c-3x| \geqq |a+b-2x|+|b+c-2x|+|c+a-2x|$$

が成り立つことを示せばよい．$p=a-x,\ q=b-x,\ r=c-x$ とおくと，証明すべき不等式は

$$|p|+|q|+|r|+|p+q+r| \geqq |p+q|+|q+r|+|r+p|$$

となるが，これは，問題 211 より成り立つ．
よって，Karamata の不等式より

$$f(a)+f(b)+f(c)+3f(t) \geqq 2[f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)]$$

すなわち

$$f(a)+f(b)+f(c)+3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geqq 2\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{b+c}{2}\right)+f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right]$$

が成り立つ．■

問題 225　x,y,z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2 \geqq 2(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3).$$

解　$f(x)=e^x$ とおくと $f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は凸関数である．問題 224 より

$$f(a)+f(b)+f(c)+3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geqq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{b+c}{2}\right)+2f\left(\frac{c+a}{2}\right)$$

が成り立つから

$$e^a+e^b+e^c+3e^{\frac{a+b+c}{3}} \geqq 2e^{\frac{a+b}{2}}+2e^{\frac{b+c}{2}}+2e^{\frac{c+a}{2}}.$$

$a=6\log x,\ b=6\log y,\ c=6\log z\ \left(x=e^{\frac{a}{6}},\ y=e^{\frac{b}{6}},\ z=e^{\frac{c}{6}}\right)$ とおくと

$$x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2 \geqq 2(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3).$$ ■

[注]　別解については，問題 115(1) 参照．

問題 226　(Popoviciu-Titu Andreescu inequality)

$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$a \in I$, $b \in I$, $c \in I$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$f(a)+f(b)+f(c)+f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geqq \frac{4}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{b+c}{2}\right)+f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right].$$

解　$x=(a,a,a,b,b,b,c,c,c,t,t,t)$, $y=(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta,\beta,\gamma,\gamma,\gamma,\gamma)$

$$t=\frac{a+b+c}{3},\ \alpha=\frac{a+b}{2},\ \beta=\frac{b+c}{2},\ \gamma=\frac{c+a}{2}$$

とおき，$x^* \succ y^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$3|a-x|+3|b-x|+3|c-x|+3|t-x| \geqq 4|\alpha-x|+4|\beta-x|+4|\gamma-x|$$

すなわち

$$3|a-x|+3|b-x|+3|c-x|+|a+b+c-3x| \geqq 2|a+b-2x|+2|b+c-2x|+2|c+a-2x|$$

が成り立つことを示せばよい．$p=a-x$, $q=b-x$, $r=c-x$ とおくと，証明すべき不等式は

$$3|p|+3|q|+3|r|+|p+q+r| \geqq 2|p+q|+2|q+r|+2|r+p|$$

となるが，これは，問題 212 より成り立つ．

よって，Karamata の不等式より

$$3f(a)+3f(b)+3f(c)+3f(t) \geqq 4[f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)]$$

すなわち

$$f(a)+f(b)+f(c)+f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geqq \frac{4}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{b+c}{2}\right)+f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right].$$

が成り立つ　■

問題 227　x,y,z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^6+y^6+z^6+x^2y^2z^2 \geqq \frac{4}{3}(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3).$$

解　$f(x)=e^x$ とおくと $f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は凸関数である．問題 226 より

$$f(a)+f(b)+f(c)+f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geqq \frac{4}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{b+c}{2}\right)+f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right]$$

が成り立つから

$$e^a+e^b+e^c+e^{\frac{a+b+c}{3}} \geqq \frac{4}{3}\left(e^{\frac{a+b}{2}}+e^{\frac{b+c}{2}}+e^{\frac{c+a}{2}}\right).$$

$a=6\log x,\ b=6\log y,\ c=6\log z$ とおくと

$$x^6+y^6+z^6+x^2y^2z^2 \geqq \frac{4}{3}(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)$$

を得る. ■

問題 228 (Turkevici's inequality)

a,b,c,d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2.$$

解 $a=e^{a_1},b=e^{b_1},c=e^{c_1},d=e^{d_1}$ $(a_1=\log a, b_1=\log b, c_1=\log c, d_1=\log d)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}&e^{4a_1}+e^{4b_1}+e^{4c_1}+e^{4d_1}+2e^{a_1+b_1+c_1+d_1}\\ \geqq\ &e^{2a_1+2b_1}+e^{2b_1+2c_1}+e^{2c_1+2d_1}+e^{2d_1+2a_1}+e^{2a_1+2c_1}+e^{2b_1+2d_1}.\end{aligned}$$

$$\alpha=(4a_1,4b_1,4c_1,4d_1,a_1+b_1+c_1+d_1,a_1+b_1+c_1+d_1),$$

$$\beta=(2a_1+2b_1,2b_1+2c_1,2c_1+2d_1,2d_1+2a_1,2a_1+2c_1,2b_1+2d_1)$$

とおき，$\alpha^*\succ\beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x_1 に対して

$$\begin{aligned}&|4a_1-4x_1|+|4b_1-4x_1|+|4c_1-4x_1|+|4c_1-4x_1|+2|a_1+b_1+c_1+d_1-4x_1|\\ \geqq\ &|2a_1+2b_1-4x_1|+|2b_1+2c_1-4x_1|+|2c_1+2d_1-4x_1|+|2d_1+2a_1-4x_1|\\ &+|2a_1+2c_1-4x_1|+|2b_1+2d_1-4x_1|\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．$x=a_1-x_1,\ y=b_1-x_1,\ z=c_1-x_1,\ t=d_1-x_1$ とおくと，証明すべき不等式は

$$2(|x|+|y|+|z|+|t|)+|x+y+z+t| \geqq |x+y|+|y+z|+|z+t|+|t+x|+|x+z|+|y+t|$$

となるが，これは，問題 214 より成り立つ.

$f(x)=e^x$ とおくと，$f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は凸関数である．Karamata の不等式より

$$\begin{aligned}&f(4a_1)+f(4b_1)+f(4c_1)+f(4d_1)+2f(a_1+b_1+c_1+d_1)\\ \geqq\ &f(2a_1+2b_1)+f(2b_1+2c_1)+f(2c_1+2d_1)+f(2d_1+2a_1)+f(2a_1+2c_1)+f(2b_1+2d_1)\end{aligned}$$

が成り立つ. ■

[注] 別解については, 問題 125 参照.

問題 229　n は 2 以上の整数とする．$a_1 \geqq 0, a_2 \geqq 0, \dots, a_n \geqq 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+n\sqrt[n]{a_1^2a_2^2\cdots a_n^2} \geqq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2.$$

解　(i) $a_1, a_2, \dots, a_n$ の中に 0 が含まれる場合

$a_n=0$ と仮定しても一般性は失われない．このとき，証明すべき不等式は

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2) \geqq (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})^2$$

となる．これは コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2) &= (\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{n-1})(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)\\ &\geqq (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})^2\end{aligned}$$

となり，成り立つ．

(ii) $a_1>0, a_2>0, \dots, a_n>0$ の場合

$n=2$ のとき，証明すべき不等式は， $a_1^2+a_2^2+2a_1a_2 \geqq (a_1+a_2)^2$ となるから，明らかに成り立つ．よって，これからは，$n \geqq 3$ とする．

$a_1=e^{x_1}, a_2=e^{x_2}, \dots, a_n=e^{x_n}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$(n-1)\left(e^{2x_1}+e^{2x_2}+\cdots+e^{2x_n}\right)+ne^{\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}} \geqq \left(e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots+e^{x_n}\right)^2$$

すなわち

$$(n-2)\left(e^{2x_1}+e^{2x_2}+\cdots+e^{2x_n}\right)+ne^{\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}} \geqq \sum_{i \neq j} e^{x_i+x_j}$$

となる．

$x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ として

$$a=(\underbrace{2x_1, 2x_1, \dots, 2x_1}_{n-2}, \underbrace{2x_2, 2x_2, \dots, 2x_2}_{n-2}, \dots, \underbrace{2x_n, 2x_n, \dots, 2x_n}_{n-2}, \underbrace{2x, 2x, \dots, 2x}_{n}),$$

$$b=(\underbrace{x_1+x_2, x_1+x_3, \dots, x_1+x_n}_{n-1}, \underbrace{x_2+x_1, x_2+x_3, \dots, x_2+x_n}_{n-1}, \dots$$
$$, \underbrace{x_n+x_1, x_n+x_2, \dots, x_n+x_{n-1}}_{n-1})$$

とおき，$a^* \succ b^*$ を示す．

定理 13 から，すべての実数 X に対して

$$(n-2)\left(|2x_1-2X|+|2x_2-2X|+\cdots+|2x_n-2X|\right)+n|2x-2X|$$
$$\geqq \sum_{i \neq j}|x_i+x_j-2X| = 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n}|x_i+x_j-2X|$$

すなわち

$$(n-2)\left(|x_1-X|+|x_2-X|+\cdots+|x_n-X|\right)+|x_1+x_2+\cdots+x_n-nX|$$
$$\geqq \sum_{1\leqq i<j\leqq n}|x_i+x_j-2X|$$

が成り立つことを示せばよい．

$y_1=x_1-X,\ y_2=x_2-X,\ \ldots,\ y_n=x_n-X$ とおくと，証明すべき不等式は

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n}|y_i|+\left|\sum_{i=1}^{n}y_i\right| \geqq \sum_{1\leqq i<j\leqq n}|y_i+y_j|$$

となるが，これは，$n\geqq 3$ のとき，問題 219 より成り立つ．

$f(x)=e^x$ とおくと，$f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は凸関数であるから，Karamata の不等式より

$$(n-2)\Big[f(2x_1)+f(2x_2)+\cdots+f(2x_n)\Big]+nf\left(\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}\right)$$
$$\geqq \sum_{i \neq j} f(x_i+x_j)$$

が成り立つ．

よって

$$(n-2)\left(e^{2x_1}+e^{2x_2}+\cdots+e^{2x_n}\right)+ne^{\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}} \geqq \sum_{i \neq j}e^{x_i+x_j}. \qquad \blacksquare$$

問題 230　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leqq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

解　$a_i = e^{x_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leqq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\log(1+a_1)+\log(1+a_2)+\cdots+\log(1+a_n) \\
&\leqq \log\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)+\log\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\log(1+e^{x_1})+\log(1+e^{x_2})+\cdots+\log(1+e^{x_n}) \\
&\leqq \log\left(1+e^{2x_1-x_2}\right)+\log\left(1+e^{2x_2-x_3}\right)+\cdots+\log\left(1+e^{2x_n-x_1}\right).
\end{aligned}$$

$$a=(2x_1-x_2,\ 2x_2-x_3,\ \ldots,\ 2x_n-x_1),\ \ b=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

とおき，$a^* \succ b^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 X に対して

$$\begin{aligned}
&|2x_1-x_2-X|+|2x_2-x_3-X|+\cdots+|2x_n-x_1-X| \\
\geqq\ &|x_1-X|+|x_2-X|+\cdots+|x_n-X|
\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．

$y_i = x_i - X$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$|2y_1-y_2|+|2y_2-y_3|+\cdots+|2y_n-y_1| \geqq |y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|$$

となるが，これは，問題 218 で $p=2, q=1$ とおいた不等式より成り立つ．

$f(x)=\log(1+e^x)$ とおくと，$f''(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$ より $f(x)$ は凸関数である．Karamata の不等式より

$$f(2x_1-x_2)+f(2x_2-x_3)+\cdots+f(2x_n-x_1) \geqq f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$$

が成り立つ．

よって

$$\begin{aligned}
&\log(1+e^{x_1})+\log(1+e^{x_2})+\cdots+\log(1+e^{x_n}) \\
\leqq\ &\log\left(1+e^{2x_1-x_2}\right)+\log\left(1+e^{2x_2-x_3}\right)+\cdots+\log\left(1+e^{2x_n-x_1}\right).
\end{aligned}$$

■

問題 231 (V.Adya Asuren)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_2+a_3}{2}\cdots\cdot\frac{a_n+a_1}{2} \leqq \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\cdot\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\cdots\cdot\frac{a_n+a_1+a_2}{3}.$$

解　証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}&\log\frac{a_1+a_2}{2}+\log\frac{a_2+a_3}{2}+\cdots+\log\frac{a_n+a_1}{2}\\ \leqq\ &\log\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+\log\frac{a_2+a_3+a_4}{3}+\cdots+\log\frac{a_n+a_1+a_2}{3}.\end{aligned}$$

$x_i = \dfrac{a_i+a_{i+1}}{2}$，$y_i = \dfrac{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}{3}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ とおく．ただし，$a_{n+1}=a_1$，$a_{n+2}=a_2$ とする．ここで，

$$\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i - x| \geqq \sum\limits_{i=1}^{n}|y_i - x|$ すなわち

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_i+a_{i+1}}{2}-x\right| \geqq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}{3}-x\right|$$

を示せばよい．

$a_i - x = z_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，$z_1 \geqq z_2 \geqq \cdots \geqq z_n$，$z_{n+1}=z_1$，$z_{n+2}=z_2$ を満たすとき

$$3\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i+z_{i+1}|\right) \geqq 2\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i+z_{i+1}+z_{i+2}|\right)$$

を示せばよいが，これは，問題 223 より成り立つ．

$f(x) = \log x$ $(x>0)$ とおくと $f''(x) = -x^{-2} < 0$ より $f(x)$ は凹関数である．Karamat の不等式より

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)+f\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{a_n+a_1}{2}\right)\\ \leqq\ &f\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)+f\left(\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{a_n+a_1+a_2}{3}\right).\end{aligned}$$ ■

次の問題は，問題 231 の条件「 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ 」を「 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ 」に替えたものである．

問題 232　(Mongolia 1996)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_2+a_3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n+a_1}{2} \leqq \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\cdot\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n+a_1+a_2}{3}.$$

解　証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}&\log\frac{a_1+a_2}{2}+\log\frac{a_2+a_3}{2}+\cdots+\log\frac{a_n+a_1}{2}\\ \leqq\ &\log\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+\log\frac{a_2+a_3+a_4}{3}+\cdots+\log\frac{a_n+a_1+a_2}{3}.\end{aligned}$$

$x_i = \dfrac{a_i+a_{i+1}}{2}$，$y_i = \dfrac{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}{3}$　$(i=1,2,\ldots,n)$ とおく．ただし，$a_{n+1}=a_1$，$a_{n+2}=a_2$ とする．ここで，

$$\alpha=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ \beta=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して $\sum_{i=1}^{n}|x_i-x| \geqq \sum_{i=1}^{n}|y_i-x|$ すなわち

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_i+a_{i+1}}{2}-x\right| \geqq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}}{3}-x\right|$$

を示せばよい．

$x-a_i=z_i$ $(1\leqq i\leqq n)$ とおくと，$z_1 \geqq z_2 \geqq \cdots \geqq z_n$，$z_{n+1}=z_1$，$z_{n+2}=z_2$ を満たすとき

$$3\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i+z_{i+1}|\right) \geqq 2\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i+z_{i+1}+z_{i+2}|\right)$$

を示せばよいが，これは，問題 223 より成り立つ．

$f(x)=\log x$ $(x>0)$ とおくと $f''(x)=-x^{-2}<0$ より $f(x)$ は凹関数である．Karamat の不等式より

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)+f\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{a_n+a_1}{2}\right)\\ \leqq\ &f\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)+f\left(\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{a_n+a_1+a_2}{3}\right).\end{aligned}$$ ■

問題 233 (Pham Kim Hung)

a, b, c, d, e が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{d+e}{2}\cdot\frac{e+a}{2}$$
$$\leqq \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{b+c+d}{3}\cdot\frac{c+d+e}{3}\cdot\frac{d+e+a}{3}\cdot\frac{e+a+b}{3}.$$

