二項係数を含む等式について (2)

柳田 五夫

1 初等的な解法

$$S_n = \frac{\dbinom{6n}{3n}\dbinom{3n}{n}}{2(2n+1)\dbinom{2n}{n}} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおくと

$$\{S_n\} : \frac{1}{2}\,, 5\,, 231\,, 14568\,, 1062347\,, 84021990\,, 7012604550,$$
$$607892634420\,, 54200780036595\,, \cdots\cdots$$

Zhi-Wei Sun [1] によれば

S_n $(n \geqq 1)$ は整数 $\cdots\cdots ②$

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3x})\right)}{8\sqrt{3x}} \quad \left(0 < x < \frac{1}{108}\right) \qquad \cdots\cdots ③$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{108^k} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \qquad \cdots\cdots ④$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{(2k+3)108^k} = \frac{27\sqrt{3}}{256} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ.

ここでは，できるだけ初等的に③，④，⑤を証明する.

まず，微分方程式を用いて③を証明する.

[③の証明]　S_n を

$$S_n = \frac{(6n)!n!}{2(2n+1)(3n)!\{(2n)!\}^2}$$

と変形すると

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{(2n+3)(n+1)}{6(6n+1)(6n+5)} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3/2)(n+1)}{108(n+1/6)(n+5/6)} = \frac{1}{108}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ は $|x| < \dfrac{1}{108}$ で収束するから

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$$

とおくと

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kS_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)S_{k+1}x^k\,,$$

$$xf'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kS_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} kS_k x^k\,.$$

また

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)S_k x^{k-2}$$

から

$$x^2 f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)S_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)S_k x^k\,,$$

$$xf''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)S_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)kS_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)S_{k+1}x^k$$

これらの式を用いると

$$\begin{aligned}
&(ax+bx^2)f''(x) + (c+dx)f'(x) + ef(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow &\sum_{k=0}^{\infty} \{ak(k+1)S_{k+1} + b(k-1)kS_k + c(k+1)S_{k+1} + dkS_k + eS_k\}\, x^k = 0 \\
\Longleftrightarrow &\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left\{ak^2 + (a+c)k + c\right\} S_{k+1} + \left\{bk^2 + (-b+d)k + e\right\} S_k\right] = 0
\end{aligned}$$

⑥より $(2k^2+5k+3)S_{k+1}-(216k^2+216k+30)S_k=0$ が成り立つから

$$a=2,\ a+c=5,\ c=3,\ b=-216,\ -b+d=-216,\ e=-30$$

すなわち，

$$a=2,\ c=3,\ b=-216,\ d=-432,\ e=-30$$

とおくと，微分方程式

$$\boxed{(2x-216x^2)f''(x)+(3-432x)f'(x)-30f(x)=0 \qquad \cdots\cdots ⑦}$$

を得る．次の式

$$f(x)=\frac{C_1\cos\left(\dfrac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3x})\right)}{\sqrt{x}}+\frac{C_2\sin\left(\dfrac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3x})\right)}{\sqrt{x}}$$

を求めることを目標にする．

⑦ を変形する．

$$\begin{aligned}(2xf''(x)+3f'(x))\sqrt{1-108x}+(2xf'(x)+f(x))\left(-\frac{54}{\sqrt{1-108x}}\right)\\ =-\frac{24f(x)}{\sqrt{1-108x}}\end{aligned}$$

$$\left[(2xf'(x)+f(x))\sqrt{1-108x}\right]'=-\frac{24f(x)}{\sqrt{1-108x}} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$\sqrt{1-108x}=\sqrt{1-(6\sqrt{3x})^2}$ より

$$6\sqrt{3x}=\sin\theta\,(\theta=\arcsin(6\sqrt{3x})),\ f(x)=F(\theta)$$

とおくと

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{54}{\sin\theta\cos\theta}\ ,\ f'(x)=\frac{dF(\theta)}{dx}=\frac{dF(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}=F'(\theta)\cdot\frac{54}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\begin{aligned}(2xf'(x)+f(x))\sqrt{1-108x}&=\left(2\cdot\frac{\sin^2\theta}{108}\cdot F'(\theta)\cdot\frac{54}{\sin\theta\cos\theta}+F(\theta)\right)\cos\theta\\&=\sin\theta F'(\theta)+F(\theta)\cos\theta=(F(\theta)\sin\theta)'\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}\left[(2xf'(x)+f(x))\sqrt{1-108x}\right]' &= \frac{d}{dx}\left[(2xf'(x)+f(x))\sqrt{1-108x}\right]\\ &= \frac{d}{dx}\big(\sin\theta F'(\theta)+F(\theta)\cos\theta\big)\\ &= \frac{d}{d\theta}\big(\sin\theta F'(\theta)+F(\theta)\cos\theta\big)\frac{d\theta}{dx}\\ &= \big(\sin\theta F'(\theta)+F(\theta)\cos\theta\big)'\cdot\frac{54}{\sin\theta\cos\theta}\\ &= [F(\theta)\sin\theta]''\cdot\frac{54}{\sin\theta\cos\theta}\end{aligned}$$

また

$$-\frac{24f(x)}{\sqrt{1-108x}} = -\frac{24F(\theta)}{\cos\theta}$$

だから ⑧より

$$[F(\theta)\sin\theta]''\cdot\frac{54}{\sin\theta\cos\theta} = -\frac{24F(\theta)}{\cos\theta}$$

すなわち

$$[F(\theta)\sin\theta]'' = -\frac{4}{9}F(\theta)\sin\theta$$

$G(\theta)=F(\theta)\sin\theta$ とおくと

$$G''(\theta) = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 G(\theta)$$

ここで，$z''=-\omega^2 z$ の解は $z=c_1\cos\omega\theta+c_2\sin\omega\theta$ となることを用いると

$$F(\theta)\sin\theta = C_1\cos\left(\frac{2}{3}\theta\right)+C_2\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$$

$x=0$ のとき $\theta=0$，$F(0)=f(0)=\dfrac{1}{2}$ であるから，$C_1=0$
したがって，$x\fallingdotseq 0$ $(\theta\fallingdotseq 0)$ のとき

$$F(\theta) = \frac{C_2\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)}{\sin\theta}$$

C_2 を求めるために，上の式で $x\to 0\,(\theta\to 0)$ とする．

$$\frac{1}{2} = \lim_{\theta\to 0}F(\theta) = C_2\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{2}{3}C_2\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)}{\frac{2}{3}\theta}\cdot\frac{\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{3}C_2$$

から

$$C_2 = \frac{3}{4} \quad , F(\theta) = \frac{\frac{3}{4}\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{\frac{3}{4}\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)}{6\sqrt{3x}} = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3x})\right)}{8\sqrt{3x}}$$

したがって

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3x})\right)}{8\sqrt{3x}} \quad \left(0 < x < \frac{1}{108}\right) \qquad ③$$

が成り立つ. ■

[④の証明]　次に

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{108^k} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

を示す.

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3x})\right)}{8\sqrt{3x}} \quad \left(0 < x < \frac{1}{108}\right) \qquad ③$$

で，$x \to \frac{1}{108} - 0$ とするためには，次のアーベルの連続定理を用いればよい.

