初等的な不等式 I（問題）

練習問題　1

1.1　基本的な恒等式・不等式

1．次の等式を証明せよ．

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc.$$

2．次の等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

3．次の等式を証明せよ．

$$(a+b+c+d)^2=(a-b+c-d)^2+4(ab+bc+cd+da).$$

4．次の等式を証明せよ．

(1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2.$

(2)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.$

(3)　$\displaystyle\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2=\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$

（ラグランジュの恒等式）

5．次の等式を証明せよ．

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a).$$

6．次の等式を証明せよ．

$$(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+24abc=(a+b+c)^3.$$

7．次の不等式を証明せよ．ただし，文字はすべて実数とする．

(1)　$a^2+b^2\geqq 2ab.$

(2)　$2(a^2+b^2)\geqq(a+b)^2.$

(3)　$ab\leqq\dfrac{(a+b)^2}{4}.$

(4)　$4(a^2+ab+b^2)\geqq 3(a+b)^2.$

8．次の不等式を証明せよ．ただし，文字はすべて実数とする．

(1)　$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca.$

(2)　$(a+b+c)^2\geqq 3(ab+bc+ca).$

(3)　$3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2.$

(4)　$(ab+bc+ca)^2\geqq 3abc(a+b+c).$

(5)　$a^4+b^4+c^4\geqq abc(a+b+c).$

9．次の不等式を証明せよ．ただし，文字はすべて実数とする．

(1)　$(a+b+c+d)^2\geqq 4(ab+bc+cd+da).$

(2)　$3(a+b+c+d)^2\geqq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$

10．a,b が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

(1)　$\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$

(2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geqq \dfrac{4}{a+b}$.

11. a, b が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $a^3+b^3 \geqq ab(a+b)$.

(2) $a^5+b^5 \geqq a^2b^2(a+b)$.

12. a, b が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2} \geqq \frac{1}{1+ab}.$$

13. a, b は正の実数で， $ab \geqq 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \geqq \frac{2}{1+ab}.$$

14. a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

15. $x \geqq 1, y \geqq 1$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leqq \sqrt{xy}.$$

16. 三角形 ABC において，次の不等式を証明せよ．

$$\sin A+\sin B+\sin C \geqq \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C.$$

1.2 相加平均・相乗平均の不等式

1．(東工大) a, b, c, d は正の数とする

(1) 次の 2 つの不等式を証明せよ．

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}, \quad \frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}.$$

(2) 次の式で与えられる，P, Q, R, S の大小を比較せよ．

$$P=\frac{a+b+c+d}{4}, \quad Q=\sqrt[4]{abcd},$$
$$R=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}}{6},$$
$$S=\frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{4}$$

2．a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc.$$

3．(Russia 1992) x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^4+y^4+z^2 \geqq \sqrt{8}xyz.$$

4．(Brazil 2001) a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+b)(a+c) \geqq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

5． a が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{1+a^3} \leqq \frac{a^2+2}{2}.$$

6．(学習院大 1992) n は正の整数で，x, y を正の実数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^n+(n-1)y^n \geqq nxy^{n-1}.$$

7．(Moldova 2004) a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3 \geqq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}.$$

8． a, b, c は正の実数で，$abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$ab^2+bc^2+ca^2 \geqq a+b+c.$$

9．(東京医科歯科大 2010) x, y, z を正の実数とするとき，$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

10．(法政大) a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq \frac{100}{3}.$$

11． a, b, c は正の実数で $abc=8$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1} \leqq 0.$$

12．(IMO Short List 1998) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n\left[1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \leqq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

1.3　コーシー・シュワルツの不等式

1． a, b, x, y が実数のとき，不等式 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$ を証明せよ．また，等号が成り立つ場合を調べよ．

2． a, b, c, x, y, z が実数のとき，不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ を証明せよ．また，等号が成り立つ場合を調べよ．

3．(類　慶応大) x, y が正の実数であるとき，不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{x+y}$ が常に成り立つような k の最小値を求めよ．

4．(東大　1995) すべての正の実数 x, y に対し $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$ が成り立つような実数 k の最小値を求めよ．

5．(愛知学院大 1996) a, b, c, x, y, z はすべて正数とするとき

$$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z} \leqq \sqrt{a+b+c}\sqrt{ax+by+cz}$$

が成り立つことを示せ．

6．(釧路公立大 2009) $x>0$, $y>0$ で $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ のとき，$x+y$ の最小値が $3+2\sqrt{2}$ である

ことを証明せよ．

7．(Korea MO 2002) $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ は実数で，

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 1$$

を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \leqq 2|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n - 1|.$$

8．(United Kingdom 2005) a, b, c が正の実数であるとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geqq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

9．(Titu Andreescu , Gazeta Mathematica) a, b, c を負でない実数とする．負でないすべての実数 x に対して次の不等式を証明せよ．

$$(ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a) \geqq (a+b+c)^2x^2.$$

10．(Titu Andreescu , Revista Mathematica Timisoara) $p(x)$ を係数がすべて正である整式とする．$P\left(\frac{1}{x}\right) \geqq \frac{1}{P(x)}$ が $x = 1$ に対して成り立つならば，すべての実数 $x > 0$ に対して成り立つことを証明せよ．

11．(Vasile Cîrtoaje) a, b, c, x, y, z が実数であるとき，次の不等式を証明せよ．

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqq \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$

12．(Serbia 1998) $a, x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2} + \frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geqq \frac{n^2}{2}.$$

1.4　チェビシェフの不等式

1．次の不等式を証明せよ．

(1)　$a \geqq b,\ a' \geqq b'$ のとき

$$\frac{aa' + bb'}{2} \geqq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a'+b'}{2}.$$

(2)　$a \geqq b \geqq c,\ a' \geqq b' \geqq c'$ のとき

$$\frac{aa' + bb' + cc'}{3} \geqq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a'+b'+c'}{3}.$$

2．（京都府医大 1966） 三角形 ABC の頂角 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$60^\circ \leqq \frac{aA + bB + cC}{a+b+c} < 90^\circ.$$

3．(和歌山県医大) a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \geqq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3).$$

5． a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)} \geqq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right).$$

6．(1)　任意の数列 $\{c_n\}, \{d_n\}$ に対して，次の等式を証明せよ．

$$n\sum_{i=1}^{n} c_i d_i-\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} d_j\right)=\sum_{1 \leqq i<j \leqq n}\left(c_i-c_j\right)\left(d_i-d_j\right).$$

(2)　$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$，$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

7． $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1+a_2+\cdots+a_n=n$ を満たすとき，すべての自然数 k に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k \geqq a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+\cdots+a_n^{k-1}.$$

8． a, b, c は正の実数で，$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2 \geqq a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}.$$

9． $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n} \geqq\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}.$$

10．(Hojoo Lee) a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}}-\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geqq \frac{1}{3}.$$

1.5　凸関数

1． A，B，C，D はいずれも 0 と π の間にあるとする．次の不等式を証明せよ．

(i)　$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D \leqq 4 \sin \dfrac{A+B+C+D}{4}.$