問題 231，232 から $a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq e$ または $a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e$ のとき証明すべき不等式は成り立つことがわかる．この問題では，条件なしで証明することが求められている．

解 不等式は同次式であるから，$a+b+c+d+e=1$ と仮定することができる．

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{d+e}{2}\cdot\frac{e+a}{2}$$
$$\leqq \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{b+c+d}{3}\cdot\frac{c+d+e}{3}\cdot\frac{d+e+a}{3}\cdot\frac{e+a+b}{3}$$
$$\iff \frac{c+d+e}{a+b}\cdot\frac{d+e+a}{b+c}\cdot\frac{e+a+b}{c+d}\cdot\frac{a+b+c}{d+e}\cdot\frac{b+c+d}{e+a} \geqq \frac{3^5}{2^5}$$
$$\iff \frac{1-(a+b)}{a+b}\cdot\frac{1-(b+c)}{b+c}\cdot\frac{1-(c+d)}{c+d}\cdot\frac{1-(d+e)}{d+e}\cdot\frac{1-(e+a)}{e+a} \geqq \frac{3^5}{2^5}$$
$$\iff \left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{c+d}-1\right)\left(\frac{1}{d+e}-1\right)\left(\frac{1}{e+a}-1\right) \geqq \frac{3^5}{2^5}.$$

ところで，$x>0,\ y>0,\ x+y\leqq 1$ のとき，$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right) \geqq \left(\frac{2}{x+y}-1\right)^2$ が成り立つ．これは

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right) \geqq \left(\frac{2}{x+y}-1\right)^2$$
$$\iff \frac{1}{xy}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+1 \geqq \frac{4}{(x+y)^2}-\frac{4}{x+y}+1$$
$$\iff \frac{1}{xy}-\frac{4}{(x+y)^2} \geqq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}$$
$$\iff \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)^2} \geqq \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$$
$$\iff \frac{(x-y)^2(1-x-y)}{xy(x+y)^2} \geqq 0$$

から言える．この不等式を使うと

$$\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{d+e}-1\right) \geqq \left(\frac{2}{a+b+d+e}-1\right)^2 = \left(\frac{2}{1-c}-1\right)^2 = \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2.$$

よって

$$\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{d+e}-1\right) \geqq \left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2.$$

同様にして

$$\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{c+d}-1\right) \geqq \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2, \left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{d+e}-1\right) \geqq \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2,$$

$$\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{e+a}-1\right) \geqq \left(\frac{1+d}{1-d}\right)^2, \left(\frac{1}{c+d}-1\right)\left(\frac{1}{e+a}-1\right) \geqq \left(\frac{1+b}{1-b}\right)^2.$$

これらの不等式をかけ合わせることにより，次の不等式を得る．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{c+d}-1\right)\left(\frac{1}{d+e}-1\right)\left(\frac{1}{e+a}-1\right)\\ &\geqq \frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{1+c}{1-c}\cdot\frac{1+d}{1-d}\cdot\frac{1+e}{1-e}. \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

$f(x)=\log(1+x)-\log(1-x)$ $(0<x<1)$ とおくと，$f''(x)=\dfrac{4x}{(1+x)^2(1-x)^2}>0.$
$f(x)$ は凸関数であるから，Jensen の不等式より

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)+f(e) \geqq 5f\left(\frac{a+b+c+d+e}{5}\right) = 5f\left(\frac{1}{5}\right) = 5\log\frac{3}{2}.$$

ゆえに

$$\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{1+c}{1-c}\cdot\frac{1+d}{1-d}\cdot\frac{1+e}{1-e} \geqq \frac{3^5}{2^5}. \qquad \cdots\cdots(**)$$

$(*)$ と $(**)$ から，証明すべき不等式を得る． ■

16.6 karamat の不等式の練習問題

問題 234　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ が正の実数で，$b_1, b_2, \ldots, b_n$ を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の順列とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

解 1　$a_i = e^{x_i}$，$b_i = e^{y_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$e^{2x_1 - y_1} + e^{2x_2 - y_2} + \cdots + e^{2x_n - y_n} \geqq e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}$$

となる．

$$\alpha = (2x_1 - y_1, 2x_2 - y_2, \ldots, 2x_n - y_n),\ \beta = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$\begin{aligned}&|2x_1 - y_1 - x| + |2x_2 - y_2 - x| + \cdots + |2x_n - y_n - x|\\ \geqq\ &|x_1 - x| + |x_2 - x| + \cdots + |x_n - x|\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．$z_i = x_i - x$，$t_i = y_i - x$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$|2z_1 - t_1| + |2z_2 - t_2| + \cdots + |2z_n - t_n| \geqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \qquad \cdots\cdots (*)$$

となる．

$$|2z_1 - t_1| \geqq 2|z_1| - |t_1|,\ |2z_2 - t_2| \geqq 2|z_2| - |t_2|, \ldots, |2z_n - t_n| \geqq 2|z_n| - |t_n|.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&|2z_1 - t_1| + |2z_2 - t_2| + \cdots + |2z_n - t_n|\\ \geqq\ &2(|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|) - (|t_1| + |t_2| + \cdots + |t_n|)\\ =\ &2(|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|) - (|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|) = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.\end{aligned}$$

よって，$(*)$ は成り立つ．

$f(x) = e^x$ とおくと，$f''(x) = e^x > 0$ より $f(x)$ は凸関数である．Karamata の不等式より

$$f(2x_1 - y_1) + f(2x_2 - y_2) + \cdots + f(2x_n - y_n) \geqq f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$ ■

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{a_i^2}{b_i}+b_i \geqq 2\sqrt{\frac{a_i^2}{b_i}\cdot b_i}=2a_i \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

$i=1,2,\ldots,n$ とおいた不等式の辺々を加えると

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}+(b_1+b_2+\cdots+b_n) \geqq 2(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

$b_1+b_2+\cdots+b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ であるから

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqq a_1+a_2+\cdots+a_n$$

を得る． ■

問題 235　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_1} \geqq a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

解 1　$a_i=e^{x_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$e^{3x_1-x_2}+e^{3x_2-x_3}+\cdots+e^{3x_n-x_1} \geqq e^{2x_1}+e^{2x_2}+\cdots+e^{2x_n}$$

となる．

$$a=(3x_1-x_2, 3x_2-x_3, \ldots, 3x_n-x_1),\ b=(2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n)$$

とおき，$a^* \succ b^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 X に対して

$$\begin{aligned}&|3x_1-x_2-2X|+|3x_2-x_3-2X|+\cdots+|3x_n-x_1-2X|\\ \geqq\ &|2x_1-2X|+|2x_2-2X|+\cdots+|2x_n-2X|\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．$y_i=x_i-X$ $\quad(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$|3y_1-y_2|+|3y_2-y_3|+\cdots+|3y_n-y_1| \geqq 2(|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|)$$

となるが，これは，問題 218 で $p=3, q=1$ とおいたものなので成り立つ．

$f(x)=e^x$ とおくと，$f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は凸関数である．Karamata の不等式より

$$f(3x_1-x_2)+f(3x_2-x_3)+\cdots+f(3x_n-x_1) \geqq f(2x_1)+f(2x_2)+\cdots+f(2x_n)$$

が成り立つ． ■

解 2　補助定理 1 より

$$\begin{aligned}\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_1}&=\frac{(a_1^2)^2}{a_1a_2}+\frac{(a_2^2)^2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{(a_n^2)^2}{a_na_1}\\&\geqq\frac{\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1}.\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1}\geqq a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

すなわち

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqq a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$$

を示せばよい．この不等式は，コーシー・シュワルツの不等式より

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_1^2)\geqq(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)^2\,.$$

これから，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqq a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$ が得られる．■

解 3　相加平均・相乗平均の不等式より

$$2\cdot\frac{a_1^3}{a_2}+a_2^2=\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_1^3}{a_2}+a_2^2\geqq 3\sqrt[3]{\frac{a_1^3}{a_2}\cdot\frac{a_1^3}{a_2}\cdot a_2^2}=3a_1^2\,.$$

ゆえに

$$2\cdot\frac{a_1^3}{a_2}+a_2^2\geqq 3a_1^2\,.$$

同様にして

$$2\cdot\frac{a_2^3}{a_3}+a_3^2\geqq 3a_2^2\,,$$

$$\cdots\cdots$$

$$2\cdot\frac{a_n^3}{a_1}+a_1^2\geqq 3a_n^2\,.$$

これらの不等式の辺々を加えることにより

$$\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_1}\geqq a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

を得る．■

解 1 の方法を使えば，次のように一般化することができる．

m が正の整数で，a_1，a_2，…，a_n が正の実数のとき

$$\frac{a_1^{m+2}}{a_2^m}+\frac{a_2^{m+2}}{a_3^m}+\cdots+\frac{a_n^{m+2}}{a_1^m} \geqq a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

$m=3, n=3$ とおくと

a, b, c が正の実数のとき

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} \geqq a^2+b^2+c^2.$$

問題 236　m が正の整数で，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1^{m+2}}{a_2^m}+\frac{a_2^{m+2}}{a_3^m}+\cdots+\frac{a_n^{m+2}}{a_1^m} \geqq a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1.$$

解 1　問題 235 の一般化より

$$\frac{a_1^{m+2}}{a_2^m}+\frac{a_2^{m+2}}{a_3^m}+\cdots+\frac{a_n^{m+2}}{a_1^m} \geqq a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

が成り立つから

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqq a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$$

を示せばよい．コーシー・シュワルツの不等式より

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_1^2) \geqq (a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)^2.$$

これから，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqq a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$ が得られる．■

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{a_1^{m+2}}{a_2^m}+\frac{a_2^{m+2}}{a_3^m}+\underbrace{a_2a_3+a_2a_3+\cdots+a_2a_3}_{m}$$

$$\geqq (m+2)\sqrt[m+2]{\frac{a_1^{m+2}}{a_2^m}\cdot\frac{a_2^{m+2}}{a_3^m}\cdot(a_2a_3)^m}=(m+2)a_1a_2.$$

ゆえに

$$\frac{a_1^{m+2}}{a_2^m}+\frac{a_2^{m+2}}{a_3^m}+ma_2a_3 \geqq (m+2)a_1a_2.$$

同様にして

$$\frac{a_2^{m+2}}{a_3^m}+\frac{a_3^{m+2}}{a_4^m}+ma_3a_4 \geqq (m+2)a_2a_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{a_n^{m+2}}{a_1^m}+\frac{a_1^{m+2}}{a_2^m}+ma_1a_2 \geqq (m+2)a_na_1.$$

これらの不等式の辺々を加えることにより

$\displaystyle\frac{a_1^{m+2}}{a_2^m}+\frac{a_2^{m+2}}{a_3^m}+\cdots+\frac{a_n^{m+2}}{a_1^m} \geqq a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$ を得る. ■

問題 237 (Mircea Lascu, Gazeta Mathematică)

a, b, c が正の実数で，$abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3.$$

解 1　不等式を同次化すると

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3(abc)^{\frac{1}{6}}.$$

$a=e^{a_1}$, $b=e^{b_1}$, $c=e^{c_1}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$e^{b_1-\frac{a_1}{2}}+e^{c_1-\frac{a_1}{2}}+e^{c_1-\frac{b_1}{2}}+e^{a_1-\frac{b_1}{2}}+e^{a_1-\frac{c_1}{2}}+e^{b_1-\frac{c_1}{2}} \geqq e^{\frac{a_1}{2}}+e^{\frac{b_1}{2}}+e^{\frac{c_1}{2}}+3e^{\frac{a_1+b_1+c_1}{6}}$$

となる.

$$\alpha=\left(b_1-\frac{a_1}{2},\ c_1-\frac{a_1}{2},\ c_1-\frac{b_1}{2},\ a_1-\frac{b_1}{2},\ a_1-\frac{c_1}{2},\ b_1-\frac{c_1}{2}\right),$$

$$\beta=\left(\frac{a_1}{2},\ \frac{b_1}{2},\ \frac{c_1}{2},\ \frac{a_1+b_1+c_1}{6},\ \frac{a_1+b_1+c_1}{6},\ \frac{a_1+b_1+c_1}{6}\right)$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$\begin{aligned}&\left|b_1-\frac{a_1}{2}-\frac{x}{2}\right|+\left|c_1-\frac{a_1}{2}-\frac{x}{2}\right|+\left|c_1-\frac{b_1}{2}-\frac{x}{2}\right|+\left|a_1-\frac{b_1}{2}-\frac{x}{2}\right|\\&+\left|a_1-\frac{c_1}{2}-\frac{x}{2}\right|+\left|b_1-\frac{c_1}{2}-\frac{x}{2}\right|\\&\geqq\left|\frac{a_1}{2}-\frac{x}{2}\right|+\left|\frac{b_1}{2}-\frac{x}{2}\right|+\left|\frac{c_1}{2}-\frac{x}{2}\right|+3\left|\frac{a_1+b_1+c_1}{6}-\frac{x}{2}\right|\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．$x_1=a_1-x,\ x_2=b_1-x,\ x_3=c_1-x$ とおくと，証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}&|2x_2-x_1|+|2x_3-x_1|+|2x_3-x_2|+|2x_1-x_2|+|2x_1-x_3|+|2x_2-x_3|\\ \geqq\ &|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_1+x_2+x_3|\end{aligned}$$

となる．この不等式は次のようにして得られる．

$$|2x_2-x_1|\geqq 2|x_2|-|x_1|,\ |2x_3-x_1|\geqq 2|x_3|-|x_1|,\ |2x_3-x_2|\geqq 2|x_3|-|x_2|,$$

$$|2x_1-x_2|\geqq 2|x_1|-|x_2|,\ |2x_1-x_3|\geqq 2|x_1|-|x_3|,\ |2x_2-x_3|\geqq 2|x_2|-|x_3|$$

の辺々を加えることにより

$$\begin{aligned}&|2x_2-x_1|+|2x_3-x_1|+|2x_3-x_2|+|2x_1-x_2|+|2x_1-x_3|+|2x_2-x_1|\\ \geqq\ &2(|x_1|+|x_2|+|x_3|)\\ \geqq\ &|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_1+x_2+x_3|.\end{aligned}$$

$f(x)=e^x$ とおくと，$f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は凸関数である．Karamata の不等式より

$$\begin{aligned}&f\left(b_1-\frac{a_1}{2}\right)+f\left(c_1-\frac{a_1}{2}\right)+f\left(c_1-\frac{b_1}{2}\right)+f\left(a_1-\frac{b_1}{2}\right)+f\left(a_1-\frac{c_1}{2}\right)+f\left(b_1-\frac{c_1}{2}\right)\\ \geqq\ &f\left(\frac{a_1}{2}\right)+f\left(\frac{b_1}{2}\right)+f\left(\frac{c_1}{2}\right)+3f\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{6}\right).\end{aligned}$$

■

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}&\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\\ \overset{AM\geqq GM}{\geqq}\ &\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{2\sqrt{ca}}{\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}\\ =\ &\left(\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b}}\right)+\left(\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}\right)+\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}\right)\\ \overset{AM\geqq GM}{\geqq}\ &2\sqrt{c}+2\sqrt{a}+2\sqrt{b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\\ \overset{AM\geqq GM}{\geqq}\ &\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3\sqrt[6]{abc}\\ =\ &\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3.\end{aligned}$$

■

解 3 $\quad \dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{c+a}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}=\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{c}}+\dfrac{c}{\sqrt{a}}\right)+\left(\dfrac{a}{\sqrt{c}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}+\dfrac{c}{\sqrt{b}}\right)$

