数学研究同好会で扱った整数問題について

柳田 五夫

本校（佐野日本大学中等教育学校）の数学研究同好会で，2013 年度前期に扱った整数問題の一部を紹介したい．ただし，最後の平成 24 年度県立中学校入学者選考問題［栃木県］の小問は同好会では扱っていないが，興味深いので取り上げた．

1　数学甲子園2013予選問題，モスクワ数学オリンピアードの問題1

問題 1　次の等式を満たす整数 $x,\, y,\, z$ の組 $(x,\, y,\, z)$ をすべて求めなさい．

$$x^6 + y^6 + z^6 = 3xyz$$

(数学甲子園 2013 予選問題 15)

数学甲子園 2012 予選問題 20 の整数問題も難しかったが，この問題は相加平均・相乗平均の不等式を使用して解くことができる．

解 相加平均・相乗平均の不等式

「 $a \geqq 0,\, b \geqq 0,\, c \geqq 0$ のとき 不等式 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqq abc$ が成り立つ．等号が成り立つのは $a=b=c$ のときである．」

を利用すると

$$3xyz = x^6 + y^6 + z^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 + (z^2)^3 \geqq 3x^2y^2z^2 \tag{$*$}$$

から

$$3xyz \geqq 3(xyz)^2.$$

これを解いて　$0 \leqq xyz \leqq 1$ となる． xyz は整数であるから

$$xyz = 0 \quad \text{または} \quad xyz = 1. \qquad ①$$

このとき，$(*)$ で等号が成り立つから

$$x^2 = y^2 = z^2. \qquad ②$$

①，②から

$$(x,\, y,\, z,) = (0,\, 0,\, 0),\, (1,\, 1,\, 1),\, (1,\, -1,\, -1),\, (-1,\, 1,\, -1),\, (-1,\, -1,\, 1)$$

$\cdots\cdots$(答)　■

次の問題 2，問題 3 は問題 1 に似ているが解法は異なる．ここでは無限降下法を使う．モスクワ数学オリンピアードの問題はすべて，数学セミナー「鹿野　健，数学を楽しむ＝数学を創る　IV 問題を解く楽しみ（つづき）」から引用した．

問題 2　$x^2+y^2+z^2=2xyz$ となるような整数 x, y, z の組は，$x=y=z=0$ だけであることを証明せよ．

(モスクワ数学オリンピアード第 7〜8 学年（日本の中学 1〜2 年生くらい）用)

解 まず次のことを示しておく．

補題 1 x, y, z は整数とする．

(i) x, y, z のうち 1 個だけが奇数ならば，$x^2+y^2+z^2$ を 4 で割った余りは 1 である．

(ii) x, y, z のうち 2 個が奇数ならば，$x^2+y^2+z^2$ を 4 で割った余りは 2 である．

(iii) x, y, z すべてが奇数ならば，$x^2+y^2+z^2$ を 8 で割った余りは 3 である．

[証明] k, l, m を整数とする．

(i) x, y, z のうち 1 個だけが奇数のとき

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (2k+1)^2+(2l)^2+(2m)^2 \\ &= 4(k^2+k+l^2+m^2)+1 \end{aligned}$$

より $x^2+y^2+z^2$ を 4 で割った余りは 1 である．

(ii) x, y, z のうち 2 個が奇数のとき

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (2k+1)^2+(2l+1)^2+(2m)^2 \\ &= 4(k^2+k+l^2+l+m^2)+2 \end{aligned}$$

より $x^2+y^2+z^2$ を 4 で割った余りは 2 である．

(iii) x, y, z すべてが奇数のとき

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (2k+1)^2+(2l+1)^2+(2m+1)^2 \\ &= 4(k^2+k+l^2+l+m^2+m)+3. \end{aligned}$$