アーベル (Abel) の連続定理　収束半径が $R\,(0 < R < \infty)$ のべき級数で表される関数 $f(x) = \sum c_n x^n$ について，$f(x) = \sum c_n R^n$ が収束するならば，収束端点でも連続性が保たれる.

$$\lim_{x \to R-0} f(x) = f(R)$$

$T_n = \frac{S_n}{108^n}$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{T_n}{T_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{18(2n+3)(n+1)}{(6n+1)(6n+5)} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(54n+49)}{(6n+1)(6n+5)} = \frac{3}{2} > 1\end{aligned}$$

であるから，ラーベの判定法により

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{108^k}$$

は収束する．したがって，アーベルの連続定理により

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{108^k} &= \lim_{x \to \frac{1}{108}} \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3x})\right)}{8\sqrt{3x}} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{4}{3}} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

■

ラーベ (Raabe) の判定法　正項級数 $\sum a_n$ は $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ ならば収束するが，$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ ならば発散する．

[⑤の証明]

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3x})\right)}{8\sqrt{3x}} \quad \left(0 < x < \frac{1}{108}\right) \qquad ③$$

において x のところに x^2 を代入した式の両辺に x^2 をかけると

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^{2k+2} = \frac{x\sin\left(\frac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3}x)\right)}{8\sqrt{3}} \quad \left(0 < x < \frac{1}{6\sqrt{3}}\right)$$

0 から x まで積分すると

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{2k+3} x^{2k+3} = \int_0^x \frac{x\sin\left(\frac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3}x)\right)}{8\sqrt{3}}\,dx \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$\arcsin(6\sqrt{3}x)=\theta$ とおくと，$x=\dfrac{\sin\theta}{6\sqrt{3}}$，$dx=\dfrac{\cos\theta d\theta}{6\sqrt{3}}$ で

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{x\sin\left(\frac{2}{3}\arcsin(6\sqrt{3}x)\right)}{8\sqrt{3}}dx &= \frac{1}{8\sqrt{3}}\int_0^\theta \frac{\sin\theta}{6\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)\frac{\cos\theta d\theta}{6\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{864\sqrt{3}}\int_0^\theta \sin\theta\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)\cos\theta d\theta\\ &= \frac{1}{1728\sqrt{3}}\int_0^\theta \sin 2\theta\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)d\theta\\ &= \frac{1}{3456\sqrt{3}}\int_0^\theta\left\{\cos\left(\frac{4}{3}\theta\right)-\cos\left(\frac{8}{3}\theta\right)\right\}d\theta\\ &= \frac{1}{3456\sqrt{3}}\left\{\frac{3}{4}\sin\left(\frac{4}{3}\theta\right)-\frac{3}{8}\sin\left(\frac{8}{3}\theta\right)\right\}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{27648}\left\{2\sin\left(\frac{4}{3}\theta\right)-\sin\left(\frac{8}{3}\theta\right)\right\}\end{aligned}$$

したがって，⑨ は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{2k+3}x^{2k} = \frac{\sqrt{3}}{27648x^3}&\left\{2\sin\left(\frac{4}{3}\arcsin(6\sqrt{3}x)\right)\right.\\ &\left.-\sin\left(\frac{8}{3}\arcsin(6\sqrt{3}x)\right)\right\}\quad\left(0<x<\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)\qquad\cdots\cdots⑩\end{aligned}$$

となる．

$\dfrac{S_k}{(2k+3)108^k}<\dfrac{S_k}{108^k}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ が成り立ち，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{108^k}$ が収束することより

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{(2k+3)108^k}$ は収束する．したがって，アーベルの連続定理により

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{2k+3}(6\sqrt{3})^{-2k}\\ &=\lim_{x\to\frac{1}{6\sqrt{3}}}\left[\frac{\sqrt{3}}{27648x^3}\left\{2\sin\left(\frac{4}{3}\arcsin(6\sqrt{3}x)\right)-\sin\left(\frac{8}{3}\arcsin(6\sqrt{3}x)\right)\right\}\right]\\ &=\frac{\sqrt{3}(6\sqrt{3})^3}{27648}\left\{2\sin\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\ &=\frac{27\sqrt{3}}{256}\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{(2k+3)108^k}=\frac{27\sqrt{3}}{256} \qquad ⑤$$

が成り立つ. ■

2　超幾何関数を用いる方法

ここでは

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{108^k}=\frac{3\sqrt{3}}{8} \qquad ④$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{(2k+3)108^k}=\frac{27\sqrt{3}}{256} \qquad ⑤$$

の左辺を超幾何関数で表し，④，⑤を証明することを考える.
まず，④ を示す.

$$t_k=\frac{S_k}{108^k}$$

とおくと

$$t_0=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{(6k+1)(6k+5)}{18(2k+3)(k+1)}=\frac{(k+1/6)(k+5/6)}{(k+3/2)(k+1)}$$

より

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{108^k}=\frac{1}{2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/6, & 5/6 \\ & 3/2\end{matrix};1\right)$$

この値を求めるために，ガウスの公式

(Gauss's ${}_2F_1$ identity) $Re(c-a-b)>0$ が成り立つとき

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a, & b \\ & c\end{matrix};1\right)=\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad \cdots\cdots ⑪$$

を用いる．ガウスの公式から

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{108^k}=\frac{1}{2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/6, & 5/6 \\ & & ;1 \\ & 3/2\end{matrix}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

ここで，ガンマ関数の公式

$(\gamma 1)\quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$(\gamma 2)\quad x$ が整数でないとき，$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$

と

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

を計算に使用する．

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\frac{1}{2}\pi,$$

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

であるから

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{108^k}=\frac{1}{2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/6, & 5/6 \\ & & ;1 \\ & 3/2\end{matrix}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}
$$

となり，④ は成り立つ．

次に⑤を示す．

$$
u_k = \frac{S_k}{(2k+3)108^k}
$$

とおくと

$$
u_0 = \frac{1}{6}\ ,\ \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(6k+1)(6k+5)}{18(2k+5)(k+1)} = \frac{\left(k+\frac{1}{6}\right)\left(k+\frac{5}{6}\right)}{\left(k+\frac{5}{2}\right)(k+1)}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{(2k+3)108^k} &= \frac{1}{6}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/6, & 5/6 & \\ & & ;1 \\ & 5/2 & \end{matrix}\right) \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{6}\right)} \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2 \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \\
&= \frac{3}{8}\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) &= \frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8}{27} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{16\pi}{27\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{(2k+3)108^k} &= \frac{1}{6}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/6, & 5/6 \\ & 5/2 \end{matrix} ; 1\right) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{16\pi} \\
&= \frac{27\sqrt{3}}{256}
\end{aligned}
$$

となり，⑤ は成り立つ. ■

3 一般形

$$f_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{108^k} \text{ , } f_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{(2k+3)108^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{2\left(k+\frac{3}{2}\right)_1 108^k}$$

$$f_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{(2k+3)(2k+5)108^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{2^2\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(k+\frac{5}{2}\right)108^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{2^2\left(k+\frac{3}{2}\right)_2 108^k}$$

をさらに一般化したものを考える.

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{2^m\left(k+\frac{3}{2}\right)_m 108^k} \qquad \cdots\cdots ⑫$$

$$t_k = \frac{S_k}{2^m\left(k+\frac{3}{2}\right)_m 108^k}$$

とおくと

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{2^{m+1}\left(\frac{3}{2}\right)_m}, \\ \frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{\left(k+\frac{3}{2}\right)_m}{108\left(k+\frac{5}{2}\right)_m} \cdot \frac{S_{k+1}}{S_k} \\ &= \frac{k+\frac{3}{2}}{108\left(k+\frac{3}{2}+m\right)} \cdot \frac{6(6k+1)(6k+5)}{(k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\left(k+\frac{1}{6}\right)\left(k+\frac{5}{6}\right)}{k+\frac{3}{2}+m} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{1}{2^{m+1}\left(\frac{3}{2}\right)_m} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, & \frac{5}{6} & \\ & m+\frac{3}{2} & \end{matrix} ;1\right) \\ &= \frac{1}{2^{m+1}\left(\frac{3}{2}\right)_m} \cdot \frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{2^{m+1}\left(\frac{3}{2}\right)_m} \cdot \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

と変形できる.