と変形できるから，次の 2 つの不等式を証明すればよい．

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{c}}+\frac{c}{\sqrt{a}} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \tag{★}$$

$$\frac{a}{\sqrt{c}}+\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{c}{\sqrt{b}} \geqq 3 \tag{★★}$$

(★) は，3 つの不等式

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\sqrt{b} \overset{AM\geqq GM}{\geqq} 2\sqrt{a},\ \frac{b}{\sqrt{c}}+\sqrt{c} \overset{AM\geqq GM}{\geqq} 2\sqrt{b},\ \frac{c}{\sqrt{a}}+\sqrt{a} \overset{AM\geqq GM}{\geqq} 2\sqrt{c}$$

の辺々を加えれば得られる．

(★★) は，相加平均・相乗平均の不等式を使うと次のように得られる．

$$\frac{a}{\sqrt{c}}+\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{c}{\sqrt{b}} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{c}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot\frac{c}{\sqrt{b}}}=3\sqrt[6]{abc}=3. \qquad ■$$

問題 238 (Junior Balkan MO 2002 Shortlist)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geqq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

解 $\quad a=e^{a_1},\ b=e^{b_1},\ c=e^{c_1}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$e^{3a_1-2b_1}+e^{3b_1-2c_1}+e^{3c_1-2a_1} \geqq e^{2a_1-b_1}+e^{2b_1-c_1}+e^{2c_1-a_1}$$

となる．

$$\alpha=(3a_1-2b_1,\ 3b_1-2c_1,\ 3c_1-2a_1),\ \beta=(2a_1-b_1,\ 2b_1-c_1,\ 2c_1-a_1)$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$\begin{aligned}&|3a_1-2b_1-x|+|3b_1-2c_1-x|+|3c_1-2a_1-x|\\ \geqq\ &|2a_1-b_1-x|+|2b_1-c_1-x|+|2c_1-a_1-x|\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．$x_1=a_1-x,\ x_2=b_1-x,\ x_3=c_1-x$ とおくと，証明すべき不等式は

$$|3x_1-2x_2|+|3x_2-2x_3|+|3x_3-2x_1| \geqq |2x_1-x_2|+|2x_2-x_3|+|2x_3-x_1|$$

となるが，これは，問題 213 で $n=2$ とおいたものであるから成り立つ．

$f(x)=e^x$ とおくと，$f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は凸関数である．Karamata の不等式より

$$f(3a_1-2b_1)+f(3b_1-2c_1)+f(3c_1-2a_1) \geqq f(2a_1-b_1)+f(2b_1-c_1)+f(2c_1-a_1)$$

が成り立つ． ■

[注]　別解や不等式の一般化については，問題 159 参照．

問題 239　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1a_2\cdots a_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq \sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}.$$

解 1　$b_i=\sqrt{a_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，b_1，$b_2, \ldots, b_n$ が正の実数で，$b_1b_2\cdots b_n=1$ を満たすとき

$$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2 \geqq \sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

を示せばよい．

$b_i=e^{c_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$，$c=\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$e^{2c_1}+e^{2c_2}+\cdots+e^{2c_n} \geqq e^{c+c_1}+e^{c+c_2}+\cdots+e^{c+c_n}$$

となる．

$$\alpha=(2c_1, 2c_2, \ldots, 2c_n),\ \beta=(c+c_1, c+c_2, \ldots, c+c_n)$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．

定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$\begin{aligned}&|2c_1-2x|+|2c_2-2x|+\cdots+|2c_n-2x|\\ &\geqq |c+c_1-2x|+|c+c_2-2x|+|c+c_n-2x|\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．

$$x_i=c_i-x\ (1 \leqq i \leqq n)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$2n\big(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\big) \geqq |S+nx_1|+|S+nx_2|+\cdots+|S+nx_n| \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．ただし，$S=x_1+x_2+\cdots+x_n$ とする．

$$
\begin{aligned}
&|S+nx_1|+|S+nx_2|+\cdots+|S+nx_n| \\
&\leqq |S|+n|x_1|+|S|+n|x_2|+\cdots+|S|+n|x_n| \\
&= n|S|+n\big(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\big) \\
&\leqq n\big(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\big)+n\big(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\big) \\
&= 2n\big(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\big)
\end{aligned}
$$

より，①は成り立つ．

$f(x)=e^x$ とおくと，$f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は凸関数である．

Karamata の不等式より

$$f(2c_1)+f(2c_2)+\cdots+f(2c_n) \geqq f(c+c_1)+f(c+c_2)+\cdots+f(c+c_n)$$

が成り立つ． ■

解 2　相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}}{n} \geqq \sqrt[n]{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\sqrt{a_n}}=1.$$

ゆえに

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n} \geqq n\,.$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$(1+1+\cdots+1)(a_1+a_2+\cdots+a_n) \geqq \left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\right)^2.$$

ゆえに

$$n(a_1+a_2+\cdots+a_n) \geqq \left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\right)^2.$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\right)^2 &\leqq n(a_1+a_2+\cdots+a_n) \\
&\leqq \left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\right)(a_1+a_2+\cdots+a_n).
\end{aligned}
$$

よって

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq \sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}.$$ ■

解 3　$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}=\sqrt[2n]{a_1a_2\cdots a_n}(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n})$ に注意する．
重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{n+1}{2n}a_1+\frac{1}{2n}a_2+\cdots+\frac{1}{2n}a_n \geqq (a_1)^{\frac{n+1}{2n}}(a_2)^{\frac{1}{2n}}\cdots(a_n)^{\frac{1}{2n}}$$
$$=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{2n}}a_1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a_1}.$$

ゆえに

$$\frac{n+1}{2n}a_1+\frac{1}{2n}a_2+\cdots+\frac{1}{2n}a_n \geqq \sqrt{a_1}.$$

同様にして

$$\frac{1}{2n}a_1+\frac{n+1}{2n}a_2+\cdots+\frac{1}{2n}a_n \geqq \sqrt{a_2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2n}a_1+\frac{1}{2n}a_2+\cdots+\frac{n+1}{2n}a_n \geqq \sqrt{a_n}.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq \sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}.$$ ■

問題 240　(Serbia 2008)

a,b,c は正の実数で $a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2+3abc \geqq \frac{4}{9}.$$

解 1　不等式を同次化 (Homonization) する．

$$a^2+b^2+c^2+3abc \geqq \frac{4}{9}$$
$$\iff 9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+27abc \geqq 4(a+b+c)^3$$
$$\iff 5(a^3+b^3+c^3)+3abc \geqq 3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)].$$

$a=e^{x_1},\ b=e^{x_2},\ c=e^{x_3}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$5(e^{3x_1}+e^{3x_2}+e^{3x_3})+3e^{x_1+x_2+x_3}$$
$$\geqq 3\left(e^{2x_1+x_2}+e^{2x_1+x_3}+e^{2x_2+x_3}+e^{2x_2+x_1}+e^{2x_3+x_1}+e^{2x_3+x_2}\right)$$

となる．

$$\alpha=(\underbrace{3x_1,\ldots,3x_1}_{5},\underbrace{3x_2,\ldots,3x_2}_{5},\underbrace{3x_3,\ldots,3x_3}_{5},\underbrace{x_1+x_2+x_3,\ldots,x_1+x_2+x_3}_{3}),$$

$$\begin{aligned}\beta=&(\underbrace{2x_1+x_2,\ldots,2x_1+x_2}_{3},\underbrace{x_1+2x_2,\ldots,x_1+2x_2}_{3},\underbrace{2x_2+x_3,\ldots,2x_2+x_3}_{3},\\&\underbrace{x_2+2x_3,\ldots,x_2+2x_3}_{3},\underbrace{2x_3+x_1,\ldots,2x_3+x_1}_{3},\underbrace{x_3+2x_1,\ldots,x_3+2x_1}_{3})\end{aligned}$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$\begin{aligned}&5(|3x_1-3x|+|3x_2-3x|+|3x_3-3x|)+3|x_1+x_2+x_3-3x|\\&\geqq 3(|2x_1+x_2-3x|+|x_1+2x_2-3x|+|2x_2+x_3-3x|+|x_2+2x_3-3x|\\&\quad+|2x_3+x_1-3x|+|x_3+2x_1-3x|)\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．

$y_i=x_i-x$ $(1\leqq i\leqq n)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}&5(|y_1|+|y_2|+|y_3|)+|y_1+y_2+y_3|\\&\geqq |2y_1+y_2|+|y_1+2y_2|+|2y_2+y_3|+|y_2+2y_3|+|2y_3+y_1|+|y_3+2y_1|\end{aligned}$$

となる．この不等式は次のようにして得られる．
問題 211 の不等式

$$|y_1|+|y_2|+|y_3|+|y_1+y_2+y_3|\geqq|y_1+y_2|+|y_2+y_3|+|y_3+y_1|$$

を用いると

$$\begin{aligned}&|2y_1+y_2|+|y_1+2y_2|+|2y_2+y_3|+|y_2+2y_3|+|2y_3+y_1|+|y_3+2y_1|\\&\leqq |y_1+y_2|+|y_1|+|y_1+y_2|+|y_2|+|y_2+y_3|+|y_2|+|y_2+y_3|+|y_3|\\&\quad+|y_3+y_1|+|y_3|+|y_3+y_1|+|y_1|\\&=2(|y_1|+|y_2|+|y_3|)+|y_1+y_2|+|y_2+y_3|+|y_3+y_1|\\&\quad+|y_1+y_2|+|y_2+y_3|+|y_3+y_1|\\&\leqq 2(|y_1|+|y_2|+|y_3|)+|y_1|+|y_2|+|y_2|+|y_3|+|y_3|+|y_1|\\&\quad+(|y_1|+|y_2|+|y_3|+|y_1+y_2+y_3|)\\&=5(|y_1|+|y_2|+|y_3|)+|y_1+y_2+y_3|.\end{aligned}$$

$f(x) = e^x$ とおくと，$f''(x) = e^x > 0$ より $f(x)$ は凸関数である．

Karamata の不等式より

$$\begin{aligned}&5[f(3x_1) + f(3x_2) + f(3x_3)] + 3f(x_1 + x_2 + x_3)\\ \geqq\ &3[f(2x_1 + x_2) + f(x_1 + 2x_2) + f(2x_2 + x_3) + f(x_2 + 2x_3)\\ &\quad + f(2x_3 + x_1) + f(x_3 + 2x_1)]\end{aligned}$$

が成り立つ． ■

解 2　不等式を同次化 (Homonization) する．

$$\begin{aligned}&a^2 + b^2 + c^2 + 3abc \geqq \frac{4}{9}\\ \Longleftrightarrow\ &9(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) + 27abc \geqq 4(a + b + c)^3\\ \Longleftrightarrow\ &5(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc \geqq 3[ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)].\end{aligned}$$

Schur の不等式より

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

が成り立つから

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

を証明すればよい．

重みつきの相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}b^3 \geqq (a^3)^{\frac{2}{3}}(b^3)^{\frac{1}{3}} = a^2b.$$

ゆえに

$$\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}b^3 \geqq a^2b.$$

同様にして

$$\frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^3 \geqq ab^2, \quad \frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{3}c^3 \geqq b^2c, \quad \frac{1}{3}b^3 + \frac{2}{3}c^3 \geqq bc^2,$$

$$\frac{2}{3}c^3 + \frac{1}{3}a^3 \geqq c^2a, \quad \frac{1}{3}c^3 + \frac{2}{3}a^3 \geqq ca^2.$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

を得る． ■

他の解については，問題 95 参照．

問題 241 (J.C. Burkill)

a,b,c,x,y,z は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$x^ay^bz^c-(b+c)y^{\frac{b}{b+c}}z^{\frac{c}{b+c}}-(c+a)z^{\frac{c}{c+a}}x^{\frac{a}{c+a}}-(a+b)x^{\frac{a}{a+b}}y^{\frac{b}{a+b}}$$
$$+ax+by+cz\geqq 0.$$

解 (*yanagita*) a,b,c,x,y,z が正の実数のとき，次の不等式を証明すればよい．

$$ax+by+cz+(a+b+c)x^{\frac{a}{a+b+c}}y^{\frac{b}{a+b+c}}z^{\frac{c}{a+b+c}}$$
$$\geqq(b+c)y^{\frac{b}{b+c}}z^{\frac{c}{b+c}}+(c+a)z^{\frac{c}{c+a}}x^{\frac{a}{c+a}}+(a+b)x^{\frac{a}{a+b}}y^{\frac{b}{a+b}}. \qquad \cdots\cdots(*)$$

(i) a,b,c が正の有理数のとき

$$a=\frac{a_1}{M},\ b=\frac{b_1}{M},\ c=\frac{c_1}{M}\quad (a_1,b_1,c_1,M \text{ は自然数})$$

とおくと，$(*)$ は

$$a_1x+b_1y+c_1z+(a_1+b_1+c_1)x^{\frac{a_1}{a_1+b_1+c_1}}y^{\frac{b_1}{a_1+b_1+c_1}}z^{\frac{c_1}{a_1+b_1+c_1}}$$
$$\geqq(b_1+c_1)y^{\frac{b_1}{b_1+c_1}}z^{\frac{c_1}{b_1+c_1}}+(c_1+a_1)z^{\frac{c_1}{c_1+a_1}}x^{\frac{a_1}{c_1+a_1}}+(a_1+b_1)x^{\frac{a_1}{a_1+b_1}}y^{\frac{b_1}{a_1+b_1}}$$
$$\cdots\cdots(**)$$

となる．$x=e^{x_1},\ y=e^{y_1},\ z=e^{z_1}$ とおくと，$(**)$ は

$$a_1e^{x_1}+b_1e^{y_1}+c_1e^{z_1}+(a_1+b_1+c_1)e^{\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1}{a_1+b_1+c_1}}$$
$$\geqq(b_1+c_1)e^{\frac{b_1y_1+c_1z_1}{b_1+c_1}}+(c_1+a_1)e^{\frac{c_1z_1+a_1x_1}{c_1+a_1}}+(a_1+b_1)e^{\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_1+b_1}} \qquad \cdots\cdots(***)$$

となる．

$$\alpha=\left(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{a_1},\underbrace{y_1,\ldots,y_1}_{b_1},\underbrace{z_1,\ldots,z_1}_{c_1},\underbrace{\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1}{a_1+b_1+c_1},\ldots,\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1}{a_1+b_1+c_1}}_{a_1+b_1+c_1}\right),$$

$$\beta=\left(\underbrace{\frac{b_1y_1+c_1z_1}{b_1+c_1},\ldots,\frac{b_1y_1+c_1z_1}{b_1+c_1}}_{b_1+c_1},\underbrace{\frac{c_1z_1+a_1x_1}{c_1+a_1},\ldots,\frac{c_1z_1+a_1x_1}{c_1+a_1}}_{c_1+a_1},\right.$$
$$\left.\underbrace{\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_1+b_1},\ldots,\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_1+b_1}}_{a_1+b_1}\right)$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$a_1|x_1-x|+b_1|y_1-x|+c_1|z_1-x|+(a_1+b_1+c_1)\left|\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1}{a_1+b_1+c_1}-x\right|$$
$$\geqq (b_1+c_1)\left|\frac{b_1y_1+c_1z_1}{b_1+c_1}-x\right|+(c_1+a_1)\left|\frac{c_1z_1+a_1x_1}{c_1+a_1}-x\right|$$
$$+(a_1+b_1)\left|\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_1+b_1}-x\right|$$

