教材研究　　二項係数を含む等式について

柳田 五夫

1　はじめに

横浜市立大で出題された問題の解法を高校 3 年生（理系）の授業で扱いたいと思い，調べてみた．

n を自然数とする．このとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}$ を求めよ．　　（2013 横浜市立大・医）

二項係数を含む等式として次のものがあげられる．

(1) ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\quad(1\leqq r\leqq n-1)$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

(3) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots\cdots={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots\cdots=2^{n-1}$

(4) ${}_{2n}\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2$

(5) $k\geqq 1$ のとき

$k{}_n\mathrm{C}_k=n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

(6) ${}_n\mathrm{C}_1+2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+3\cdot{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n\cdot{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}n$

(7) ${}_n\mathrm{C}_1+2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+3^2\cdot{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n^2\cdot{}_n\mathrm{C}_n=n(n+1)2^{n-2}$

(8) $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\dfrac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}{n+1}$

(9) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

(10) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{1}{n+1}$

二項定理の応用のところで

(2) ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$

(3) ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots\cdots = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_5 + \cdots\cdots = 2^{n-1}$

を解説した後，(5) を用いる方法と微分を用いて

(6’) ${}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n$

(7’) ${}_n\mathrm{C}_1 + 2^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + n^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_n$

の和を生徒に求めさせた．

放課後の演習では，次の問題を，(8) の等式を生徒自ら見つけて解く方法と積分を使って解く方法を比較させた．

n を正の整数とするとき，次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}$ （(3) のみ　2013 横浜市立大・医）

また，(5) の応用として，早稲田大の整数論の問題を扱った．

次の各問いに答えよ．ただし，正の整数 n と整数 $k\,(0 \leqq k \leqq n)$ に対して，${}_n\mathrm{C}_k$ は正の整数である事実を使ってよい．

(1) m が 2 以上の整数のとき，${}_m\mathrm{C}_2$ が m で割り切れるための必要十分条件を求めよ．答えのみ解答欄に記せ．

(2) p を 2 以上の素数とし，k を p より小さい正の整数とする．このとき，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れることを示せ．

(3) p を 2 以上の素数とする．このとき，任意の正の整数 n に対し，

$$(n+1)^p - n^p - 1$$

は p で割り切れることを示せ． （2006 早稲田大・政経）

2　二項係数の関係式（1）

問題 1　n を正の整数とするとき，次の等式を証明せよ．

(1)　${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} \quad (1 \leqq r \leqq n-1)$

(2)　$(a+b)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$

（解答）(1)

$$\begin{aligned}
{}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} + \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)!r!} + \frac{(n-1)!r}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{(n-1)!\{(n-r)+r\}}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
&= {}_n\mathrm{C}_r
\end{aligned}$$

（別解 1）（組合せ論）n 個の $a_1, a_2, \ldots, a_n$ から r 個とる組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は次のようにして求めることができる．

　a_1 を含む組合せは，a_1 以外の $n-1$ 個から $r-1$ 個選んで，それに a_1 をつけ加えて得られるから，組合せの数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 通り，

　a_1 を含まない組合せは，a_1 以外の $n-1$ 個から r 個選んで得られるから，組合せの数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ 通り

ある．

したがって，${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} \quad (0 \leqq r \leqq n-1)$ を得る，

（別解 2）（母関数）

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$$

が成り立つから，両辺の x^r $(1 \leqq r \leqq n-1)$ の係数を比較する．

　左辺の展開式で x^r $(1 \leqq r \leqq n-1)$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$，

　右辺の展開式で x^r $(1 \leqq r \leqq n-1)$ を含む項は

$${}_{n-1}\mathrm{C}_r x^r + x \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} x^{r-1} = \left({}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\right) x^r$$

であるから，x^r （$1 \leqq r \leqq n-1$） の係数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ となる．

したがって，${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} \quad (1 \leqq r \leqq n-1)$ を得る，

(2) （数学的帰納法による証明）

(i) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = (a+b)^1 = a+b,\ (\text{右辺}) = \sum_{r=0}^{1} {}_1\mathrm{C}_r a^{1-r} b^r = {}_1\mathrm{C}_0 a^1 b^0 + {}_1\mathrm{C}_1 a^0 b^1 = a+b$$

となり成り立つ．

(ii) $n=k$ $(k \geqq 1)$ のとき成り立つと仮定すると

$$(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k-r} b^r$$

この式の両辺に $a+b$ をかける．

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)\sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k-r} b^r \\
&= \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r + \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k-r} b^{r+1} \\
&= {}_k\mathrm{C}_0 a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r + \sum_{r=0}^{k-1} {}_k\mathrm{C}_r a^{k-r} b^{r+1} + {}_k\mathrm{C}_k b^{k+1} \\
&= {}_k\mathrm{C}_0 a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r + \sum_{s=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_{s-1} a^{k+1-s} b^{s} + {}_k\mathrm{C}_k b^{k+1} \\
&= \underbrace{{}_k\mathrm{C}_0}_{={}_{k+1}\mathrm{C}_0} a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \underbrace{({}_k\mathrm{C}_r + {}_k\mathrm{C}_{r-1})}_{={}_{k+1}\mathrm{C}_r} a^{k+1-r} b^r + \underbrace{{}_k\mathrm{C}_k}_{={}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}} b^{k+1} \\
&= {}_{k+1}\mathrm{C}_0 a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r + {}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1} b^{k+1} \\
&= \sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r
\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての正の整数に対して成り立つ．

（別解） $f_n(x) = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$ とおく．

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} \quad (1 \leqq r \leqq n-1) $$

の両辺に x^r をかけ，$r = 1, 2, \ldots, n-1$ とおいたものの辺々を加えると

$$ \begin{aligned} \sum_{r=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_r x^r &= \sum_{r=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_r x^r + x \sum_{r=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} x^{r-1} \\ \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r - \left({}_n\mathrm{C}_0 x^0 + {}_n\mathrm{C}_n x^n\right) &= \sum_{r=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_r x^r - {}_{n-1}\mathrm{C}_0 x^0 \\ &\quad + x\left(\sum_{r=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} x^{r-1} - {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} x^{n-1}\right) \\ f_n(x) - 1 - x^n &= f_{n-1}(x) - 1 + x\left(f_{n-1}(x) - x^{n-1}\right) \\ f_n(x) &= (1+x) f_{n-1}(x) \end{aligned} $$

$f_1(x) = {}_1\mathrm{C}_0 + {}_1\mathrm{C}_1 x = 1 + x$ であるから，帰納的に $f_n(x) = (1+x)^n$ すなわち

$$ (1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r $$

を得る．
$a \neq 0$ のとき，この式で，$x = \dfrac{b}{a}$ とおくと

$$ \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \frac{b^r}{a^r} $$

両辺に a^n をかけると

$$ (a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r \qquad (*) $$

$a = 0$ のとき，$(*)$ は明らかに成り立つから，$(*)$ は常に成り立つ． ■

[注 1]　二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を $\dbinom{n}{r}$ と表すこともある．

$r > n$ のとき

$$\binom{n}{r} = {}_n\mathrm{C}_r = 0$$

と定義すれば，(1) は次のようにかける。

(1')　n を正の整数，r を 0 以上の整数とするとき

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

が成り立つ。

[注 2]　$f_1(x) = 1 + x$，$f_n(x) = (1+x)f_{n-1}(x) \quad (n \geqq 2)$ を満たす $f_n(x)$ は次のように求めてもよい．

$x \fallingdotseq -1$ のとき，$f_n(x) = (1+x)f_{n-1}(x)$ の両辺を $(1+x)^n$ で割ると

$$\frac{f_n(x)}{(1+x)^n} = \frac{f_{n-1}(x)}{(1+x)^{n-1}} \quad (n \text{ によらず一定})$$

よって，$\dfrac{f_n(x)}{(1+x)^n} = \dfrac{f_1(x)}{(1+x)^1} = 1$ から

$$f_n(x) = (1+x)^n \tag{**}$$

$x = -1$ のときは，$f_n(x) = (1+x)f_{n-1}(x)$ で $x = -1$ とおくと $f_n(-1) = 0$ であるから，(**) は成り立つ．

問題 2　n を正の整数とするとき，次の等式を証明せよ．

(1)　${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$

(2)　${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots\cdots = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_5 + \cdots\cdots = 2^{n-1}$

(3)　${}_{2n}\mathrm{C}_n = {}_n\mathrm{C}_0{}^2 + {}_n\mathrm{C}_1{}^2 + {}_n\mathrm{C}_2{}^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n{}^2$

（解答）　二項定理より

$$
{}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n = (1+x)^n \qquad \cdots\cdots ①
$$

(1) ①で $x=1$ とおくと

$$
{}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n
$$

（別解）　（組合せ論）

n 個の要素からなる集合 $\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ の部分集合の個数を N とする．

k 個の要素から部分集合は ${}_n\mathrm{C}_k$ 個あるから

$$
N = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n
$$

一方，a_1 について a_1 が部分集合に含まれるか含まれないかの 2 通り，そのおのおのに対して，a_2 が部分集合に含まれるか含まれないかの 2 通り $\ldots\ldots$ であるから，$N = 2^n$

よって

$$
{}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n
$$

(2) ①で $x=-1$ とおくと

$$
{}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0
$$

よって

$$
{}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots\cdots = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_5 + \cdots\cdots
$$

(1) の結果を使うと

$$
{}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots\cdots = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_5 + \cdots\cdots = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}
$$

(3) 1 から n までの番号のついた赤札および青札がそれぞれ n 枚ずつある．これら $2n$ 枚の札のなかから n 枚の札を取り出しかたは，${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 通りある．

また，$2n$ 枚の札のなかから n 枚の札を取り出すとき，赤札がちょうど r 枚含まれる取り出し方は

r 枚の赤札の取り方が ${}_n\mathrm{C}_r$ 通り，残りの $n-r$ 枚の青札の取り方が ${}_n\mathrm{C}_{n-r}={}_n\mathrm{C}_r$ 通り

あるから，${}_n\mathrm{C}_r\cdot{}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r{}^2$ 通り．

これを $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ について加えれば，$2n$ 枚の札のなかから n 枚の札を取り出しかたの総数 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ が得られる．よって

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2 $$

（別解） $(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$ において，両辺の展開式で x^n の係数を比較する．

左辺の展開式で x^n の係数は ${}_{2n}\mathrm{C}_n$，

右辺の展開式で x^n を含む項は

$$ (1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n $$

を用いると

$$ \begin{aligned} &{}_n\mathrm{C}_0\cdot{}_n\mathrm{C}_nx^n+{}_n\mathrm{C}_1x\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n\cdot{}_n\mathrm{C}_0 \\ &=\left({}_n\mathrm{C}_0\cdot{}_n\mathrm{C}_n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot{}_n\mathrm{C}_0\right)x^n \\ &=\left({}_n\mathrm{C}_0\cdot{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot{}_n\mathrm{C}_n\right)x^n \end{aligned} $$

よって

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2 \qquad \blacksquare $$

（注） (2) は n の偶奇で場合わけをすると次のようになる．

(i) n が奇数のとき

$$ {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1} $$

(ii) n が偶数のとき

$$ {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1} $$

類題 1　n を自然数とする．

(1)　二項定理を用いて，$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n$ が成り立つことを示せ．

(2)　$a_k = \dfrac{1}{k!}$ $(0 \leqq k \leqq n)$ に対し，$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ を求めよ．　　(2013 東京都市大・工)