$k^2+k=k(k+1)$, $l^2+l=l(l+1)$, $m^2+m=m(m+1)$ は偶数であるから，$x^2+y^2+z^2$ を 8 で割った余りは 3 である．■

$$x^2+y^2+z^2=2xyz \qquad \cdots\cdots ①$$

$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$ は①を満たす．

これ以外の整数解 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ が存在すると仮定すると，x_0, y_0, z_0 の少なくとも一つは 0 ではない整数である．一般性を失うことなく $x_0 \neq 0$ と仮定できる．

$x_0^2+y_0^2+z_0^2=2x_0y_0z_0$ から $x_0^2+y_0^2+z_0^2$ は偶数である．したがって，補題 1 の (i)，(iii) の場合はない．

(ii) の場合，$x_0^2+y_0^2+z_0^2$ を 4 で割った余りは 2 となるが，$2x_0y_0z_0$ は 4 の倍数であるから，$x_0^2+y_0^2+z_0^2=2x_0y_0z_0$ に矛盾する．

したがって，$x_0,\ y_0,\ z_0$ は偶数である．$x_0=2x_1,\ y_0=2y_1,\ z_0=2z_1\quad(x_1,\ y_1,\ z_1$ は整数) とおき，①に代入すると

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1y_1z_1 \qquad \cdots\cdots②$$

$x_1^2+y_1^2+z_1^2$ は 4 の倍数となり，補題 1 を使うと $x_1,\ y_1,\ z_1$ はすべて偶数となる．

$x_1=2x_2,\ y_1=2y_2,\ z_1=2z_2\quad(x_2,\ y_2,\ z_2$ は整数) とおき，②に代入すると

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=8x_2y_2z_2 \qquad \cdots\cdots③$$

$x_2^2+y_2^2+z_2^2$ は 4 の倍数となり，補題 1 を使うと $x_2,\ y_2,\ z_2$ はすべて偶数となる．

$x_2=2x_3,\ y_2=2y_3,\ z_2=2z_3\quad(x_3,\ y_3,\ z_3$ は整数) とおき，③に代入すると

$$x_3^2+y_3^2+z_3^2=16x_3y_3z_3 \qquad \cdots\cdots④$$

$$\cdots\cdots$$

この操作を繰り返すと，無限数列 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots$ を得るが，$x_0 \neq 0$ より

$$|x_0|>|x_1|>|x_2|>\cdots>|x_n|>\cdots.$$

$|x_0|$ は（有限な）自然数であるから，これは不可能である．

したがって，①は $(0,\ 0,\ 0)$ 以外の整数解をもたない． ■

問題 3　$x^2+y^2+z^2+w^2=2xyzw$ となるような整数 $x,\ y,\ z,\ w$ の組をすべて求めよ．
(モスクワ数学オリンピアード第 9〜10 学年 (日本の中学 3 年〜高校 1 年生くらい) 用)

$x^2+y^2+z^2+w^2=2xyzw$ となるような整数 $x,\ y,\ z,\ w$ の組は $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ のみとなる．このことは次の補題 2 を使えば無限降下法で示すことができる．

補題 2 $x,\ y,\ z,\ w$ は整数とすると $x^2+y^2+z^2+w^2$ が偶数となるのは，$x,\ y,\ z,\ w$ のなかで奇数の個数が偶数のときで，

(i) $x,\ y,\ z,\ w$ のうち 2 個が奇数ならば，$x^2+y^2+z^2+w^2$ を 4 で割った余りは 2 である．

(ii) $x,\ y,\ z,\ w$ すべてが奇数ならば，$x^2+y^2+z^2+w^2$ を 8 で割った余りは 4 である．

無限降下法を使って解ける問題が 2000 年に千葉大（理），2005 年に首都大学東京（後期）で出題されている．

類題 n が 3 以上の整数のとき，$x^n+2y^n=4z^n$ を満たす整数 $x,\ y,\ z$ は $x=y=z=0$ 以外に存在しないことを証明せよ．　(2000　千葉大・理)

類題 2 以上の自然数 n に対して方程式

$$(*) \quad x^n+2y^n=4z^n$$

を考える。次の問いに答えよ．

(1) $n=2$ のとき，$(*)$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ の例を与えよ．

(2) $n \geqq 3$ のとき，$(*)$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ が存在しないことを示せ．