すなわち

$$|a_1(x_1-x)|+|b_1(y_1-x)|+|c_1(z_1-x)|+|a_1(x_1-x)+b_1(y_1-x)+c_1(z_1-x)|$$
$$\geqq |b_1(y_1-x)+c_1(z_1-x)|+|c_1(z_1-x)+a_1(x_1-x)|+|a_1(x_1-x)+b_1(y_1-x)|$$

を示せばよい．$a_1(x_1-x)=X,\ b_1(y_1-x)=Y,\ c_1(z_1-x)=Z$ とおくと，証明すべき不等式は

$$|X|+|Y|+|Z|+|X+Y+Z| \geqq |X+Y|+|Y+Z|+|Z+X|$$

となるが，これは，問題 211 より成り立つ．

$f(x)=e^x$ は凸関数であるから，Karamata の不等式より $(***)$ は成り立つ．

(ii) a, b, c が正の実数のとき

a, b, c にそれぞれ収束する正の有理数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が存在する．(i) から

$$a_nx+b_ny+c_nz+(a_n+b_n+c_n)x^{\frac{a_n}{a_n+b_n+c_n}}y^{\frac{b_n}{a_n+b_n+c_n}}z^{\frac{c_n}{a_n+b_n+c_n}}$$
$$\geqq (b_n+c_n)y^{\frac{b_n}{b_n+c_n}}z^{\frac{c_n}{b_n+c_n}}+(c_n+a_n)z^{\frac{c_n}{c_n+a_n}}x^{\frac{a_n}{c_n+a_n}}+(a_n+b_n)x^{\frac{a_n}{a_n+b_n}}y^{\frac{b_n}{a_n+b_n}}$$

が成り立つから，$n\to\infty$ とすると，$(*)$ を得る．■

16.7　Popoviciu の不等式の拡張 1

V.Cîrtoaje [7] が示した，Popoviciu の不等式の 2 つの拡張を紹介したい．

定理 14　$n \geqq 3$ は正の整数，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．$f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)+n(n-2)f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\\ \geqq\ &(n-1)\bigl[f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_n)\bigr].\end{aligned}$$

ただし，$b_i = \dfrac{1}{n-1}\sum_{j \neq i} a_j = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j - a_i\right)$　$(1 \leqq j \leqq n)$ とする．

［証明］　$a = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,　$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n\ \underbrace{a, a, \ldots, a}_{n(n-2)})$,

$$\beta = (\underbrace{b_1, b_1, \ldots, b_1}_{n-1}, \underbrace{b_2, b_2, \ldots, b_2}_{n-1}, \ldots, \underbrace{b_n, b_n, \ldots, b_n}_{n-1})$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$\begin{aligned}&|a_1-x|+|a_2-x|+\cdots+|a_n-x|+n(n-2)|a-x|\\ \geqq\ &(n-1)\left(|b_1-x|+|b_2-x|+\cdots+|b_n-x|\right)\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}&|a_1-x|+|a_2-x|+\cdots+|a_n-x|+(n-2)|a_1+a_2+\cdots+a_n-nx|\\ \geqq\ &\left(\left|\sum_{j\neq 1} a_j-(n-1)x\right|+\left|\sum_{j\neq 2} a_j-(n-1)x\right|+\cdots+\left|\sum_{j\neq n} a_j-(n-1)x\right|\right)\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．

$a_1-x=x_1$，$a_2-x=x_2$，$\ldots$，$a_n-x=x_n$，$S=x_1+x_2+\cdots+x_n$ とおくと，証明すべき不等式は

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|+(n-2)|S| \geqq |S-x_1|+|S-x_2|+\cdots+|S-x_n|$$

となるが，これは，問題 216 より成り立つ．

$f(x)$ は凸関数であるから，Karamat の不等式より

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)+n(n-2)f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)$$
$$\geqq (n-1)\bigl[f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_n)\bigr]. \qquad \blacksquare$$

$f(x)$ が狭義凸関数のとき，定理 14 の不等式の等号成立条件は次のようになる．

$f(x)$ が狭義凸関数のとき，定理 14 の不等式で等号が成立するのは

$$a_1=a_2=\cdots=a_n$$

のときに限る．

[証明]　$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき，定理 14 の不等式で等号が成立するから必要性を示す．

$f(x)$ は狭義凸関数なので，定理 14 の不等式で等号が成立するのは $\alpha^*=\beta^*$ のときに限る．

一般性を失うことなく $a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_n$ と仮定できる．

このとき，$b_i=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j-a_i\right)=\dfrac{1}{n-1}(na-a_i)$ であるから

$$b_1\leqq b_2\leqq\cdots\leqq b_n$$

となる．よって

$$\alpha^*=(a_1,a_2,\ldots,a_n),\quad a_1\geqq a\geqq a_n,$$

$$\beta^*=(\underbrace{b_n,\ldots,b_n}_{n-1},\underbrace{b_{n-1},\ldots,b_{n-1}}_{n-1},\ldots,\underbrace{b_1,\ldots,b_1}_{n-1}).$$

$\alpha^*=\beta^*$ から

$$a_1=b_n\left[=\frac{1}{n-1}(na-a_n)\right],\quad a_n=b_1\left[=\frac{1}{n-1}(na-a_1)\right].$$

これから，$a_1=a_n$ を得るから，$a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_n$ を使うと

$$a_1=a_2=\cdots=a_n. \qquad \blacksquare$$

2 つめの拡張は次のものである．

定理 15　$n \geqq 3$ は正の整数，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．$f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$(n-2)\left[f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\right]+nf\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)$$
$$\geqq 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} f\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right).$$

［証明］　$a = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,

$$\alpha = (\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{n-2}, \underbrace{a_2,\ldots,a_2}_{n-2}, \ldots, \underbrace{a_n,\ldots,a_n}_{n-2}, \underbrace{a,\ldots,a}_{n}),$$

$$\beta = \left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_3}{2}, \frac{a_1+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}\right)$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$(n-2)\big(|a_1-x|+|a_2-x|+\cdots+|a_n-x|\big)+n|a-x|$$
$$\geqq 2\left(\left|\frac{a_1+a_2}{2}-x\right|+\left|\frac{a_1+a_3}{2}-x\right|+\cdots+\left|\frac{a_{n-1}+a_n}{2}-x\right|\right)$$

すなわち，

$$(n-2)\big(|a_1-x|+|a_2-x|+\cdots+|a_n-x|\big)+|a_1+a_2+\cdots+a_n-nx|$$
$$\geqq |a_1+a_2-2x|+|a_1+a_3-2x|+\cdots+|a_{n-1}+a_n-2x|$$
$$= \sum_{1\leqq i<j\leqq n} |a_i+a_j-2x|$$

が成り立つことを示せばよい．

$a_1-x=x_1, a_2-x=x_2, \ldots, a_n-x=x_n$ とおくと，証明すべき不等式は

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n}|x_i|+|x_1+x_2+\cdots+x_n| \geqq \sum_{1\leqq i<j\leqq n}|x_i+x_j|$$

となるが，これは，問題 219 より成り立つ．

$f(x)$ は凸関数であるから，Karamat の不等式より

$$(n-2)\left[f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\right]+nf\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)$$
$$\geqq 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} f\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right). \qquad ■$$

$f(x)$ が狭義凸関数のとき，定理 15 の不等式の等号成立条件は次のようになる．

> $f(x)$ が狭義凸関数のとき，定理 15 の不等式で等号が成立するのは
>
> $$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \quad \text{のときに限る．}$$

[証明]　$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき，定理 15 の不等式で等号が成立するから必要性を示す．

$f(x)$ は狭義凸関数なので，定理 15 の不等式で等号が成立するのは $\alpha^* = \beta^*$ のときに限る．

一般性を失うことなく $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ と仮定できる．

表記をわかりやすくするために 2 つの群数列を導入する．

(G1)

$$\underbrace{\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}}_{2} \left| \underbrace{\frac{a_1+a_3}{2}, \frac{a_1+a_3}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}}_{4} \right|$$

$$\underbrace{\frac{a_1+a_4}{2}, \frac{a_1+a_4}{2}, \frac{a_2+a_4}{2}, \frac{a_2+a_4}{2}, \frac{a_3+a_4}{2}, \frac{a_3+a_4}{2}}_{6} \Bigg|$$

$$\cdots\cdots$$

$$\left| \underbrace{\frac{a_1+a_{k+1}}{2}, \frac{a_1+a_{k+1}}{2}, \frac{a_2+a_{k+1}}{2}, \frac{a_2+a_{k+1}}{2}, \ldots, \frac{a_k+a_{k+1}}{2}, \frac{a_k+a_{k+1}}{2}}_{2k} \right|$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Bigg| \underbrace{\frac{a_1+a_n}{2}, \frac{a_1+a_n}{2}, \frac{a_2+a_n}{2}, \frac{a_2+a_n}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}}_{2(n-1)}.$$

(G2)

$$\underbrace{\frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}}_{2} \left| \underbrace{\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}, \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}, \frac{a_{n-2}+a_n}{2}, \frac{a_{n-2}+a_n}{n}}_{4} \right|$$

$$\underbrace{\frac{a_{n-3}+a_{n-2}}{2}, \frac{a_{n-3}+a_{n-2}}{2}, \frac{a_{n-3}+a_{n-1}}{2}, \frac{a_{n-3}+a_{n-1}}{2}, \frac{a_{n-3}+a_n}{2}, \frac{a_{n-3}+a_n}{2}}_{6} \Bigg|$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Bigg| \frac{a_{n-k}+a_{n-k+1}}{2}, \frac{a_{n-k}+a_{n-k+1}}{2}, \frac{a_{n-k}+a_{n-k+2}}{2}, \frac{a_{n-k}+a_{n-k+2}}{2},$$

$$\ldots, \frac{a_{n-k}+a_n}{2}, \frac{a_{n-k}+a_n}{2} \Bigg| \qquad (\text{第 } k \text{ 群は } 2k \text{ 項})$$

$\cdots\cdots$

$$\Bigg|\underbrace{\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_3}{2},\frac{a_1+a_3}{2},\dots,\frac{a_1+a_n}{2},\frac{a_1+a_n}{2}}_{2(n-1)}.$$

$\boxed{1}$ $\alpha^*=(\underbrace{a_1,\dots a_1}_{n-2(\geqq 1)},\dots\dots,\underbrace{a_n,\dots,a_n}_{n-2(\geqq 1)}),\quad a_1\geqq a\geqq a_n,$

$$\beta^*=\left(\underbrace{\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2}}_{\text{(G1) の第 1 群}},\dots\dots,\underbrace{\frac{a_{n-1}+a_n}{2},\frac{a_{n-1}+a_n}{2}}_{\text{(G2) の第 1 群}}\right).$$

$\alpha^*=\beta^*$ まので

$$a_1=\frac{a_1+a_2}{2},\quad a_n=\frac{a_{n-1}+a_n}{2}\quad \text{から}\quad a_1=a_2,\quad a_{n-1}=a_n.$$

したがって，$n=3$ のときは，$a_1=a_2=a_3$.

$\boxed{2}$ $n\geqq 4$ のとき

$$\alpha^*=(\underbrace{a_1,\dots,a_1}_{2(n-2)(\geqq 4)},\dots\dots,\underbrace{a_n,\dots,a_n}_{2(n-2)(\geqq 4)}),\quad a_2\geqq a\geqq a_{n-1}$$

$$\beta^*=\left(a_1,a_1,\underbrace{\frac{a_1+a_3}{2},\frac{a_1+a_3}{2},\frac{a_2+a_3}{2},\frac{a_2+a_3}{2}}_{\text{(G1) の第 2 群}},\dots\dots,\right.$$

$$\left.\underbrace{\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2},\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2},\frac{a_{n-2}+a_n}{2},\frac{a_{n-2}+a_n}{n}}_{\text{(G2) の第 2 群}},a_n,a_n\right).$$

$\alpha^*=\beta^*$ なので

$$a_1=\frac{a_1+a_3}{2},\quad a_n=\frac{a_{n-2}+a_n}{2}\quad \text{から}\quad a_1=a_3,\quad a_{n-2}=a_n.$$

よって，$a_1=a_2=a_3,\quad a_{n-2}=a_{n-1}=a_n$.
したがって，$n=4,5$ のときは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$.
　この操作を続ける．

$\boxed{k}$ $n\geqq 2k$ のとき

$$\alpha^*=(\underbrace{a_1,\dots,a_1}_{k(n-2)(\geqq 2(k-1)k)},\dots\dots,\underbrace{a_n,\dots,a_n}_{k(n-2)(\geqq 2(k-1)k)}),\quad a_k\geqq a\geqq a_{n-k+1}$$

$$\beta^* = \left(\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{(k-1)k}, \underbrace{\frac{a_1 + a_{k+1}}{2}, \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}, \ldots, \frac{a_k + a_{k+1}}{2}, \frac{a_k + a_{k+1}}{2}}_{\text{(G1) の第 } k \text{ 群}}, \right.$$

$$\cdots\cdots$$

$$\left. , \underbrace{\frac{a_{n-k} + a_{n-k+1}}{2}, \frac{a_{n-k} + a_{n-k+1}}{2}, \ldots, \frac{a_{n-k} + a_n}{2}, \frac{a_{n-k} + a_n}{2}}_{\text{(G2) の第 } k \text{ 群}}, \underbrace{a_n, \ldots, a_n}_{(k-1)k} \right).$$

$\alpha^* = \beta^*$ なので

$$a_1 = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}, \quad a_n = \frac{a_{n-k} + a_n}{2}. \quad \text{から} \quad a_1 = a_{k+1}, \quad a_{n-k} = a_n.$$

よって，$a_1 = a_{k+1}, \quad a_{n-k} = a_n$ から

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}, \quad a_{n-k} = a_{n-k+1} = \cdots = a_n.$$

したがって，$n = 2k, 2k+1$ のときは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

$\left[\dfrac{n}{2}\right] = m$ とおくと，$n = 2m$ または $n = 2m+1$ なので，上の m 回の操作で $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ となる． ■

$f(x) = e^x$ は狭義凸関数なので，定理 15 と不等式の等号成立条件から次のことがいえる．

> $n \geqq 3$ は正の整数で，$b_1, b_2, \ldots, b_n$ が実数のとき，次の不等式が成り立つ．
>
> $$(n-2)\left(e^{b_1} + e^{b_2} + \cdots + e^{b_n}\right) + ne^{\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}} \geqq 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} e^{\frac{b_i+b_j}{2}} \tag{16.6}$$
>
> 等号が成立するのは，$b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ のときに限る．

$a_i = e^{b_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とおくと，次の不等式を得る．

> $n \geqq 3$ は正の整数で，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ が正の実数のとき，次の不等式が成り立つ．
>
> $$(n-2)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) + n(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \geqq 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (a_i a_j)^{\frac{1}{2}}. \tag{16.7}$$
>
> 等号が成立するのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限る．

大関信雄・大関清太：不等式への招待 [6] pp.90-92 で次の問題を扱っている．ここでは，(16.7) の利用を考える．

問題 242　(H.Kober)

$a_i \geqq 0$ $(i=1,2,\ldots,n), n>2$ とし，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ のすべてが等しくはないとする．このとき，

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i + n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} - 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_ia_j)^{\frac{1}{2}} \geqq 0\,.$$

0 に等しくなるのは，ある番号 i に対して

$$a_i=0,\quad a_1=\cdots=a_{i-1}=a_{i+1}=\cdots=a_n>0$$

のときのみに限る．

解　(i) $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ のときには，(16.7) から

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i + n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \geqq 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_ia_j)^{\frac{1}{2}}.$$

等号は，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限るから，仮定より等号は成立しない．

(ii) a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ の中に 0 がある場合

$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ と仮定しても一般性を失わないから，

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_{k-1}>0,\ a_k=a_{k+1}=\cdots=a_n=0$$