（解答） (1) (省略)

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \\ &= \frac{2^n}{n!}\end{aligned}$$
■

類題 2　$\dfrac{\sum_{r=0}^{20} {}_{20}\mathrm{C}_r{}^2}{\sum_{r=1}^{19} \left({}_{20}\mathrm{C}_{r-1} \times {}_{20}\mathrm{C}_{r+1}\right)}$ はいくらか．　　(2013 防衛医大)

（解答） $(1+x)^{40} = (1+x)^{20} \cdot (1+x)^{20}$ において，両辺の展開式で x^{20} の係数を比較する．

左辺の展開式で x^{20} の係数は ${}_{40}\mathrm{C}_{20}$，

右辺の展開式で x^{20} を含む項は二項定理

$$(1+x)^{20} = {}_{20}\mathrm{C}_0 + {}_{20}\mathrm{C}_1 x + {}_{20}\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_{20} x^{20}$$

を用いると

$$\begin{aligned}&{}_{20}\mathrm{C}_0 \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{20} x^{20} + {}_{20}\mathrm{C}_1 x \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{19} x^{19} + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_{20} x^{20} \cdot {}_{20}\mathrm{C}_0 \\ &= \left({}_{20}\mathrm{C}_0 \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{20} + {}_{20}\mathrm{C}_1 \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{19} + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_{20} \cdot {}_{20}\mathrm{C}_0\right) x^{20} \\ &= \left({}_{20}\mathrm{C}_0 \cdot {}_{20}\mathrm{C}_0 + {}_{20}\mathrm{C}_1 \cdot {}_{20}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_{20} \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{20}\right) x^{20} \\ &= \sum_{r=0}^{20} {}_{20}\mathrm{C}_r{}^2 x^{20}\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{r=0}^{20} {}_{20}\mathrm{C}_r{}^2 = {}_{40}\mathrm{C}_{20} \qquad \cdots ①$$

同様にして $(1+x)^{40} = (1+x)^{20} \cdot (1+x)^{20}$ において，両辺の展開式で x^{18} の係数を比較する．

左辺の展開式で x^{18} の係数は ${}_{40}\mathrm{C}_{18}$，

右辺の展開式で x^{18} を含む項は二項定理

$$(1+x)^{20} = {}_{20}\mathrm{C}_0 + {}_{20}\mathrm{C}_1 x + {}_{20}\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_{20} x^{20}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&{}_{20}\mathrm{C}_0 \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{18} x^{18} + {}_{20}\mathrm{C}_1 x \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{17} x^{17} + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_{18} x^{18} \cdot {}_{20}\mathrm{C}_0 \\
&= \left({}_{20}\mathrm{C}_0 \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{18} + {}_{20}\mathrm{C}_1 \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{17} + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_{18} \cdot {}_{20}\mathrm{C}_0\right) x^{18} \\
&= \left({}_{20}\mathrm{C}_0 \cdot {}_{20}\mathrm{C}_2 + {}_{20}\mathrm{C}_1 \cdot {}_{20}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_{18} \cdot {}_{20}\mathrm{C}_{20}\right) x^{18} \\
&= \sum_{r=1}^{19} \left({}_{20}\mathrm{C}_{r-1} \times {}_{20}\mathrm{C}_{r+1}\right) x^{18}
\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{r=1}^{19} \left({}_{20}\mathrm{C}_{r-1} \times {}_{20}\mathrm{C}_{r+1}\right) = {}_{40}\mathrm{C}_{18} \qquad \cdots ②$$

①，②から

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{r=0}^{20} {}_{20}\mathrm{C}_r{}^2}{\sum_{r=1}^{19} \left({}_{20}\mathrm{C}_{r-1} \times {}_{20}\mathrm{C}_{r+1}\right)} &= \frac{{}_{40}\mathrm{C}_{20}}{{}_{40}\mathrm{C}_{18}} \\
&= \frac{40!}{20!20!} \cdot \frac{18!22!}{40!} \\
&= \frac{22 \cdot 21}{20 \cdot 19} \\
&= \frac{231}{190}
\end{aligned}$$

■

問題 3　n を正の整数とするとき，次の和をそれぞれ求めよ．

(1)　${}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n$

(2)　${}_n\mathrm{C}_1 + 2^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + n^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_n$

（解答）(1)　$n \geqq 1,\ k \geqq 1$ のとき

$$k{}_n\mathrm{C}_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n &= \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_r \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\
&= n\sum_{r=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_r
\end{aligned}$$

$(1+x)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_r x^r$ で $x=1$ とおくと

$$\sum_{r=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_r = 2^{n-1}$$

を得るから

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n &= n\sum_{r=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_r \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

よって

$${}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n = 2^{n-1}n$$

（別解） $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r$ の両辺を x で微分すると

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r x^{r-1}$$

$x=1$ とおくと

$$\sum_{r=1}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r = n\,2^{n-1}$$

よって

$${}_n\mathrm{C}_1 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + n\cdot{}_n\mathrm{C}_n = 2^{n-1}n$$

(2) n が正の整数のとき

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r$$

において $x=1$ とおくと

$$\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r = 2^n$$

また，$\sum_{r=0}^{0} {}_0\mathrm{C}_r = 2^0$ は明らかに成り立つから，m が非負の整数のとき

$$\sum_{r=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_r = 2^m \qquad (\bigstar)$$

を得る．

$n \geqq 1,\ k \geqq 1$ のとき

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k = k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

が成り立つから

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \quad (n \geqq 1,\ k \geqq 1) \qquad (\bigstar\bigstar)$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k_n\mathrm{C}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} \{(k-1)+1\}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\
&= n\sum_{k=1}^{n}(k-1){}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} + n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\
&= n\sum_{r=0}^{n-1} r{}_{n-1}\mathrm{C}_r + n\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_r = n\sum_{r=1}^{n-1} r{}_{n-1}\mathrm{C}_r + n\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_r
\end{aligned}
$$

$n \geqq 2,\ r \geqq 1$ のとき，(★★) より

$$
r{}_{n-1}\mathrm{C}_r = (n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{r-1}
$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n-1} r{}_{n-1}\mathrm{C}_r &= \sum_{r=1}^{n-1}(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{r-1} \\
&= (n-1)\sum_{s=0}^{n-2}{}_{n-2}\mathrm{C}_s \\
&= (n-1)2^{n-2} \quad (\because \quad (\bigstar))
\end{aligned}
$$

また，(★) より $\sum\limits_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_r = 2^{n-1}$ が成り立つから

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k &= n\sum_{r=1}^{n-1} r{}_{n-1}\mathrm{C}_r + n\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_r \\
&= n \cdot (n-1)2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} \\
&= n(n+1)2^{n-2}
\end{aligned}
$$

$n=1$ のとき，$\sum\limits_{k=0}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k = {}_1\mathrm{C}_1 = 1$ であるから，上の式は，$n=1$ のときも成り立つ．

よって

$$
\sum_{k=0}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k = n(n+1)2^{n-2}
$$

（別解 1） $n \geqq 2,\ 2 \leqq k \leqq n$ とすると

$$\begin{aligned}
k(k-1)_n\mathrm{C}_k &= k(k-1) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= n(n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\
&= n(n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,\{(n-2)-(k-2)\}!} \\
&= n(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}
\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} \\
&= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}\mathrm{C}_k
\end{aligned}$$

と変形できる．

$$(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}\mathrm{C}_k$$

において，$x=1$ とおくと

$$\sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}\mathrm{C}_k = 2^{n-2}$$

となる．これを使うと

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k = n(n-1)2^{n-2} \qquad \cdots\cdots(*)$$

(1) より

$$\sum_{k=1}^{n} k_n\mathrm{C}_k = n2^{n-1} \qquad \cdots\cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=1}^{n} k_n\mathrm{C}_k \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \\ &= n(n+1)2^{n-2}\end{aligned}$$

（これは，$n=1$ のときも成り立つ．）

（別解 2） $n \geqq 2$ の場合

$(1+x)^n = \sum\limits_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r$ の両辺を x で微分すると

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r x^{r-1} \qquad \cdots\cdots ①$$

さらに，両辺を x で微分すると

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{r=2}^{n} r(r-1)\,{}_n\mathrm{C}_r x^{r-2} \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②で $x=1$ とおくと

$$\sum_{r=1}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r = n\,2^{n-1}, \quad \sum_{r=2}^{n} r(r-1)\,{}_n\mathrm{C}_r = n(n-1)\,2^{n-2}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\,{}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k = n(n+1)2^{n-2}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ． ■

類題 3　自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

(1)　${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$

(2)　${}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n = 2^{n-1}n$

(3)　${}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 + \cdots\cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_n = 2^{2n}$　（2007 大阪府立大）

類題 4　n は正の整数とする．等式 ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n = (1+x)^n$ を用いて，次の等式が成り立つことを示せ．

(1)　${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots\cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0$

(2)　${}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n = n \cdot 2^{n-1}$

(3)　${}_n\mathrm{C}_0 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_1 + 3 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + (n+1) \cdot {}_n\mathrm{C}_n = (n+2) \cdot 2^{n-1}$　（2014 富山県大）

類題 5　(1)　$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$　$(k = 1, 2, \ldots, n)$ が成り立つことを示せ．

(2)　(1) を用いて，$S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 {}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ．　（気象大）

類題 6　n を 3 以上の自然数 とする．

(1)　$2 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，$k(k-1){}_n\mathrm{C}_k = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 {}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ．　（2008 熊本大・教育）

問題 4　n を正の整数とするとき，次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}$　　　（(3) のみ　2013 横浜市立大・医）

（解答） (1) $0 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} &= \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!\{(n+1)-(k+1)\}!}\\ &= \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}{n+1}\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k$$

ところで

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k x^k$$

において，$x=1$ とおくと

$$\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k = 2^{n+1}$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k = \sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k - {}_{n+1}\mathrm{C}_0 = 2^{n+1}-1$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

（別解） $(1+x)^n = \sum\limits_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r$ の両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x (1+x)^n \, dx = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \int_0^x x^r \, dx$$

$$\left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^x$$

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{r=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{r+1} x^{r+1}$$

この式で，$x=1$ とおくと

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{r=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{r+1}$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

(2) $0 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,\{(n+1)-(k+1)\}!} \\
&= \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k$$

ところで

$$(1-x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k (-x)^k$$

において，$x=1$ とおくと

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k{}_{n+1}\mathrm{C}_k=0$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k=-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k{}_{n+1}\mathrm{C}_k=-\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k{}_{n+1}\mathrm{C}_k-{}_{n+1}\mathrm{C}_0\right)=1$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k=\frac{1}{n+1}$$

（別解） $(1-x)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_rx^r$ の両辺を 0 から 1 まで積分すると

$$\int_0^1(1-x)^n\,dx=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r\int_0^1x^r\,dx$$

$$-\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^1$$

$$-\frac{-1}{n+1}=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r}{r+1}$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{1}{n+1}$$

(3) $0\leqq k\leqq n-1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}&=\frac{1}{2k+2}\cdot\frac{(2n)!}{(2k+1)!\{2n-(2k+1)\}!}\\&=\frac{1}{2k+2}\cdot\frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!}\\&=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)(2n)!}{(2k+2)(2k+1)!\{2n+1-(2k+2)\}!}\\&=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)!}{(2k+2)!\{2n+1-(2k+2)\}!}\\&=\frac{1}{2n+1}\ {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k+2}\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+1}\ {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k+2}\\ &= \frac{1}{2n+1}\sum_{l=1}^{n}\ {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2l}\end{aligned}$$