(2005　首都大・後期)

問題 2 では $x^2+y^2+z^2=2xyz$ の整数解を考えたが，$x^2+y^2+z^2=xyz$ の自然数解の問題が 2006 年に東京大学で出題されている．

類題 次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。

条件 (A) : $x,\ y,\ z$ は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす．

以下の問いに答えよ．

(1) 条件 (A) を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ で，$y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ．

(2) 組 $(a,\ b,\ c)$ が条件 (A) を満たすとする．このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ．

(3) 条件 (A) を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在することを示せ．

(2006　東京大・理)

2　AIME 1986 の問題

問題 4　$n^3 + 100$ が $n + 10$ で割り切れるような正の整数 n の最大値を求めよ.
(AIME 1986 の問題 5)

原題は American Invitational Mathematics Examination の
「Find the largest integer n such that $n + 10$ divides $n^3 + 100$.」
整式の除法を用いて解くことができる.

解 $x^3 + 100$ を $x + 10$ で割り算をすると

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2 \quad - 10x \quad + 100 \\
\cline{2-2}
x + 10 & \quad x^3 \qquad\qquad\qquad + 100 \\
 & \quad x^3 + 10x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -10x^2 \\
 & \qquad -10x^2 - 100x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 100x \quad + 100 \\
 & \qquad\qquad\qquad 100x + 1000 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad -900
\end{array}
$$

となるから

$$n^3 + 100 = (n + 10)(n^2 - 10n + 10) - 900.$$

よって

$$\frac{n^3 + 100}{n + 10} = n^2 - 10n + 10 - \frac{900}{n + 10}.$$

n^3+100 が $n+10$ で割り切れるのは $n+10$ が 900 の約数になるときだから, $n+10 = 900$ すなわち $n = 890$ が求める最大値となる. ■

問題 5　m^4+14m^2 が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ．

(2013 千葉大・医)

解 x^4+14x^2 を $2x+1$ で割り算をすると

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & \frac{1}{2}x^3 & -\frac{1}{4}x^2 & +\frac{57}{8}x & -\frac{57}{16} & \\
\cline{2-6}
2x-1 \big) & x^4 & & +14x^2 & & \\
 & x^4 & +\frac{1}{2}x^3 & & & \\
\cline{2-6}
 & & -\frac{1}{2}x^3 & +14x^2 & & \\
 & & -\frac{1}{2}x^3 & -\frac{1}{4}x^2 & & \\
\cline{3-6}
 & & & \frac{57}{4}x^2 & & \\
 & & & \frac{57}{4}x^2 & +\frac{57}{8}x & \\
\cline{4-6}
 & & & & -\frac{57}{8}x & \\
 & & & & -\frac{57}{8}x & -\frac{57}{16} \\
\cline{5-6}
 & & & & & \frac{57}{16}
\end{array}
$$

となるから

$$m^4+14m^2=(2m+1)\left(\frac{1}{2}m^3-\frac{1}{4}m^2+\frac{57}{8}m-\frac{57}{16}\right)+\frac{57}{16}$$

よって

$$\frac{m^4+14m^2}{2m+1}=\frac{1}{2}m^3-\frac{1}{4}m^2+\frac{57}{8}m-\frac{57}{16}+\frac{57}{16(2m+1)}.$$

$\dfrac{m^4+14m^2}{2m+1}=M$　(M は整数) とおくと

$$16M=\frac{16(m^4+14m^2)}{2m+1}=8m^3-4m^2+114m-57+\frac{57}{2m+1} \qquad (*)$$

は整数である．

16 と奇数 $2m+1$ は互いに素であるから，$16M=\dfrac{16(m^4+14m^2)}{2m+1}$ が整数ならば，$\dfrac{m^4+14m^2}{2m+1}=M$ は整数となる．すなわち M が整数であることと $16M$ が整数であることは同値である．