となる k $(2\leqq k\leqq n)$ が存在する．

$$\begin{aligned}
2\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_ia_j)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{1\leqq i<j\leqq k-1} 2\sqrt{a_ia_j} \overset{GM\leqq AM}{\leqq} \sum_{1\leqq i<j\leqq k-1}(a_i+a_j)\\
&=(k-2)(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})=(k-2)(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\
&\leqq (n-2)(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\
&=(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i + n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

よって，このときも不等式は成り立つ．また，等号成立は

$k=n$ かつ $a_i=a_j$ $(1\leqq i<j\leqq k-1)$ すなわち $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}>0,\ a_n=0$ のときである．

(i)，(ii) から題意は証明された．■

16.8　Popoviciu の不等式の拡張 2

定理 16　$n \geqq 3$ は正の整数，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．$f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) + n\binom{n-2}{m-2} f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\\ &\geqq m \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqq n} f\left(\frac{a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_m}}{m}\right).\end{aligned}$$

ただし，$2 \leqq m \leqq n-1$ とする．

［証明］ $(yanagita)$　$a = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ とおく．

$$\alpha = \Bigl(\underbrace{a_1,\ a_1,\ \ldots,\ a_1}_{\binom{n-2}{m-1}},\ \underbrace{a_2,\ a_2,\ \ldots,\ a_2}_{\binom{n-2}{m-1}},\ \ldots,\ \underbrace{a_n,\ a_n,\ \ldots,\ a_n}_{\binom{n-2}{m-1}},\ \underbrace{a,\ a,\ \ldots,\ a}_{n\binom{n-2}{m-1}}\Bigr),$$

$$\begin{aligned}\beta = \Biggl(&\underbrace{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m},\ \ldots,\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}}_{m},\ \ldots\ldots,\\ &\underbrace{\frac{a_{n-m+1}+a_{n-m+2}+\cdots+a_n}{m},\ \ldots,\ \frac{a_{n-m+1}+a_{n-m+2}+\cdots+a_n}{m}}_{m}\Biggr)\end{aligned}$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$\begin{aligned}&\binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n}|a_i - x| + n\binom{n-2}{m-2}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - x\right|\\ &\geqq \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqq n} m\left|\frac{a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_m}}{m} - x\right|\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．$a_i - x = x_i$ とおくと

$$\binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n}|x_i| + \binom{n-2}{m-2}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \geqq \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqq n} |x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_m}|.$$

この不等式は，問題 220 より成り立つ．■

定理 16 の重みつきの不等式を証明するために，次の定理を証明しておく．

定理 17　$I \subset \mathbb{R}$ は区間，$f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数とする．$x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して，2 個の実数 u, v と n 個の負でない実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が存在して，すべての $t \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ について

$$f(t) = ut + v + \sum_{i=1}^{n} a_i |t - x_i|$$

が成り立つ．

［証明］　証明の前に次のことを確認しておく．

(1*) $l < k$ のとき $\sum_{i=k}^{l} g(i) = 0$. (定義)

(2*) $\sum_{k=1}^{j-1} \sum_{i=2}^{k} g(k,i) = \sum_{i=2}^{j-1} \sum_{k=i}^{j-1} g(k,i)$.

この等式は次のように示せる．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{j-1} \sum_{i=2}^{k} g(k,i) &= \sum_{k=2}^{j-1} \sum_{i=2}^{k} g(k,i) \\
&= g(2,2) \\
&\quad + g(3,2) + g(3,3) \\
&\quad + g(4,2) + g(4,3) + g(4,4) \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad + g(j-1,2) + g(j-1,3) + \cdots + g(j-1,j-1) \\
&\text{(縦方向に加える)} \\
&= g(2,2) + g(3,2) + \cdots + g(j-1,2) \\
&\quad + g(3,3) + g(4,3) + \cdots + g(j-1,3) \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad + g(j-1,j-1) \\
&= \sum_{i=2}^{j-1} \sum_{k=i}^{j-1} g(k,i).
\end{aligned}$$

$f[y,z] = \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$ とおく．一般性を失うことなく $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ と仮定

できる．$1 \leqq j \leqq n$ のとき

$$
\begin{aligned}
f(x_j) &= f(x_1) + \sum_{k=1}^{j-1}\{f(x_{k+1}) - f(x_k)\} \\
&= f(x_1) + \sum_{k=1}^{j-1}(x_{k+1} - x_k)f[x_{k+1},\ x_k] \\
&= f(x_1) + \sum_{k=1}^{j-1}(x_{k+1} - x_k)\left(f[x_2, x_1] + \sum_{i=2}^{k}(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}])\right) \\
&= f(x_1) + \sum_{k=1}^{j-1}(x_{k+1} - x_k)f[x_2, x_1] + \sum_{k=1}^{j-1}(x_{k+1} - x_k)\sum_{i=2}^{k}(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}]) \\
&= f(x_1) + f[x_2, x_1]\sum_{k=1}^{j-1}(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=1}^{j-1}\sum_{i=2}^{k}(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}])(x_{k+1} - x_k) \\
&= f(x_1) + f[x_2, x_1]\sum_{k=1}^{j-1}(x_{k+1} - x_k) + \sum_{i=2}^{j-1}\sum_{k=i}^{j-1}(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}])(x_{k+1} - x_k) \\
&= f(x_1) + f[x_2, x_1]\sum_{k=1}^{j-1}(x_{k+1} - x_k) + \sum_{i=2}^{j-1}(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}])\sum_{k=i}^{j-1}(x_{k+1} - x_k) \\
&= f(x_1) + f[x_2, x_1](x_j - x_1) + \sum_{i=2}^{j-1}(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}])(x_j - x_i).
\end{aligned}
$$

さて，

$$
\alpha_1 = \alpha_n = 0,
$$

$$
\alpha_i = f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}] \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1)
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
f(x_j) &= f(x_1) + f[x_2, x_1](x_j - x_1) + \sum_{i=2}^{j-1}\alpha_i(x_j - x_i) \\
&= f(x_1) + f[x_2, x_1](x_j - x_1) + \underbrace{\alpha_1}_{=0} \cdot \max(0, x_j - x_1) + \sum_{i=2}^{j-1}\alpha_i \underbrace{\max(0, x_j - x_i)}_{=x_j - x_i} \\
&\quad + \sum_{i=j}^{n}\alpha_i \cdot \underbrace{\max(0, x_j - x_i)}_{=0}
\end{aligned}
$$

$$= f(x_1) + f[x_2, x_1](x_j - x_1) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \max(0, x_j - x_i)$$

$$= f(x_1) + f[x_2, x_1](x_j - x_1) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \frac{1}{2} \left(x_j - x_i + |x_j - x_i|\right)$$

$$= f(x_1) + f[x_2, x_1](x_j - x_1) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \frac{1}{2} \left(x_j - x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \frac{1}{2} |x_j - x_i|$$

$$= \left(f[x_2, x_1] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) x_j + \left(f(x_1) - f[x_2, x_1] x_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \alpha_i |x_j - x_i|.$$

よって

$$u = f[x_2, x_1] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad v = f(x_1) - f[x_2, x_1] x_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

$$a_i = \frac{1}{2} \alpha_i \quad (\, i = 1, 2, \ldots, n \,)$$

とおくと

$$f(x_j) = u x_j + v + \sum_{i=1}^{n} a_i |x_j - x_i|.$$

あとは, $a_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を示せばよい．$\alpha_1 = 0$, $\alpha_n = 0$ であるから $a_1 = a_n = 0$. したがって，$a_i \geqq 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$ を示せばよい．

$f(x)$ は凸関数なので，補題 3 より $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ は $I \backslash \{y\}$ 上で単調増加であるから

$$\begin{aligned} a_i = \frac{1}{2} \alpha_i &= \frac{1}{2} \left(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \right) \geqq 0\,. \end{aligned}$$

したがって，$a_i \geqq 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$. ■

定理 18　(Zhaobin)

$n \geqq 3$, m は正の整数, $I \subset \mathbb{R}$ を区間として, $f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数で, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ とする．$w_1, w_2, \ldots, w_n$ が $w_1 + w_2 + \cdots + w_n \neq 0$,
$w_{i_1} + w_{i_2} + \cdots + w_{i_m} \neq 0$ $(1 \leqq< i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqq n)$ を満たす負でない実数のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + \binom{n-2}{m-2}(w_1 + w_2 + \cdots + w_n) f\left(\frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}\right)$$

$$\geqq \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqq n} (w_{i_1} + w_{i_2} + \cdots + w_{i_m}) f\left(\frac{w_{i_1}x_{i_1} + w_{i_2}x_{i_2} + \cdots + w_{i_m}x_{i_m}}{w_{i_1} + w_{i_2} + \cdots + w_{i_m}}\right). \quad (16.8)$$

ただし，$2 \leqq m \leqq n-1$ とする．

［証明］ $(yanagita)$　(16.8) の不等式に現れる $f(*)$ の $*$ を並べる．

$x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \dfrac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n},\ \dfrac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_mx_m}{w_1 + w_2 + \cdots + w_m},\ \ldots,$
$\dfrac{w_{n-m+1}x_{n-m+1} + w_{n-m+2}x_{n-m+2} + \cdots + w_nx_n}{w_{n-m+1} + w_{n-m+2} + \cdots + w_n}$ を $x_1, x_2, \ldots, x_N$ $(N = n+1+\binom{n}{m})$ とする． 定理 17 より，N 個の $x_1\ x_2, \ldots, x_N$ に対して，2 個の実数 u, v と N 個の負でない実数 $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_N$ が存在して，すべての $t \in \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N\}$ について

$$f(t) = ut + v + \sum_{i=1}^{N} a_i|t - x_i|$$

が成り立つ．

したがって，(16.8) が $f_1(x) = ux + v$ と $f_2(x) = |x - c|$ に対して成り立つことを示せばよい．

(i) $f_1(x) = ux + v$ の場合

$$\begin{aligned}
&\binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n} w_i f_1(x_i) \\
&\quad + \binom{n-2}{m-2}(w_1 + w_2 + \cdots + w_n) f_1\left(\frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}\right) \\
&= \binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n} w_i(ux_i + v) \\
&\quad + \binom{n-2}{m-2}(w_1 + w_2 + \cdots + w_n)\left[u\left(\frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}\right) + v\right] \\
&= u\left[\binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m-2}\right]\sum_{i=1}^{n} w_ix_i + v\left[\binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m-2}\right]\sum_{i=1}^{n} w_i
\end{aligned}$$

$$= u\binom{n-1}{m-1}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + v\binom{n-1}{m-1}\sum_{i=1}^{n} w_i\,.$$

$$\sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n}(w_{i_1}+w_{i_2}+\cdots+w_{i_m})f_1\left(\frac{w_{i_1}x_{i_1}+w_{i_2}x_{i_2}+\cdots+w_{i_m}x_{i_m}}{w_{i_1}+w_{i_2}+\cdots+w_{i_m}}\right)$$
$$= \sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n}(w_{i_1}+w_{i_2}+\cdots+w_{i_m})$$
$$\times\left[u\Big(\frac{w_{i_1}x_{i_1}+w_{i_2}x_{i_2}+\cdots+w_{i_m}x_{i_m}}{w_{i_1}+w_{i_2}+\cdots+w_{i_m}}\Big)+v\right]$$
$$= \sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n}\big[u(w_{i_1}x_{i_1}+w_{i_2}x_{i_2}+\cdots+w_{i_m}x_{i_m})+v(w_{i_1}+w_{i_2}+\cdots+w_{i_m})\big].$$

ここで，i_1, i_2, ..., i_m は 1, 2, ..., n から m 個選べば決まる．x_1 は上の等式の右辺に何回現れるか考えると，x_1 を除く $n-1$ 個の x_2, x_3, ..., x_n から x_1 を除く $m-1$ 個の組合せの総数となる．したがって，x_1 は $\binom{n-1}{m-1}$ 回現れるから，uw_1x_1 の係数は $\binom{n-1}{m-1}$ となる．他の係数も同じであるから

$$\sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n}\big[u(w_{i_1}x_{i_1}+w_{i_2}x_{i_2}+\cdots+w_{i_m}x_{i_m})+v(w_{i_1}+w_{i_2}+\cdots+w_{i_m})\big]$$
$$= u\binom{n-1}{m-1}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + v\binom{n-1}{m-1}\sum_{i=1}^{n} w_i\,.$$

よって，(16.8) は等式が成り立つ．

(ii) $f_2(x) = |x-c|$ の場合　$y_i = w_i(x_i - c)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと

(16.8)

$$\iff \binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n} w_i|x_i-c|$$
$$+\binom{n-2}{m-2}(w_1+w_2+\cdots+w_n)\left|\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}-c\right|$$
$$\geqq \sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n}(w_{i_1}+w_{i_2}+\cdots+w_{i_m})\left|\frac{w_{i_1}x_{i_1}+w_{i_2}x_{i_2}+\cdots+w_{i_m}x_{i_m}}{w_{i_1}+w_{i_2}+\cdots+w_{i_m}}-c\right|$$
$$\iff \binom{n-2}{m-1}\sum_{i=1}^{n}|y_i| + \binom{n-2}{m-2}\left|\sum_{i=1}^{n} y_i\right| \geqq \sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n}|y_{i_1}+y_{i_2}+\cdots+y_{i_m}|.$$

この不等式は，問題 220 より成り立つ．■

最後に，Popoviciu の不等式に似た不等式を紹介したい．

定理 19　$n \geqq 3$，r は正の整数，$I \subset \mathbb{R}$ を区間として，$f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$2\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + n(n-2)f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$
$$\geqq n\sum_{s=1}^{n} f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_s-x_{s+r}}{n}\right).$$

ただし，自然数 i に対して $x_{n+i} = x_i$ とする．

［証明］ (*yanagita*) $x = \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$,

$$\alpha = \Bigl(x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{n(n-2)}\Bigr),$$

$$\beta = \Bigl(\underbrace{x+\frac{x_1-x_{1+r}}{n}, \ldots, x+\frac{x_1-x_{1+r}}{n}}_{n}, \underbrace{x+\frac{x_2-x_{n+2}}{n}, \ \ldots, x+\frac{x_2-x_{n+2}}{n}}_{n},$$
$$\ldots, \underbrace{x+\frac{x_n-x_{n+r}}{n}, \ \ldots, x+\frac{x_n-x_{n+r}}{n}}_{n}\Bigr)$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 X に対して

$$2\sum_{i=1}^{n} |x_i - X| + n(n-2)\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} - X\right|$$
$$\geqq n\sum_{s=1}^{n}\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_s - x_{s+r}}{n} - X\right|$$

が成り立つことを示せばよい．

$y_i = x_i - X \ (1 \leqq i \leqq n)$ とおき

$$2\sum_{i=1}^{n} |y_i| + (n-2)\,|y_1+y_2+\cdots+y_n| \geqq \sum_{s=1}^{n} |y_1+y_2+\cdots+y_n+y_s-y_{s+r}| \qquad (*)$$

を示す．

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}|y_1+y_2+\cdots+y_n+y_s-y_{s+r}| &= \sum_{s=1}^{n}|y_1+y_2+\cdots+y_n-y_{s+r}+y_s| \\ &\leqq \sum_{s=1}^{n}|y_1+y_2+\cdots+y_n-y_{s+r}|+\sum_{s=1}^{n}|y_s|\end{aligned}$$

ここで，$1 \leqq i,\ j \leqq n$ のとき $i \neq j$ ならば $i+r \not\equiv j+r \pmod n$ が成り立つから，$1+r,\ 2+r,\ \ldots,\ n+r$ を n で割った余りの集合は $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}$ に等しい．

したがって，$\{y_{1+r},\ y_{2+r},\ \ldots,\ y_{n+r}\} = \{y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n\}$ が成り立つから

$S = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$. とおくと

$$\sum_{s=1}^{n}|y_1+y_2+\cdots+y_n-y_{s+r}| = \sum_{i=1}^{n}|S-y_i|\,.$$

また，問題 216 の不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|S-y_i| \leqq \sum_{i=1}^{n}|y_i|+(n-2)|S|$$

を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}|y_1+y_2+\cdots+y_n+y_s-y_{s+r}| &\leqq \sum_{s=1}^{n}|y_1+y_2+\cdots+y_n-y_{s+r}|+\sum_{s=1}^{n}|y_s| \\ &= \sum_{i=1}^{n}|S-y_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i| \\ &\leqq \sum_{i=1}^{n}|y_i|+(n-2)|S|+\sum_{i=1}^{n}|y_i| \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}|y_i|+(n-2)\,|y_1+y_2+\cdots+y_n|\,.\end{aligned}$$

したがって，$(*)$ は成り立つから，$\alpha^* \succ \beta^*$.