を得る．

二項定理より

$$\begin{aligned}&(1+x)^{2n+1}\\ &= {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 x + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots\cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n} x^{2n} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1} x^{2n+1}\end{aligned}$$

が成り立つので，この等式で，$x=\pm 1$ とおくと

$$\begin{aligned}2^n &= {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}\\ 0 &= {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 - {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 - \cdots\cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n} - {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}\end{aligned}$$

この 2 つの等式の辺々を加えると

$$2^{2n+1} = 2\left({}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}\right)$$

よって

$${}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1} = 2^{2n}$$

となり

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2} &= \frac{1}{2n+1}\sum_{l=1}^{n}\ {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2l}\\ &= \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{l=0}^{n}\ {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2l} - {}_{2n+1}\mathrm{C}_0\right)\\ &= \frac{1}{2n+1}(2^{2n}-1)\end{aligned}$$

（別解） $(1+x)^{2n} = \sum\limits_{r=0}^{2n}\ {}_{2n}\mathrm{C}_r x^r$ の両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x (1+x)^{2n}\,dx = \sum_{r=0}^{2n}\ {}_{2n}\mathrm{C}_r \int_0^x x^r\,dx$$

$$\left[\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \sum_{r=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_r \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^x$$

$$\frac{(1+x)^{2n+1}-1}{2n+1} = \sum_{r=0}^{2n} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_r}{r+1} x^{r+1}$$

この式で，$x=\pm 1$ とおくと

$$\frac{2^{2n+1}-1}{2n+1} = \sum_{r=0}^{2n} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_r}{r+1} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{-1}{2n+1} = \sum_{r=0}^{2n} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_r}{r+1}(-1)^{r+1} \qquad \cdots\cdots ②$$

① + ② から

$$\frac{2^{2n+1}-2}{2n+1} = 2\sum_{\substack{r=0 \\ r\text{は奇数}}}^{2n} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_r}{r+1} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}$$

よって

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$$

■

類題 7　n を 2 以上の整数 として，

$$A_n = 2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + 3\cdot 2\cdot{}_n\mathrm{C}_3 + 4\cdot 3\cdot{}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + n\cdot(n-1)\cdot{}_n\mathrm{C}_n$$

$$B_n = {}_n\mathrm{C}_0 - \frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2} + \frac{{}_n\mathrm{C}_2}{3} - \cdots + (-1)^n\cdot\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とする．このとき，$A_n\cdot B_{n-1} = \left(n + {}^{ア}\boxed{}\right)\cdot{}^{イ}\boxed{}^{\,n+{}^{ウ}\boxed{}}$ となる．

（2010 早稲田大・人間科）

類題 8　n を自然数とする．

(1)　等式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k=0$ を示せ．

(2)　k が $0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数のとき，等式 $(n+1)_n\mathrm{C}_k=(k+1)_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$ が成り立つことを示せ．

(3)　等式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}{}_n\mathrm{C}_k=\frac{1}{n+1}$ を示せ．

（2011 学習院大・文）

類題 9　(1)　組合せの記号を含む次の等式を証明せよ．

①　$\displaystyle\sum_{m=0}^{n}(-1)^m{}_n\mathrm{C}_m=0$　　②　$\displaystyle\frac{n-m}{n!}{}_n\mathrm{C}_m=\frac{1}{(n-1)!}{}_{n-1}\mathrm{C}_m$

③　$\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m+1}{}_n\mathrm{C}_m=\frac{1}{n+1}$

(2)　$f(x)$ を整式とし，$f_{n+1}(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ を $\displaystyle f_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f(t)(x-t)^n\,dt$ によって定める．必要があれば (1) の結果を用いて，次の各問いに答えよ．

①　$\displaystyle\frac{d}{dx}f_{n+1}(x)=f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ を示せ．

②　$f(x)=1$ のとき $f_n(x)$ を求めよ．

(1981 秋田大・医)

秋田大学の入試問題の (2)①に関する問題は [1] **数学の問題**の $\boxed{6}$ で扱っている．

$\boxed{6}$ 次の (a) または (b) または (c) の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(a) $f(x)$ を積分可能な関数とし，n を自然数とする．このとき，

$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$ は $f(x)$ を a から x まで n 回積分したものであることを示せ．

(b) $\displaystyle f_1(x)=\int_a^x f(t)\,dt\,,\, f_2(x)=\int_a^x f_1(t)\,dt\,,\cdots,\, f_k(x)=\int_a^x f_{k-1}(t)\,dt$

(k は 2 以上の自然数) のとき

(1) 部分積分法を用いて $\displaystyle f_2(x)=\int_a^x (x-t)f(t)\,dt$ となることをいえ．

(2) $\displaystyle f_k(x)=\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}f(t)\,dt$ (k は任意の自然数) となることを示せ．

（'69 大阪教育大 (改題)）

(c) $\displaystyle F_n(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^n f(t)}{n!}\,dt$ ($n \geqq 0$) とおくとき，

$\displaystyle\frac{d}{dx}F_n(x)=F_{n-1}(x)$ ($n \geqq 1$) となることを示せ．

(a)，(b)(2) は数学的帰納法で証明することになると思うが，$n=k$ のときの仮定の使い方が難しい．

解 (a) n に関する数学的帰納法で証明する．

(1) $n=1$ のとき，

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt=\int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!}f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt$$

は $f(x)$ を a から x まで 1 回積分したものである．

(2) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

「任意 の積分可能な関数 $f(x)$ に関して，$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f(t)\,dt$ は $f(x)$ を a から x まで k 回積分したものである．」

$n=k+1$ の場合を考える．

$\displaystyle F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと $F'(x)=f(x)\,,F(a)=0$ が成り立ち，

$$\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f(t)\,dt = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} F'(t)\,dt$$
$$= \left[\frac{(x-t)^k}{k!} F(t)\right]_a^x - \int_a^x \frac{k(x-t)^{k-1}(-1)}{k!} F(t)\,dt$$
$$= \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} F(t)\,dt\,.$$

仮定から，これは，$F(x)$ を a から x まで k 回積分したものである．よって，これは，$f(x)$ を a から x まで $k+1$ 回積分したものであるから $n=k+1$ のときも成り立つ．

(1)，(2) からすべての自然数 n について成り立つ． ■

解 (b) (1) $f_2(x) = \int_a^x t' f_1(t)\,dt = \big[tf_1(t)\big]_a^x - \int_a^x t f_1'(t)\,dt$

$$= xf_1(x) - \int_a^x tf(t)\,dt = x\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x tf(t)\,dt = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt\,.$$

(2) (i) $k=1$ のときは定義であるから成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，最初の関数を $f_1(x)$ から出発して k 回積分して得られる関数は $f_{k+1}(x)$ であるから，

$f_{k+1}(x) = \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_a^x (x-t)^{k-1} f_1(t)\,dt$ が成り立つ．

このとき，

$$\begin{aligned}
&f_{k+1}(x)\\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1} f_1(t)\,dt\\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x \left(-\frac{(x-t)^k}{k}\right)' f_1(t)\,dt\\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left\{\left[-\frac{(x-t)^k}{k} f_1(t)\right]_a^x + \frac{1}{k}\int_a^x (x-t)^k f_1'(t)\,dt\right\}\\
&= \frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f(t)\,dt \quad (\because \quad f_1(a)=0\,)
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(1)，(2) より，すべての自然数 n について成り立つ． ■

解 (c)　$G_n(x) = \int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt$ とおく．

二項定理を使い展開すると

$$G_n(x) = \int_a^x \left\{ \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k} (-t)^k \right\} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k} \int_a^x (-t)^k f(t) \right\} dt$$

よって，

$$\frac{d}{dx} G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ (n-k)\,{}_n\mathrm{C}_k x^{n-k-1} \int_a^x (-t)^k f(t)\,dt + {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k} (-x)^k f(x) \right\}$$

ここで，$(n-k)\,{}_n\mathrm{C}_k = (n-k) \cdot \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = n \cdot \dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_k$,

$\sum\limits_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k} (-x)^k = (x-x)^n = 0$ であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} G_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_k x^{n-1-k} \int_a^x (-t)^k f(t)\,dt \\
&= n \int_a^x \left\{ \sum_{k=0}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_k x^{n-1-k} (-t)^k \right\} f(t)\,dt \\
&= n \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt = nG_{n-1}(x)\,.
\end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{d}{dx} G_n(x) = n \cdot G_{n-1}(x)$ が成り立つから，両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{d}{dx} F_n(x) = F_{n-1}(x)$$

を得る．　■

3　二項係数の関係式（2）

二項係数の関係式（1）ではよく知られている等式を扱ったが，ここでは大学入試問題等から興味深いものを集めてみた．

問題 5　　n を正の整数とする．

(1)

$$(1-x)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r x^r$$

が成り立つことを利用して

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1} {}_n\mathrm{C}_r = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1} {}_n\mathrm{C}_r$ を n の式で表せ．

（解答）

(1) $(1-x^2)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r x^{2r}$ の両辺を 0 から 1 まで積分すると

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r \int_0^1 x^{2r} \, dx \\
&= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r \left[\frac{x^{2r+1}}{2r+1} \right]_0^1 \\
&= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1} {}_n\mathrm{C}_r
\end{aligned}$$

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$ とおくと

$$
\begin{aligned}
I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \int_0^1 (x)'(1-x^2)^n \, dx \\
&= \left[x(1-x^2)^n\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot n(1-x^2)^{n-1} \cdot (-2x) \, dx \\
&= -2n \int_0^1 (-x^2)(1-x^2)^{n-1} \, dx \\
&= -2n \left\{ \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1} \, dx - \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} \, dx \right\} \\
&= -2n \left(I_n - I_{n-1} \right)
\end{aligned}
$$

よって

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

また

$$I_1 = \int_0^1 (1-x^2) \, dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \\
&= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} I_{n-2} \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdots\cdots \frac{4}{5} I_1 \\
&= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdots\cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}
\end{aligned}
$$

ここで

$$(2n)!! = 2n \cdot 2(n-1) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2, \;\; (2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1$$

であったから

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n+1)!!(2n)!!} = \frac{\{2^n n!\}^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

であるから

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1} {}_n\mathrm{C}_r = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \qquad \blacksquare$$

原題は次の関西学院大の入試問題である．

類題 10　1 以上の 整数 n に対して，

$$a_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2},\ J_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx,\ K_n = a_n J_n \text{ とおく．}$$

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を n の式で表せ．

(2) $K_1,\,K_2$ を求めよ．また，$\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,dx$ を J_{n+1} と J_n を用いて表せ．ただし，J_{n+1} と J_n の両方を用いること．

(3) $J_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (x)' \cdot (1-x^2)^{n+1}\,dx$ に部分積分法を適用して，J_{n+1} を J_n を用いて表せ．また，$\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$ を求めよ．

(4) K_n と J_n を n の式で表せ．

(5) $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} {}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_0 - \frac{1}{3} {}_n\mathrm{C}_1 + \frac{1}{5} {}_n\mathrm{C}_2 - \frac{1}{7} {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} {}_n\mathrm{C}_n$ とおく．このとき，L_n が J_n に等しいことを示せ．