$16M$ が整数であるから，$(*)$ より $2m+1$ は 57 の約数である．

よって

$$2m+1=\pm1,\ \pm3,\ \pm19,\ \pm57$$

から

$$m=-29,\ -10,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 9,\ 28 \qquad \cdots\cdots(答)$$

■

[注] $m^4+14m^2=m^2(m^2+14)$ と変形して，m^2 と $2m+1$ は互いに素であることを利用すると整式の除法はもう少し簡単にできる．

$(2m+1)-2\cdot m=1$ より m と $2m+1$ は互いに素だから，m^2 と $2m+1$ は互いに素である．

したがって，$m^4+14m^2=m^2(m^2+14)$ が $2m+1$ の整数倍となるのは，m^2+14 が $2m+1$ の整数倍となるときであるから，

$$\frac{m^2+14}{2m+1}$$

が整数となる条件を調べてもよい．

類題 $8n^3+40n$ が $2n+1$ で割り切れるような正整数 n をすべて求めよ．

(1999 千葉大・理)

$8n^3+40n=2n(4n^2+20)$ で $2n$ と $2n+1$ が互いに素であることから，$4n^2+20$ が $2n+1$ で割り切れるような正の整数を求めればよい．答えは $n=1,\ 3,\ 10$ となる．

類題 p を 5 以上の素数とする．p^3 を $p-4$ で割った余りが 4 であるとき，p を求めよ．

(2013　早稲田・商)

3　モスクワ数学オリンピアードの問題 2

問題 6　n が 1 より大きい整数ならば，

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$$

であることを証明せよ．

(モスクワ数学オリンピアード第 7～8 学年（日本の中学 1～2 年生くらい）用)

解 左側の不等式は

$$\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+2}>\cdots\cdots>\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$$