(ii)　$\sin A+\sin B+\sin C \leqq 3 \sin \dfrac{A+B+C}{3}.$

(iii)　$\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} \leqq \sin \dfrac{A+B+C}{3}.$

2．(京都大 1991) 実数 a, b　$\left(0 \leqq a<\dfrac{\pi}{4},\ 0 \leqq b<\dfrac{\pi}{4}\right)$ に対し次の不等式の成り立つことを示せ．

$$\sqrt{\tan a \cdot \tan b} \leqq \tan \left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}(\tan a+\tan b).$$

3．(東工大 1990) x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ を正数とし，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=k$ をみたすとする．このとき不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq k \log \frac{k}{n}.$$

を証明せよ．

4． a,b,c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geqq \frac{9}{4}.$$

5． n を 2 以上の整数とする．$x_1,x_2,\ldots,x_n$ は正の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_n}}+\cdots+\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} \geqq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

6． $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$ は実数で，$0 \leqq \theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n \leqq \frac{\pi}{2}$，$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=2\pi$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$4 \leqq \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n \leqq n\sin\frac{2\pi}{n}.$$

1.6 累次平均

1． a,b,c は正の定数とする．

(1) (類 慶応大) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

(2) 0 でない実数 r に対して，$M_r=\left(\frac{a^r+b^r+c^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}}$ とおくと，
$0<r<s$ のとき $M_r \leqq M_s$ が成り立つことを示せ．

2． a,b を正の数とするとき，$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ と $\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ の大小を比較せよ．

3． $a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき，

$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$，$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$，$\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^9$ の大小を比較せよ．

4． $n \geqq 2$ とする．$x_1,x_2,\ldots,x_n$ は正の実数で，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right)^2 \geqq \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2-1}{n(n-1)}.$$

2 補助定理 1（コーシー・シュワルツの不等式の変形）

1．(Croatia 2004) $(a,b,c>0)$

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geqq \frac{3}{4}$$

2．(Balkan MO 1984) $(a_1+a_2+\cdots+a_n=1, a_1,a_2,\ldots,a_n>0)$

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{2-a_n} \geqq \frac{n}{2n-1}$$

3. (Baltic 2008) $(a^2+b^2+c^2=3, a,b,c>0)$

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geqq\frac{(a+b+c)^2}{12}$$

4. (Estonia 2004) $(a^2+b^2+c^2=3, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geqq 1$$

5. (AMO 1991) $(a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n, a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2\ldots,b_n>0)$

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geqq\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

6. (Ireland 1999) $(a+b+c+d=1, a,b,c,d>0)$

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geqq\frac{1}{2}$$

7. $(a,b,c>0)$

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqq\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

8. $(a^2+b^2+c^2=3, a,b,c>0)$

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\geqq 1$$

9. (Nguyen Van Thach) $(ab+bc+ca=\frac{1}{3}, a,b,c>0)$

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\geqq\frac{1}{a+b+c}.$$

10. $(a^2+b^2+c^2=3, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geqq 3$$

11. $(x,y,z>0)$

$$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\leqq\frac{3}{4}$$

12. $(a,b,c>0)$

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\geqq\frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

13. (India) $(a^2+b^2+c^2=3abc, a,b,c>0)$

$$\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{c^2a^2}+\frac{c}{a^2b^2}\geqq\frac{9}{a+b+c}$$

14. (Romania 1999) $(x_1+x_2+\cdots+x_n\geqq x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n, x_1,x_2,\ldots,x_n,$
$y_1,y_2,\ldots,y_n>0)$

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqq\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}$$

3　補助定理 2（ヘルダーの不等式の変形）

1．(京都府医大) $(a, b, c > 0)$

$$\frac{a+b+c}{3} \leqq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

2．　$(a, b > 0)$

$$\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3．(甲南大) $(a, b, x, y > 0)$

$$\left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2}\right)(ax+by)^2 \geqq (a+b)^3.$$

4．　$(a, b, c > 0)$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqq \frac{(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca)}$$

5．　$(a, b, c > 0)$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \sqrt{\frac{27}{ab+bc+ca}}$$

6．　$(a, b, c > 0)$

$$\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geqq \frac{27}{(a+b+c)^2}$$

7．　$(a^2+b^2+c^2 = 3, a, b, c > 0)$

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \geqq 3$$

8．　$(a, b, c > 0)$

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geqq \frac{a+b+c}{2}$$

9．　$(a, b, c > 0)$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geqq \sqrt{\frac{abc(a+b+c)}{ab+bc+ca}}$$

10.　$(a+b+c = 1, a, b, c > 0)$

$$\sqrt[3]{99} \geqq \sqrt[3]{1+8a} + \sqrt[3]{1+8b} + \sqrt[3]{1+8c}$$

11.　$(a_1, a_2, \ldots, a_n > 0)$

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqq (1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n})^n$$

12. $(a+b+c=1, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{a(3b+1)}+\frac{1}{b(3c+1)}+\frac{1}{c(3a+1)} \geqq \frac{9}{2}$$

13. (Balkan 2002) $(a,b,c>0)$

$$\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)} \geqq \frac{27}{(a+b+c)^2}$$

14. $(a^2+b^2=1, a,b>0)$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{b}{a^2+1}+\frac{a}{b^2+1}\right) \geqq \frac{8}{3}$$

15. $(a,b>0)$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geqq \frac{8}{(a+b)^2}$$

16. $(a+b+c=3, a,b,c>0)$

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)} \geqq 1$$

17. $(a,b,c>0)$

$$\sqrt[3]{a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}} \geqq \frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}$$

18. (Samin Riasat) $(a,b,c,m,n>0)$

$$\frac{a^2}{b(ma+nb)}+\frac{b^2}{c(mb+nc)}+\frac{c^2}{a(mc+na)} \geqq \frac{3}{m+n}$$

19. (SMO 2009) $(a+b+c=1,\ x_1x_2\cdots x_5=1, a,b,c,x_1,x_2,\ldots,x_5>0)$

$$\prod_{i=1}^{5}(ax_i^2+bx_i+c) \geqq 1$$

20. $(a,b,c\geqq 0)$

$$(a+b+c)^4(ab+bc+ca) \leqq 27(a^3+b^3+c^3)^2$$

21. $((a^2+b^2)^3=c^2+d^2, a,b,c,d>0)$

$$\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d} \geqq 1$$

22. (TST 2010) $(abc=1, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2}+\frac{1}{b^5(c+2a)^2}+\frac{1}{c^5(c+2b)^2} \geqq \frac{1}{3}$$

4　例題

例題 1　(Hungary 1996)

a, b は正の実数で，$a+b=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1} \geqq \frac{1}{3}.$$

例題 2　(東工大) a, b, c, x, y, z はすべて正の数を表すとき，次の不等式を証明せよ.