(2014 関西学院大)

(注)　J_n の式で x^2 を x^3 で置き換えた式を考えてみる．

(1) $(1-x^3)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r x^{3r}$ の両辺を 0 から 1 まで積分すると

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x^3)^n\,dx &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r \int_0^1 x^{3r}\,dx \\
&= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r \left[\frac{x^{3r+1}}{3r+1}\right]_0^1 \\
&= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{3r+1} {}_n\mathrm{C}_r
\end{aligned}$$

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^3)^n\,dx$ とおくと

$$
\begin{aligned}
I_n = \int_0^1 (1-x^3)^n\,dx &= \int_0^1 (x)'(1-x^3)^n\,dx \\
&= \Big[x(1-x^3)^n\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot n(1-x^3)^{n-1}\cdot(-3x^2)\,dx \\
&= -3n\int_0^1 (-x^3)(1-x^3)^{n-1}\,dx \\
&= -3n\left\{\int_0^1 (1-x^3)(1-x^3)^{n-1}\,dx - \int_0^1 (1-x^3)^{n-1}\,dx\right\} \\
&= -3n\,(I_n - I_{n-1})
\end{aligned}
$$

よって

$$
I_n = \frac{3n}{3n+1}I_{n-1}
$$

また

$$
I_1 = \int_0^1 (1-x^3)\,dx = \left[x - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{3n}{3n+1}I_{n-1} \\
&= \frac{3n}{3n+1}\cdot\frac{3(n-1)}{3n-2}I_{n-2} \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{3n}{3n+1}\cdot\frac{3(n-1)}{3n-2}\cdots\cdots\frac{6}{7}I_1 \\
&= \frac{3n}{3n+1}\cdot\frac{3(n-1)}{3n-2}\cdots\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{4} \\
&= \frac{(3n)!!!}{(3n+1)!!!}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
(3n)!!! = 3n\cdot 3(n-1)\cdot\cdots\cdot 6\cdot 3,\ (3n-2)!!! = (3n-2)\cdot(3n-5)\cdots 4\cdot 1
$$

と表すことにした．(!!! は三重階乗と呼ばれている．)
よって

$$
\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{3r+1}{}_n\mathrm{C}_r = \frac{(3n)!!!}{(3n+1)!!!} \qquad \square
$$

多重階乗を用いれば，さらに拡張することもできる．

問題 6　n, r は正の整数で，$r \leqq n$ とする．

(1)　${}_{n+1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r-1}$ を証明せよ．

(2)　${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots\cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n$ の値を求めよ．

(3)　${}_n\mathrm{C}_1 - \frac{1}{2}{}_n\mathrm{C}_2 + \frac{1}{3}{}_n\mathrm{C}_3 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}{}_n\mathrm{C}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$

を証明せよ．　(大阪教育大)

(3) $(1-x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 - \cdots\cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n x^n$ を変形すると

$${}_n\mathrm{C}_1 x - {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} {}_n\mathrm{C}_n x^n = 1 - (1-x)^n$$

両辺を x で割り，0 から 1 まで積分すると

$$\int_0^1 \left\{ {}_n\mathrm{C}_1 - {}_n\mathrm{C}_2 x + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} {}_n\mathrm{C}_n x^{n-1} \right\} dx = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\, dx$$

左辺の積分は

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\{ {}_n\mathrm{C}_1 - {}_n\mathrm{C}_2 x + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} {}_n\mathrm{C}_n x^{n-1} \right\} dx \\
&= \left[{}_n\mathrm{C}_1 x - {}_n\mathrm{C}_2 \frac{x^2}{2} + {}_n\mathrm{C}_3 \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \quad \mathrm{C}_n \frac{x^n}{n}{}_n \right]_0^1 \\
&= {}_n\mathrm{C}_1 - \frac{1}{2}{}_n\mathrm{C}_2 + \frac{1}{3}{}_n\mathrm{C}_3 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}{}_n\mathrm{C}_n
\end{aligned}$$

右辺の定積分において，$t = 1 - x$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\, dx &= \int_1^0 \frac{1-t^n}{1-t}\,(-dt) \\
&= \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\, dt \\
&= \int_0^1 \left(1 + t + t^2 + \cdots\cdots + t^{n-1}\right) dt \\
&= \left[t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots\cdots + \frac{t^n}{n} \right]_0^1 \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

よって

$$ {}_n\mathrm{C}_1 - \frac{1}{2}{}_n\mathrm{C}_2 + \frac{1}{3}{}_n\mathrm{C}_3 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}{}_n\mathrm{C}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} \quad \square $$

(1) の結果を使うには帰納法によればよい.

(3) 数学的帰納法で証明する.

(i) $n = 1$ のとき, (左辺) $= {}_1\mathrm{C}_1 = 1$, (右辺) $= \dfrac{1}{1} =$ より (左辺) = (右辺)

(ii) $n = m$ $(m \geqq 1)$ のとき成り立つと仮定すると

$$ {}_m\mathrm{C}_1 - \frac{1}{2}{}_m\mathrm{C}_2 + \frac{1}{3}{}_m\mathrm{C}_3 - \cdots\cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m}{}_m\mathrm{C}_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{m} $$

$n = m + 1$ のとき

$$ \begin{aligned} & {}_{m+1}\mathrm{C}_1 - \frac{1}{2}{}_{m+1}\mathrm{C}_2 + \frac{1}{3}{}_{m+1}\mathrm{C}_3 - \cdots\cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m}{}_{m+1}\mathrm{C}_m \\ & \qquad + (-1)^m\frac{1}{m+1}{}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1} \\ & - \left({}_m\mathrm{C}_1 - \frac{1}{2}{}_m\mathrm{C}_2 + \frac{1}{3}{}_m\mathrm{C}_3 - \cdots\cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m}{}_m\mathrm{C}_m\right) \\ & = {}_{m+1}\mathrm{C}_1 - {}_m\mathrm{C}_1 - \frac{1}{2}\underbrace{({}_{m+1}\mathrm{C}_2 - {}_m\mathrm{C}_2)}_{={}_m\mathrm{C}_1} + \frac{1}{3}\underbrace{({}_{m+1}\mathrm{C}_3 - {}_m\mathrm{C}_3)}_{={}_m\mathrm{C}_2} + \cdots \\ & \quad + (-1)^{m-1}\frac{1}{m}\underbrace{({}_{m+1}\mathrm{C}_m - {}_m\mathrm{C}_m)}_{={}_m\mathrm{C}_{m-1}} + (-1)^m\frac{1}{m+1}{}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1} \\ & = 1 - \frac{1}{2}{}_m\mathrm{C}_1 + \frac{1}{3}{}_m\mathrm{C}_2 + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m}{}_m\mathrm{C}_{m-1} + (-1)^m\frac{1}{m+1}{}_m\mathrm{C}_m \end{aligned} $$

となるから

$$ 1 - \frac{1}{2}{}_m\mathrm{C}_1 + \frac{1}{3}{}_m\mathrm{C}_2 + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m}{}_m\mathrm{C}_{m-1} + (-1)^m\frac{1}{m+1}{}_m\mathrm{C}_m = \frac{1}{m+1} $$

を示せばよい. これは

$$ (1-x)^m = {}_m\mathrm{C}_0 - {}_m\mathrm{C}_1 x + {}_m\mathrm{C}_2 x^2 - \cdots\cdots + (-1)^m{}_m\mathrm{C}_m x^m $$

の両辺を 0 から 1 まで積分すれば得られる.

よって, $n = m + 1$ のときも成り立つ.

(i), (ii) から, すべての正の整数 n について成り立つ. $\square$

類題 11　n が正の整数のとき，等式

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r\,\frac{1}{r}=-\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\qquad\cdots\cdots①$$

すなわち

$$-\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{1}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2}-\cdots+(-1)^n\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{n}=-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つ．これを証明したい．次の問いに答えよ．ただし，(1) と (2) はそれぞれ独立した問題である．

(1)　${}_n\mathrm{C}_r-{}_{n-1}\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ を証明せよ．ただし，$n\geqq 2,\ 1\leqq r\leqq n-1$ とする．

(2)　$\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\,\frac{n}{r}=-1-(-1)^n$ を証明せよ．ただし，$n\geqq 2$ とする．

(3)　等式①の左辺を a_n とする．すなわち，$a_n=\displaystyle\sum_{r=1}^{n}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r\,\frac{1}{r}$ である．
a_1 および $n\geqq 2$ のとき a_n-a_{n-1} の値を求めて，等式①を導け．

(2006 東京慈恵会医大)

問題 7　m, n を 0 以上の整数とし，$I_{n,\,m} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ とおく．

(1)　$m \geqq 1$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n+1,\,m-1}$ を用いて表せ．

(2)　$I_{n,\,m} = \dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}$ を示せ．

(3)　$\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!} = \dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1} - \dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2} + \cdots\cdots + (-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_n}{n+m+1}$ を示せ．

（解答）　(1) $m \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
I_{n,\,m} &= \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'(1-x)^m\,dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^m\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot m(1-x)^{m-1}(-1)\,dx \\
&= \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1}\,dx \\
&= \frac{m}{n+1}I_{n+1,\,m-1}
\end{aligned}$$

(2) $m = 0$ のとき，$I_{n,\,0} = \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

m が正の整数のとき

$$\begin{aligned}
I_{n,\,m} &= \frac{m}{n+1}I_{n+1,\,m-1} \\
&= \frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}I_{n+2,\,m-2} \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdots\frac{1}{n+m}I_{n+m,\,0} \\
&= \frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdots\frac{1}{n+m}\cdot\frac{1}{n+m+1} \\
&= \frac{m!}{(n+m+1)(n+m)\cdots(n+1)} \\
&= \frac{m!\cdot n!}{(n+m+1)(n+m)\cdots(n+1)\cdot n!} \\
&= \frac{n!m!}{(n+m+1)!}
\end{aligned}$$

これは，$m=0$ のときも成り立つから

$$I_{n,\,m}=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

(3) 二項定理から

$$(1-x)^m={}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_1x+\cdots+(-1)^m{}_m\mathrm{C}_mx^m$$

両辺に x^n をかけると

$$x^n(1-x)^m={}_m\mathrm{C}_0x^n-{}_m\mathrm{C}_1x^{n+1}+\cdots+(-1)^m{}_m\mathrm{C}_mx^{n+m}$$

両辺を x について 0 から 1 まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx&=\left[\frac{{}_m\mathrm{C}_0x^{n+1}}{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1x^{n+2}}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^m{}_m\mathrm{C}_mx^{n+m+1}}{n+m+1}\right]_0^1\\&=\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\frac{{}_m\mathrm{C}_n}{n+m+1}\end{aligned}$$

(2) の結果を使うと

$$\frac{n!m!}{(n+m+1)!}=\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots\cdots+(-1)^m\frac{{}_m\mathrm{C}_n}{n+m+1}\qquad\blacksquare$$

原題は次の千葉大の入試問題である．

類題 12　$m,\,n$ を 0 以上の整数とし，$I_{n,m}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく．

(1) $n\geqq 2$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n-2,\,m+2}$ を用いて表せ．

(2) $I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ を示せ．

(3) $\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_n}{n+m+1}$ を示せ．
ただし，$0!=1$ とする．

(2014 千葉大・理，薬，工)