が成り立つから

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

と簡単に証明できる．

次に右側の不等式を証明する．

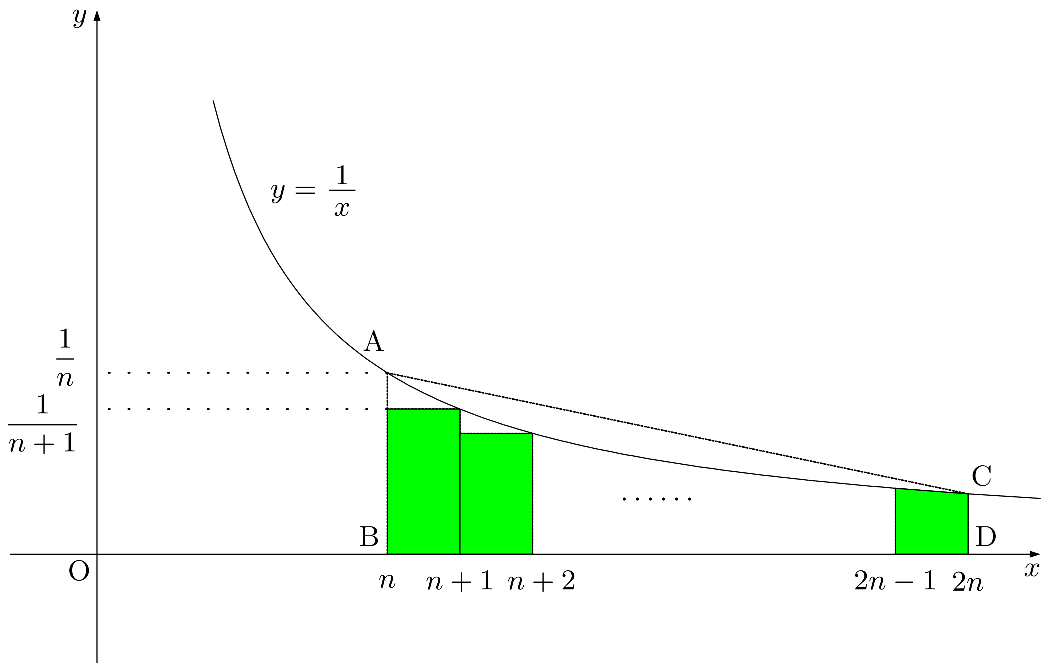

図 1

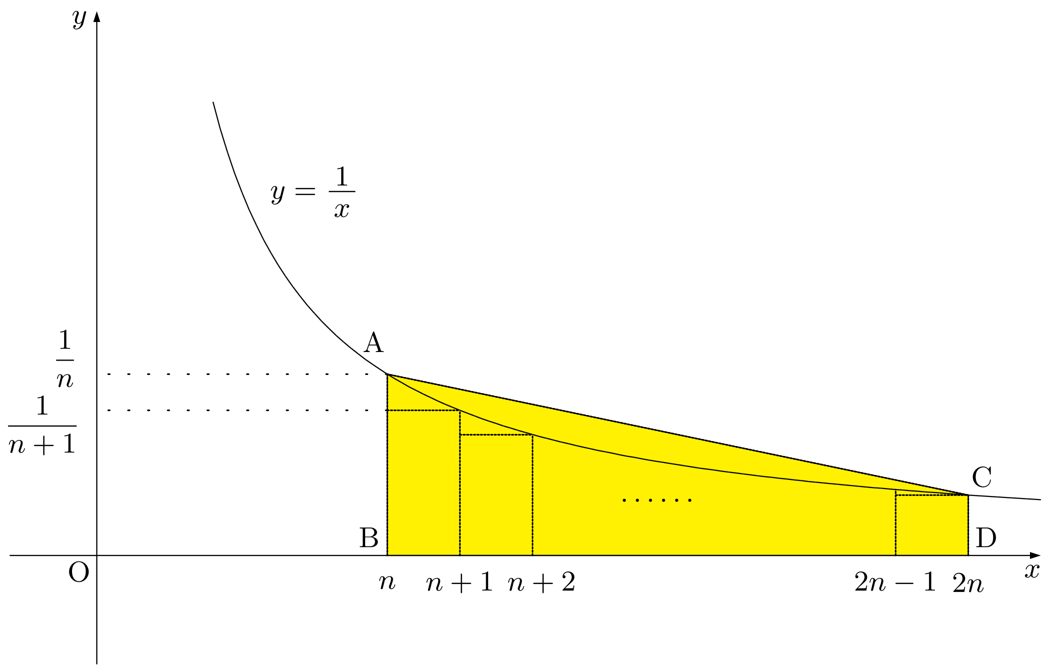

図 2

$\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2n}$ は図 1 の長方形の面積の和を表すから，図 2 の台形 ABDC の面積より小さい．

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n} &< \frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{CD})\mathrm{BD}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)(2n-n)\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となり，右側の不等式が証明できる． ■

[注] 右側の不等式は，数学 III を学習した人は $y=\dfrac{1}{x}$ と 直線 $x=n$, $x=2n$, $y=0$ で囲まれた部分の面積と図 1 の長方形の面積の和とを比較するかもしれない．

4　平成 24 年度県立中学校入学者選考問題［栃木県］の小問について

4.1　適性検査の問題

栃木県の平成 24 年度県立中学校入学者選考問題の適性検査の $\boxed{2}$ の問 1 に次のような問題が出題された．

適性検査

さやかさんの家族は，友達の家族といっしょに，キャンプに行くことになりました。キャンプ場ではバーベキューをする予定です。さやかさんは，バーベキューの材料を買いに，たけしさんスーパーマーケットに来ています。

さやか：　まずはお肉を買いましょう。一人分の肉の量は，子どもが $150g$，大人が $180g$ だったわね。

たけし：　バーベキューに来る人数は，子どもが 10 人で，大人が 7 人だったね。そうすると，必要な肉の量は全部で $2760g$ だね。

さやかさんとたけしさんは，肉を売っているコーナーで，図 1 のようなけい示物を見つけました。

特　売　品　　　　まとめて買うと，さらにお得！

ステーキ用

$200g$	1 パック	350 円				
$400g$	1 パック	550 円	$\Longrightarrow$	$400g$	3 パック	1500 円

焼き肉用

$200g$	1 パック	300 円	$\Longrightarrow$	$200g$	2 パック	500 円
$300g$	1 パック	400 円	$\Longrightarrow$	$300g$	3 パック	1000 円
$500g$	1 パック	600 円				