これから

$$
\begin{aligned}
f_{m+1} &= \frac{1}{2^{m+2}\left(\frac{3}{2}\right)_{m+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(1+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(1+m+\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(1+m+\frac{2}{3}\right)} \\
&= \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}+m\right)} \cdot \frac{1}{2^{m+1}\left(\frac{3}{2}\right)_m} \cdot \frac{(m+\frac{1}{2})\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot(m+\frac{3}{2})\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{(m+\frac{4}{3})\Gamma\left(m+\frac{4}{3}\right)\cdot(m+\frac{2}{3})\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)} \\
&= \frac{(m+\frac{1}{2})}{2(m+\frac{4}{3})(m+\frac{2}{3})}\, f_m \\
&= \frac{9}{4} \cdot \frac{2m+1}{(3m+4)(3m+2)}\, f_m
\end{aligned}
$$

よって

$$
f_{m+1} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2m+1}{(3m+4)(3m+2)}\, f_m
$$

が成り立つから．この式の両辺に

$$
4^m \prod_{j=0}^{m-1}(3j+4)(3j+2) \Big/ 9^m \prod_{j=0}^{m-1}(2j+1)
$$

をかけると

$$
\frac{4^{m+1}\displaystyle\prod_{j=0}^{m}(3j+4)(3j+2)}{9^{m+1}\displaystyle\prod_{j=0}^{m}(2j+1)} f_{m+1} = \frac{4^{m}\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1}(3j+4)(3j+2)}{9^{m}\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1}(2j+1)} f_m
$$

したがって，この式の値は m によらないから

$$
\frac{4^{m}\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1}(3j+4)(3j+2)}{9^{m}\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1}(2j+1)} f_m = f_0 = \frac{3\sqrt{3}}{8}
$$

よって

$$
f_m = \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1}(2j+1)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1}(3j+4)(3j+2)} \cdot \frac{3^{2m+1}\sqrt{3}}{2^{2m+3}} = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{m}(2j-1)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{m}(3j+1)(3j-1)} \cdot \frac{3^{2m+1}\sqrt{3}}{2^{2m+3}}
$$

を得る．

$$\prod_{j=1}^{m}(3j+1)(3j-1)=\prod_{j=1}^{m}(3j+1)(3j-1)\prod_{j=1}^{m}(3j)\Big/\prod_{j=1}^{m}(3j)=\frac{(3m+1)!}{3^m m!}$$

$$\prod_{j=1}^{m}(2j-1)=\prod_{j=1}^{m}(2j-1)\prod_{j=1}^{m}(2j)\Big/\prod_{j=1}^{m}(2j)=\frac{(2m)!}{2^m m!}$$

を使って書き直すと

$$f_m=\frac{(2m)!}{(3m+1)!}\cdot\frac{3^{3m+1}\sqrt{3}}{2^{3m+3}}$$

となる．

したがって，次のことを得る．

m が 0 以上の整数のとき

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{2^m\left(k+\frac{3}{2}\right)_m 108^k}=\frac{(2m)!}{(3m+1)!}\cdot\frac{3^{3m+1}\sqrt{3}}{2^{3m+3}}$$

が成り立つ．

参考文献

[1] Zhi-Wei Sun, *Products and sums divisible by central binomial coefficients*, arXiv:1004.4623v4 [math.NT] 5 May 2010

[2] 柳田　五夫，二項係数を含む等式の証明方法について，数学のいずみ

3.1　ガウス記号

床関数 (floor function) は，実数 x に対して x 以下の最大の整数として定義され

$$\lfloor x \rfloor\,,\ [x]\,,\ \mathrm{floor}(x)$$

などと書かれる．日本では $[x]$ はガウス記号 と呼ばれている．

床関数と密接に関係している天井関数 (ceiling function) は，実数 x に対して x 以上の最小の整数として定義され

$$\lceil x \rceil\,,\ \mathrm{ceil}(x)\,,\ \mathrm{ceiling}(x)$$

などと書かれる．

天井関数の問題が東京工大の入試で出題されている．

実数 x に対し， x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする．a, b を正の実数とするとき，極限

$$\lim_{x\to\infty} x^c \left(\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} \right)$$

が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ．(2008 東京工大)

ガウス記号の基本的な性質を次にまとめておく.

(G0) n が整数のとき $[x+n]=[x]+n$.

(G1) $[x] \leqq x < [x]+1$, $[x]+[y] \leqq [x+y]$, $[x]+[y]+[z] \leqq [x+y+z]$.

(G2) $x \leqq y$ ならば $[x] \leqq [y]$.

(G3) $x < [x]+\frac{1}{2}$ ならば $[2x]=2[x]$.

$[x]+\frac{1}{2} \leqq x$ ならば $[2x]=2[x]+1$.

(G4) p を正の整数，x を実数とするとき $\left[\dfrac{x}{p}\right]=\left[\dfrac{[x]}{p}\right]$.

特に p を正の整数，$0<s<1$ を実数とすると $\left[\dfrac{n+s}{p}\right]=\left[\dfrac{n}{p}\right]$.

［証明］ 定義にしたがって考えればよい.

(G0) $[x]=p$ とおくと，$p \leqq x < p+1$ から $p+n \leqq x < p+n+1$ となる.
よって $[x+n]=p+n=[x]+n$.

(G1) $[x]=p$ とおくと，$p \leqq x < p+1$ すなわち $[x] \leqq x < [x]+1$ が成り立つ.
また $[x] \leqq x < [x]+1$, $[y] \leqq y < y]+1$ から $[x]+[y] \leqq x+y < [x]+[y]+2$.
したがって $[x]+[y] \leqq [x+y] \leqq [x]+[y]+1$.
同様にして $[x]+[y]+[z] \leqq [x+y+z] < [x]+[y]+[z]+3$ から
$[x]+[y]+[z] \leqq [x+y+z] \leqq [x]+[y]+[z]+2$.

(G2) $[x]=p$ とおくと，$x \leqq y$, $p \leqq x < p+1$ が成り立つから，$p \leqq y$.
したがって $p \leqq [y]$ すなわち $[x] \leqq [y]$.

(G3) $[x] \leqq x < [x]+\frac{1}{2}$ のとき $2[x] \leqq 2x < 2[x]+1$ から $[2x]=2[x]$.
$[x]+\frac{1}{2} \leqq x < [x]+1$ のとき $2[x]+1 \leqq 2x < 2[x]+2$ から $[2x]=2[x]+1$.

(G4) $[x]=m$ とおくと $m \leqq x < m+1$ より $\dfrac{m}{p} \leqq \dfrac{x}{p} < \dfrac{m+1}{p}$ が成り立つ.
ここで $\left[\dfrac{m}{p}\right]=n$ とおくと $n \leqq \dfrac{m}{p} < n+1$.　　$\therefore\ m \leqq pn+p-1$.

