二項係数を含む等式の証明方法について

柳田　五夫

1　はじめに

二項係数を含む興味深い等式と，これらの等式を統一的に証明する方法を紹介したい。
また，二項係数 $\dbinom{n}{r}$ $(= {}_nC_r)$ を拡張して使用することにする。
すなわち

$$\binom{n}{r} = \begin{cases} {}_nC_r & (n \geqq r \geqq 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n \geqq 0, r = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n < r \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする。

2　二項係数を含む等式

命題 1　n を自然数とするとき

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2^{-2k}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k} = 2^{-n}\binom{2n}{n} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

この等式は，参考文献［１］で指摘されているように

$x > 0$ のとき

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{x^{-1}}{2} + 1\right)^n = 2^{-n}(x^{1/2} + x^{-1/2})^{2n} \qquad \cdots\cdots ②$$

の両辺の定数項を比較することにより，① の直接的で素敵な証明が得られる。

［証明］ $x > 0$ のとき，等式

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{x^{-1}}{2}+1\right)^n = \left(\frac{(x^{1/2}+x^{-1/2})^2}{2}\right)^n = 2^{-n}(x^{1/2}+x^{-1/2})^{2n}$$

の両辺の定数項を比較する。多項定理を使うと，左辺の一般項は，

$$\frac{n!}{p!q!r!}\left(\frac{x}{2}\right)^p\left(\frac{x^{-1}}{2}\right)^q = \frac{n!}{p!q!r!}\cdot\frac{1}{2^{p+q}}x^{p-q}$$

$$(p \geqq 0, q \geqq 0, r \geqq 0, p+q+r=n)$$

定数項は $q=p$ のときだから

$$q=p, r=n-2p$$

より，p の値の動く範囲は $0 \leqq p \leqq \left[\dfrac{n}{2}\right]$ となる。

したがって，定数項は

$$\sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{(p!)^2(n-2p)!}\cdot\frac{1}{2^{2p}} = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2^{-2p}\binom{n}{2p}\binom{2p}{p}$$

である。

　また，$2^{-n}(x^{1/2}+x^{-1/2})^{2n}$ の一般項は

$$2^{-n}\binom{2n}{k}\left(\sqrt{x}\right)^{2n-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = 2^{-n}\binom{2n}{k}\left(\sqrt{x}\right)^{2n-2k}$$

となる。これから定数項は $k=n$ のときで $2^{-n}\dbinom{2n}{n}$ である。したがって，①が成り立つ。 □

　命題 1 は $S_{even} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2^{-2k}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}$ のときであるが

$$S_{odd} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} 2^{-2k-1}\binom{n}{2k+1}\binom{2k+1}{k}$$

はどうなるであろうか？

命題 2　n を自然数とするとき,

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} 2^{-2k-1}\binom{n}{2k+1}\binom{2k+1}{k} = 2^{-n}\binom{2n}{n-1}\left(= 2^{-n}\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}\right) \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

証明するには等式② の両辺の x の係数を比較すればよい。

① , ③ に似たような式に，次のものがある。

命題 3　n を自然数，k を 0 以上の整数とするとき,

$$\sum_{j=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2j}\binom{j}{k} = 2^{n-2k-1}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} \quad \cdots\cdots ④$$

$$\sum_{j=k}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2j+1}\binom{j}{k} = 2^{n-2k-1}\binom{n-k-1}{k} \quad \cdots\cdots ⑤$$

［解説］参考文献［３］でチェビシェフ多項式 $T_n(x)$ に対して

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n}{n-k}2^{n-2k-1}\binom{n-k}{k}x^{n-2k} \quad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つことを証明した。また

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n}{2}\\ &= \cdots\cdots\\ &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2j}(\cos\theta)^{n-2j}(\cos^2\theta - 1)^j\end{aligned}$$

を用いると，$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ だから

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2j} x^{n-2j}(x^2-1)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2j} x^{n-2j} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^k (x^2)^{j-k} \\
&= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{j} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} (-1)^k x^{n-2k}
\end{aligned}$$

となる。ここで， $f(j,k) = \binom{n}{2j}\binom{j}{k}(-1)^k x^{n-2k}$ とおくと

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{j} f(j,k) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{j=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} f(j,k)$$