問題 8　x, y を変数とする．

(1)　n を自然数とする．次の等式が成り立つように定数 a, b を求めよ．

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots\cdots(y+n)(y+n+1)}$$
$$=\frac{a}{y(y+1)\cdots\cdots(y+n)}+\frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots\cdots(y+n+1)}$$

(2)　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

（2006 大阪大・理）

(解答) (1) 等式

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots\cdots(y+n)(y+n+1)}$$
$$=\frac{a}{y(y+1)\cdots\cdots(y+n)}+\frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots\cdots(y+n+1)}$$

の両辺に $y(y+1)\cdots\cdots(y+n)(y+n+1)$ をかけると

$$n+1=a(y+n+1)+by \quad \text{すなわち} \quad n+1=(a+b)y+a(n+1)$$

y についての恒等式だから $a+b=0,\ a(n+1)=n+1$

よって，$a=1,\ b=-1$

(2)　$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r} \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$$\text{左辺}=\frac{1!}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$$

$$\text{右辺}=\sum_{r=0}^{1}(-1)^r\frac{{}_1\mathrm{C}_r}{x+r}=(-1)^0\frac{{}_1\mathrm{C}_0}{x}+(-1)^1\frac{{}_1\mathrm{C}_1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$$

よって，①は成り立つ．

(ii) n のとき成り立つと仮定すると，等式

$$\frac{n!}{y(y+1)\cdots\cdots(y+n)} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{y+r}$$

が成り立つ．

$n+1$ のとき，① の左辺を考えると

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+1)!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)(x+n+1)} \\
&= n!\frac{n+1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)(x+n+1)} \\
&= n!\cdot\left\{\frac{1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n+1)}\right\} \\
&= \frac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)} - \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n+1)} \\
&= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r} - \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{(x+1)+r} \\
&= (-1)^0\frac{{}_n\mathrm{C}_0}{x} + (-1)^1\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{x+1} + (-1)^2\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{x+2} + \cdots + (-1)^n\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{x+n} \\
&\quad - \left\{(-1)^0\frac{{}_n\mathrm{C}_0}{x+1} + (-1)^1\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{x+2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{{}_n\mathrm{C}_{n-1}}{x+n} + (-1)^n\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{x+n+1}\right\} \\
&= \frac{1}{x} + (-1)^1\frac{{}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_0}{x+1} + (-1)^2\frac{{}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1}{x+2} + \cdots + (-1)^n\frac{{}_n\mathrm{C}_n + {}_n\mathrm{C}_{n-1}}{x+n} \\
&\qquad + (-1)^{n+1}\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{x+n+1} \\
&= \frac{1}{x} + \underbrace{(-1)^1\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_1}{x+1} + (-1)^2\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}{x+2} + \cdots + (-1)^n\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_n}{x+n}}_{=\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_r}{x+r}} \\
&\qquad + (-1)^{n+1}\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}{x+n+1} \\
&= \sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_r}{x+r}
\end{aligned}$$

となり $n+1$ のときも①は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について①は成り立つ． ■

[注] (2) の別解については柳田 [4] 参照．

問題 8 の (2) で得られた

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdot\cdots\cdot(x+n)} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

は興味深い等式で，以前に扱った等式をこの式から導くことができる．
まず，rising factorial $(a)_n$ を定義しておくと便利である．

rising factorial $(a)_n$ は次の式で定義される。

$$(a)_n = \begin{cases} a(a+1)\cdots(a+n-1) & (n \geqq 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

記号 $(a)_n$ を使うと

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r} = \frac{n!}{x(x+1)\cdot\cdots\cdot(x+n)} = \frac{n!}{(x)_{n+1}} \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

$(\bigstar)$ で $x = 1$ とおくと

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{1+r} = \frac{n!}{1\cdot 2\cdots(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

となり，(10) を得る．

$(\bigstar)$ で $x = \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$2\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{2r+1} = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+1}}$$

ところで

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)_{n+1} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n+1}{2} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{2^{n+1}\cdot 2^n n!} \\ &= \frac{(2n+1)!}{n!2^{2n+1}} \end{aligned}$$

となるから

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{2r+1}=\frac{n!}{2\left(\dfrac{1}{2}\right)_{n+1}}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

これで，問題 5 の (3) の答えが得られた．

p を正の整数として，(★) で $x=\dfrac{1}{p}$ とおくと

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{pr+1}=\frac{n!}{p\left(\dfrac{1}{p}\right)_{n+1}}$$

が得られる．

(★) で $x=m+1$ (m は 0 以上の整数) とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{m+1+r+1}&=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)}\\&=\frac{m!n!}{m!(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)}\\&=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\end{aligned}$$

となり，問題 7 の (3) の結果が得られる．

(★) で $x=0$ とおくことはできないから，少し工夫をする．

(★) を変形すると

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}&=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}-\frac{1}{x}\\&=\frac{n!}{x(x+1)\cdot\cdots\cdot(x+n)}-\frac{1}{x}\\&=\frac{1}{x}\left\{\frac{n!}{(x+1)\cdot\cdots\cdot(x+n)}-1\right\}\end{aligned}$$

$$f(x)=\frac{n!}{(x+1)\cdot\cdots\cdot(x+n)}-1$$

とおくと，$f(0)=0$ で

$$f'(x) = -n!\Big\{(x+1)^{-2}(x+2)^{-1}\cdots(x+n)^{-1} + (x+1)^{-1}(x+2)^{-2}\cdots(x+n)^{-1}$$
$$+\cdots+(x+1)^{-1}(x+2)^{-1}\cdots(x+n)^{-2}\Big\}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{n!}{(x+1)\cdots\cdots(x+n)}-1\right\} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \\
&= f'(0) \\
&= -n!\left(\frac{1}{1^2\cdot 2\cdots n}+\frac{1}{1\cdot 2^2\cdots n}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n^2}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

から

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{r} = -\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

となり，問題 6 の (3)，類題の① が成り立つ．

定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ （ベータ関数）に関する問題が鳥取大に出題されている．

類題 13　1 以上の整数 $p,\,q$ に対し，$B(p,\,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ とおく．

(1)　$B(p,\,q)=B(q,\,p)$ が成り立つことを示せ．

(2)　関係式 $B(p,\,q+1)=\dfrac{q}{p}B(p+1,\,q)$，$B(p+1,\,q)+B(p,\,q+1)=B(p,\,q)$ が成り立つことを示せ．

(3)　関係式 $B(p+1,\,q)=\dfrac{p}{p+q}B(p,\,q)$，$B(p,\,q+1)=\dfrac{q}{p+q}B(p,\,q)$ が成り立つことを示せ．

(4)　$B(5,\,4)$ を求めよ．

(2014 鳥取大・工，農，医)

次の大阪工大の問題では

$$B(p,\,q)=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

のみならず

$$\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}\,dx=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}(b-a)^{p+q-1}$$

を求めている．

類題 14　自然数 $p,\,q$ に対し，$B(p,\,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ と定義する．次のことを，〔　〕内で指定した方法で証明せよ．

(1)　$q>1$ のとき $B(p,\,q)=\dfrac{q-1}{p}B(p+1,\,q-1)$　　〔部分積分による〕

(2)　$B(p,\,q)=\dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$　　〔(1) の結果を用いる〕

(3)　$\displaystyle\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}\,dx=(b-a)^{p+q-1}B(p,\,q)$　　〔置換積分による〕

(大阪工大)

柳田 [1] で次の問題を扱っている．本質的には大阪工大の解法と $\boxed{4}$ は同じである．

$\boxed{4}$ 次の等式を証明せよ．ただし，$m\,,n$ は 0 以上の整数，$\alpha\,,\beta$ は実数とし，

$I(m\,,n)=\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ とおく．

(1) $n \geqq 1$ のとき，$I(m,n)=\dfrac{n}{m+1}I(m+1\,,n-1)$

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

解 (1)

$$
\begin{aligned}
I(m\,,n)&=\int_\alpha^\beta\left\{\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}\right\}'(\beta-x)^n\,dx\\
&=\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^n\right]_\alpha^\beta\\
&\qquad+\frac{1}{m+1}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+1}\cdot n(\beta-x)^{n-1}\,dx\\
&=\frac{n}{m+1}I(m+1\,,n-1)\,.
\end{aligned}
$$

(2) $I(m\,,n)=\dfrac{n}{m+1}I(m+1\,,n-1)$ の両辺を $n!m!$ で割ると

$$\frac{I(m\,,n)}{m!n!}=\frac{I(m+1\,,n-1)}{(m+1)!(n-1)!}\,.$$

$J(m\,,n)=\dfrac{I(m\,,n)}{m!n!}$ とおくと $J(m\,,n)=J(m+1\,,n-1)\,.$

これを繰り返し使うと

$$
\begin{aligned}
J(m\,,n)&=J(m+1\,,n-1)=J(m+2\,,n-2)=\cdots\cdots=J(m+n\,,0)\\
&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx\\
&=\left[\frac{1}{m+n+1}(x-\alpha)^{m+n+1}\right]_\alpha^\beta\\
&=\frac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\,.
\end{aligned}
$$

よって $I(m\,,n)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ から

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\,.$$

■

$\boxed{5}$ 2 つの連続関数 $f(x)\,,g(x)$ に対して $(f*g)(x)$ を

$(f*g)(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)\,dt$ で定義する．

(1) $f(x)=x^m\,,g(x)=x^n$ ($m\,,n$ は負でない整数) とするとき

$$(f*g)(x)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\,x^{m+n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $m\,,n$ は負でない整数のとき

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が成り立つことを示せ．

解 m を非負の整数とし，n に関する数学的帰納法を用いる．

(1) (i) $n=0$ のとき，任意の非負の整数 m に対して，

$$(f*g)(x)=\int_0^x t^m\,dt=\frac{x^{m+1}}{m+1}\,,$$

$$\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\,x^{m+n+1}=\frac{m!0!}{(m+0+1)!}x^{m+0+1}=\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

となるので，$(f*g)(x)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}x^{m+n+1}$ が成り立つ．

(ii) $n=k(\geqq 0)$ のとき成り立つと仮定すると，

m を任意の非負の整数とし，$f_m(x)=x^m\,,g_k(x)=x^k$ のとき

$$(f_m*g_k)(x)=\frac{m!k!}{(m+k+1)!}\,x^{m+k+1} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

m を非負の整数とするとき，

$$(f_{m+1}*g_k)(x)=\frac{(m+1)!k!}{(m+1+k+1)!}\,x^{m+1+k+1}$$

が成り立つことに注意しよう．

$n=k+1$ のとき $g_{k+1}(x)=x^{k+1}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
(f_m*g_{k+1})(x) &= \int_0^x t^m(x-t)^{k+1}\,dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{t^{m+1}}{m+1}\right)'(x-t)^{k+1}\,dt \\
&= \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}(x-t)^{k+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{m+1}}{m+1}(k+1)(x-t)^k(-1)\,dt \\
&= \frac{k+1}{m+1}\int_0^x t^{m+1}(x-t)^k\,dt \\
&= \frac{k+1}{m+1}(f_{m+1}*g_k)(x)\,dt \\
&= \frac{k+1}{m+1}\cdot\frac{(m+1)!k!}{(m+1+k+1)!}\,x^{m+1+k+1} \qquad (\because ①) \\
&= \frac{m!(k+1)!}{\{m+(k+1)+1\}!}\,x^{m+(k+1)+1}.
\end{aligned}
$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より，任意の非負の整数 $m\,,n$ について，等式が成り立つ．