(1)　$(b+c)(c+a)(a+b) \geqq 8abc.$

(2)　$xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$

例題 3　(USAMO Summer Program 2002)　$a>0, b>0, c>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 3.$$

例題 4　a, b, c は正の実数で $ab+bc+ca=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqq \frac{3}{2}.$$

5　練習問題 2

問題 1　(a, b, c が三角形の 3 辺)

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqq 3abc$$

問題 2　(Nesbitt's inequality)　$(a, b, c>0)$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}$$

問題 3　(Rioplatense 2002)　$(a, b, c>0)$

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right) \geqq 1$$

問題 4　(Unknown author)　$(a, b, c>0)$

$$\frac{16}{27}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^3+\left(\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \frac{5}{2}$$

問題 5　(India 1998)　$(a, b, c \geqq 0, ab+bc+ca+abc=4)$

$$a+b+c \geqq ab+bc+ca.$$

問題 6　(Proposed by Greece for 1987 IMO)　$(a, b, c>0, m$ は正の整数$)$

$$\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b} \geqq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1}$$

問題 7　(Titu Andreescu , Mircea Lascu)　 $(xyz=1,\ \alpha \geqq 1, x,y,z>0)$

$$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y} \geqq \frac{3}{2}$$

問題 8　(Turkey 1997)

$n \geqq 2$ とする．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ のとき，

$$\frac{x_1^5}{x_2+x_3+\cdots+x_n}+\frac{x_2^5}{x_1+x_3+\cdots+x_n}+\cdots+\frac{x_n^5}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}$$

の最小値を求めよ．

問題 9　(Romanian TST)　 $(a,b,x,y,z>0)$

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} \geqq \frac{3}{a+b}$$

問題 10　(Mexico 2007)　 $(a+b+c=1, a,b,c>0)$

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \leqq 2$$

問題 11　(Korea 1998)　 $(x+y+z=xyz, x,y,z>0)$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3}{2}$$

問題 12　(Carlson's inequality)　 $(a,b,c>0)$

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geqq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

問題 13　(Kazakhstan 2008)　 $(xyz=1, x,y,z>0)$

$$\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y} \geqq \frac{3}{2}$$

問題 14　(Columbia 2001)　 $(x,y \in \mathbb{R})$

$$3(x+y+1)^2+1 \geqq 3xy$$

問題 15　$(0<a<1, 0<x<1)$.

$$a^x+x^a>1$$

問題 16　(APMC 1993)　 $(a,b \geqq 0)$

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \leqq \frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4} \leqq \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} \leqq \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}$$

問題 17　(Czech and Slovakia 2000)　 $(a,b>0)$

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \geqq \sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

問題 18　(Die $\sqrt{WURZEL}$，Heinz-Jürgen Seiffert)　$(xy > 0, x, y \in \mathbb{R})$

$$\frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqq \sqrt{xy} + \frac{x+y}{2}$$

問題 19　(Crux Mathematicorum , Problem 2645 ,Hojoo Lee)　$(a, b, c > 0)$

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc} + \frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \geqq 33$$

問題 20　$(x, y, z > 0)$.

$$\sqrt[3]{xyz} + \frac{|x-y|+|y-z|+|z-x|}{3} \geqq \frac{x+y+z}{3}$$

問題 21　$(a, b, c, x, y, z > 0)$

$$\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} \geqq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz}$$

問題 22　(Belarus 2000)　$(a, b, c, x, y, z > 0)$

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geqq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

問題 23　(Samin Riasat)　(a, b, c が三角形の 3 辺)

$$\frac{1}{8abc+(a+b-c)^3} + \frac{1}{8abc+(b+c-a)^3} + \frac{1}{8abc+(c+a-b)^3} \leqq \frac{1}{3abc}$$

問題 24　(Kyiv 2006)　$(xy + yz + zx = 1, x, y, z > 0)$

$$\frac{x^3}{1+9y^2xz} + \frac{y^3}{1+9z^2yx} + \frac{z^3}{1+9x^2yz} \geqq \frac{(x+y+z)^3}{18}$$

問題 25　$(x, y, z > 0)$

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leqq 1$$

問題 26　$(x + y + z = 1, x, y, z > 0)$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} + \frac{z}{\sqrt{1-z}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

問題 27　(Brazilian TST 2004)　$(x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z > 0)$

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geqq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

問題 28　(Romania 2005,Unused)　$(ab + bc + ca + 2abc = 1, a, b, c > 0)$

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leqq \frac{3}{2}$$

問題 29　(Iran 1998)　$\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2,\ x,y,z>1\right)$

$$\sqrt{x+y+z} \geqq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

問題 30　(KMO Winter Program Test 2001)　$(a,b,c>0)$

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)} \geqq abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}$$

問題 31　(KMO Summer Program Test 2001)　$(a,b,c>0)$

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geqq \sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}$$

問題 32　(n を 2 以上の整数, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots,n)$)

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ &\geqq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}\end{aligned}$$

問題 33　$(a,b,c\in\mathbb{R})$

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2} \geqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

問題 34　$(a,b,c>0)$

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqq \sqrt{a^2+ac+c^2}$$

問題 35　(Belarus 2002)　$(a,b,c,d>0)$

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{2|ad-bc|}{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}} &\geqq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\\ &\geqq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\end{aligned}$$

問題 36　(Hong Kong 1998)　$(a,b,c \geqq 1)$

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leqq \sqrt{c(ab+1)}$$

問題 37　(IMO 2001)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq 1$$

問題 38　(IMO Short List 2004)　$(ab+bc+ca=1, a,b,c>0)$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \leqq \frac{1}{abc}$$

問題 39　　$(a,b,c>0)$

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)} \geqq \sqrt{4abc+(a+b)(b+c)(c+a)}$$

問題 40　(Macedonia 1995)　$(a,b,c>0)$

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geqq 2$$

問題 41　(Vasile Cîrtoaje)　$(a,b,c>0)$

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\leqq 3$$

問題 42　$(a+b+c=3, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{c^2+a+b}+\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}\leqq 1$$

問題 43　(Titu Andreescu , Gabriel Dospinescu)　$(x+y+z=1, x,y,z\leqq 1)$

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\leqq\frac{27}{10}$$

問題 44　(IMO 2000)　$(abc=1, a,b,c>0)$

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqq 1$$

問題 45　(IMO Short List 1998)　$(xyz=1, x,y,z>0)$

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geqq\frac{3}{4}$$

問題 46　(IMO Short List 1996)　$(abc=1, a,b,c>0)$

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqq 1$$

問題 47　(IMO 1995)　$(abc=1, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqq\frac{3}{2}$$

問題 48　(IMO Short List 1993)　$(a,b,c,d>0)$.