が成り立つ。これは

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{j} f(j,k) \\
&= f(0,0) \\
&\quad + f(1,0) + f(1,1) \\
&\quad + f(2,0) + f(2,1) + f(2,2) \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad + f\left(\left[\frac{n}{2}\right], 0\right) + f\left(\left[\frac{n}{2}\right], 1\right) + \cdots\cdots + f\left(\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]\right)
\end{aligned}$$

において，縦方向に加えると

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{j} f(j,k) &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} f(j,0) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} f(j,1) + \cdots + \sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n}{2}\right]} f\left(j, \left[\frac{n}{2}\right]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{j=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} f(j,k)
\end{aligned}$$

からわかる。

したがって

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{j=k}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2j}\binom{j}{k}(-1)^k x^{n-2k} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

と表せるから，⑥ と ⑦の x^{n-2k} の項を比較して ④を得る。

⑤は第 2 種チェビシェフ多項式 $g_n(x)$ について考えればよい。[3] から

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k 2^{n-2k-1}\binom{n-k-1}{k}x^{n-2k-1}$$

が成り立つ．

また

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2j+1}(\cos\theta)^{n-2j-1}(\cos^2\theta-1)^j$$

を用いると，$g_n(\cos\theta)=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ だから

$$g_n(x)=\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2j+1}x^{n-2j-1}(x^2-1)^j$$

となる．後は $T_n(x)$ のときと同様に考えればよい。

2007 年 1 月号の「大学への数学」の宿題 欄に次の問題が出題された．

n を自然数，k を 0 以上 $\dfrac{n}{2}$ 以下の整数，θ を実数とするとき，次の 2 式を証明せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{j=k}^{[n/2]} {}_n\mathrm{C}_{2j}\cdot {}_j\mathrm{C}_k=\frac{n}{n-k}\cdot 2^{n-2k-1}{}_{n-k}\mathrm{C}_k$

(2) $\displaystyle\cos n\theta=n\sum_{l=0}^{[n/2]}\left\{(-1)^l\cdot 2^{n-2l-1}\cdot\frac{{}_{n-l}\mathrm{C}_l}{n-l}\cos^{n-2l}\theta\right\}$

（大学への数学　2007　1 月号　宿題）

(1) は④と同じ等式である．

(2) は⑥で $x=\cos\theta$ とおいた式で，$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ を使うと得られる。

3　ヴァンデルモンドの定理

命題 1 や命題 3 の統一的な証明方法を次に紹介したい。そのための準備をする。
rising factorial $(a)_n$ は次の式で定義される。

$$(a)_n = \begin{cases} a(a+1)\cdots(a+n-1) & (\,n \geqq 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (\,n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

定義から $(0)_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots)$ となる。また，容易にわかるように
n が正の整数のとき

$$(-n)_k = (-n)(-n+1)\cdots(-n+k-2)(-n+k-1)$$

であるから，$k \geqq n+1$ のとき $(-n)_k = 0$ となる。

ここで

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, & b \\ & \\ & c \end{matrix}\; ; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k} x^k $$

と定義すると，次の定理が成り立つ。

定理 1　(Chu-Vandermonde)
n を 0 以上の整数とするとき，

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & b \\ & \\ & c \end{matrix}\; ; 1\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n} \qquad \cdots\cdots ⑧ $$

［証明］ $\dfrac{(c)_n}{(c-b)_n}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & b \\ & \\ & c \end{matrix}\; ; 1\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c)_n}{(c-b)_n} \cdot \frac{(-n)_k (b)_k}{k!(c)_k}$ より

$$F(n,k) = \frac{(c)_n}{(c-b)_n} \cdot \frac{(-n)_k (b)_k}{k!(c)_k},$$

$$G(n,k) = F(n,k)R(n,k)\,,\; R(n,0) = 0$$

とおき

$$F(n,k) - F(n-1,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \qquad \cdots\cdots ⑨$$

を満たす関数 $G(n,k)$ を求める。
まず，$k \geqq n+1$ のとき $(-n)_k=0$ だから
$k \geqq n+1$ のとき $F(n,k)=0,\, G(n,k)=0$ となることに注意しておきたい。

$$
\begin{aligned}
&F(n,k)-F(n-1,k)=G(n,k+1)-G(n,k)\\
\Longleftrightarrow\ &F(n,k)-F(n-1,k)=F(n,k+1)R(n,k+1)-F(n,k)R(n,k)
\end{aligned}
$$