よって $n \leqq \dfrac{m}{p} \leqq \dfrac{x}{p} < \dfrac{m+1}{p} \leqq n+1$ から $\left[\dfrac{x}{p}\right] = n = \left[\dfrac{m}{p}\right] = \left[\dfrac{[x]}{p}\right]$.

特に $0 < s < 1$ のとき $\left[\dfrac{n+s}{p}\right] = \left[\dfrac{[n+s]}{p}\right] = \left[\dfrac{n}{p}\right]$ ■

3.2　$S_n(n \geqq 1)$ が整数であることの証明

補題 1　$m > 1$ を整数とする．任意の整数 n に対して

$$\left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{6n}{m}\right] \geqq \left[\frac{2n}{m}\right] + \left[\frac{2n+1}{m}\right] + \left[\frac{3n}{m}\right] \qquad \cdots\cdots ⑬$$

が成り立つ．

［証明］　n を m で割ったときの商を q，余りを $r\,(0 \leqq r < m)$ とすると $n = mq + r$ が成り立つから，

$$\begin{aligned}(13) &\iff q + \left[\frac{r}{m}\right] + 6q + \left[\frac{6r}{m}\right] \geqq 2q + \left[\frac{2r}{m}\right] + 2q + \left[\frac{2r+1}{m}\right] + 3q + \left[\frac{3r}{m}\right] \\ &\iff \left[\frac{6r}{m}\right] \geqq \left[\frac{2r}{m}\right] + \left[\frac{2r+1}{m}\right] + \left[\frac{3r}{m}\right]\end{aligned}$$

したがって，

$$\left[\frac{6n}{m}\right] \geqq \left[\frac{2n}{m}\right] + \left[\frac{2n+1}{m}\right] + \left[\frac{3n}{m}\right] \qquad \cdots\cdots ⑭$$

が $n \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ に対して成り立つことを示せばよい．
$n = 0$ の場合，(14) で等号が成り立つ．

$n \neq 0$ の場合，$0 \leqq \dfrac{2n}{m} < \dfrac{2n+1}{m} \leqq \dfrac{3n}{m} < \dfrac{6n}{m}$ より

$$0 \leqq \left[\frac{2n}{m}\right] \leqq \left[\frac{2n+1}{m}\right] \leqq \left[\frac{3n}{m}\right] \leqq \left[\frac{6n}{m}\right]. \qquad \cdots\cdots ⑮$$

(I) $m = 2\,,\ n \neq 0$ の場合，　$n = 1$ で，容易に (14) で等号が成り立つことがわかる．
(II) $m \geqq 3\,,\ n \neq 0$ の場合

(1)　$0 < \dfrac{n}{m} < \dfrac{1}{3}$ のとき，$0 < \dfrac{6n}{m} < 2$ から $\left[\dfrac{6n}{m}\right] = 0$ または $\left[\dfrac{6n}{m}\right] = 1\,.$

$0 < \dfrac{3n}{m} < 1$ から $\left[\dfrac{2n}{m}\right] = \left[\dfrac{2n+1}{m}\right] = \left[\dfrac{3n}{m}\right] = 0$ となり，(14) は成り立つ．

(2)　$\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{n}{m} < \dfrac{1}{2}$ のとき，$2 \leqq \dfrac{6n}{m} < 3\,,\ 1 \leqq \dfrac{3n}{m} < \dfrac{3}{2}\,,\ \dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{2n}{m} < 1$ から
$\left[\dfrac{6n}{m}\right] = 2\,,\ \left[\dfrac{3n}{m}\right] = 1\,,\ \left[\dfrac{2n}{m}\right] = 0.$

(15) より $\left[\dfrac{2n+1}{m}\right]=0$ または $\left[\dfrac{2n+1}{m}\right]=1$ だから，(14) は成り立つ．

(3) $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{n}{m} < \dfrac{2}{3}$ のとき, $3 \leqq \dfrac{6n}{m} < 4$, $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{3n}{m} < 2$ から $\left[\dfrac{6n}{m}\right]=3$, $\left[\dfrac{3n}{m}\right]=1$

(15) より $0 \leqq \left[\dfrac{2n}{m}\right] \leqq \left[\dfrac{2n+1}{m}\right] \leqq 1$ となり，(14) は成り立つ．

(4) $\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{n}{m} < \dfrac{5}{6}$ のとき, $4 \leqq \dfrac{6n}{m} < 5$, $2 \leqq \dfrac{3n}{m} < \dfrac{5}{2}$, $\dfrac{4}{3} < \dfrac{2n+1}{m} < \dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3} =$
2

から $\left[\dfrac{6n}{m}\right]=4$, $\left[\dfrac{3n}{m}\right]=2$, $\left[\dfrac{2n+1}{m}\right]=1$, $\left[\dfrac{2n}{m}\right]=1$

となり，(14) で等号が成り立つことがわかる.

(5) $\dfrac{5}{6} \leqq \dfrac{n}{m} < 1$ のとき，$5 \leqq \dfrac{6n}{m} < 6$, $\dfrac{5}{2} \leqq \dfrac{3n}{m} < 3$, $\dfrac{5}{3} \leqq \dfrac{2n}{m} < 2$ から

$\left[\dfrac{6n}{m}\right]=5$, $\left[\dfrac{3n}{m}\right]=2$, $\left[\dfrac{2n}{m}\right]=1$.

したがって，$\left[\dfrac{2n+1}{m}\right] \leqq 2$ だから，(14) は成り立つ． ■

次のことを確認しておく.

$m \geqq 1$ を整数，p を素数として，$m!$ は p^l で割り切れるが p^{l+1} では割り切れないとき，

$$l = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^i}\right]. \qquad \cdots\cdots ⑯$$

m を整数, p を素数として, m は p^l で割り切れるが p^{l+1} では割り切れないとき, $\nu_p(m)=l$ とおき， 有理数 $x=\dfrac{n}{m}$ $(m(>0)$, n は整数) に対して $\nu_p(x)=\nu_p(n)-\nu_p(m)$ と定義する.
すると, 有理数 x が整数であるための必要十分条件は, すべての素数 p に対して $\nu_p(x) \geqq 0$ が成立することである.

定理 1　任意の正の整数 n に対して $\dfrac{\binom{6n}{3n}\binom{3n}{n}}{2(2n+1)\binom{2n}{n}}$ は整数である．

準備ができたので

$$Q=\frac{\binom{6n}{3n}\binom{3n}{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}=\frac{(6n)!n!}{(2n)!(2n+1)!(3n)!}\quad (n \geqq 1)$$

とおき，Q が偶数であることを証明する．

まず p を任意の素数とするとき，$\nu_p(Q) \geqq 0$ であることを示す．

$$\begin{aligned}\nu_p(Q)&=\nu_p\left((6n)!\right)+\nu_p(n!)-\nu_p\left((2n)!\right)-\nu_p\left((2n+1)!\right)-\nu_p\left((3n)!\right)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{6n}{p^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{3n}{p^i}\right]\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{6n}{p^i}\right]+\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{2n}{p^i}\right]-\left[\frac{2n+1}{p^i}\right]-\left[\frac{3n}{p^i}\right]\right)\\&\geqq 0\quad (\because (13))\end{aligned}$$

したがって，Q は整数である．

次に，$\nu_2(Q) \geqq 1$ であることを示す．

$$\begin{aligned}\nu_2(Q)&=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{6n}{2^i}\right]+\left[\frac{n}{2^i}\right]-\left[\frac{2n}{2^i}\right]-\left[\frac{2n+1}{2^i}\right]-\left[\frac{3n}{2^i}\right]\right)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{3n}{2^{i-1}}\right]+\left[\frac{n}{2^i}\right]-\left[\frac{n}{2^{i-1}}\right]-\left[\frac{2n+1}{2^i}\right]-\left[\frac{3n}{2^i}\right]\right)\end{aligned}$$