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geqq\frac{2}{3}$$

問題 49　(IMO Short List 1990)　$(ab+bc+cd+da=1, a,b,c,d>0)$

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqq\frac{1}{3}$$

問題 50　(IMO 1968)　$(x_1>0,\ x_2>0,\ y_1,y_2,z_1,z_2\in\mathbb{R}, x_1y_1>z_1^2,\ x_2y_2>z_2^2)$

$$\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\geqq\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}$$

問題 51　(Romania 1997)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geqq 1\geqq\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}$$

問題 52　(Canada 2002)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geqq a+b+c$$

問題 53　(Greek 2004)　次の不等式がすべての実数 x,y,z に対して成り立つように，最良の定数 M を求めよ．

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\geqq M(xy+yz+zx)^2\,.$$

問題 54　(Ukraine 2004)　$(abc\geqq 1, a,b,c>0)$

$$a^3+b^3+c^3\geqq ab+bc+ca$$

問題 55　(Elemente der Mathematik，Problem 1207)
$(x,y,z>0)$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqq\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

問題 56　(APMO 1998)　$(a,b,c>0)$

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geqq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

問題 57　$(abc=1, a,b,c>0)$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqq a+b+c$$

問題 58　(a) (Pham Kim Hung)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geqq 4$$

(b) (Samin Riasat) (n は 3 以下の自然数，$a,bc>0$)

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+n\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\right)\geqq 3+n$$

問題 59　(a)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqq\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

(b) (Samin Riasat) (n は 3 以下の自然数，$a+b+c=ab+bc+ca, a,b,c>0$)

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{3n}{a^2+b^2+c^2}\geqq 3+n$$

問題 60　(USA 1997)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqq\frac{1}{abc}$$

問題 61　$(xyz=x+y+z+2, x,y,z>0)$

$$xy+yz+zx\geqq 2(x+y+z)$$

問題 62　(Japan 1997)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geqq\frac{3}{5}$$

問題 63　(USA 2003)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqq 8$$

問題 64　(Pham Kim Hung)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{(2a+b+c)^2}{4a^3+(b+c)^3}+\frac{(2b+c+a)^2}{4b^3+(c+a)^3}+\frac{(2c+a+b)^2}{4c^3+(a+b)^3}\leqq\frac{12}{a+b+c}$$

問題 65　(Crux Mathematicorum , Problem 2580 , Hojoo Lee)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}$$

問題 66　(Crux Mathematicorum , Problem 2581 , Hojoo Lee)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geqq a+b+c$$

問題 67　(Crux Mathematicorum , Problem 2532 , Hojoo Lee)　$(a^2+b^2+c^2=1, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

問題 68　(Belarus 1999)　$(a^2+b^2+c^2=3, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geqq\frac{3}{2}$$

問題 69　(Moldova 2005)　$(a^4+b^4+c^4=3, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leqq 1$$

問題 70　(Greece 2002)　$(a^2+b^2+c^2=1, a,b,c>0)$

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geqq\frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$$

問題 71 (Iran 1996) $(a, b, c > 0)$

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geqq \frac{9}{4}$$

問題 72 $(a, b, c > 0)$

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+2ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+2ab}{(a+b)^2} \geqq \frac{9}{4}$$

問題 73 (Belarus 1997) $(a, b, c > 0)$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}$$

問題 74 (Poland 1996) $\left(a+b+c=1,\ a,\ b,\ c \geqq -\frac{3}{4}\right)$

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \leqq \frac{9}{10}$$

問題 75 (日本数学オリンピック 本選 2004) $(a+b+c=1, a, b, c > 0)$

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \leqq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$

問題 76 (Lithuania 1987) $(x, y, z > 0)$

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \geqq \frac{x+y+z}{3}$$

問題 77 (Romania 1997) $(xyz=1, x, y, z > 0)$

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \geqq 2$$

問題 78 (IMO 2005) $(xyz \geqq 1, x, y, z > 0)$

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqq 0$$

問題 79 (Vietnam 1991) $(x \geqq y \geqq z > 0)$

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y} \geqq x^2+y^2+z^2$$

問題 80 (Iran 1997) $(x_1x_2x_3x_4=1, x_1, x_2, x_3, x_4 > 0)$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 \geqq \max\left(x_1+x_2+x_3+x_4,\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)$$

問題 81 (Hong Kong 2000) $(abc=1, a, b, c > 0)$

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3} \geqq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

問題 82 (Albania 2002) $(a,b,c>0)$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

問題 83 (Belarus 1998) $(a,b,c>0)$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$$

問題 84 (BMO 2005) $(a,b,c>0)$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

問題 85 (Moldova 1999) $(a,b,c>0)$

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)} \geqq \frac{a}{c+a}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}$$

問題 86 (Baltic Way 1995) $(a,b,c,d>0)$.

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a} \geqq 4$$

問題 87 ([ONI]，Vasile Cîrtoaje) $(a,b,c,d>0)$

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b} \geqq 0$$

問題 88 (Poland 1993) $(x,y,u,v>0)$

$$\frac{xy+xv+uy+uv}{x+y+u+v} \geqq \frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v}$$

問題 89 (KMO Weekend Program 2007) $(a,b,c,x,y,z>0)$

$$\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z} \leqq \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}$$

問題 90 (Belarus 1997) $(a,x,y,z>0)$

$$\frac{a+y}{a+z}x+\frac{a+z}{a+x}y+\frac{a+x}{a+y}z \geqq x+y+z \geqq \frac{a+z}{a+x}x+\frac{a+x}{a+y}y+\frac{a+y}{a+z}z$$

問題 91 $(xy+yz+zx=1, x,y,z>0)$

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \geqq \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+\frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2}+\frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}$$

問題 92 (Serbia and Montenegro 2005， Russia 2002) $(x+y+z=3, x,y,z>0)$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geqq xy+yz+zx$$

問題 93 (Die $\sqrt{WURZEL}$, Walther Janous) $(x+y+z=1, x, y, z>0)$

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geqq (1-x^2)^2+(1-y^2)^2+(1-z^2)^2$$

問題 94 (United Kingdom 1999) $(p+q+r=1, p, q, r>0)$

$$7(pq+qr+rp) \leqq 2+9pqr$$

問題 95 (Serbia 2008) $(a+b+c=1, a, b, c>0)$

$$a^2+b^2+c^2+3abc \geqq \frac{4}{9}$$

問題 96 (USA 1979) $(x+y+z=1, x, y, z>0)$

$$x^3+y^3+z^3+6xyz \geqq \frac{1}{4}$$

問題 97 (IMO 1984) $(x+y+z=1, x, y, z \geqq 0)$

$$0 \leqq xy+yz+zx-2xyz \leqq \frac{7}{27}$$

問題 98 (IMO Short List 1993) $(a+b+c+d=1, a, b, c, d>0)$

$$abc+bcd+cda+dab \leqq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$$

問題 99 (Pham Kim Hung) $(a+b+c+d=4, a, b, c, d>0)$

$$(1+3a)(1+3b)(1+3c)(1+3d) \leqq 125+131abcd$$

問題 100 (Pham Kim Hung) $(a+b+c+d+e=5, a, b, c, d, e \geqq 0)$

$$abc+bcd+cde+dea+eab \leqq 5$$

問題 101 (Poland 1992) $(a, b, c \in \mathbb{R})$

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \geqq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$$

問題 102 (Canada 1999) $(x+y+z=1, x, y, z \geqq 0)$

$$x^2y+y^2z+z^2x \leqq \frac{4}{27}$$

問題 103 (Hong Kong 1994) $(xy+yz+zx=1, x, y, z>0)$

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2) \leqq \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