$R(n,k+1)$ について解くと

$$
\begin{aligned}
R(n,k+1)&=\frac{F(n,k)}{F(n,k+1)}\left[-\frac{F(n-1,k)}{F(n,k)}+R(n,k)+1\right]\\
&=-\frac{(k+1)(c+k)}{(n-k)(b+k)}\left[-\frac{(n-k)(c+n-b-1)}{n(n+c-1)}+R(n,k)+1\right]
\end{aligned}
$$

ここで，$k=0,1,2$ とおくと，$R(n,0)=0$ に注意して

$$
R(n,1)=-\frac{c}{n(c+n-1)},\, R(n,2)=-\frac{2(c+1)}{n(c+n-1)},\, R(n,3)=-\frac{3(c+2)}{n(c+n-1)}
$$

を得るので

$$
R(n,k)=-\frac{k(c+k-1)}{n(c+n-1)}
$$

となることを数学的帰納法で示すことができる。
よって，⑨を満たす $G(n,k)$ が存在するから

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}[F(n,k)-F(n-1,k)]&=\lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{M}[F(n,k)-F(n-,k)]\\
&=\lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{M}[G(n,k+1)-G(n,k)]\\
&=\lim_{M\to\infty}[G(n,M+1)-G(n,0)]=0
\end{aligned}
$$

したがって

$$
f(n)=\sum_{k=0}^{\infty}F(n,k)
$$

とおくと

$$
f(n)=f(n-1)
$$

がすべての正の整数 n に対して成り立つから

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c)_0}{(c-b)_0} \cdot \frac{(0)_k (b)_k}{k!(c)_k} \\
&= \frac{(c)_0}{(c-b)_0} \cdot \frac{(0)_0 (b)_0}{0!(c)_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(c)_0}{(c-b)_0} \cdot \frac{(0)_k (b)_k}{k!(c)_k} \\
&= 1 + 0 = 1
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{(c)_n}{(c-b)_n} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & b \\ & & ;1 \\ & c \end{matrix} \right) = 1$$

すなわち

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & b \\ & & ;1 \\ & c \end{matrix} \right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}$$

が成り立つ。 ■

4　超幾何関数を用いた統一的な証明方法

ヴァンデルモンドの定理から，級数がヴァンデルモンドの定理の式⑧のような超幾何関数で表されれば，級数の値が求められることになる。

次に，級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} t_k z^k$ を超幾何関数で簡単に表す方法を述べる。

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_p)}{(k+1)(k+b_1)(k+b_2)\cdots(k+b_q)}$$

と表されるときは超幾何関数（級数）を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} t_k z^k &= t_0\,{}_pF_q\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p & \\ & & & & ;z \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_q & \end{pmatrix} \\ &= t_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k(a_2)_k\cdots(a_p)_k}{k!(b_1)_k(b_2)_k\cdots(b_q)_k} z^k\end{aligned}$$

と表せることを利用する。これは,

$$t_{k+1} = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_p)}{(k+1)(k+b_1)(k+b_2)\cdots(k+b_q)} t_k$$

の両辺に

$$\frac{(k+1)!(b_1)_{k+1}(b_2)_{k+1}\cdots(b_q)_{k+1}}{(a_1)_{k+1}(a_2)_{k+1}\quad\cdots(a_p)_{k+1}}$$

をかけると

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)!(b_1)_{k+1}(b_2)_{k+1}\cdots(b_q)_{k+1}}{(a_1)_{k+1}(a_2)_{k+1}\cdots(a_p)_{k+1}} t_{k+1} &= \frac{k!(b_1)_k(b_2)_k\cdots(b_q)_k}{(a_1)_k(a_2)_k\cdots(a_p)_k} t_k \\ &\qquad\text{（ k の値によらず一定）} \\ &= \frac{0!(b_1)_0(b_2)_0\cdots(b_q)_0}{(a_1)_0(a_2)_0\cdots(a_p)_0} t_0 = t_0\end{aligned}$$