$f(x)$ は凸関数であるから，Karamat の不等式より

$$2\sum_{i=1}^{n}f(x_i)+n(n-2)f\left(x\right) \geqq n\sum_{s=1}^{n}f\left(x+\frac{x_s-x_{s+r}}{n}\right). \qquad \blacksquare$$

問題 243　a, b, c, d が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd \geqq 2(a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab).$$

解　(i) a, b, c, d の中に 0 に等しいものがある場合

$d = 0$ としても一般性を失わない．このとき，証明すべき不等式は

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqq 2a^2bc$$

となる．これは，相加平均・相乗平均の不等式より

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqq a^4 + 2b^2c^2 \geqq 2\sqrt{a^4 \cdot 2b^2c^2} = 2\sqrt{2}a^2bc \geqq 2a^2bc.$$

(ii) a, b, c, d がすべて正の実数の場合

$$x_1 = \log a^4,\ x_2 = \log b^4,\ x_3 = \log c^4,\ x_4 = \log d^4$$

$$(a = e^{\frac{x_1}{4}},\ b = e^{\frac{x_2}{4}},\ c = e^{\frac{x_3}{4}},\ d = e^{\frac{x_4}{4}})$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}&e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + e^{x_4} + 4e^{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}} \\ &\geqq 2\left(e^{\frac{2x_1+x_2+x_3}{4}} + e^{\frac{2x_2+x_3+x_4}{4}} + e^{\frac{2x_3+x_4+x_1}{4}} + e^{\frac{2x_4+x_1+x_2}{4}}\right)\end{aligned}$$

となる．

定理 19 で $n = 4,\ r = 3$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i) + 4f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \geqq 2\sum_{s=1}^{4} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} + \frac{x_s - x_{s+3}}{4}\right)$$

すなわち

$$\begin{aligned}&f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + 4f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \\ &\geqq 2\left[f\left(\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{4}\right) + f\left(\frac{2x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) + f\left(\frac{2x_3 + x_4 + x_1}{4}\right)\right. \\ &\qquad \left. + f\left(\frac{2x_4 + x_1 + x_2}{4}\right)\right].\end{aligned}$$

$f(x) = e^x$ は凸関数であるから，上の不等式で $f(x) = e^x$ とおけばよい．■

16.9　凸関数の不等式

ここでは，凸関数に関する不等式をいくつか述べたい．最初に C.Niculescu(1998) によって得られたものを紹介する．

定理 20　(C.Niculescu)

$f\ :\ [a\ \ b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$c, d \in [a, b]$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqq \frac{f(c)+f(d)}{2} - f\left(\frac{c+d}{2}\right) \qquad (16.9)$$

［証明］　$(16.9) \Longleftrightarrow f(a)+f(b)+2f\left(\dfrac{c+d}{2}\right) \geqq f(c)+f(d)+2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right).$

$$\alpha = \left(a, b, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}\right),\ \beta = \left(c, d, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

とおき $\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．

$a \leqq c \leqq d \leqq b$ と仮定してよく，このとき，$\alpha^* = \left(b,\ \dfrac{c+d}{2},\ \dfrac{c+d}{2},\ a\right).$

(1) $\dfrac{a+b}{2} \leqq c$ のとき，$\beta^* = \left(d, c, \dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right).$

$$b \geqq d,$$

$$b + \frac{c+d}{2} - (d+c) = \frac{b-c+b-d}{2} \geqq 0 \text{ より } b + \frac{c+d}{2} \geqq d + c,$$

$$b + \frac{c+d}{2} + \frac{c+d}{2} - \left(d + c + \frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-a}{2} \geqq 0 \text{ より}$$

$$b + \frac{c+d}{2} + \frac{c+d}{2} \geqq d + c + \frac{a+b}{2},$$

$$b + \frac{c+d}{2} + \frac{c+d}{2} + a = d + c + \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}.$$

よって，$\alpha^* \succ \beta^*$.

(2) $c \leqq \dfrac{a+b}{2} \leqq d$ のとき，$\beta^* = \left(d, \dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}, c\right).$

$$b \geqq d,$$

$$b + \frac{c+d}{2} - \left(d + \frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-d+c-a}{2} \geqq 0 \text{ より } b + \frac{c+d}{2} \geqq d + \frac{a+b}{2},$$

$$b + \frac{c+d}{2} + \frac{c+d}{2} - \left(d + \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}\right) = c - a \geqq 0 \text{ より}$$

$$b + \frac{c+d}{2} + \frac{c+d}{2} \geqq d + \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2},$$

$$b+\frac{c+d}{2}+\frac{c+d}{2}+a=d+\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}+c.$$

よって，$\alpha^* \succ \beta^*$.

(3) $d \leqq \dfrac{a+b}{2}$ のとき，$\beta^*=\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+b}{2},d,c\right)$.

$$\begin{aligned}
&b \geqq \frac{a+b}{2},\\
&b+\frac{c+d}{2}-\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\right)=\frac{c-a+d-a}{2} \geqq 0 \text{ より}\\
&b+\frac{c+d}{2} \geqq \frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2},\\
&b+\frac{c+d}{2}+\frac{c+d}{2}-\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}+d\right)=c-a \geqq 0 \text{ より}\\
&b+\frac{c+d}{2}+\frac{c+d}{2} \geqq \frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}+d,\\
&b+\frac{c+d}{2}+\frac{c+d}{2}+a=\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}+d+c.
\end{aligned}$$

よって，$\alpha^* \succ \beta^*$.

$f(x)$ は凸関数であるから，Karamat の定理より

$$f(a)+f(b)+2f\left(\frac{c+d}{2}\right) \geqq f(c)+f(d)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$ ■

問題 244　a, b が実数で，$c, d \in [a, b]$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$|a|+|b|-|a+b| \geqq |c|+|d|-|c+d|.$$

解　定理 20 において，$f(x)=|x|$ とおけばよい． ■

問題 245　a, b は正の実数で，$c, d \in [a, b]$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}} \geqq \sqrt{\frac{c}{d}}+\sqrt{\frac{d}{c}}.$$

解　与えられた不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}} \geqq \sqrt{\frac{c}{d}}+\sqrt{\frac{d}{c}}\\
\iff& \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geqq \frac{c+d}{2\sqrt{cd}}\\
\iff& \log\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\log a+\log b}{2} \geqq \log\left(\frac{c+d}{2}\right)-\frac{\log c+\log d}{2}
\end{aligned}$$

$$\iff \frac{\log a+\log b}{2}-\log\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{\log c+\log d}{2}-\log\left(\frac{c+d}{2}\right)$$

$f(x)=\log x$ $(x>0)$ は $f''(x)=-x^{-2}<0$ より $f(x)$ は凹関数である．
定理 20 において，不等号の向きが逆の不等式が成り立つから

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{f(c)+f(d)}{2}-f\left(\frac{c+d}{2}\right). \qquad \blacksquare$$

次に，L.Bougoffa [8] が示した 2 つの不等式を紹介する．

定理 21 $I\subset\mathbb{R}$ を区間として，$f:I\to\mathbb{R}$ は凸関数である．$a_1,a_2,\ldots,a_n\in I$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i)-f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)$$
$$\geqq \frac{n-1}{n}\left[f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)+f\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{a_{n-1}+a_n}{2}\right)+f\left(\frac{a_n+a_1}{2}\right)\right].$$

［証明］ ($yanagita$) $n=2$ のときは，明らかに成り立つから，$n\geqq 3$ と仮定する．

$$a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\quad \alpha=(\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{n},\ \underbrace{a_2,\ldots,a_2}_{n},\ldots,\underbrace{a_n,\ldots,a_n}_{n}),$$

$$\beta=\left(\underbrace{\frac{a_1+a_2}{2},\ldots,\frac{a_1+a_2}{2}}_{n-1},\underbrace{\frac{a_2+a_3}{2},\ldots,\frac{a_2+a_3}{2}}_{n-1},\ldots,\underbrace{\frac{a_n+a_1}{2},\ldots,\frac{a_n+a_1}{2}}_{n-1},\right.$$
$$\left.\underbrace{a,\ldots,a}_{n}\right)$$

とおき，$\alpha^*\succ\beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$n\big(|a_1-x|+|a_2-x|+\cdots+|a_n-x|\big)$$
$$\geqq (n-1)\left(\left|\frac{a_1+a_2}{2}-x\right|+\left|\frac{a_2+a_3}{2}-x\right|+\cdots+\left|\frac{a_n+a_1}{2}-x\right|\right)+n|a-x|$$

すなわち，

$$n\big(|a_1-x|+|a_2-x|+\cdots+|a_n-x|\big)$$
$$\geqq \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big|a_i+a_{i+1}-2x\big|+|a_1+a_2+\cdots+a_n-nx| \qquad (a_{n+1}=a_1\text{とする})$$

が成り立つことを示せばよい．$a_1 - x = x_1$，$a_2 - x = x_2$，$\ldots$，$a_n - x = x_n$ とおくと，証明すべき不等式は

$$n\sum_{i=1}^{n}|x_i| \geqq \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + x_{i+1}\right| + |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|$$

となるが，これは

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + x_{i+1}\right| + |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \\
&\leqq \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i| + \left|x_{i+1}\right|\right) + |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\
&= (n-1)\sum_{i=1}^{n}|x_i| + \left(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\right) = n\sum_{i=1}^{n}|x_i|
\end{aligned}$$

から成り立つ．$f(x)$ は凸関数であるから，Karamat の不等式より

$$\begin{aligned}
&n\sum_{i=1}^{n}f(a_i) \\
&\geqq (n-1)\left[f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) + f\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{a_{n-1}+a_n}{2}\right) + f\left(\frac{a_n+a_1}{2}\right)\right] \\
&\quad + nf\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right).
\end{aligned}$$

■

定理 22　$I \subset \mathbb{R}$ を区間とし，$f : I \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$n\sum_{i=1}^{n}f(a_i) - nf(a) \geqq (n-1)\left[f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n)\right].$$

ただし，$a = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$,

$$b_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j \neq i}a_j = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j - a_i\right) \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

とする．

［証明］ $(yanagita)$ $n=2$ のときは，明らかに成り立つから，$n \geqq 3$ と仮定する．

$$\alpha = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{n},\ \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{n}, \ldots, \underbrace{a_n, \ldots, a_n}_{n}),$$

$$\beta = (\underbrace{b_1, \ldots, b_1}_{n-1}, \underbrace{b_2, \ldots, b_2}_{n-1}, \ldots, \underbrace{b_n, \ldots, b_n}_{n-1},\ \underbrace{a, \ldots, a}_{n})$$

とおき，$\alpha^* \succ \beta^*$ を示す．定理 13 から，すべての実数 x に対して

$$\begin{aligned} &n\bigl(|a_1 - x| + |a_2 - x| + \cdots + |a_n - x|\bigr) \\ &\geqq (n-1)\left[|b_1 - x| + |b_2 - x| + \cdots + |b_n - x|\right] + n|a - x| \end{aligned}$$

すなわち，

$$\begin{aligned} &n\bigl(|a_1 - x| + |a_2 - x| + \cdots + |a_n - x|\bigr) \\ &\geqq \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{i \neq i} a_j - (n-1)x \right| + |a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nx| \end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．

$a_1 - x = x_1$，$a_2 - x = x_2$，…，$a_n - x = x_n$，$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ とおくと，証明すべき不等式は

$$n\sum_{i=1}^{n} |x_i| - |S| \geqq |S - x_1| + |S - x_2| + \cdots + |S - x_n|$$

となる．問題 217 の不等式より成り立つ．

$f(x)$ は凸関数であるから，Karamat の不等式より

$$n\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geqq (n-1)\left[f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n)\right] + nf(a). \qquad \blacksquare$$

16.10 Karamata の不等式の応用

$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}<1$ を満たす自然数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ の最大値 M_n を求めよ．

$$
\begin{aligned}
n=2 \text{ のとき } M_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}, \\
n=3 \text{ のとき } M_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{5}{6}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}, \\
n=4 \text{ のとき } M_4 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}=\frac{41}{42}+\frac{1}{43}=\frac{1805}{1806}, \\
n=5 \text{ のとき } M_5 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807} \\
&= \frac{1805}{1806}+\frac{1}{1807} \\
&= \frac{3263441}{3263442}
\end{aligned}
$$

となる．（[9] 参照）

Karamat の不等式を用いるとこの問題が解ける．このために，シルベスターの数列 (Sylvester's sequence) を利用する．シルベスターの数列は

$$a_1=2, \quad a_{n+1}=1+a_1a_2\cdots a_n \quad (n \geqq 1)$$

で定義される．正の整数列 $\{a_n\}$ は

2，3，7，43，1807，3263443，10650056950807，113423713055421844361000443，$\cdots$

のようになっている．

補題 10　$\{a_n\}$ がシルベスターの数列のとき，次の等式が成り立つ．

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}.$$

［証明］ 数学的帰納法で証明する．

(i) $n=1$ のとき，左辺 $=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$，右辺 $=1-\dfrac{1}{a_1}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ であるから，左辺＝右辺．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定する．$n=k+1$ の場合を考えると

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}=1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{a_{k+1} - a_1 a_2 \cdots a_k}{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}}$$
$$= 1 - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}}.$$

よって，$n = k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について等式は成り立つ． ■

K.Soundararajan は Approximating 1 from below using n egyptian fractions で次のことを示した．

「自然数列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$，$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < 1$ を満たすならば

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

そして，等号は $x_i = a_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ のときに限り成り立つ．ただし，$\{a_n\}$ はシルベスターの数列 とする．」このことから，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$，$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < 1$ を満たす自然数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n に対して，$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$ の最大値 M_n は，$x_i = a_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ のとき

$$M_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

となることがわかる．

ここでは，K.Soundararajan の結果を karamat の不等式を利用して証明する．このために，次の補題 12 を利用する．

補題 11　$A > B > 0$ のとき，不等式 $\frac{A-1}{A} > \frac{B-1}{B}$ が成り立つ．

［証明］ $f(x) = \frac{x-1}{x}$ $(x > 0)$ とおくと，$f'(x) = x^{-2} > 0$. $f(x)$ が増加関数であるから，証明すべき不等式は成り立つ．

補題 12　$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n > 0$，$y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n > 0$ を正の実数からなる 2 つの単調減少列とする．すべての $j\,(1 \leqq j \leqq n)$ に対して，$x_1 x_2 \cdots x_j \geqq y_1 y_2 \cdots y_j$ ならば