(2)　(1) の結果

$$
\int_0^x t^m(x-t)^n\,dt = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}\,x^{m+n+1}
$$

を使うと

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx &= \int_0^{\beta-\alpha} t^m(\beta-\alpha-t)^n\,dt \quad (\ x-\alpha=t\ ) \\
&= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}
\end{aligned}
$$

を得る．■

$\boxed{4}$ と本質的に同じ問題が秋田大で出題されている．

類題 15　負でない整数 $m,\,n$ に対して関数 $f_{m,\,n}(x)$ が $f_{m,\,n}(x)=(x-a)^m(x-b)^n$ で与えられている．

(1)　$m \geqq 1$ のとき，$\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{n+1}f_{m,\,n+1}(x)\right\}=f_{m,\,n}(x)+\dfrac{m}{n+1}f_{m-1,\,n+1}(x)$ を示せ．

(2)　$I_{m,\,n}=\displaystyle\int_a^b f_{m,\,n}(x)\,dx$ とおく．$m \geqq 1$ のとき，(1) を用いて漸化式

$$I_{m,\,n}=-\frac{m}{n+1}I_{m-1,\,n+1}$$ を示せ．

(3)　(2) の $I_{m,\,n}$ に対して $I_{m,\,n}=(-1)^n\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}$ を示せ．

（1979 秋田大・医）

次の問題はガンマ関数とベータ関数の関係式を扱ったものである．

問題 9　関数 $F(x)$ は $x \geqq \dfrac{1}{2}$ で定義され，次の (a)，(b) を満たすものとする．

(a)　$F(1) = 1$

(b)　$F(x)F(y) = 2F(x+y)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta$

このとき，次を示せ．

(i)　$F(x+1) = xF(x)$

(ii)　n が自然数のとき, $F(n) = (n-1)!$

(iii)　$F(x) > 0$

(iv)　$F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(v)　$F(2x) = \dfrac{2^{2x}}{2\sqrt{\pi}}F(x)F\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

$F(x)$ はガンマ関数 $\mathit{\Gamma}(x)$

$$\mathit{\Gamma}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x > 0)$$

で，$2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta$ はベータ関数 $B(x,\,y)$ に等しい．

ベータ関数は，$p > 0\,, q > 0$ としたときの定積分

$$B(p,\,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad \cdots\cdots(*)$$

によって定義される．

$(*)$ で $x = \cos^2\theta$ とおくと

$$B(p,\,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta$$

となる．

関係式 (b) は，ガンマ関数とベータ関数の関係式

$$\mathit{\Gamma}(x)\mathit{\Gamma}(y) = \mathit{\Gamma}(x+y)B(x,\,y)$$

に他ならない．（柳田 [2] P.121〜123 参照）

(v) はガンマ関数の倍法公式

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}2^{1-2x}\Gamma(2x)$$

である．（柳田 [2] P.97 参照）

(解答) (i)　(b) において $y=1$ とおくと

$$\begin{aligned}F(x)F(1)&=2F(x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}\sin\theta\,d\theta\\&=2F(x+1)\left[-\frac{1}{2x}(\cos\theta)^{2x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{F(x+1)}{x}\end{aligned}$$

(a) を用いると，$F(x+1)=xF(x)F(1)=xF(x)$

(ii) (a) と (i) より

$$\begin{aligned}F(n)&=(n-1)F(n-1)\\&=(n-1)(n-2)F(n-2)\\&=\ldots\ldots\\&=(n-1)(n-2)\cdots1\cdot F(1)\\&=(n-1)!\end{aligned}$$

(iii) まず $s\geqq1$ のとき，$F(s)>0$ を示す．

(b) において $y=x\left(\geqq\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$\{F(x)\}^2=2F(2x)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\sin\theta)^{2x-1}\,d\theta=\frac{F(2x)}{2^{2x-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin2\theta)^{2x-1}\,d\theta\quad\cdots①$$

①で，$\{F(x)\}^2\geqq0$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin2\theta)^{2x-1}\,d\theta>0$ であるから $F(2x)\geqq0$ となる．

すなわち $s\geqq1$ のとき，$F(s)\geqq0$ となる．したがって，$F(s)\neq0$ を示せばよい．

$s\geqq1$ のとき $n-s\geqq\dfrac{1}{2}$ となる正の整数 n をとり，(b) において，$x=s$, $y=n-s$ とおくと

$$\begin{aligned}F(s)F(n-s)&=2F(n)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2s-1}(\sin\theta)^{2(n-s)-1}\,d\theta\\&=2(n-1)!\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2s-1}(\sin\theta)^{2(n-s)-1}\,d\theta>0\end{aligned}$$

より，$F(s) \fallingdotseq 0$ となる．
$\dfrac{1}{2} \leqq s < 1$ のとき，$\dfrac{3}{2} \leqq s+1$ であるから (i) より

$$F(s) = \frac{F(s+1)}{s} > 0$$

以上のことから，$x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき $F(x) > 0$ が示せた．

(iv) ①で $x = \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\left\{F\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 2F(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$$

$F\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$ より

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

(v) (b) において $y = \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$F(x)F\left(\frac{1}{2}\right) = 2F\left(x+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2x-1}\, d\theta \qquad \cdots ②$$

ところで

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\theta)^{2x-1}\, d\theta &= \int_0^{\pi} (\sin t)^{2x-1}\, \frac{dt}{2} \quad [\, t = 2\theta\,] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2x-1}\, \frac{dt}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin t)^{2x-1}\, \frac{dt}{2} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2x-1}\, \frac{dt}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin(\pi-u))^{2x-1}\, \frac{-du}{2} \\
&\qquad\qquad [\, u = \pi - t\,] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2x-1}\, \frac{dt}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{2x-1}\, \frac{du}{2} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2x-1}\, dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right]^{2x-1} (-dv) \quad \left[\, v = \frac{\pi}{2} - t\,\right] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos v)^{2x-1}\, dv \qquad \cdots ③
\end{aligned}$$

①÷② から

$$\frac{F(2x)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2\theta)^{2x-1}\,d\theta}{2^{2x-2}\cdot 2F\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}\,d\theta}=\frac{\{F(x)\}^2}{F(x)F\left(\dfrac{1}{2}\right)}$$

③を用いると

$$\frac{F(2x)}{2^{2x-1}F\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}=\frac{F(x)}{F\left(\dfrac{1}{2}\right)}$$

$F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ より

$$F(2x)=\frac{2^{2x}}{2\sqrt{\pi}}F(x)F\left(x+\frac{1}{2}\right) \qquad \blacksquare$$

原題は次の秋田大の入試問題である.

類題 16　関数 $F(x)$ は $x \geqq \dfrac{1}{2}$ で定義され，次の (a)，(b) を満たすものとする.

(a)　$F(1)=1$

(b)　$F(x)F(y)=2F(x+y)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta$

このとき，次を示せ.

(i)　$F(x+1)=F(x)$　　　(ii)　$F(x)>0$

(iii)　$F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$　　　(iv)　$F(2x)=\dfrac{2^{2x}}{2\sqrt{\pi}}F(x)F\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

(1978　秋田大・医)

4　整数論への応用

$k\,{}_p\mathrm{C}_k = p\,{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$ が使える整数論の入試問題として，早稲田大学で出題されたものは標準的である．

問題 10　次の各問いに答えよ．ただし，正の整数 n と整数 $k\,(0 \leqq k \leqq n)$ に対して，${}_n\mathrm{C}_k$ は正の整数である事実を使ってよい．

(1)　m が 2 以上の整数のとき，${}_m\mathrm{C}_2$ が m で割り切れるための必要十分条件を求めよ．答えのみ解答欄に記せ．

(2)　p を 2 以上の素数とし，k を p より小さい正の整数とする．このとき，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れることを示せ．

(3)　p を 2 以上の素数とする．このとき，任意の正の整数 n に対し，

$$(n+1)^p - n^p - 1$$

は p で割り切れることを示せ．　（2006 早稲田大・政経）

(解答)　(1) $m \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
&{}_m\mathrm{C}_2 = \frac{m(m-1)}{2} \text{ が } m \text{ で割り切れる} \\
\iff & \frac{m(m-1)}{2} = mq \quad (\ q \text{ は正の整数}) \\
\iff & \frac{m-1}{2} = q \quad (\ q \text{ は正の整数}) \\
\iff & m = 2q+1 \quad (\ q \text{ は正の整数})
\end{aligned}
$$

したがって，求める条件は

m が 3 以上の奇数であることである．

(2) p を 2 以上の素数，$1 \leqq k < p$ のとき

$$ {}_p\mathrm{C}_k = \frac{p!}{(p-k)!k!} = \frac{p}{k} \cdot \frac{(p-1)!}{\{(p-1)-(k-1)\}!(k-1)!} = \frac{p}{k}\,{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1} $$

が成り立つ．

p は素数なので，p と k $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ は互いに素であるから，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる．

(3) p を 2 以上の素数のとき

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^p - n^p - 1 \\
&= {}_p\mathrm{C}_0 n^p + {}_p\mathrm{C}_1 n^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 n^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} n + {}_p\mathrm{C}_p - n^p - 1 \\
&= {}_p\mathrm{C}_1 n^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 n^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} n \qquad (*)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，(2) より ${}_p\mathrm{C}_k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1)$ は p で割り切れるから，$(*)$ は p で割り切れる． ■

類題 17　p は素数とする．

(1)　k は自然数で $k<p$ であるとき，二項係数 ${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れることを証明せよ．

(2)　n が自然数であるとき，$\dfrac{1}{p}(n+1)^p - \dfrac{1}{p}n^p - \dfrac{1}{p}$ は自然数であることを証明せよ．　(2003　大阪教育大・後期)

問題 11　p は素数，r は正の整数とする．

(1)　$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$ についての式 $(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p$ を展開したときの単項式 ${x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots\cdots{x_r}^{p_r}$ の係数を求めよ．ここで，$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_r$ は 0 または正の整数で $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_r=p$ を満たすとする．

(2)　$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$ が正の整数のとき，

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p - ({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots\cdots+{x_r}^p)$$

は p で割り切れることを示せ．

(3)　r は p で割り切れないとする．このとき，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れることを示せ．　（2010 大阪大・理系・後期）

(解答)

(1) $(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p$ を展開したときの単項式 ${x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots\cdots{x_r}^{p_r}$ の項は，

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p \\
&= (x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)\cdots(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)
\end{aligned}
$$

として，p 個の因数から，x_1 を p_1 個，x_2 を p_2 個，……，x_r を p_r 個選ぶ順列の総数であるから，${x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots\cdots{x_r}^{p_r}$ の係数は

$$\frac{p!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}$$

(2) $(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p$ を展開したとき，${x_1}^p$, ${x_2}^p$, $\cdots\cdots$, ${x_r}^p$ の係数は 1 であるから

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p-({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots\cdots+{x_r}^p)$$

の各項は

$$\frac{p!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}{x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots\cdots{x_r}^{p_r}$$

ただし，

$$p_1+p_2+\cdots+p_r=p, \quad 0\leqq p_i\leqq p-1\ (i=1,\,2,\,\ldots,\,r) \tag{$*$}$$

とする．
ここで

$$\frac{p!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}=\frac{p(p-1)!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}$$

は整数で，p は素数なので，$(*)$ より，この式の分母 $p_1!p_2!\cdots p_r!$ は p を素因数にもたない．
ゆえに，$\dfrac{p!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}$ は p で割り切れる．