したがって

$$t_k = t_0 \frac{(a_1)_k(a_2)_k\cdots(a_p)_k}{k!(b_1)_k(b_2)_k\cdots(b_q)_k}$$

と表せるからである。

以上のことを用いて，命題 1 と命題 3 の等式の左辺の式を超幾何関数で表すことができる。

命題 1 において

$$t_k = 2^{-2k}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}$$

とおくと

$$t_0 = 1, \quad \frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{4(k+1)^2} = \frac{(k-\frac{n}{2})(k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{(k+1)(k+1)}$$

より

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} 2^{-2k}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k} = {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n/2, \quad -(n-1)/2 \\ 1\end{matrix}\,;1\right) \qquad \cdots\cdots ⑩$$

命題 3 の左辺の式を $k=0$ からの和に変形すると

$$\sum_{j=n}^{[\frac{m}{2}]}\binom{m}{2j}\binom{j}{n} = \sum_{k\geqq 0}\binom{m}{2n+2k}\binom{n+k}{n}$$

$$t_k = \binom{m}{2n+2k}\binom{n+k}{n}$$

とおくと

$$t_0 = \binom{m}{2n},$$

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(m-2n-2k)(m-2n-2k-1)}{2(k+1)(2n+2k+1)} = \frac{\left(k-\dfrac{m-2n}{2}\right)\left(k-\dfrac{m-2n-1}{2}\right)}{(k+1)\left(k+\dfrac{2n+1}{2}\right)}$$

より

$$\sum_{j=n}^{[\frac{m}{2}]}\binom{m}{2j}\binom{j}{n} = \binom{m}{2n}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-(m-2n)/2, \quad -(m-2n-1)/2 \\ (2n+1)/2\end{matrix}\,;1\right)$$

$$\cdots\cdots ⑪$$

となる。⑩，⑪ の右辺の式の値を求めるために次の等式を示しておく。

M, N を 0 以上の整数とするとき

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -M/2, \quad -(M-1)/2 \\ N+1 \end{matrix} ;1\right) = \frac{2^{-M}(2M+2N)!N!}{(M+2N)!(M+N)!} \quad \cdots\cdots ⑫ $$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -(M-1)/2, \quad -M/2 \\ N+1/2 \end{matrix} ;1\right) = \frac{2^{M}(2N)!(M+N)!}{N!(M+2N)!} \quad \cdots\cdots ⑬ $$

［証明］ M が偶数のとき $M = 2m$ とおくと

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -M/2, \quad -(M-1)/2 \\ N+1 \end{matrix} ;1\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, \quad -m+1/2 \\ N+1 \end{matrix} ;1\right) $$

$$ = \frac{(N+m+1/2)_m}{(N+1)_m} $$

$$ = \frac{(N+m+1/2)(N+m+3/2)\cdots(N+2m-1/2)}{(N+1)(N+2)\cdots(N+m)} $$

$$ = \frac{2^{-m}(2N+2m+1)(2N+2m+3)\cdots(2N+4m-1)}{(N+1)(N+2)\cdots(N+m)} $$

分母と分子に

$$ (2N+2m)!N!(N+m+1)\cdots(N+2m) $$
$$ = N!(N+2m)!2^{-m}(2N+2m+2)(2N+2m+4)\cdots(2N+4m) $$

をかけると

$$ \begin{aligned} (\text{分母}) &= (2N+2m)!N!(N+1)(N+2)\cdots(N+m) \\ &\quad \cdot (N+m+1)(N+m+2)\cdots(N+2m) \\ &= (2N+2m)!(N+2m)! \\ (\text{分子}) &= 2^{-2m}N!(2N+2m)!(2N+2m+1)\cdots(2N+4m-1) \\ &\quad \cdot (2N+2m+2)(2N+2m+4)\cdots(2N+4m) \\ &= 2^{-2m}N!(2N+4m)! \end{aligned} $$

となるから ⑫ は成り立つ。

M が奇数のときは $M = 2m+1$ とおき⑫ は成り立つことが示せる。（省略）

⑬の証明も同じようにできる。 □

⑩，⑪の値は⑫と⑬を利用すれば求めることができる。

5　その他の適用例

大学入試では，大阪大学で出題された次の問題の（２）でヴァンデルモンドの定理を使うことができる。

x, y を変数とする。

(1) n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 a, b を求めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots\cdots(y+n)(y+n+1)} = \frac{a}{y(y+1)\cdots\cdots(y+n)} + \frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots\cdots(y+n+1)}$$