各 i に対して

$$\mu_i \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{3n}{2^{i-1}}\right]+\left[\frac{n}{2^i}\right]-\left[\frac{n}{2^{i-1}}\right]-\left[\frac{2n+1}{2^i}\right]-\left[\frac{3n}{2^i}\right] \geqq 0$$

より $\nu_2(Q) \geqq 0$ である．

n と 2^i $(i=1,2,\cdots)$ の大小比較をする．$2^{j-1} \leqq n < 2^j$ すなわち $2^{j-1} \leqq n \leqq 2^j-1$ となる自然数 j が存在する．このとき

$$\mu_{j+1}=\left[\frac{3n}{2^j}\right]+\left[\frac{n}{2^{j+1}}\right]-\left[\frac{n}{2^j}\right]-\left[\frac{2n+1}{2^{j+1}}\right]-\left[\frac{3n}{2^{j+1}}\right]$$

を考える．

$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{n}{2^j} < 1$ から $\left[\dfrac{n}{2^j}\right] = 0$. これと $\dfrac{1}{2^{j+1}} < \dfrac{n}{2^j} < 1$ から $\left[\dfrac{n}{2^{j+1}}\right] = 0$.

また

$$0 < \frac{2n+1}{2^{j+1}} \leqq \frac{2(2^j-1)+1}{2^{j+1}} = \frac{2^{j+1}-1}{2^{j+1}} < 1 \text{ から } \left[\frac{2n+1}{2^{j+1}}\right] = 0$$

が成り立つから

$$\mu_{j+1} = \left[\frac{3n}{2^j}\right] - \left[\frac{3n}{2^{j+1}}\right].$$

$2^{j-1} \leqq n < 2^j$ より $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{3n}{2^j} < 3$ であるから $\left[\dfrac{3n}{2^j}\right] = 1$ または $\left[\dfrac{3n}{2^j}\right] = 2$.

(1) $\left[\dfrac{3n}{2^j}\right] = 1$ のとき,

$\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{3n}{2^j} < 2$ より $\dfrac{3}{4} \leqq \dfrac{3n}{2^{j+1}} < 1$ であるから $\left[\dfrac{3n}{2^{j+1}}\right] = 0$.

よって

$$\mu_{j+1} = \left[\frac{3n}{2^j}\right] - \left[\frac{3n}{2^{j+1}}\right] = 1 - 0 = 1.$$

(2) $\left[\dfrac{3n}{2^j}\right] = 2$ のとき,

$2 \leqq \dfrac{3n}{2^j} < 3$ より $1 \leqq \dfrac{3n}{2^{j+1}} < \dfrac{3}{2}$ であるから $\left[\dfrac{3n}{2^{j+1}}\right] = 1$.

よって

$$\mu_{j+1} = \left[\frac{3n}{2^j}\right] - \left[\frac{3n}{2^{j+1}}\right] = 2 - 1 = 1.$$

と $\mu_i \geqq 0$ $(i \geqq 1)$ から

$$\nu_2(Q) = \sum_{i=1}^{j} \mu_i + \mu_{j+1} + \sum_{i=j+2}^{\infty} \mu_i \geqq 1.$$

3.3 ガウス記号

補題 2 $m \geqq 1$, k, n は整数とする．
m が偶数で $k \equiv n+1 \equiv m/2 \pmod{m}$ ならば

$$\left[\frac{4n+2k+2}{m}\right] - \left[\frac{2n+k+1}{m}\right] + 2\left[\frac{k}{m}\right] - 2\left[\frac{2k}{m}\right] + 1 = \left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{n-k+1}{m}\right]. \quad \cdots\cdots ⑰$$

これ（ m が偶数で $k \equiv n+1 \equiv m/2 \pmod{m}$ ）以外のときは

$$\left[\frac{4n+2k+2}{m}\right] - \left[\frac{2n+k+1}{m}\right] + 2\left[\frac{k}{m}\right] - 2\left[\frac{2k}{m}\right] \geqq \left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{n-k+1}{m}\right]. \quad \cdots\cdots ⑱$$

［証明］ 一般性を失うことなく，$k, n \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ と仮定できる．

Case 1. $k < \dfrac{m}{2}$, $\dfrac{2n+k+1}{m} < \left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] + \dfrac{1}{2}$ の場合

$k < \dfrac{m}{2}$ より $0 \leqq \dfrac{k}{m} < \dfrac{1}{2}$, $0 \leqq \dfrac{2k}{m} < 1$ となるから，$\left[\dfrac{k}{m}\right] = \left[\dfrac{2k}{m}\right] = 0$.

$\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] \leqq \dfrac{2n+k+1}{m} < \left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] + \dfrac{1}{2}$ より

$2\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] \leqq \dfrac{4n+2k+2}{m} < 2\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] + 1$ となるから

$$\left[\frac{4n+2k+2}{m}\right] = 2\left[\frac{2n+k+1}{m}\right].$$

したがって，(18) $\Longleftrightarrow \left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] \geqq \left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]$.

ところで，$(2n+k+1)-(n-k+1) = n+2k \geqq 0$ より 上の不等式は成り立つ．

Case 2. $k < \dfrac{m}{2}$, $\dfrac{2n+k+1}{m} \geqq \left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] + \dfrac{1}{2}$ の場合

$k < \dfrac{m}{2}$ から *Case 1* と同様に $\left[\dfrac{k}{m}\right] = \left[\dfrac{2k}{m}\right] = 0$.

また，$\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] + \dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{2n+k+1}{m} < \left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] + 1$ より

$2\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] + 1 \leqq \dfrac{4n+2k+2}{m} < 2\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] + 2$ となるから

$$\left[\frac{4n+2k+2}{m}\right] = 2\left[\frac{2n+k+1}{m}\right] + 1.$$

したがって， *(18)* $\Longleftrightarrow \left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right]+1 \geqq \left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]$.

$2n+k+1 \geqq n-k+1$ より $\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] \geqq \left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]$ となるから，上記の不等式は成り立つ.

Case 3. $k \geqq \dfrac{m}{2}$, $\dfrac{2n+k+1}{m} < \left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right]+\dfrac{1}{2}$ ……① の場合

$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{k}{m} < 1$, $1 \leqq \dfrac{2k}{m} < 2$ となるから， $\left[\dfrac{k}{m}\right]=0$, $\left[\dfrac{2k}{m}\right]=1$.

$\dfrac{2n+k+1}{m} < \left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right]+\dfrac{1}{2}$ から $\left[\dfrac{4n+2k+2}{m}\right]=2\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right]$.

したがって， *(18)* $\Longleftrightarrow \left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right]-2 \geqq \left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]$.

(i) $k > n+1$ のとき

$-m < n-k+1 < 0$ より $\left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]=-1$ となるから

$$\begin{aligned}(18) &\Longleftrightarrow \left[\frac{2n+k+1}{m}\right]-2 \geqq -1 \Longleftrightarrow \left[\frac{2n+k+1}{m}\right] \geqq 1\\ &\Longleftrightarrow \frac{2n+k+1}{m} \geqq 1 \Longleftrightarrow 2n+k+1 \geqq m\,.\end{aligned}$$

$2n+k+1 > k \geqq \dfrac{m}{2}$ から $\dfrac{2n+k+1}{m} \geqq \dfrac{1}{2}$ ……②

$\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right]=0$ と仮定すると，① から $\dfrac{2n+k+1}{m} < \dfrac{1}{2}$ となり ② に矛盾する．したがって，$\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] \geqq 1$ が成り立つ.