(3) (2) において，$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_r=1$ とおくと

$$r^p-r=r(r^{p-1}-1)$$

は p で割り切れる．
r は素数 p で割り切れないから，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れる． ■

問題 12　(1)　整数 n, r が $n \geqq 2,\ 1 \leqq r \leqq n$ を満たすとする．このとき，$r \cdot {}_n\mathrm{C}_r = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ が成り立つことを示せ．

(2)　p を素数とし，整数 r が $1 \leqq r \leqq p-1$ を満たすとする．このとき，${}_p\mathrm{C}_r$ が p で割り切れることを示せ．

(3)　p を 3 以上の素数とする．二項定理を用いた式 $(x+1)^p = \sum\limits_{r=0}^{p} {}_p\mathrm{C}_r x^r$ を利用して，2^p を p で割った余りが 2 であることを示せ．

(4)　p を 5 以上の素数とする．3^p を p で割った余りを求めよ．

（2011 佐賀大・農・後期）

(解答) (1)，(2) 省略

(3) $(x+1)^p = \sum\limits_{r=0}^{p} {}_p\mathrm{C}_r x^r$ において $x=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}2^p &= {}_p\mathrm{C}_0 + {}_p\mathrm{C}_1 + {}_p\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} + {}_p\mathrm{C}_p \\ &= 2 + {}_p\mathrm{C}_1 + {}_p\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} \qquad (*)\end{aligned}$$

が成り立ち，(2) より ${}_p\mathrm{C}_r \quad (r = 1, 2, \ldots, p-1)$ は p で割り切れる．
$p \geqq 3$ であるから，$(*)$ より，2^p を p で割った余りは 2 である．

(4) $(x+1)^p = \sum\limits_{r=0}^{p} {}_p\mathrm{C}_r x^r$ において $x=2$ を代入すると

$$\begin{aligned}3^p &= {}_p\mathrm{C}_0 + 2{}_p\mathrm{C}_1 + 2^2{}_p\mathrm{C}_2 + \cdots + 2^{p-1}{}_p\mathrm{C}_{p-1} + 2^p{}_p\mathrm{C}_p \\ &= 2^p + 1 + 2{}_p\mathrm{C}_1 + 2^2{}_p\mathrm{C}_2 + \cdots + 2^{p-1}{}_p\mathrm{C}_{p-1} \qquad (**)\end{aligned}$$

が成り立ち，(2) より ${}_p\mathrm{C}_r \quad (r = 1, 2, \ldots, p-1)$ は p で割り切れる．
$(**)$ より，3^p を p で割った余りは $2^p + 1$ を 3 で割った余りに等しい．
(3) より 2^p を p で割った余りは 2 で，$p \geqq 5$ であるから，3^p を p で割った余りは $2+1=3$ となる．■

類題 18　(1)　素数 p と $1 \leqq r \leqq p-1$ なる整数 r に対して，二項係数についての等式 $r{}_p\mathrm{C}_r = p{}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$ を証明し，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数であることを示せ．

(2)　素数 p に対して 2^p を p で割った余りを求めよ．

（1998 奈良女子大・理・後期）

問題 13　p を素数とする.

(1)　$1 \leqq r \leqq p-1$ を満たす自然数 r に対し，${}_p\mathrm{C}_r$ は p で割り切れることを示せ．ただし，${}_p\mathrm{C}_r$ は p 個から r 個とる組合せの総数を表すものとする.

(2)　$1 \leqq s \leqq q-1$ を満たす自然数の組 $(q,\, s)$ であって，${}_q\mathrm{C}_s$ が q で割り切れないものを 1 組あげよ.

(3)　自然数 $m,\, n$ に対し，$(m+n)^p-(m^p+n^p)$ が p で割り切れることを示せ.

(4)　自然数 n に対し，n^p-n は p で割り切れることを，n に関する数学的帰納法を用いて証明せよ.　（2014 埼玉大・理）

(解答) (1) 省略

(2) ${}_4\mathrm{C}_2=6$ は 4 で割り切れない.

(3) m, n が自然数のとき

$$\begin{aligned}
&(m+n)^p-(m^p+n^p)\\
&={}_p\mathrm{C}_0m^p+{}_p\mathrm{C}_1m^{p-1}n+{}_p\mathrm{C}_2m^{p-2}n^2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}mn^{p-1}+{}_p\mathrm{C}_pn^p\\
&\qquad -(m^p+n^p)\\
&={}_p\mathrm{C}_1m^{p-1}n+{}_p\mathrm{C}_2m^{p-2}n^2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}mn^{p-1} \qquad (*)
\end{aligned}$$

(1) より ${}_p\mathrm{C}_r \quad (r=1,\, 2,\, \ldots,\, p-1)$ は p で割り切れるから，$(*)$ は p で割り切れる.

よって，自然数 $m,\, n$ に対し，$(m+n)^p-(m^p+n^p)$ が p で割り切れる

(4) 「n^p-n は p で割り切れる」を①とおく.

(i) $n=1$ のとき，$1^p-1=0$ は p で割り切れるから，①は成り立つ.

(ii) $n=k$ $(k \geqq 1)$ のとき①が成り立つと仮定すると，k^p-k は p で割り切れる.

(3) より，$(k+1)^p-(k^p+1)$ が p で割り切れるから

$$(k+1)^p-(k+1)=(k+1)^p-(k^p+1)+k^p-k$$

は p で割り切れる.

ゆえに，$n=k+1$ のときも①は成り立つ.

(i)，(ii) から，すべての自然数 n について①は成り立つ.　■

問題 14　自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数

$$ {}_m\mathrm{C}_1,\ {}_m\mathrm{C}_2,\ \ldots,\ {}_m\mathrm{C}_{m-1} $$

を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする．すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である．

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ．

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法によって示せ．

(3)　m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ．　（2009 東京大）

(解答) (1) m は素数で ${}_m\mathrm{C}_1 = m$ となるから，$d_m = 1$ か $d_m = m$ である．

$1 \leqq k \leqq m-1$ のとき

$$ {}_m\mathrm{C}_k = \frac{m!}{(m-k)!k!} = \frac{m}{k} \cdot \frac{(m-1)!}{\{(m-1)-(k-1)\}!(k-1)!} = \frac{m}{k}\,{}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1} $$

が成り立つ．

m は素数なので，m と k $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ は互いに素であるから，${}_m\mathrm{C}_k$ は m で割り切れる．

よって，${}_m\mathrm{C}_1, {}_m\mathrm{C}_2, \ldots, {}_m\mathrm{C}_{m-1}$，は m で割り切れるから，$d_m = m$

(2) 「$k^m - k$ が d_m で割り切れる」を①とおく．

(i) $k = 1$ のとき，$1^m - 1 = 0$ は d_m で割り切れるから，①は成り立つ．

(ii) $k = l$ $(l \geqq 1)$ のとき①が成り立つと仮定すると，$l^m - l$ は d_m で割り切れる．

$$ \begin{aligned} &(l+1)^m - (l+1) \\ &= l^m + {}_m\mathrm{C}_1 l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2 l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} l + 1 - (l+1) \\ &= (l^m - l) + {}_m\mathrm{C}_1 l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2 l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} l \end{aligned} $$

ここで，仮定から $l^m - l$ は d_m で割り切れ,，d_m は ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，$\ldots$，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数であるから，${}_m\mathrm{C}_1 l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2 l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} l$ も d_m で割り切れる．

ゆえに，$k = l+1$ のときも①は成り立つ．

(i)，(ii) から，すべての自然数 k について①は成り立つ．

(3) $m=2n$ (n は自然数) とおき

$$(1+x)^{2n}=1+{}_{2n}\mathrm{C}_1x+{}_{2n}\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}x^{2n-1}+x^{2n}$$

において，$x=-1$ とおくと

$$1-{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+1=0$$

すなわち

$${}_{2n}\mathrm{C}_1-{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-2}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}=2$$

$${}_{m}\mathrm{C}_1-{}_{m}\mathrm{C}_2+\cdots-{}_{m}\mathrm{C}_{m-2}+{}_{m}\mathrm{C}_{m-1}=2$$

が成り立つ．

したがって，d_m は 2 の約数となり，1 または 2 である． ■

(注) $d_m \fallingdotseq 1$ と仮定すると $d_m \geqq 2$ である．

$k=d_m-1\geqq 1$ とおくと k は自然数となる．

$$\begin{aligned}
&k^m-k\\
&=(d_m-1)^m-(d_m-1)\\
&={}_{m}\mathrm{C}_0{d_m}^m-{}_{m}\mathrm{C}_1{d_m}^{m-1}+\cdots+{}_{m}\mathrm{C}_r{d_m}^{m-r}(-1)^r+\cdots\\
&\qquad+{}_{m}\mathrm{C}_{m-1}d_m(-1)^{m-1}+{}_{m}\mathrm{C}_m(-1)^m-(d_m-1)\\
&=d_m\left({}_{m}\mathrm{C}_0{d_m}^{m-1}-{}_{m}\mathrm{C}_1{d_m}^{m-2}+\cdots+-{}_{m}\mathrm{C}_{m-1}-1\right)+2
\end{aligned}$$

(2) より k^m-k は d_m で割り切れるから，d_m は 2 の約数で，$d_m\geqq 2$ より $d_m=2$ となる．

よって，d_m は 1 または 2 である． □

問題 15　n が相異なる素数 $p,\,q$ の積，$n=pq$ であるとき，$n-1$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k\quad(1\leqq k\leqq n-1)$ の最大公約数は 1 であることを示せ．

（1997 京都大・理系）

(解答) ${}_n\mathrm{C}_1=n=pq$ であるから，$n-1$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k\quad(1\leqq k\leqq n-1)$ が共通な素因数をもつとすれば，p か q である．
したがって，$n-1$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k\quad(1\leqq k\leqq n-1)$ のなかに，素因数 p をもたないものと，素因数 q をもたないものがあることを示せば，$n-1$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k\quad(1\leqq k\leqq n-1)$ の最大公約数は 1 であることがいえる．

$$
{}_n\mathrm{C}_p=\frac{pq(pq-1)(pq-2)\cdots(pq-p+1)}{p(p-1)(p-2)\cdots2\cdot1}\qquad(*)
$$

の分子 $pq(pq-1)(pq-2)\cdots(pq-p+1)$ における p 個の数のうち，p の倍数は pq だけであるから，$(*)$ は素因数 p をもたない．
同様にして，${}_n\mathrm{C}_q$ も素因数 q をもたない．

以上のことから，$n-1$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k\quad(1\leqq k\leqq n-1)$ の最大公約数は 1 である．　■

問題 16　a, b は $a > b$ を満たす自然数とし，p, d は素数で $p > 2$ とする．
このとき，$a^p - b^p = d$ であるならば，d を $2p$ で割った余りは 1 であることを示せ．
（1995 京都大・理系）

(解答)　$d = a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \cdots + b^{p-1})$ と変形できる．
d は素数で，$p > 2,\ a > b \geqq 1$ より $(a^{p-1} + a^{p-2}b + \cdots + b^{p-1}) > 1$ が成り立つから

$$a - b = 1 \quad \cdots ① \qquad\qquad d = a^{p-1} + a^{p-2}b + \cdots + b^{p-1} \quad \cdots ②$$