(2) すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

（2006 大阪大・理）

(2) で

$$t_k = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{x+k}$$

とおくと

$$t_0 = \frac{1}{x},\ \frac{t_{k+1}}{t_k} = -\frac{(n-k)(x+k)}{(k+1)(x+k+1)} = \frac{(k-n)(k+x)}{(k+1)(k+x+1)}$$

より

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{x+r} &= \frac{1}{x}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, & x \\ & x+1\end{matrix}\ ;1\right)\\ &= \frac{1}{x}\ \frac{(1)_n}{(x+1)_n}\\ &= \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\end{aligned}$$

と求めることができる。

次に，参考文献 [4] で見つけた問題の別解を紹介したい。

n を正の整数とするとき，次を示せ。

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{[(n-k)/2]} = \binom{2n+1}{n} \qquad \text{(China 1994)}$$

[証明] $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^j \binom{n}{j} \binom{n-j}{[(n-j)/2]}$ において，$n-j=k$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} 2^j \binom{n}{j} \binom{n-j}{[(n-j)/2]} \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{n-k} \binom{k}{[(k)/2]} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{[(k)/2]} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} 2^{n-2s} \binom{n}{2s} \binom{2s}{[(2s)/2]} + \sum_{s=0}^{\infty} 2^{n-2s-1} \binom{n}{2s+1} \binom{2s+1}{[(2s+1)/2]} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2^{n-2k} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} + 2^{n-2k-1} \binom{n}{2k+1} \binom{2k+1}{k} \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{n-k-1} \binom{n}{2k} \binom{2k+1}{k} \frac{n+2}{2k+1}
\end{aligned}$$

と変形できる。

$$t_k = \frac{n+2}{2k+1} 2^{n-2k-1} \binom{n}{2k} \binom{2k+1}{k}$$

とおくと

$$t_0 = (n+2)2^{n-1},$$

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{4(k+1)(k+2)} = \frac{\left(k-\dfrac{n}{2}\right)\left(k-\dfrac{n-1}{2}\right)}{(k+1)(k+2)}$$

となる。

したがって

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} 2^j \binom{n}{j}\binom{n-j}{[(n-j)/2]} &= (n+2)2^{n-1}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{n}{2}, & -\frac{n}{2}+\frac{1}{2} \\ & 2\end{matrix} ;1\right) \\
&= (n+2)2^{n-1}\cdot 2^{-n}\frac{(2n+2)!1!}{(n+2)!(n+1)!} \ (\because \ ⑫) \\
&= \binom{2n+1}{n} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

[注] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^j \binom{n}{k}\binom{n-k}{[(n-k)/2]}$ において，$n-k=l$ とおくと，この式は $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} 2^{n-l}\binom{n}{l}\binom{l}{[l/2]}$ に等しくなる。 これを用いると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} 2^j \binom{n}{k}\binom{n-k}{[(n-k)/2]} = \sum_{l=0}^{n} 2^{n-l}\binom{n}{l}\binom{l}{[l/2]} \\
&= \sum_{m=0}^{n} 2^{n-2m}\binom{n}{2m}\binom{2m}{m} + \sum_{m=0}^{n} 2^{n-2m-1}\binom{n}{2m+1}\binom{2m+1}{m}
\end{aligned}
$$

と変形できるから，①$\times 2^n$+③ $\times 2^n$ から

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{n} 2^{n-2m}\binom{n}{2m}\binom{2m}{m} + \sum_{m=0}^{n} 2^{n-2m-1}\binom{n}{2m+1}\binom{2m+1}{m} \\
&= \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} \\
&= \binom{2n+1}{n}
\end{aligned}
$$

と求めることもできる。

〈参考文献〉

[1] T. Amdeberhan, O. R. Espinosa, V. H. Moll and A. Straub , Wallis-Ramanujan-Schur-Feynman , arXiv:1004.2453v1 [math.CA] 14 Apr 2010

[2] Wilf-Zeilberger pair -Wikipedia , the free encyclopedia

[3] 柳田五夫 , チェビシェフ多項式の係数について , 数研通信 , No.69

[4] 監訳者　小林一章，鈴木晋一，数学オリンピックへの道 1　組合せ論の精選 102 問，朝倉書店，P.15