(ii) $k < n+1$ すなわち $k \leqq n$ のとき

$k \geqq \dfrac{m}{2}$ から $k \geqq 1$ である． $0 < \dfrac{n-k+1}{m} < 1$ が成り立つことから $\left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]=0$． したがって，

$$\begin{aligned}(18) &\Longleftrightarrow \left[\frac{2n+k+1}{m}\right]-2 \geqq 0 \Longleftrightarrow \left[\frac{2n+k+1}{m}\right] \geqq 2\\ &\Longleftrightarrow \frac{2n+k+1}{m} \geqq 2 \Longleftrightarrow 2n+k+1 \geqq 2m\,.\end{aligned}$$

$2n+k+1 \geqq 2k+k+1 = 3k+1 \geqq \dfrac{3m}{2}+1 > \dfrac{3m}{2}$ ……③

$\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right]=1$ と仮定すると ① から $\dfrac{2n+k+1}{m} < \dfrac{3}{2}$ となり ③ に矛盾する．したがって，$\left[\dfrac{2n+k+1}{m}\right] \geqq 2$ が成り立つ.

(iii) $k=n+1$ のとき

$$\left[\frac{4n+2k+2}{m}\right]-\left[\frac{2n+k+1}{m}\right]+2\left[\frac{k}{m}\right]-2\left[\frac{2k}{m}\right]-\left\{\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{n-k+1}{m}\right]\right\}$$
$$=\left[\frac{2n+k+1}{m}\right]-2\,.$$

$P=\left[\frac{2n+k+1}{m}\right]-2=\left[\frac{3k-1}{m}\right]-2$ とおくと
$P\geqq 0\iff \frac{3k-1}{m}\geqq 2\iff 3k-2m\geqq 1\,.$
$3k-2m\geqq 1$ のとき $k\geqq\frac{m}{2}$ を満たすから，

$l(\geqq 2)$ を整数として，$l\leqq\frac{3k-1}{m}<l+\frac{1}{2}$ のとき 不等式 *(18)* が成り立つ．

$3k-2m<1$ すなわち $3k-2m\leqq 0$ のとき
$m=1$ とすると $3k-2m\leqq 0$ から $k=0$ となり，$k=n+1(\geqq 1)$ を満たさないから，$m\geqq 2$ である．このとき，$m\leqq\frac{3m}{2}-1\leqq 3k-1<2m-1<2$ から $\left[\frac{3k-1}{m}\right]=1$ となり $P=-1$ すなわち 不等式 *(17)* が成り立つ．
① に $\left[\frac{3k-1}{m}\right]=1$ を代入すると $\frac{3k-1}{m}<\frac{3}{2}$ から $k<\frac{3m+2}{6}$ ．
$k\geqq\frac{m}{2}$ とあわせて $m\leqq 2k<m+\frac{2}{3}$ となるが $2k-m$ は整数であるから $2k-m=0\,.$

Case 4. $k\geqq\frac{m}{2}\,,\ \frac{2n+k+1}{m}\geqq\left[\frac{2n+k+1}{m}\right]+\frac{1}{2}$ の場合

$$\textit{(18)}\iff\left[\frac{2n+k+1}{m}\right]+1-2\geqq\left[\frac{n-k+1}{m}\right]$$
$$\iff\left[\frac{2n+k+1}{m}\right]\geqq\left[\frac{n-k+1+m}{m}\right]\,.$$

ところで，$2k\geqq m$ より $(2n+k+1)\geqq n-k+1+m$ となり 上の不等式は成り立つ． ■

補題 3　$m \geqq 1$, k, n は整数とする.
m が偶数で $k \equiv n+1 \equiv m/2 \pmod m$ ならば

$$\left[\frac{2n+2k}{m}\right]-\left[\frac{n+k}{m}\right]+2\left[\frac{k}{m}\right]-2\left[\frac{2k}{m}\right]+1 \geqq 2\left[\frac{n}{m}\right]-\left[\frac{2n+1}{m}\right]+\left[\frac{n-k+1}{m}\right]. \qquad \cdots\cdots ⑲$$

これ（ m が偶数で $k \equiv n+1 \equiv m/2 \pmod m$ ）以外のときは

$$\left[\frac{2n+2k}{m}\right]-\left[\frac{n+k}{m}\right]+2\left[\frac{k}{m}\right]-2\left[\frac{2k}{m}\right] \geqq 2\left[\frac{n}{m}\right]-\left[\frac{2n+1}{m}\right]+\left[\frac{n-k+1}{m}\right]. \qquad \cdots\cdots ⑳$$

［証明］一般性を失うことなく，$k,n \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ と仮定できる.

Case 1.　$k < \dfrac{m}{2}$, $\dfrac{n+k}{m} < \left[\dfrac{n+k}{m}\right]+\dfrac{1}{2}$ の場合

$k < \dfrac{m}{2}$ から $\left[\dfrac{2k}{m}\right]=\left[\dfrac{k}{m}\right]=0$.

$\dfrac{n+k}{m} < \left[\dfrac{n+k}{m}\right]+\dfrac{1}{2}$ から $\left[\dfrac{2n+2k}{m}\right]=2\left[\dfrac{n+k}{m}\right]$.

よって

$$(20) \iff \left[\frac{n+k}{m}\right] \geqq -\left[\frac{2n+1}{m}\right]+\left[\frac{n-k+1}{m}\right]$$
$$\iff \left[\frac{n+k}{m}\right]+\left[\frac{2n+1}{m}\right] \geqq \left[\frac{n-k+1}{m}\right].$$

$n+2k \geqq 0$ から $2n+1 \geqq n-k+1$ となるから $\left[\dfrac{2n+1}{m}\right] \geqq \left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]$.
したがって，$\left[\dfrac{n+k}{m}\right]+\left[\dfrac{2n+1}{m}\right] \geqq \left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]$ すなわち，不等式 (20) は成り立つ.

Case 2.　$k < \dfrac{m}{2}$, $\dfrac{n+k}{m} \geqq \left[\dfrac{n+k}{m}\right]+\dfrac{1}{2}$ の場合

$\dfrac{n+k}{m} \geqq \left[\dfrac{n+k}{m}\right]+\dfrac{1}{2}$ から $\left[\dfrac{2n+2k}{m}\right]=2\left[\dfrac{n+k}{m}\right]+1$.

よって

$$(20) \iff \left[\frac{n+k}{m}\right]+1 \geqq -\left[\frac{2n+1}{m}\right]+\left[\frac{n-k+1}{m}\right]$$
$$\iff \left[\frac{n+k}{m}\right]+\left[\frac{2n+1}{m}\right]+1 \geqq \left[\frac{n-k+1}{m}\right].$$

$n+2k \geqq 0$ から $2n+1 \geqq n-k+1$ となるから $\left[\dfrac{2n+1}{m}\right] \geqq \left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]$.
したがって, $\left[\dfrac{n+k}{m}\right] + \left[\dfrac{2n+1}{m}\right] + 1 > \left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]$ すなわち, 不等式 (20) は成り立つ.