問題 104 (Vietnam 1996) $\big(2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+bcd+cda+dab=16,$ $a,\ b,\ c,\ d \geqq 0\big)$

$$a+b+c+d \geqq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

問題 105　(Poland 1998)　$\left(a+b+c+d+e+f=1,\ ace+bdf \geqq \dfrac{1}{108}, a,b,c,d,e,f>0\right)$

$$abc+bcd+cde+def+efa+fab \leqq \frac{1}{36}$$

問題 106　(Italy 1993)　$(0 \leqq a,\ b,\ c \leqq 1)$

$$a^2+b^2+c^2 \leqq a^2b+b^2c+c^2a+1$$

問題 107　(BMO 2001)　$(a+b+c \geqq abc, a,b,c \geqq 0)$

$$a^2+b^2+c^2 \geqq \sqrt{3}abc$$

問題 108　(Belarus 1996)　$(x+y+z=\sqrt{xyz}, x,y,z>0)$

$$xy+yz+zx \geqq 9(x+y+z)$$

問題 109　(Poland 1991)　$(x^2+y^2+z^2=2, x,y,z \in \mathbb{R})$

$$x+y+z \leqq 2+xyz$$

問題 110　(Vietnam 2002)　$(a^2+b^2+c^2=9, a,b,c \in \mathbb{R})$

$$2(a+b+c)-abc \leqq 10$$

問題 111　(Mongolia 1991)　$(a^2+b^2+c^2=2, a,b,c \in \mathbb{R})$

$$|a^3+b^3+c^3-abc| \leqq 2\sqrt{2}$$

問題 112　(Vietnam 1996)　$(a,b,c \in \mathbb{R})$

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geqq \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)$$

問題 113　(Latvia 2002)　$\left(\dfrac{1}{1+a^4}+\dfrac{1}{1+b^4}+\dfrac{1}{1+c^4}+\dfrac{1}{1+d^4}=1, a,b,c,d>0\right)$

$$abcd \geqq 3$$

問題 114　(Proposed for 1999 USAMO)　$(x,y,z>1)$

$$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \geqq (xyz)^{xy+yz+zx}$$

問題 115　$(a,b,c>0)$

(1)　$a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2 \geqq 2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$

(2)　$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geqq 2(ab+bc+ca)$

(3)　$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+2 \geqq 2(ab+bc+ca)$

問題 116　(APMO 2004)　$(a,b,c>0)$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqq 9(ab+bc+ca)$$

問題 117　(USA 2004)　$(a, b, c > 0)$

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geqq (a + b + c)^3$$

問題 118　(USA 2001)　$(a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4,\ a,\ b,\ c \geqq 0)$

$$0 \leqq ab + bc + ca - abc \leqq 2$$

問題 119　(Turkey 1999)　$(c \geqq b \geqq a \geqq 0)$

$$(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \geqq 60abc$$

問題 120　$(a, b, c \geqq 0)$

$$4(a + b + c)^3 \geqq 27(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc)$$

問題 121　(Macedonia 1999)　$(a^2 + b^2 + c^2 = 1\ \ a, b, c > 0)$

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geqq 4\sqrt{3}$$

問題 122　(Poland 1999)　$(a + b + c = 1, a, b, c > 0)$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leqq 1$$

問題 123　(Macsdonia 2000)　$(x, y, z > 0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq \sqrt{2}(xy + yz)$$

問題 124　(Surányi's inequality)　$(x_1, x_2, \ldots, x_n > 0)$

$$(n - 1)\sum_{i=1}^{n} x_i^n + n\prod_{i=1}^{n} x_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\right)$$

問題 125　(Turkevici's inequality)　$(a, b, c, d > 0)$

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geqq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2$$

問題 126　([ONI]，Gabriel Dospinescu，Mircea Lascu，Marian Tetiva)　$(a, b, c > 0)$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geqq (1 + a)(1 + b)(1 + c)$$

問題 127　$(abc = 1, a, b, c > 0)$

$$\frac{a + b + c}{3} \geqq \sqrt[5]{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

問題 128　(MOSP 2007)　$(a, b, c > 0)$

$$\left(\frac{a}{a + 2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b + 2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c + 2a}\right)^2 \geqq \frac{1}{3}$$

問題 129　(Pham Kim Hung)　 $(a+b+c=1, a,b,c>0)$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}} \geqq 1$$

問題 130　(Vasile Cîrtoaje)　 $(a,b,c>0)$

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geqq \sqrt{a+b+c} \geqq \frac{a}{\sqrt{2a+b}}+\frac{b}{\sqrt{2b+c}}+\frac{c}{\sqrt{2c+a}}$$

問題 131　(Mathematical and Physical Jounal for Secondary Schools，Problem A . 561.)
$(a,b,c,p>0)$

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^p}+\frac{b^3c}{(3b+c)^p}+\frac{c^3a}{(3c+a)^p} \geqq \frac{a^2bc}{(2a+b+c)^p}+\frac{b^2ca}{(2b+c+a)^p}+\frac{c^2ab}{(2c+a+b)^p}$$

問題 132　(Yugoslavia 2007)　 (k は正の整数, $x+y+z=1, x,y,z>0$)

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k} \geqq \frac{1}{7}$$

問題 133　(第 16 回日本数学オリンピック本選 2006)　任意の正の実数 $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3$ に対して不等式

$$\begin{aligned}&(x_1^3+x_2^3+x_3^3+1)(y_1^3+y_2^3+y_3^3+1)(z_1^3+z_2^3+z_3^3+1)\\ &\geqq A(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)(z_1+z_2+z_3)\end{aligned}$$

が常に成り立つような実数 A の最大値を求めよ．また A をそのようにとるとき，等号が成立する条件を求めよ．

問題 134　(第 11 回日本数学オリンピック本選 2001)
　$(a^2 \leqq b^2+c^2,\ b^2 \leqq c^2+a^2,\ c^2 \leqq a^2+b^2, a,b,c \geqq 0)$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \geqq 4(a^6+b^6+c^6)$$

等号が成立する条件

問題 135　(SMO(s) 2008)　 $(a,b,c \geqq 0)$

$$\frac{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geqq \frac{1}{2}(1+abc)$$

問題 136　(Vasile Cîrtoaje)　 $(a,b,c,d \geqq 0)$

$$\frac{(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)} \geqq \frac{1}{2}(1+abcd)$$

問題 137　(Czech-Slovak-Polish Match 2001)　 (n を 2 以上の整数, $a_1,a_2,\ldots,a_n \geqq 0$)

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdots(a_n^3+1) \geqq (a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\cdots(a_n^2a_1+1)$$

問題 138　(Centro American Match Olympiad 2009)　　$(xyz = 1, x, y, z \in \mathbb{R})$

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) \geqq \left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)$$

等号が成立する条件

問題 139　(IMO shortlist Estonia 2009)　　$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = a+b+c, a, b, c > 0\right)$

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \geqq \frac{3}{16}$$

問題 140　(n を 2 以上の整数，$a+b+c = 1, a, b, c > 0$)

$$\sqrt[n]{ab+bc+ca} \geqq a\sqrt[n]{\frac{b+c}{2}}+b\sqrt[n]{\frac{c+a}{2}}+c\sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}$$