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq y_1 + y_2 + \cdots + y_n\,.$$

等号は，$x_i = y_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ のときに限り成り立つ．

［証明 1］　$s_i=\log x_i,\ t_i=\log y_i\ (1\leqq i\leqq n)$ とおくと，すべての $j\,(1\leqq j\leqq n)$ に対して，$s_1+s_2+\cdots+s_j\geqq t_1+t_2\cdots+t_j$. $f(x)=e^x$ とおくと，$f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は狭義凸関数である．定理 12 から

$$f(s_1)+f(s_2)+\cdots+f(s_n)\geqq f(t_1)+f(t_2)\cdots+f(t_n)$$

すなわち

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqq y_1+y_2+\cdots+y_n$$

が成り立つ．等号は，$\log x_i=\log y_i\ (1\leqq i\leqq n)$ すなわち，$x_i=y_i\ (1\leqq i\leqq n)$ のときに限り成り立つ．■

［証明 2］　$z_j=\dfrac{x_j}{y_j},\ t_j=(z_1-1)+(z_2-1)+\cdots+(z_j-1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{j}z_i-j\ (\,1\leqq j\leqq n\,)$ とおくと，相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{z_1+z_2+\cdots+z_j}{j}\geqq\sqrt[j]{z_1z_2\cdots z_j}=\sqrt[j]{\frac{x_1x_2\cdots x_j}{y_1y_2\cdots y_j}}\geqq 1\,.$$

よって，$t_j\geqq 0\ (\,1\leqq j\leqq n\,)$.
したがって

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+\cdots+x_n-(y_1+y_2+\cdots+y_n)\\&=(z_1-1)y_1+(z_2-1)y_2+\cdots+(z_n-1)y_n\\&=t_1y_1+(t_2-t_1)y_2+\cdots+(t_n-t_{n-1})y_n\\&=t_1(y_1-y_2)+t_2(y_2-y_3)+\cdots+t_{n-1}(y_{n-1}-y_n)+t_ny_n\geqq 0\end{aligned}$$

から

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqq y_1+y_2+\cdots+y_n\,.$$

等号は

$$t_1(y_1-y_2)=t_2(y_2-y_3)=\cdots=t_{n-1}(y_{n-1}-y_n)=t_ny_n=0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

のときに限る．

$t_n=0$ から $z_1=z_2=\cdots=z_n=1$ となる．このとき，$t_1=t_2=\cdots=t_{n-1}=0$ となるから，$(*)$ は成り立つ．また，$z_1=z_2=\cdots=z_n=1$ から，$x_j=y_j\ (1\leqq j\leqq n)$ となる．
したがって，等号は，$x_i=y_i\ (1\leqq i\leqq n)$ のときに限り成り立つ．■

定理 23　自然数列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$, $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} < 1$ を満たすならば

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \tag{16.10}$$

そして，等号は，$x_i = a_i \ (1 \leqq i \leqq n)$ のときに限り成り立つ．ただし，$\{a_n\}$ はシルベスターの数列 とする．

［証明］ 数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 1$ のとき，$\dfrac{1}{x_1} < 1$ より $x_1 > 1$．x_1 は自然数であるから，$x_1 \geqq 2$．
よって，

$$\frac{1}{x_1} \leqq \frac{1}{2} = \frac{1}{a_1}.$$

(ii) $n \leqq m-1$ で不等式 (16.10) が成り立つと仮定する．$n = m$ のときを考え，自然数列 x_1, x_2, $\cdots$, x_m は $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_m$, $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_m} < 1$ を満たすものとする．

$x_1 x_2 \cdots x_m < a_1 a_2 \cdots a_m$ の場合
$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_m} = \dfrac{P}{Q}$　$(P, Q$ は互いに素な自然数で$, P < Q)$ とおくと
$Q \leqq x_1 x_2 \cdots x_m$ であるから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_m} &\leqq \frac{Q-1}{Q} \\
&\overset{\text{補題 11}}{\leqq} \frac{x_1 x_2 \cdots x_m - 1}{x_1 x_2 \cdots x_m} \\
&\overset{\text{補題 11}}{<} \frac{a_1 a_2 \cdots a_m - 1}{a_1 a_2 \cdots a_m} \overset{\text{補題 10}}{=} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_m}
\end{aligned}$$

となり，不等式 (16.10) は成り立つ．

$x_1 x_2 \cdots x_m \geqq a_1 a_2 \cdots a_m$ の場合
　$x_j x_{j+1} \cdots x_m \geqq a_j a_{j+1} \cdots a_m$ を満たす最大の自然数 j を $l \ (1 \leqq l \leqq m)$ とする．
$l = m$ の場合，$x_m \geqq a_m$ であるから，仮定より

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{m-1}} \leqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{m-1}}.$$

よって

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{m-1}}+\frac{1}{x_m} \leqq \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}}+\frac{1}{x_m}$$
$$\leqq \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}}+\frac{1}{a_m}.$$

不等式 (16.10) が成り立つ．等号は，$x_i=a_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ のときに限り成り立つ．

$1 \leqq l \leqq m-1$ の場合，l の定義から

$$\begin{aligned}
x_l x_{l+1}\cdots x_m &\geqq a_l a_{l+1}\cdots a_m && \cdots\cdots[*]\\
x_{l+1} x_{l+2}\cdots x_m &< a_{l+1} a_{l+2}\cdots a_m && \cdots\cdots[1]\\
x_{l+2} x_{l+3}\cdots x_m &< a_{l+2} a_{l+3}\cdots a_m && \cdots\cdots[2]\\
\cdots \quad & \quad \cdots\\
x_{m-1}x_m &< a_{m-1}a_m && \cdots\cdots[m-l-1]\\
x_m &< a_m && \cdots\cdots[m-l]
\end{aligned}$$

が成り立つ．

$[*]$ と $[1]$ から

$$\frac{x_l}{a_l} \geqq \frac{a_{l+1}a_{l+2}\cdots a_m}{x_{l+1}x_{l+2}\cdots x_m} > 1\,.$$

$[*]$ と $[2]$ から

$$\frac{x_l x_{l+1}}{a_l a_{l+1}} \geqq \frac{a_{l+2}a_{l+3}\cdots a_m}{x_{l+2}x_{l+3}\cdots x_m} > 1\,.$$

$$\vdots$$

$[*]$ と $[m-l]$ から

$$\frac{x_l x_{l+1}\cdots x_{m-1}}{a_l a_{l+1}\cdots a_{m-1}} \geqq \frac{a_m}{x_m} > 1\,.$$

したがって

$$x_l > a_l,\ x_l x_{l+1} > a_l a_{l+1},\ \ldots,\ x_l x_{l+1}\cdots x_{m-1} > a_l a_{l+1}\cdots a_{m-1}.$$

また，$[*]$ より $x_l x_{l+1}\cdots x_m \geqq a_l a_{l+1}\cdots a_m$，

補題 12 が適用できるように

$$p_1=\frac{1}{a_l},\ p_2=\frac{1}{a_{l+1}},\ \ldots,\ p_{m-l+1}=\frac{1}{a_m},$$

$$q_1 = \frac{1}{x_l},\ q_2 = \frac{1}{x_{l+1}},\ \ldots,\ q_{m-l+1} = \frac{1}{x_m}$$

とおくと，$p_1 > p_2 > \cdots > p_{m-l+1} > 0$，$q_1 > q_2 > \cdots > q_{m-l+1} > 0$ で

$$p_1 > q_1,\ p_1p_2 > q_1q_2,\ \ldots,\ p_1p_2\cdots p_{m-l} > q_1q_2\cdots q_{m-l},$$

$$p_1p_2\cdots p_{m-l+1} \geqq q_1q_2\cdots q_{m-l+1}$$

を満たすから，補題 12 より

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-l+1} > q_1 + q_2 + \cdots + q_{m-l+1}$$

すなわち

$$\frac{1}{x_l} + \frac{1}{x_{l+1}} + \cdots + \frac{1}{x_m} < \frac{1}{a_l} + \frac{1}{a_{l+1}} + \cdots + \frac{1}{a_m} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

自然数列 $x_1, x_2, \cdots, x_{l-1}$ は $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{l-1}$,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{l-1}} < 1 - \frac{1}{x_l} - \frac{1}{x_{l+1}} - \cdots - \frac{1}{x_m} < 1$$

を満たすので，帰納法の仮定から

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{l-1}} \leqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{l-1}} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．①+② から

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_m} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_m}.$$

よって，$n = m$ のときも不等式 (16.10) が成り立つ．

(i)，(ii) からすべての自然数 n について不等式 (16.10) は成り立つ． ■

17 Muirhead の定理

17.1 Muirhead の定理の証明

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を非負の実数とし，$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ とする．
$[p]$ $(p - mean)$ は

$$[p] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} x_{\sigma(2)}^{p_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n}$$

によって定義される．ただし，S_n は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の順列全体の集合とする．
次に，$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$，$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

(MJ1) $p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_n$，$q_1 \geqq q_2 \geqq \cdots \geqq q_n$，
(MJ2) $p_1 \geqq q_1$，$p_1 + p_2 \geqq q_1 + q_2$，$\cdots$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} \geqq q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1}$，
(MJ3) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$

を満たすとき，p は q の優数列である (p majorizes q) といい，$\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$ と書く．

定理 24 (Muirhead's theorem) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で $p \in \mathbb{R}^n$，$q \in \mathbb{R}^n$ とする．
$p \succ q$ ならば $[p] \geqq [q]$ が成り立つ．
等号は $p \fallingdotseq q$ のときには，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限り成り立つ．

［証明］ K .Y.Li [5] の *Proofs of Muirhead's Inequality* を筆者がまとめたもの．
$p \succ q$，$p \fallingdotseq q$ とする．
$c_i = p_i - q_i \, (1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，条件 (MJ3) から $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0$．
また，条件 (MJ2) から $c_1 \geqq 0$，$c_1 + c_2 \geqq 0$，$\ldots$，$c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} \geqq 0$．

(1°) $A_i = \{i \,|\, c_i > 0,\ 1 \leqq i \leqq n\}$ とおくと $A \fallingdotseq \phi$．
$A = \phi$ と仮定すると，すべての $i \, (1 \leqq i \leqq n)$ について $c_i \leqq 0$ となるから $c_1 \leqq 0, c_1 + c_2 \leqq 0, \ldots,$ $c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} \leqq 0$. したがって，$c_1 = 0, c_1 + c_2 = 0, \ldots, c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} = 0$ かつ $c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n = 0$ から $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$ となる．これから $p = q$ となり $p \fallingdotseq q$ に矛盾する．よって，$A \fallingdotseq \phi$．

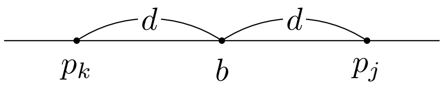
(2°) $c_j > 0,\ c_k < 0\ (j < k)$ となる j, k が存在し，j と k の間の i については $c_i = 0$．
A の要素の中で最大のものを j とすると，$j \leqq n-1$ である．なぜならば，$j = n$ とすれば，$c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} \geqq 0$ より $c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n \geqq c_n > 0$ となり $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0$ に反するからである．

すると，$c_i < 0$ となる $i\ (j+1 \leqq i \leqq n)$ が存在する．
もしも，$c_i \geqq 0 \quad (j+1 \leqq i \leqq n)$ ならば $c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} = -c_n \geqq 0$ より $c_n \leqq 0$ となるから，　$c_n = 0$．
$c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-2} = -c_{n-1} \geqq 0$ より $c_{n-1} \leqq 0$ となるから，　$c_{n-1} = 0$．

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$c_1 + c_2 + \cdots + c_j = -c_{j+1} \geqq 0$ より $c_{j+1} \leqq 0$ となるから，　$c_{j+1} = 0$．
したがって，$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0$ を使うと $c_1 + c_2 + \cdots + c_j = 0$．
明らかに $j \neq 1$ で $c_1 + \cdots + c_{j-1} = -c_j < 0$ となり $c_1 + \cdots + c_{j-1} \geqq 0$ に反する．
よって，$c_i < 0$ となる $i\ (j+1 \leqq i \leqq n)$ が存在するから，最小の i を k とおくと，$c_j > 0,\ c_k < 0 \quad (j < k)$ で，j と k の間の i については $c_i = 0$ となる．すなわち
$p_j > q_j,\ p_k < q_k\ (j < k)$ で，j と k の間の i については $p_i = q_i$ となる．

(3°) $b = \dfrac{p_j + p_k}{2},\ d = \dfrac{p_j - p_k}{2}$ とおくと，$[b-d,\ b+d] = [p_k,\ p_j] \supset [q_k,\ q_j]$.



$p_k < q_k \leqq q_j < p_j$

$c = \max\{|q_j - b|, |q_k - b|\}$ とおくと $0 \leqq c < d$.
これは，$b = \dfrac{p_j + p_k}{2} \leqq q_j$ のときは，$|q_j - b| = q_j - b < p_j - b = d$ で $b = \dfrac{p_j + p_k}{2} > q_j$ のときは，$|q_j - b| = b - q_j < b - p_k = d$ より $|q_j - b| < d$.
同様にして $|q_k - b| < d$ が成り立つから $0 \leqq c < d$ を得る．

(4°) $r = (r_1, r_2, \cdots, c_n)$ を $r_j = b + c,\ r_k = b - c$ で，これ以外については $r_i = p_i$ ととると，$r_j = q_j$ または $r_k = q_k$ が成り立つ．
$c = 0$ のときは，$q_j = q_k = b$ となるから $r_j = q_j,\ r_k = q_k$ が成り立つ．
$c > 0$ のとき，$r_j \neq q_j$ かつ $r_k \neq q_k$ と仮定する．c の定義から $q_j = b + c (= r_j)$

または $q_j = b - c$ または $q_k = b + c$ または $q_k = b - c (= r_k)$ となるが，仮定から $q_j = b - c$ または $q_k = b + c$ となる．例えば $q_j = b - c$ のときは $q_k \leqq q_j = b - c$ で c の定義から $q_k = q_j = b - c$ となり $r_k \neq q_k$ に反する．$q_k = b + c$ のときも同様である．

(5°) $p \succ r,\ p \neq r.$

$$\begin{aligned} p &= (p_1,\ \ldots,\ p_{j-1},\quad p_j,\ p_{j+1},\ \ldots,\ p_{k-1},\quad p_k,\ p_{k+1},\ \ldots,\ p_n), \\ r &= (p_1,\ \ldots,\ p_{j-1}, b + c,\ p_{j+1},\ \ldots,\ p_{k-1},\ b - c,\ p_{k+1},\ \ldots,\ p_n). \end{aligned}$$

$1 \leqq l < j$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{l} p_i - \sum_{i=1}^{l} r_i = 0.$

$j \leqq l < k$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{l} p_i - \sum_{i=1}^{l} r_i = \sum_{i=1}^{j} p_i - \sum_{i=1}^{j} r_i = p_j - (b + c) = d - c > 0.$

$k \leqq l \leqq n$ のとき，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l} p_i - \sum_{i=1}^{l} r_i &= \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} r_i \\ &= p_j - (b + c) + p_k - (b - c) = p_j + p_k - 2b = 0\,. \end{aligned}$$

よって，$p \succ r$ が成り立つ．

$r_j = q_j < p_j$ または $r_k = q_k > p_k$ なので $p \neq r$ である．

(6°) $r \succ q.$

$$\begin{aligned} r &= (p_1, \ldots,\ p_{j-1},\ b + c,\ p_{j+1},\ \ldots,\ p_{k-1},\ b - c,\ p_{k+1},\ \ldots,\ p_n), \\ q &= (q_1,\ \ldots,\ q_{j-1},\quad q_j,\ \underbrace{q_{j+1},\ \ldots,\ q_{k-1}}_{p_{j+1},\ \ldots,\ p_{k-1}},\ q_k\ ,\ q_{k+1},\ \ldots,\ q_n). \end{aligned}$$