Case 3. $k \geqq \dfrac{m}{2}$, $\dfrac{n+k}{m} < \left[\dfrac{n+k}{m}\right] + \dfrac{1}{2}$ ……① の場合

$k \geqq \dfrac{m}{2}$ から $\left[\dfrac{2k}{m}\right] = 1$, $\left[\dfrac{k}{m}\right] = 0$.
$\dfrac{n+k}{m} < \left[\dfrac{n+k}{m}\right] + \dfrac{1}{2}$ から $\left[\dfrac{2n+2k}{m}\right] = 2\left[\dfrac{n+k}{m}\right]$.
$0 < \dfrac{n+k}{m} < 2$ より $\left[\dfrac{n+k}{m}\right] = 0, 1$ となる.
$\left[\dfrac{n+k}{m}\right] = 0$ のときは, ① から $\dfrac{n+k}{m} < \dfrac{1}{2}$ すなわち $2n+2k < m$.
ところが $k \geqq \dfrac{m}{2}$ から $2k+2n \geqq m$ に矛盾する.
したがって $\left[\dfrac{n+k}{m}\right] = 1$ となり $1 \leqq \dfrac{n+k}{m} < \dfrac{3}{2}$ から $m \leqq n+k < \dfrac{3m}{2}$.

よって

$$
\begin{aligned}
(20) &\iff 1-2 \geqq -\left[\frac{2n+1}{m}\right] + \left[\frac{n-k+1}{m}\right] \\
&\iff \left[\frac{2n+1}{m}\right] \geqq \left[\frac{n-k+1}{m}\right] + 1 = \left[\frac{n-k+1+m}{m}\right] .
\end{aligned}
$$

(i) $n+k \geqq m$ のとき $2n+1 \geqq n-k+1+m$ から $\left[\dfrac{2n+1}{m}\right] \geqq \left[\dfrac{n-k+1+m}{m}\right]$.
不等式 (20) は成り立つ.

(ii) $n+k < m$, $k > n+1$ のとき $\left[\dfrac{n+k}{m}\right] = 0$, $\left[\dfrac{n-k+1}{m}\right] = -1$
よって

$$
(20) \iff \left[\frac{2n+1}{m}\right] \geqq 0
$$

から 不等式 (20) は成り立つ.

(iii) $n+k < m$, $k < n+1\,(k \leqq n)$ のとき
$2n+1 > 2k \geqq m$, $0 < n-k+1 \leqq m-1$ ($\because k \neq 0$) から

$$
\left[\frac{2n+1}{m}\right] \geqq 1 , \left[\frac{n-k+1}{m}\right] = 0
$$

よって

$$
(20) \iff \left[\frac{2n+1}{m}\right] \geqq 1
$$

から 不等式 (20) は成り立つ.

(iv)　$n+k<m\,,\,k=n+1$ のとき

$k>\dfrac{m}{2}$ のとき，$2k>m$ から $2k \geqq m+1\,, 2n+1=2k-1 \geqq m$. したがって

$$\left[\frac{2n+1}{m}\right] \geqq 1\,.$$

よって

$$(20) \iff \left[\frac{2n+1}{m}\right] \geqq 1$$

から 不等式 (20) は成り立つ.

$k=\dfrac{m}{2}$ のとき，$\dfrac{2n+1}{m}=\dfrac{m-1}{m}<$ から $\left[\dfrac{2n+1}{m}\right]=0$ となり，等式 (19) が成り立つ.

Case 4.　$k \geqq \dfrac{m}{2}\,,\ \dfrac{n+k}{m} \geqq \left[\dfrac{n+k}{m}\right]+\dfrac{1}{2}$ の場合

$\left[\dfrac{2k}{m}\right]=1\,,\left[\dfrac{k}{m}\right]=0\,,\left[\dfrac{2n+2k}{m}\right]=2\left[\dfrac{n+k}{m}\right]+1$ から

$$\begin{aligned}(20) &\iff \left[\frac{n+k}{m}\right]+1-2 \geqq -\left[\frac{2n+1}{m}\right]+\left[\frac{n-k+1}{m}\right] \\ &\iff \left[\frac{n+k}{m}\right]+\left[\frac{2n+1}{m}\right] \geqq \left[\frac{n-k+1}{m}\right]+1\,.\end{aligned}$$

$\left[\dfrac{n+k}{m}\right]=1$ のとき，

$$(20) \iff \left[\frac{2n+1}{m}\right] \geqq \left[\frac{n-k+1}{m}\right]$$

で，$n+k \geqq 0$ から $2n+1 \geqq n-k+1$ となり，不等式 (20) は成り立つ.

$\left[\dfrac{n+k}{m}\right]=0$ のとき，

$$(20) \iff \left[\frac{2n+1}{m}\right] \geqq \left[\frac{n-k+1}{m}\right]+1$$

で，$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{n+k}{m}<1$ から $-m+2 \geqq n-k+1<m-k-k+1 \leqq -1\,(\because k \geqq 1)$
となり，$\left[\dfrac{n-k+1}{m}\right]=-1\,.$
したがって 不等式 (20) は成り立つ.　■

3.4 整数であることの証明

定理 2 n と k を 0 以上の整数とするとき，

$$R=\frac{\binom{4n+2k+2}{2n+k+1}\binom{2n+k+1}{2k}\binom{2n-k+1}{n}}{\binom{2k}{k}} \text{ は整数である．} \qquad \cdots\cdots ㉑$$

$$S=\frac{(2n+1)\binom{2n}{n}C_{n+k}\binom{n+k+1}{2k}}{\binom{2k}{k}} \text{ は整数である．} \qquad \cdots\cdots ㉒$$

ただし，$C_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}=\dbinom{2n}{n}-\dbinom{2n}{n+1}$ はカタラン数である．

[証明] $k=0$ のときは明らかに成り立つ．また，$k>n+1$ のときも

$$\binom{2n+k+1}{2k}=\binom{n+k+1}{2k}=0$$

となり明らかに成り立つ．したがって，$1\leqq k\leqq n+1$ と仮定してよい．

$$R=\frac{\binom{4n+2k+2}{2n+k+1}\binom{2n+k+1}{2k}\binom{2n-k+1}{n}}{\binom{2k}{k}}=\frac{(4n+2k+2)!\,(k!)^2}{(2n+k+1)!\,((2k)!)^2\,n!(n-k+1)!}$$

$$S=\frac{(2n+1)\binom{2n}{n}C_{n+k}\binom{n+k+1}{2k}}{\binom{2k}{k}}=\frac{(2n+1)!(2n+2k)!\,(k!)^2}{(n!)^2\,(n+k)!\,((2k)!)^2\,(n-k+1)!}$$

ここで，

$$C_m(n,k)=\left[\frac{4n+2k+2}{m}\right]-\left[\frac{2n+k+1}{m}\right]+2\left[\frac{k}{m}\right]-2\left[\frac{2k}{m}\right]-\left[\frac{n}{m}\right]-\left[\frac{n-k+1}{m}\right]$$

$$D_m(n,k)=\left[\frac{2n+2k}{m}\right]-\left[\frac{n+k}{m}\right]+2\left[\frac{k}{m}\right]-2\left[\frac{2k}{m}\right]-2\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{2n+1}{m}\right]-\left[\frac{n-k+1}{m}\right]$$

とおくと

$$\nu_p(R)=\sum_{i=1}^{\infty}C_{p^i}(n,k)\,,\ \nu_p(S)=\sum_{i=1}^{\infty}D_{p^i}(n,k)$$