＊消費税はふくまれています。

図 1

さやか：　いろいろな種類があるのね。まとめて買うとお得なのね。

たけし：　どんな組み合わせで買えばいいのかな。

さやか：　お肉が足りなくなるのは困（こま）るけど，できるだけ余りを少なくしたいわ。

金額も安くおさめたいわね。

［問 1］　肉を 2760g 以上買うとき，合計金額を一番安くするためには，どのような組み合わせで買えばよいですか。下の【買い方の例】を参考に答えなさい。また，そのときの合計金額も答えなさい。

【買い方の例】

例 1 ： 焼 き 肉 用 200g　10 パック，焼き肉用 300g　3 パック

例 2 ： ステーキ用 400g　5 パック，焼き肉用 500g　2 パック

適性検査

100g あたりの価格を考えることにより，焼き肉用 300g 6 パック，焼き肉用 500g 2 パック買うのが，合計金額が 3200 円となり，一番安くなると予想される．このことを数学的に証明してみよう．

4.2　定式化

まず，ステーキ用の肉を買う必要がないことがわかる．それは，ステーキ用 200g 1 パック，400g 1 パックより焼き肉用 200g 1 パック，200g 2 パックの方が安く，ステーキ用 400g 3 パックと焼き肉用 200g 2 パックを 3 セットの価格が等しくなるからである．

焼き肉用 200g を x_1 パック，300g を x_2 パック，200g 2 パック (400g) を x_3 セット，500g を x_4 パック，300g 3 パック (900g) を x_5 セット買うことにすると，

x_1，x_2 は 0 か 1，x_3，x_4，x_5 は負でない整数で，

$200x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 500x_4 + 900x_5 \geqq 2800$ すなわち

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 9x_5 \geqq 28$ のとき，

$L = 300x_1 + 400x_2 + 500x_3 + 600x_4 + 1000x_5 = 100(3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 10x_5)$ を最小にする x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 を求めればよい．

$$a = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 9x_5$$

とおくと

$$L = 100(a + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

となるから，まず a を固定して， $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 9x_5 = a$ のとき，$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ の最小値を求める．

補題 3　a は 6 以上の整数とする．x_1，x_2 は 0 か 1，x_3，x_4，x_5 は負でない整数で，$2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+9x_5=a$ を満たすとき，$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ の最小値を $m(a)$ とおく．l を正の整数として，次のことが成り立つ．

(1) $a=9l-3$ のとき，$a=2\cdot1+4\cdot1+9(l-1)$，$m(9l-3)=l+1$.

(2) $a=9l-2$ のとき，$a=2\cdot1+5\cdot1+9(l-1)=3\cdot1+4\cdot1+9(l-1)$，$m(9l-2)=l+1$.

(3) $a=9l-1$ のとき，$a=3\cdot1+5\cdot1+9(l-1)=4\cdot2+9(l-1)$，$m(9l-1)=l+1$.

(4) $a=9l$ のとき，$a=9\cdot l$，$m(9l)=l$.

(5) $a=9l+1$ のとき，$a=5\cdot2+9(l-1)$，$m(9l+1)=l+1$.

(6) $a=9l+2$ のとき，$a=2\cdot1+9l$，$m(9l+2)=l+1$.

(7) $a=9l+3$ のとき，$a=3\cdot1+9l$，$m(9l+3)=l+1$.

(8) $a=9l+4$ のとき，$a=4\cdot1+9l$，$m(9l+4)=l+1$.

(9) $a=9l+5$ のとき，$a=5\cdot1+9l$，$m(9l+5)=l+1$.