問題 141　(APMO 2005)　　$(abc = 8, a, b, c > 0)$

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geqq \frac{4}{3}$$

問題 142　$(a, b, c > 0)$

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geqq 1$$

問題 143　(Bulgaria 2007)　　$(a, b, c > 0)$

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1} \geqq a+b+c+3$$

問題 144　(France Team Selection Test 2007)　　$(a+b+c+d = 1, a, b, c, d > 0)$

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geqq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$$

問題 145　(Klamkin's inequality)　　$(-1 < x,\ y,\ z < 1)$

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geqq 2$$

問題 146　(Mathlinks Contest)　　$(abc = 1, a, b, c > 0)$

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geqq 3$$

問題 147　(Radon's inequality)

$(p > 0, a_i > 0, x_i > 0\ \ (i = 1, 2, \cdots, n))$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{p+1}}{a_i^p} \geqq \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{p+1}}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{p}}$$

問題 148 (IMO 2011) $(a, b, c > 0, \min(a+b,\ b+c,\ c+a) > \sqrt{2},\ \ a^2+b^2+c^2=3)$

$$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2} \geqq \frac{3}{(abc)^2}.$$

問題 149 (Balkan 2012) $(x, y, z > 0)$

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+x)(y+z)}$$
$$\geqq 4(xy+yz+zx)$$

問題 150 (日本数学オリンピック本選 2005) $(a+b+c=1, a, b, c > 0)$

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leqq 1$$

問題 151 (Lithuania 2006) $(a, b, c > 0)$

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$

問題 152 (Balkan 2006) $(a, b, c > 0)$

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geqq \frac{3}{1+abc}$$

問題 153 (Ireland 2007) $(a, b, c > 0)$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geqq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqq \frac{a+b+c}{3}$$

問題 154 (Romania 2008) $(abc=8, a, b, c > 0)$

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1} \leqq 0$$

問題 155 (Poland 2006) $(ab+bc+ca=abc, a, b, c > 0)$

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geqq 1$$

問題 156 (China 1989) $(x_1+x_2+\cdots+x_n=1, x_1, x_2, \ldots, x_n > 0)$

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqq \frac{1}{\sqrt{n-1}}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})$$

問題 157 (Darij Grinberg) $(a, b, c > 0)$

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geqq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

問題 158 (IMO 1984) (a, b, c が三角形の三辺の長さ)

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqq 0$$

問題 159 (Junior Balkan MO 2002 Shortlist) $(a, b, c > 0)$

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

問題 160 $(a, b, c > 0)$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$$

問題 161 (Gabriel Dospinescu) $(a, b, c > 0)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} + \frac{3}{a+b+c} \\ \geqq &\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{2c+a} + \frac{1}{c+2a}. \end{aligned}$$

問題 162 (APMO 1996) $(a, b, c$ が三角形の三辺の長さ$)$

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

問題 163 (APMO 2003) $(n$ は 2 以上の整数,$a+b+c=1, a, b, c$ は三角形の三辺の長さ$)$

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}$$

問題 164 (Austria 2005) $(a, b, c, d > 0)$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \geqq \frac{a+b+c+d}{abcd}$$

問題 165 (Romania 2005) $(a, b, c, d > 0)$

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geqq 1$$

問題 166 (Karachi 2006) $(a \geqq b \geqq c, a, b, c \in \mathbb{R})$

$$a^2b + b^2c + c^2a \geqq ab^2 + bc^2 + ca^2$$

問題 167 (Irish MO 2011) $(1 = 2xyz + xy + yz + zx, x, y, z > 0)$

(i) $\dfrac{3}{4} \leqq xy + yz + zx < 1$

(ii) $xyz \leqq \dfrac{1}{8}$

(iii) $x + y + z \geqq \dfrac{3}{2}$

問題 168 (Mircea Lascu ,Marian Tetiva) $(xy + yz + zx + 2xyz = 1, x, y, z > 0)$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqq 4(x + y + z)$$

問題 169 (Irish MO 2010) $(x + y + z = 1, x, y, z > 0)$

(a) $xy + yz + zx \geqq 9xyz$

(b) $xy + yz + zx < \dfrac{1}{4} + 3xyz$

問題 170　(Irish MO 2009)　$a, b, c \in \mathbb{R}, a+b+c=0,\ a^2+b^2+c^2=1)$

$$a^2b^2c^2 \leqq \frac{1}{54}$$

問題 171　(China Western MO 2004)　$(a, b, c > 0)$

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

問題 172　(Vietnam 2005)　$(a, b, c > 0)$

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geqq \frac{3}{8}$$

問題 173　(China 2005)　$(abcd = 1, a, b, c, d > 0)$

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geqq 1$$

問題 174　(Romania 2005)　$(a+b+c = 3, a, b, c > 0)$

$$a^2b^2c^2 \geqq (3-2a)(3-2b)(3-2c)$$

問題 175　(Poland 2005)　$(ab+bc+ca = 3, a, b, c > 0)$

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geqq 9$$

問題 176　(Romania 2005)　$(1 = (a+b)(b+c)(c+a), a, b, c > 0)$

$$ab+bc+ca \leqq \frac{3}{4}$$

問題 177　(Serbia and Montenegro 2005)　$(a, b, c > 0)$

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geqq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$$

問題 178　(Bosnia and Hercegovina 2005)　$(a+b+c = 1, a, b, c > 0)$

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

問題 179　(Mihai Piticari, Dan Popescu)　$(a+b+c = 1, a, b, c > 0)$

$$5(a^2+b^2+c^2) \leqq 6(a^3+b^3+c^3)+1$$

問題 180　(China 2005)　$(a+b+c = 1, a, b, c > 0)$

$$10(a^3+b^3+c^3) - 9(a^5+b^5+c^5) \geqq 1$$

問題 181　(Iran 2005)　$(a, b, c > 0)$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geqq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

問題 182 (Romania 2005) $(a,b,c>0)$

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\geqq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

問題 183 (Romania 2005) $(abc\geqq 1, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leqq 1$$

問題 184 (Vasile Cîrtoaje , Romania TST 2006) $(a+b+c=3, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqq a^2+b^2+c^2$$

問題 185 (Bulgaria TST 2003) $(a+b+c=3, a,b,c>0)$

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geqq\frac{3}{2}$$

問題 186 $(a+b+c+d=4, a,b,c,d>0)$

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\geqq 2$$

問題 187 $(a+b+c=1, a,b,c>0)$

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geqq\frac{1}{2}$$

問題 188 (Pham Kim Hung) $(a^2+b^2+c^2=3, a,b,c>0)$

$$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geqq 1$$

問題 189 (IMO Shortlist) $(x_1\geqq 1,\ x_2\geqq 1,\ \ldots,\ x_n\geqq 1, x_1,x_2,\ldots,x_n>0)$

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqq\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$$

問題 190 （2007 早稲田大・教育）

(1) $(a\geqq 1,\ b\geqq 1)$

$$\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right)\geqq 2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$$