となる．

$p=2\,,\ k\equiv n+1\equiv 2^{i-1}(\mod 2^i)$ でないときは，$C_{p^i}(n,k)\geqq 0\,.$

$p=2\,,\ k\equiv n+1\equiv 2^{i-1}(\mod 2^i)$ のときは，$C_{2^i}(n,k)=-1\,.$

$k\equiv n+1\equiv 2^{i-1}(\mod 2^i)$ から $k-2^{i-1}=p2^i$ (p は整数) とおける．したがって，$k=(2p+1)2^{i-1}=k_0 2^{i-1}$ (k_0は奇数) とおける．同様にして $n+1=n_0 2^{i-1}$ (n_0は奇数) とおける．

$1\leqq k\leqq n+1$ から $1\leqq k_0\leqq n_0$ となる．

$i\geqq 2$ のときは，

$$\begin{aligned}
C_{2^{i-1}}(n,k) &= C_{2^{i-1}}(n_0 2^{i-1}-1, k_0 2^{i-1})\\
&= \left[4n_0+2k_0-\frac{1}{2^{i-2}}\right]-\left[2n_0+k_0-\frac{1}{2^{i-1}}\right]+2\,[k_0]-2\,[2k_0]\\
&\qquad -\left[n_0-\frac{1}{2^{i-1}}\right]-[n_0-k_0]\\
&= 4n_0+2k_0-1-(2n_0+k_0-1)+2k_0-4k_0-(n_0-1)-(n_0-k_0)\\
&= 1
\end{aligned}$$

であるから $C_{2^{i-1}}(n,k)+C_{2^i}(n,k)=1+(-1)=0\,.$

したがって，残っているのは $i=1$ すなわち $k\equiv n+1\equiv 1(\mod 2)$ のときである．

k は奇数，n は偶数であるから，$k+1=2^j k_1\,,\ n=2n_1\quad$ (k_1は正の奇数$\,,n_1$は正の整数) とおける．

$$\begin{aligned}
C_{2^{j+1}}(n,k) &= \left[k_1+\frac{4n_1}{2^j}\right]-\left[\frac{2n_1-2^{j-1}+2^{j-1}(k_1+1)}{2^j}\right]+2\left[\frac{k_1-1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{j+1}}\right)\right]\\
&\qquad -2\left[\frac{2^j k_1-1}{2^j}\right]-\left[\frac{n_1}{2^j}\right]-\left[\frac{n_1+1+2^{j-1}}{2^j}-\frac{k_1+1}{2}\right]\\
&= k_1+\left[\frac{4n_1}{2^j}\right]-\frac{k_1+1}{2}-\left[\frac{2n_1-2^{j-1}}{2^j}\right]+2\cdot\frac{k_1-1}{2}\\
&\qquad -2(k_1-1)-\left[\frac{n_1}{2^j}\right]-\left[\frac{n_1+1+2^{j-1}}{2^j}\right]+\frac{k_1+1}{2}\\
&= 1+\left[\frac{4n_1}{2^j}\right]-\left[\frac{2n_1-2^{j-1}}{2^j}\right]-\left[\frac{n_1}{2^j}\right]-\left[\frac{n_1+1+2^{j-1}}{2^j}\right]\qquad (*).
\end{aligned}$$

(G4) から

$$\left[\frac{4n_1}{2^j}\right]=\left[\frac{2n_1}{2^{j-1}}\right]=\left[\frac{2n_1+\frac{1}{2}}{2^{j-1}}\right]=\left[\frac{4n_1+1}{2^j}\right].$$

したがって，$(*)$ は

$$1+\left[\frac{4n_1}{2^j}\right]-\left[\frac{2n_1-2^{j-1}}{2^j}\right]-\left[\frac{n_1}{2^j}\right]-\left[\frac{n_1+1+2^{j-1}}{2^j}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \left[\frac{4n_1+1}{2^j}\right] - \left[\frac{2n_1-2^{j-1}}{2^j}\right] - \left[\frac{n_1}{2^j}\right] - \left[\frac{n_1+1+2^{j-1}}{2^j}\right] \\
&= 1 + \left[\frac{(2n_1-2^{j-1})+n_1+(n_1+1+2^{j-1})}{2^j}\right] \\
&\qquad - \left[\frac{2n_1-2^{j-1}}{2^j}\right] - \left[\frac{n_1}{2^j}\right] - \left[\frac{n_1+1+2^{j-1}}{2^j}\right]
\end{aligned}
$$

となる．ここで $[\alpha+\beta+\gamma] \geqq [\alpha]+[\beta]+[\gamma]$ を用いると

$$
\left[\frac{(2n_1-2^{j-1})+n_1+(n_1+1+2^{j-1})}{2^j}\right] \geqq \left[\frac{2n_1-2^{j-1}}{2^j}\right] + \left[\frac{n_1}{2^j}\right] + \left[\frac{n_1+1+2^{j-1}}{2^j}\right]
$$

が成り立つから

$$
1 + \left[\frac{4n_1}{2^j}\right] - \left[\frac{2n_1-2^{j-1}}{2^j}\right] - \left[\frac{n_1}{2^j}\right] - \left[\frac{n_1+1+2^{j-1}}{2^j}\right] \geqq 1 \,.
$$

したがって $C_2(n,k) + C_{2^{j+1}}(n,k) \geqq 0$.
以上のことから

$$
\nu_p(R) = \sum_{i=1}^{\infty} C_{p^i}(n,k) \geqq 0 \,.
$$

S についても，$p=2$, $k \equiv n+1 \equiv 2^{i-1} (\mod 2^i)$ でないときは，$D_{p^i}(n,k) \geqq 0$.
$p=2$, $k \equiv n+1 \equiv 2^{i-1} (\mod 2^i)$ のときは，$D_{2^i}(n,k) = -1$.
$2^{j-1} \leqq n+k < 2^j$ となる正の整数 j が存在する．このとき $k \leqq \dfrac{n+k}{2} < 2^{j-1}$ が成り立つ．また，$1 \leqq k \leqq n+1$ を使うと

$$
1 \leqq \frac{2n+2k}{2^j} < 2 \,,\ \frac{1}{2} \leqq \frac{n+k}{2^j} < 1 \,,\ 0 < \frac{k}{2^j} < \frac{1}{2} \,,\ 0 < \frac{2k}{2^j} < 1 \,,
$$

$$
0 \leqq \frac{n}{2^j} < 1 \,,\ 0 \leqq \frac{n-k+1}{2^j} \leqq \frac{n}{2^j} < 1
$$

であるから

$$
\left[\frac{2n+2k}{2^j}\right] = 1 \,,\ \left[\frac{n+k}{2^j}\right] = 0 \,,\ \left[\frac{k}{2^j}\right] = 0 \,,\ \left[\frac{2k}{2^j}\right] = 0 \,,\ \left[\frac{n}{2^j}\right] = 0 \,,\ \left[\frac{n-k+1}{2^j}\right] = 0 \,.
$$

$$
D_{2^j}(n,k) = 1 + \left[\frac{2n+1}{2^j}\right] \geqq 1 \quad ,\ D_{2^i}(n,k) + D_{2^j}(n,k) \geqq 0
$$

以上のことから

$$
\nu_p(S) = \sum_{i=1}^{\infty} D_{p^i}(n,k) \geqq 0 \qquad \blacksquare
$$

参考文献

[S] Zhi-Wei Sun ,*Products and sums divisible by central binomial coefficients*, arXiv:1004.4623v4 [math.NT] 5 May 2010