[証明]　l に関する数学的帰納法で示す．

(i) $l=1$ のとき

　$a=6$ の場合，$a=6=2\cdot1+3\cdot0+4\cdot1+5\cdot0+9\cdot0$ より $m(6)\leqq2$.

x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 のうち一つだけが 1 で，残りは 0 のとき，$2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+9x_5=6$ と表すことは不可能であるから，$m(6)\fallingdotseq1$.

したがって，$m(6)=2$.

　$a=7,\ 8,\ \ldots,\ 14$ についても同様に示すことができる．

(ii) $l=k$ のとき成り立つと仮定する．

　$a=9(k+1)-3=9k+6$ の場合

$a=2\cdot1+3\cdot0+4\cdot1+5\cdot0+9k$ より $m(9k+6)\leqq k+2$.

　$m(9k+6)\leqq k+1$ と仮定すると，$2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+9x_5=9k+6$ を満たす x_1，x_2，x_3，x_4 の中に 1 以上のものが存在するから，それを x_i $(1\leqq i\leqq4)$ とすると

$$9k+6-(i+1)=2x_1+\cdots+(i+1)(x_i-1)+\cdots+9x_5$$

と変形できるから

$$\begin{aligned}m(9k+6-i-1)&\leqq x_1+\cdots+(x_i-1)+\cdots+x_5\\&=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-1\leqq k+1-1=k\,.\end{aligned}$$

ところで，$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ より $9k+6-(i+1)$ のとる値は

$$9k+6-(i+1)=9k+4,\ 9k+3,\ 9k+2,\ 9k+1$$

となる．したがって，仮定より $m(9k+6-i-1)=k+1$ となり，$m(9k+6-i-1)\leqq k$ と矛盾する．

よって，$m(9k+6)=k+2$.

他の場合も同様に示すことができる．

(iii) (i)，(ii) からすべての自然数 l について (1)〜(9) が成り立つ． ■

a は 6 以上の整数とする．x_1，x_2 は 0 か 1，x_3，x_4，x_5 は負でない整数で，$2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+9x_5=a$ を満たすとき

$L=300x_1+400x_2+500x_3+600x_4+1000x_5=100(a+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$ の最小値を L_a とおくと，$\{L_a\}$ は単調増加で

$$L_{9l-3}<L_{9l-2}<L_{9l-1}=L_{9l}<L_{9l+1}<L_{9l+2}<L_{9l+3}<L_{9l+4}<L_{9l+5}$$
$$<L_{9l+6} \qquad (l=1,\ 2,\ \ldots).$$

[証明]　a は 6 以上の整数とする．x_1，x_2 は 0 か 1，x_3，x_4，x_5 は負でない整数で，$2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+9x_5=a$ を満たすとき，$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ の最小値を $m(a)$ とおくと，補題 3 より

$a=9l-3,\ 9l-3,\ 9l-2,\ 9l-1,\ 9l+1,\ 9l+2,\ 9l+3,\ 9l+4,\ 9l+$ のとき，$L_a=100(a+l+1)$.

$a=9l$ のとき，$L_a=100(a+l)$. したがって

$$L_{9l-3}<L_{9l-2}<L_{9l-1}=L_{9l}<L_{9l+1}<L_{9l+2}<L_{9l+3}<L_{9l+4}<L_{9l+5}\,. \qquad ■$$

上の結果から，$a\geqq 28$ のときは

$$L_{28}<L_{29}<L_{30}<L_{31}<L_{32}<\ldots$$
$$<L_{9l-3}<L_{9l-2}<L_{9l-1}=L_{9l}<L_{9l+1}<L_{9l+2}<L_{9l+3}<L_{9l+4}<L_{9l+5}<\ldots$$

したがって，$\{L_a\}$ $(a\geqq 28)$ は

$a=28=5\cdot 2+9\cdot 2$ かつ $x_1=x_2=x_3=0,\ x_2=x_5=2$ で最小値

$L_{28}=100(28+\underbrace{3}_{28=9\cdot\underline{3}+1}+1)=3200$ をとる．