(2) $(a\geqq 1,\ b\geqq 1,\ c\geqq 1)$

$$\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)+\left(c^3-\frac{1}{c^3}\right)\geqq 3\left(abc-\frac{1}{abc}\right)$$

問題 191 (Vasile Cîrtoaje) $(abcd=1, a,b,c,d>0)$

$$\frac{1}{(1+a)(1+a^2)}+\frac{1}{(1+b)(1+b^2)}+\frac{1}{(1+c)(1+c^2)}+\frac{1}{(1+d)(1+d^2)}\geqq 1$$

問題 192 (Macedonia Team Selection Test 2007) $(a,b,c>0)$

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geqq\frac{6}{a+b+c}$$

問題 193 (MOSP 2001) $(abc=1,a,b,c>0)$

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 4(a+b+c-1)$$

問題 194 (Romania TST 2002) $(n\geqq 4\text{ , }a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1,a_1,a_2,\ldots,a_n>0)$

$$\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+1}\geqq\frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}+\cdots+a_n\sqrt{a_n}\right)^2$$

問題 195 $(n\geqq 4,\ x_1,x_2,\ldots,x_n>0)$

$$\frac{x_1}{x_n+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_1}\geqq 2$$

問題 196 (Ireland 2008) $(xyz\geqq 1,x,y,z>0)$

(a) $27\leqq(1+x+y)^2+(1+y+z)^2+(1+z+x)^2$

(b) $(1+x+y)^2+(1+y+z)^2+(1+z+x)^2\leqq 3(x+y+z)^2$

等号は $x=y=z=1$ のときに限り成り立つ.

問題 197 (Poland 1995) $x_1,x_2,\ldots,x_n$ は正の実数で，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=n$ を満たすとき

$$x_1+\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_3^3}{3}+\cdots+\frac{x_n^n}{n}$$

の最小値を求めよ.

問題 198 (IMO 1999) $n\geqq 2$ を整数とする.

(a) すべての実数 $x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \ldots,\ x_n\geqq 0$ に対して，不等式

$$\sum_{1\leqq i<j\leqq n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leqq C\left(\sum_{1\leqq i\leqq n}x_i\right)^4$$

が成り立つような定数 C の最小値を求めよ.

(b) (a) で求めた C に対して，等号が成り立つ場合を調べよ.

問題 199 (IMO 2012) $(a_2\cdots a_n=1,a_2,\ldots,a_n>0)$

$$(a_2+1)^2(a_3+1)^3\cdots(a_n+1)^n\geqq n^n$$

問題 200 (Romania 2005) $((a+b)(b+c)(c+a)=1,a,b,c>0)$

$$ab+bc+ca\leqq\frac{3}{4}$$

問題 201　(Popa Alexandru)　$((a+b)(b+c)(c+a)=1, a,b,c>0)$

$$\frac{3}{16abc} \geqq a+b+c \geqq \frac{3}{2} \geqq 12abc$$

問題 202　(India 2007)　$(a,b,c>0)$

$$(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 \leqq 3(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$$

問題 203　(Romanian Regional Mathematic Olympiad 2006)　$(a,b,c>0)$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{4a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2+2c^2}$$

問題 204　(Pham Kim Hung)　$(a+b+c+d=4,\ a,b,c,d>0)$

$$\frac{1}{11+a^2}+\frac{1}{11+b^2}+\frac{1}{11+c^2}+\frac{1}{11+d^2} \leqq \frac{1}{3}$$

問題 205　(Milne's inequality)　$(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ b_1,b_2,\ldots,b_n>0)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right) \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$$

9　相加平均と相乗平均の不等式 (AM-GM Inequality)

例題 5　（1987 横浜国立大）「n 個の任意の正の数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ について，

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

が成り立つ」という命題を $P(n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$P(2)$ が正しいことを証明せよ．

(2)　$P(k)$ が正しいとき，$P(2k)$ も正しいことを証明せよ．

(3)　$P(k+1)$ が正しいとき，$P(k)$ も正しいことを証明せよ．

13 Schur の不等式

問題 206 (Russia 1999) a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

問題 207 (APMO 2007) x, y, z は正の実数で，$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x^2+yz}{x\sqrt{2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{2(z+x)}}+\frac{x^2+xy}{z\sqrt{2(x+y)}} \geqq 1.$$

問題 208 (Tigran Sloyan) a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leqq \frac{1}{3}.$$

14 Karamata の不等式 (Karamat's Majorization Inequality)

14.1 アーベルの公式 (Abel Formula)

問題 209 (2008 東工大・後期) 次の問いに答えよ．

(1) 実数 $a_1, a_2, x_1, x_2, y_1, y_2$ が
$0<a_1 \leqq a_2$，$a_1x_1 \leqq a_1y_1$，$a_1x_1+a_2x_2 \leqq a_1y_1+a_2y_2$ をみたしているとする．このとき $x_1+x_2 \leqq y_1+y_2$ であることを証明せよ．

(2) n を 2 以上の整数とし，$3n$ 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が
$0<a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ および n 個の不等式 $\sum\limits_{i=1}^{j} a_ix_i \leqq \sum\limits_{i=1}^{j} a_iy_i$
$(j=1, 2, \ldots, n)$ をみたしているならば，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqq \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ であることを証明せよ．

問題 210 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ は実数で

$$a_1 \geqq \frac{a_1+a_2}{2} \geqq \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \cdots \geqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$b_1 \geqq \frac{b_1+b_2}{2} \geqq \frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geqq \cdots \geqq \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$$

を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqq \frac{1}{n}\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

14.3　絶対値記号を含む不等式 1

問題 211　x, y, z が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$|x| + |y| + |z| + |x + y + z| \geqq |x + y| + |y + z| + |z + x|.$$

問題 212　x, y, z が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$3|x| + 3|y| + 3|z| + |x + y + z| \geqq 2|x + y| + 2|y + z| + 2|z + x|.$$

問題 213　n は正の整数で，x, y, z が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned} &|(n+1)x - ny| + |(n+1)y - nz| + |(n+1)z - nx| \\ &\geqq |nx - (n-1)y| + |ny - (n-1)z| + |nz - (n-1)x|. \end{aligned}$$

問題 214　x, y, z, t が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned} &2(|x| + |y| + |z| + |t|) + |x + y + z + t| \\ &\geqq |x + y| + |y + z| + |z + t| + |t + x| + |x + z| + |y + t|. \end{aligned}$$

問題 215　x_1, x_2, x_3, x_4 が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned} &(|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|) + 2|x_1 + x_2 + x_3 + x_4| \\ &\geqq |x_1 + x_2 + x_3| + |x_1 + x_2 + x_4| + |x_1 + x_3 + x_4| + |x_2 + x_3 + x_4|. \end{aligned}$$

問題 216　$n \geqq 3$ は正の整数で，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が実数で，$S = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ とおくとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| + (n-2)\,|S| \geqq \sum_{i=1}^{n} |S - x_i|.$$