(i) $r_j = q_j (= b + c)$ の場合

$1 \leqq l < j$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{l} r_i - \sum_{i=1}^{l} q_i = \sum_{i=1}^{l} p_i - \sum_{i=1}^{l} q_i \geqq 0.$

$j \leqq l < k$ のとき，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l} r_i - \sum_{i=1}^{l} q_i &= \sum_{i=1}^{j-1} (p_i - q_i) + b + c - q_j \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} p_i - \sum_{i=1}^{j-1} q_i \geqq 0\,. \end{aligned}$$

$l=k$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{k} r_i - \sum_{i=1}^{k} q_i = \sum_{i=1}^{j-1}(p_i - q_i) + b - c - q_k$$
$$= \sum_{i=1}^{k}(p_i - q_i) - (p_j - q_j) - (p_k - q_k) + b - c - q_k\,.$$

ここで，

$$-(p_j - q_j) - (p_k - q_k) + b - c - q_k = -(p_j + p_k) + q_j + b - c$$
$$= -2b + (b+c) + b - c = 0$$

より

$$\sum_{i=1}^{k} r_i - \sum_{i=1}^{k} q_i = \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} q_i \geqq 0.$$

$k < l < n$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{l} r_i - \sum_{i=1}^{l} q_i = \sum_{i=1}^{k} r_i - \sum_{i=1}^{k} q_i + \sum_{i=k+1}^{l} r_i - \sum_{i=k+1}^{l} q_i$$
$$= \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} q_i + \sum_{i=k+1}^{l} p_i - \sum_{i=k+1}^{l} q_i$$
$$= \sum_{i=1}^{l} p_i - \sum_{i=1}^{l} q_i \geqq 0.$$

$l=n$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i) = 0.$

よって，$r \succ q.$

(ii) $r_k = q_k (= b-c)$ の場合

$1 \leqq l < j$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{l} r_i - \sum_{i=1}^{l} q_i = \sum_{i=1}^{l}(p_i - q_i) \geqq 0.$

$j \leqq l < k$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{l} r_i - \sum_{i=1}^{l} q_i = \sum_{i=1}^{j-1}(p_i - q_i) + b + c - q_j \geqq 0\,.$$

$l=k$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} r_i - \sum_{i=1}^{k} q_i &= \sum_{i=1}^{j-1}(p_i - q_i) + b + c - q_j + b - c - q_k \\ &= \sum_{i=1}^{k}(p_i - q_i) - (p_j - q_j) - (p_k - q_k) + 2b - q_j - q_k\,.\end{aligned}$$

ここで，$-(p_j - q_j) - (p_k - q_k) + 2b - q_j - q_k = 2b - (p_j + p_k) = 0$ より

$$\sum_{i=1}^{k} r_i - \sum_{i=1}^{k} q_i = \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} q_i \geqq 0.$$

$k < l < n$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{l} r_i - \sum_{i=1}^{l} q_i = \sum_{i=1}^{l} p_i - \sum_{i=1}^{l} q_i \geqq 0.$

$l = n$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i = 0.$

よって，$r \succ q$.

(7°) $[p] \geqq [r]$.

$$\begin{aligned}n!([p]-[r]) &= \sum_{\sigma\in S_n} x_{j\,k} x_{\sigma(j)}^{p_j} x_{\sigma(k)}^{p_k} - \sum_{\sigma\in S_n} x_{j\,k} x_{j\,k} x_{\sigma(j)}^{r_j} x_{\sigma(k)}^{r_k} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} x_{j\,k}\left(x_{\sigma(j)}^{p_j} x_{\sigma(k)}^{p_k} - x_{\sigma(j)}^{r_j} x_{\sigma(k)}^{r_k}\right) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} x_{j\,k}(u^{b+d}v^{b-d} - u^{b+c}v^{b-c}).\end{aligned}$$

ただし，$x_{j\,k}$ は $i \neq j,\ k$ に対する $x_{\sigma(i)}^{p_i}$ の積すなわち，

$$x_{j\,k} = x_{\sigma(1)}^{p_1} \cdots x_{\sigma(j-1)}^{p_{j-1}} x_{\sigma(j+1)}^{p_{j+1}} \cdots x_{\sigma(k-1)}^{p_{k+1}} x_{\sigma(k-1)}^{p_{k+1}} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n}$$

で，$u = x_{\sigma(j)}$，$v = x_{\sigma(k)}$ とおいた．

任意の $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j & \cdots & k & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(k) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix} \in S_n$ に対して

$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j & \cdots & k & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix} \in S_n$ をとり，σ と ρ の和を考えると

$$x_{j\,k}\left(x_{\sigma(j)}^{p_j} x_{\sigma(k)}^{p_k} - x_{\sigma(j)}^{r_j} x_{\sigma(k)}^{r_k}\right) + x_{j\,k}\left(x_{\sigma(k)}^{p_j} x_{\sigma(j)}^{p_k} - x_{\sigma(k)}^{r_j} x_{\sigma(j)}^{r_k}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= x_{j\,k}\left(u^{p_j}v^{p_k} - u^{r_j}v^{r_k}\right) + x_{j\,k}\left(v^{p_j}u^{p_k} - v^{r_j}u^{r_k}\right) \\
&= x_{j\,k}\left(u^{b+d}v^{b-d} - u^{b+c}v^{b-c}\right) + x_{j\,k}\left(v^{b+d}u^{b-d} - v^{b+c}u^{b-c}\right) \\
&= x_{j\,k}u^{b-d}v^{b-d}\left(u^{2d} - u^{d+c}v^{d-c} + v^{2d} - u^{d-c}v^{d+c}\right) \\
&= x_{j\,k}u^{b-d}v^{b-d}\left(u^{d+c} - v^{d+c}\right)\left(u^{d-c} - v^{d-c}\right).
\end{aligned}
$$

$0 \leqq c < d$ で $u > 0,\ v > 0$ であるから u と v の大小で場合分けをする.
$0 < u < v$ のとき,
$u^{d+c} < v^{d+c},\ u^{d-c} < v^{d-c}$ より $\left(u^{d+c} - v^{d+c}\right)\left(u^{d-c} - v^{d-c}\right) > 0$.
$u > v > 0$ のとき,
$u^{d+c} > v^{d+c},\ u^{d-c} > v^{d-c}$ より $\left(u^{d+c} - v^{d+c}\right)\left(u^{d-c} - v^{d-c}\right) > 0$.
$u = v$ のとき,
$\left(u^{d+c} - v^{d+c}\right)\left(u^{d-c} - v^{d-c}\right) = 0$.
よって，常に $\left(u^{d+c} - v^{d+c}\right)\left(u^{d-c} - v^{d-c}\right) \geqq 0$ が成り立つから

$$
x_{j\,k}u^{b-d}v^{b-d}\left(u^{d+c} - v^{d+c}\right)\left(u^{d-c} - v^{d-c}\right) \geqq 0.
$$

以上で，$[p] \geqq [r]$ が証明された.
等号成立については

$$
\begin{aligned}
[p] = [r] &\iff u = v \text{ がすべての } \sigma \text{ と } \rho \text{ に対して成り立つ.} \\
&\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n
\end{aligned}
$$

$r_j = q_j$ または $r_k = q_k$ が成り立っているから，r は p よりも q と一致するところがすくなくとも一つ多くなるので，この操作を繰り返せば，$r = q$ とすることができる. ■

17.2　$p-mean$ の性質

補題 13　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を非負の実数とし，$p=(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ とする．

$[p]$ は

$$[p] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} x_{\sigma(2)}^{p_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n}$$

を表す．ただし，S_n は $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ の順列全体の集合とする．

(M1)　$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ を満たすとき，任意の実数 r に対して

$$[(p_1, p_2, \ldots, p_n)] = [(p_1 - r, p_2 - r, \ldots, p_n - r)]$$

が成り立つ．

(M2)　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は正の実数で，$x_1 x_2 \cdots x_n \geqq 1$ を満たすとき，任意の非負の実数 r に対して

$$[(p_1, p_2, \ldots, p_n)] \geqq [(p_1 - r, p_2 - r, \ldots, p_n - r)]$$

が成り立つ．

［証明］ (M1)

$$\begin{aligned}
[(p_1, p_2, \ldots, p_n)] &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} x_{\sigma(2)}^{p_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} x_{\sigma(2)}^{p_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n} \left(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}\right)^{-r} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1 - r} x_{\sigma(2)}^{p_2 - r} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n - r} \\
&= [(p_1 - r, p_2 - r, \ldots, p_n - r)].
\end{aligned}$$

(M2)

$$\begin{aligned}
[(p_1, p_2, \ldots, p_n)] &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} x_{\sigma(2)}^{p_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n} \\
&\geqq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} x_{\sigma(2)}^{p_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n} \left(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}\right)^{-r}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1-r}x_{\sigma(2)}^{p_2-r}\cdots x_{\sigma(n)}^{p_n-r}\\
&= [(p_1-r, p_2-r, \dots, p_n-r)].
\end{aligned}
$$

よって，(M1)，(M2) は示された． ■

補題 14 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を非負の実数とし，$p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in\mathbb{R}^n$ とする．

$[p]$ は

$$
[p] = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1}x_{\sigma(2)}^{p_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{p_n}
$$

を表す．ただし，S_n は $\{1,2,\cdots,n\}$ の順列全体の集合とする．

(M3) $x_1, x_2, \dots, x_n$ を正の実数とする．

$p=(p_1,p_2,\dots,p_n)$, $q=(q_1,q_2,\dots,q_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$
\frac{[p]+[q]}{2} \geqq \left[\frac{p+q}{2}\right]
$$

が成り立つ．

(M4) $x_1, x_2, \dots, x_n$ を正の実数とする．$p, q, r\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$
\frac{[p]+[q]+[r]}{3} \geqq \left[\frac{p+q+r}{3}\right]
$$

が成り立つ．

［証明］ (M3)

$$
\begin{aligned}
[p]+[q] &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1}x_{\sigma(2)}^{p_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{p_n} + \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}^{q_1}x_{\sigma(2)}^{q_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{q_n}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\left(x_{\sigma(1)}^{p_1}x_{\sigma(2)}^{p_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{p_n} + x_{\sigma(1)}^{q_1}x_{\sigma(2)}^{q_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{q_n}\right)\\
&\geqq \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} 2\sqrt{x_{\sigma(1)}^{p_1}x_{\sigma(2)}^{p_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{p_n}x_{\sigma(1)}^{q_1}x_{\sigma(2)}^{q_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{q_n}}\\
&= 2\cdot\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}^{\frac{p_1+q_1}{2}}x_{\sigma(2)}^{\frac{p_2+q_2}{2}}\cdots x_{\sigma(n)}^{\frac{p_n+q_n}{2}}\\
&= 2\left[\frac{p+q}{2}\right].
\end{aligned}
$$

(M4) $p,\ q,\ r,\ s \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$[p]+[q]+[r]+[s] \geqq 2\left[\frac{p+q}{2}\right]+2\left[\frac{r+s}{2}\right] \geqq 4\left[\frac{\frac{p+q}{2}+\frac{r+s}{2}}{2}\right]=4\left[\frac{p+q+r+s}{4}\right].$$

この式で $s=\dfrac{p+q+r}{3}$ とおくと，$\dfrac{[p]+[q]+[r]}{3} \geqq \left[\dfrac{p+q+r}{3}\right]$ を得る． ■

［注］ 上記の証明方法から，一般的に次のことが証明できる．

「$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を正の実数とする． m 個の $p, q, r, \cdots, s \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\frac{[p]+[q]+\cdots+[s]}{m} \geqq \left[\frac{p+q+\cdots+s}{m}\right]$$

が成り立つ．」

参考文献

[1] K.Soundararajan : *Approximating 1 from below using* n *egyptian fractions*

[2] H.Lee : *Topics in Inequalities*

[3] P. K . Hung : *Majoriation and Karamat Inequality*

[4] From Wikipedia : *Karanmat's inequality*

[5] K .Y. Li : *Proofs of Muirhead's Inequality* , Mathematical Excalibur ,vol 11,No.1 (2006)

[6] 大関信雄・大関清太 : 不等式への招待 , 近代科学社, $pp.33-34$ $pp.90-92$

[7] V.Cîrtoaje : *Two generalization of Popoviciu's inequality* , Canadian Mathematical Society (2005)

[8] L .Bougoffa : *New inequalities about convex functions* , Jornal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics ,vol 7,Issue 4,Article 148 , 2006

[9] 柳田五夫 :「$1/a+1/b+1/c+1/d+1/e<1$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c\ \ d\ \ e$ に対して $1/a+1/b+1/c+1/d+1/e$ の最大値について 」数研通信 No.66 $pp.10-13$

[10] D.Grinberg : *Generalizations of Popoviciu's inequality* , Formal version ; 4 March 2009

索引

A
Adamović,D.D.　436,438
アーベル (Abel) の公式　414

B
Burkill.J.C　475 Bougoffa.L　495

C
コーシー・シュワルツの不等式　7,28,400
チェビシェフの不等式　39,383,389
Cîrtoaje,V.　477

D
Djoković,D.Ž .　436

H
補題 1　131
補題 2　395
補題 3　396
補題 4　397
補題 5　413
補題 6　414
補題 7　414
補題 8　421
補題 9　423
補題 10　498
補題 11　499
補題 12　499
補題 13　510
補題 14　511
Hlawka の不等式　436,437
補助定理 1　52
補助定理 2　68
補助定理 3　70
補助定理 4　71
ヘルダー (Hölder) の不等式　71,402,403
Homogeneous　100

J
Jensen の不等式　393

L
ラグランジュ (Lagrange) の恒等式　6
Li.K.Y　504

K
Karamata の不等式　419
Kober.H　483

M
Milne の不等式　379
ミンコウスキー (Minkowski) の不等式　159
Muirhead の定理　103,504
(M1)　103,508
(M2)　103,508
(M3)　103,509
(M4)　509
(MJ1)　102,419,504
(MJ2)　102,419,504
(MJ3)　102,419,504
(MJ3')　417

N
Niculescu,C.　493
Nesbitt の不等式　105
Normalization　100

O
大関信雄・大関清太　436,483
凹関数　393

P
Popoviciu の不等式　452

R
Radon の不等式　54,308
累次平均　47

S
Schur の不等式　404
シルベスターの数列 (Sylvester's sequence)　498
相加平均・相乗平均の不等式　388,391
重みつきの相加平均・相乗平均の不等式　399
Soundararajan.K　499
Surányi の不等式　281
Symmetric Majorization Criterion　450

T
凸関数　393
Turkevici の不等式　285,455
定理 (Radon's inequality)　54
定理 (Hölder)　71
定理 (Schur)　404
定理 (Generalized Schur inequality)　406
定理 1　381
定理 2　385
定理 3　389
定理 4　391
定理 5　393
定理 6　394
定理 7　399
定理 8　400
定理 9　402
定理 10　403
定理 11　419
定理 12　419
定理 13　450
定理 14　477
定理 15　479
定理 16　484
定理 17　485
定理 18　488
定理 19　490
定理 20　493
定理 21　495
定理 22　496
定理 23　501
定理 24　504

Y
柳田五夫 (yanagita)　423
優数列　102,419,504

Z
Zhaobin 488

2012 年　8 月 22 日 Ver .1.1