問題 217　$n \geqq 3$ は正の整数で，$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ が実数で，$S = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ とおくとき，次の不等式を証明せよ．

$$n \sum_{i=1}^{n} |x_i| - |S| \geqq \sum_{i=1}^{n} |S - x_i|.$$

問題 218　$p,\ q$ は $p > q > 0$ 満たす実数，$n \geqq 2$ は正の整数で，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$|px_1 - qx_2| + |px_2 - qx_3| + \cdots + |px_n - qx_1| \geqq (p - q)(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|).$$

問題 219　$n \geqq 3$ は正の整数で，$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(n-2) \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \geqq \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} |x_i + x_j|.$$

問題 220　$n \geqq 3$, m は正の整数で，$2 \leqq m \leqq n-1$ とする．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\binom{n-2}{m-1}^{*1} \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \binom{n-2}{m-2} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \geqq \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqq n} |x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_m}|.$$

14.3　絶対値記号を含む不等式 2

問題 221　(1) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3(|x_4 - x_5| + |x_1 - x_5|) \\ &\geqq 2(|x_3 + x_4 - x_5| + |x_4 - x_5 + x_1| + |-x_5 + x_1 + x_2|). \end{aligned}$$

(2) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3(|x_4 - x_5| + |x_1 - x_6|) \\ &\geqq 2(|x_3 + x_4 - x_5| + |x_4 - x_5 - x_6| + |-x_5 - x_6 + x_1| + |-x_6 + x_1 + x_2|). \end{aligned}$$

(3) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 4x_6 + x_7 + 3(|x_4 - x_5| + |x_1 - x_7|) \\ &\geqq 2(|x_3 + x_4 - x_5| + |x_4 - x_5 - x_6| + |-x_6 - x_7 + x_1| + |-x_7 + x_1 + x_2|). \end{aligned}$$

(4) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + 3(|x_4 - x_5| + |x_1 - x_8|) \\ &\geqq 2(|x_3 + x_4 - x_5| + |x_4 - x_5 - x_6| + |-x_7 - x_8 + x_1| + |-x_8 + x_1 + x_2|). \end{aligned}$$

問題 222　x_1, x_2, $\ldots$, x_n は実数で，$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ を満たすとき，
$n = 3$, 4, 5, 6, 7 に対して，次の不等式を証明せよ．

$$3\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + x_{i+1}|\right) \geqq 2\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + x_{i+1} + x_{i+2}|\right). \tag{0.1}$$

ただし，$x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ とする．

問題 223　x_1, x_2, $\ldots$, x_n は実数で，$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$3\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + x_{i+1}|\right) \geqq 2\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + x_{i+1} + x_{i+2}|\right). \tag{0.2}$$

ただし，$x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ とする．

---

*1 $\binom{n}{r}$ は二項係数で $\binom{n}{r} \overset{\text{def}}{=} {}_n\mathrm{C}_r$

14.5 Karamata の不等式の実践的な使い方

問題 224 (Popoviciu's inequality)

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$a \in I,\ b \in I,\ c \in I$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$f(a)+f(b)+f(c)+3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geqq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{b+c}{2}\right)+2f\left(\frac{c+a}{2}\right).$$

問題 225 x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2 \geqq 2(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3).$$

問題 226 (Popoviciu-Titu Andreescu inequality)

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数で，$a \in I,\ b \in I,\ c \in I$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$f(a)+f(b)+f(c)+f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geqq \frac{4}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{b+c}{2}\right)+f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right].$$

問題 227 x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^6+y^6+z^6+x^2y^2z^2 \geqq \frac{4}{3}(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3).$$

問題 228 (Turkevici's inequality)

a, b, c, d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2.$$

問題 229 n は 2 以上の整数とする．$a_1 \geqq 0, a_2 \geqq 0, \dots, a_n \geqq 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+n\sqrt[n]{a_1^2a_2^2\cdots a_n^2} \geqq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2.$$

問題 230 $a_1, a_2, \dots, a_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leqq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

問題 231 (V.Adya Asuren)

$a_1, a_2, \dots, a_n$ は正の実数で，$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_2+a_3}{2}\cdot\cdots\frac{a_n+a_1}{2} \leqq \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\cdot\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\cdot\cdots\frac{a_n+a_1+a_2}{3}.$$

問題 232 (Mongolia 1996)

$a_1, a_2, \dots, a_n$ は正の実数で，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_2+a_3}{2}\cdot\cdots\frac{a_n+a_1}{2} \leqq \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\cdot\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\cdot\cdots\frac{a_n+a_1+a_2}{3}.$$

14.6　karamat の不等式の練習問題

問題 233　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ が正の実数で，$b_1, b_2, \ldots, b_n$ を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の順列とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

問題 234　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^3}{a_1} \geqq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

問題 235　m が正の整数で，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1^{m+2}}{a_2^m} + \frac{a_2^{m+2}}{a_3^m} + \cdots + \frac{a_n^{m+2}}{a_1^m} \geqq a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1.$$

問題 236　(Mircea Lascu, Gazeta Mathematică)

a, b, c が正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geqq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

問題 237　(Junior Balkan MO 2002 Shortlist)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

問題 238　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1a_2\cdots a_n = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}.$$

問題 239　(Serbia 2008)

a, b, c は正の実数で $a + b + c = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc \geqq \frac{4}{9}.$$

問題 240　(Pham Kim Hung)

a, b, c, d, e が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned}&\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{d+e}{2}\cdot\frac{e+a}{2}\\ \leqq\ &\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{b+c+d}{3}\cdot\frac{c+d+e}{3}\cdot\frac{d+e+a}{3}\cdot\frac{e+a+b}{3}.\end{aligned}$$

問題 241　(J.C. Burkill)

a, b, c, x, y, z は正の実数で，$a + b + c = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned}&x^ay^bz^c - (b+c)y^{\frac{b}{b+c}}z^{\frac{c}{b+c}} - (c+a)z^{\frac{c}{c+a}}x^{\frac{a}{c+a}} - (a+b)x^{\frac{a}{a+b}}y^{\frac{b}{a+b}}\\ &\quad + ax + by + cz \geqq 0.\end{aligned}$$

14.7 Popoviciu の不等式の拡張 1

問題 242 (H.Kober)

$a_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n), n > 2$ とし，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ のすべてが等しくはないとする．このとき，

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i + n(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} - 2\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (a_i a_j)^{\frac{1}{2}} \geqq 0\,.$$

0 に等しくなるのは，ある番号 i に対して

$$a_i = 0, \quad a_1 = \cdots = a_{i-1} = a_{i+1} = \cdots = a_n > 0$$

のときのみに限る．

14.8 Popoviciu の不等式の拡張 2

問題 243 a, b, c, d が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd \geqq 2(a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab).$$

14.9 凸関数の不等式

問題 244 a, b が実数で，$c, d \in [a, b]$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$|a| + |b| - |a + b| \geqq |c| + |d| - |c + d|.$$

問題 245 a, b は正の実数で，$c, d \in [a, b]$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geqq \sqrt{\frac{c}{d}} + \sqrt{\frac{d}{c}}.$$