①を使うと

$$\begin{aligned} d &= a^p - b^p = (b+1)^p - b^p \\ &= b^p + {}_p\mathrm{C}_1 b^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 b^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} b + 1 - b^p \\ &= 1 + {}_p\mathrm{C}_1 b^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 b^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} b \end{aligned}$$

したがって

$${}_p\mathrm{C}_1 b^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 b^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} b \ \ (= d - 1) \qquad \cdots (*)$$

が $2p$ で割り切れることを示せばよい．

(i) $1 \leqq k \leqq p-1$ のとき

$${}_p\mathrm{C}_k = \frac{p!}{(p-k)!k!} = \frac{p}{k} \cdot \frac{(p-1)!}{\{(p-1)-(k-1)\}!(k-1)!} = \frac{p}{k}\,{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

が成り立つ．
p は素数なので，p と k $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ は互いに素であるから，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる．
よって，${}_p\mathrm{C}_1, {}_p\mathrm{C}_2, \ldots, {}_p\mathrm{C}_{p-1}$ は p で割り切れるから，${}_p\mathrm{C}_1 b^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 b^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} b$ は p で割り切れる．

(ii) b が偶数のときは

$${}_p\mathrm{C}_1 b^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 b^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} b = b\left({}_p\mathrm{C}_1 b^{p-2} + {}_p\mathrm{C}_2 b^{p-3} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1}\right)$$

は偶数である．
b が奇数のときは，①から a は偶数で，②から d は奇数となる．
よって，$(*)$ から ${}_p\mathrm{C}_1 b^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 b^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} b = d - 1$ は偶数である．

$p > 2$ は素数なので，p と 2 は互いに素であるから，(i)，(ii) より，$(*)$ は $p \times 2 = 2p$ で割り切れる．　■

類題 19 p が素数であれば，どんな自然数 n についても $n^p - n$ は p で割り切れる．このことを，n についての数学的帰納法で証明せよ．

（1977 京都大・文系）

(解答) 「$n^p - n$ は p で割り切れる」を①とおく．

(i) $n = 1$ のとき，$1^p = 0$ は p で割り切れるので①は成り立つ．

(ii) $n = k$ $(k \geqq 1)$ のとき，①が成り立つと仮定する．

$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} & (k+1)^p - (k+1) \\ &= k^p + {}_p\mathrm{C}_1 k^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 k^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} k + 1 - (k+1) \\ &= (k^p - k) + {}_p\mathrm{C}_1 k^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 k^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} k \qquad (*) \end{aligned}$$

ここで，$1 \leqq k \leqq p-1$ のとき

$${}_p\mathrm{C}_k = \frac{p!}{(p-k)!k!} = \frac{p}{k} \cdot \frac{(p-1)!}{\{(p-1)-(k-1)\}!(k-1)!} = \frac{p}{k}\,{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

が成り立つ．

p は素数なので，p と k $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ は互いに素であるから，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる．

よって，${}_p\mathrm{C}_1$, ${}_p\mathrm{C}_2$, $\ldots$, ${}_p\mathrm{C}_{p-1}$ は p で割り切れるから，${}_p\mathrm{C}_1 k^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 k^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} k$ は p で割り切れる．

仮定から，$k^p - k$ も p で割り切れるから，$(*)$ は p で割り切れる．

ゆえに，$n = k + 1$ のときも①は成り立つ．

(i)，(ii) から，すべての自然数 k について①は成り立つ．■

5　その他の等式

問題 17　n を自然数とする．

(1)　$0 < i < n$ となる整数 i に対して ${}_n\mathrm{C}_i = {}_{n-1}\mathrm{C}_i + {}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1}$ となることを示せ．

(2)　$2m \leqq n$ となる最大の整数 m に対して $\sum_{i=0}^{m} {}_n\mathrm{C}_{2i} = 2^{n-1}$ となることを示せ．

(3)　$0 \leqq i \leqq n-1$ となる整数 i に対して $\sum_{j=0}^{i} (-1)^j {}_n\mathrm{C}_j = (-1)^i {}_{n-1}\mathrm{C}_i$ となることを示せ．ただし ${}_0\mathrm{C}_0 = 1$ である．（2003 お茶の水女子大）

(解答) (1)，(2) 省略

(3) i に関する帰納法で示す．

(i) $i = 0$ のとき

左辺 $= \sum_{j=0}^{0} (-1)^j {}_n\mathrm{C}_j = (-1)^0 {}_n\mathrm{C}_0 = 1$,

右辺 $= (-1)^0 {}_{n-1}\mathrm{C}_0 = 1$ となり，$i = 0$ のときは成り立つ．

(ii) i $(0 \leqq i \leqq n-2)$ のとき成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j {}_n\mathrm{C}_j &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^j {}_n\mathrm{C}_j + (-1)^{i+1} {}_n\mathrm{C}_{i+1} \\
&= (-1)^i {}_{n-1}\mathrm{C}_i + (-1)^{i+1} {}_n\mathrm{C}_{i+1} \\
&= (-1)^{i+1} \left({}_n\mathrm{C}_{i+1} - {}_{n-1}\mathrm{C}_i \right) \\
&= (-1)^{i+1} {}_{n-1}\mathrm{C}_{i+1}
\end{aligned}$$

よって，$i+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より $0 \leqq i \leqq n-1$ となる整数 i に対して $\sum_{j=0}^{i} (-1)^j {}_n\mathrm{C}_j = (-1)^i {}_{n-1}\mathrm{C}_i$ となる．■

問題 18　10 進法で表された自然数 n の各桁の数字の和を $s(n)$ とする．例えば，$n=126$ のとき，$s(n)=1+2+6=9$ である．自然数 k と m に対して，$s(n)=m$ となる k 桁の自然数 n の個数を $S(k,\,m)$ で表すことにする．例えば，$s(n)=3$ となる 2 桁の自然数 n は 12, 21, 30 のみであるので，$S(2,\,3)=3$ となる．

(1)　任意の自然数 k $(k \geqq 2)$ に対して，$S(k,\,m)=\sum_{i=1}^{m} S(k-1,\,i)$ $(m=1,2,\ldots\ldots,9)$ が成立することを示せ．

(2)　異なる n 個のものから r 個取る組の総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ とする．ただし，${}_0\mathrm{C}_0=1$ である．等式 ${}_n\mathrm{C}_r=\sum_{i=1}^{n-r+1} {}_{n-i}\mathrm{C}_{n-i-r+1}$ が任意の自然数 $n,\,r$ $(n \geqq r \geqq 1)$ について成立する ことを示せ．

(3)　任意の自然数 k $(k \geqq 2)$ に対して，$S(k,\,m)={}_{k+m-2}\mathrm{C}_{m-1}$ $(m=1,2,\ldots\ldots,9)$ が成立することを示せ．（2001 慶應大・理工）

(解答) (1) k 桁の自然数 n において，$s(n)=m$ のとき，n の 1 の位の数字を

j $(0 \leqq j \leqq m-1)$ とすると，残りの $k-1$ 桁の数字の和は $m-j$ である．
よって，1 の位の数字を j $(0 \leqq j \leqq m-1)$ のものは $S(k-1,\,m-j)$ 個あるから

$$
\begin{aligned}
S(k,\,m) &= \sum_{j=0}^{m-1} S(k-1,\,m-j) \\
&= S(k-1,\,m)+S(k-1,\,m-1)+\cdots+S(k-1,\,2)+S(k-1,\,1) \\
&= S(k-1,\,1)+S(k-1,\,2)+\cdots+S(k-1,\,m-1)+S(k-1,\,m) \\
&= \sum_{i=1}^{m} S(k-1,\,i)
\end{aligned}
$$

(2) $\sum_{i=1}^{n-r+1} {}_{n-i}\mathrm{C}_{n-i-r+1} = \sum_{i=1}^{n-r+1} {}_{n-i}\mathrm{C}_{r-1}$ であるから

$$
\sum_{i=1}^{n-r+1} {}_{n-i}\mathrm{C}_{r-1} = {}_n\mathrm{C}_r
$$

を示す．

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-r+1} {}_{n-i}\mathrm{C}_{r-1} &= \sum_{i=1}^{n-r} \underbrace{{}_{n-i}\mathrm{C}_{r-1}}_{={}_{n-i+1}\mathrm{C}_{r}-{}_{n-i}\mathrm{C}_{r}} + {}_{r-1}\mathrm{C}_{r-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-r} ({}_{n-i+1}\mathrm{C}_{r} - {}_{n-i}\mathrm{C}_{r}) + 1 \\
&= ({}_{n}\mathrm{C}_{r} - {}_{n-1}\mathrm{C}_{r}) + ({}_{n-1}\mathrm{C}_{r} - {}_{n-2}\mathrm{C}_{r}) + \cdots + ({}_{r+1}\mathrm{C}_{r} - {}_{r}\mathrm{C}_{r}) + 1 \\
&= {}_{n}\mathrm{C}_{r} - {}_{r}\mathrm{C}_{r} + 1 \\
&= {}_{n}\mathrm{C}_{r}
\end{aligned}$$

(3) k に関する数学的帰納法で，$S(k,\, m) = {}_{k+m-2}\mathrm{C}_{m-1} \cdots\cdots (*)$ を証明する．

(i) $k = 2$ のとき，(1) より

$$S(2,\, m) = \sum_{i=1}^{m} S(1,\, i) = \sum_{i=1}^{m} 1 = m$$

$${}_{2+m-2}\mathrm{C}_{m-1} = {}_{m}\mathrm{C}_{m-1} = m$$

より $(*)$ は成り立つ．

(ii) $k = l$ $(l \geqq 2)$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する．

(1) より

$$S(l+1,\, m) = \sum_{i=1}^{m} S(l,\, i) = \sum_{i=1}^{m} {}_{l+i-2}\mathrm{C}_{i-1} \qquad \cdots\cdots ①$$

また，(2) から

$$\begin{aligned}
{}_{l+1+m-2}\mathrm{C}_{m-1} &= {}_{l+m-1}\mathrm{C}_{l} \\
&= \sum_{i=1}^{m} {}_{l+m-1-i}\mathrm{C}_{m-i} \\
&= {}_{l+m-2}\mathrm{C}_{m-1} + {}_{l+m-3}\mathrm{C}_{m-2} + \cdots + {}_{l}\mathrm{C}_{1} + {}_{l-1}\mathrm{C}_{0} \\
&= {}_{l-1}\mathrm{C}_{0} + {}_{l}\mathrm{C}_{1} + \cdots + {}_{l+m-3}\mathrm{C}_{m-2} + {}_{l+m-2}\mathrm{C}_{m-1} \\
&= \sum_{j=1}^{m} {}_{l+j-2}\mathrm{C}_{j-1} \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}$$

①，② から $S(l+1,\, m) = {}_{l+1+m-2}\mathrm{C}_{m-1}$

よって，$k = l + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より任意の自然数 k $(k \geqq 2)$ に対して，$(*)$ は成り立つ． ■

類題 20　次の各問いに答えよ．

(1)　次の等式が成り立つことを示せ．

$${}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_{k+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

(2)　(1) の等式を用いて，すべての自然数 n について

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$$

が成り立つことを数学的帰納法で示せ．　（2002 宇都宮大）

(解答) (1) 省略

(2) n に関する帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

(左辺) $= {}_1\mathrm{C}_0 + {}_1\mathrm{C}_1 = 1+1 = 2 = 2^1 =$ (右辺) となり等式は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&{}_{k+1}\mathrm{C}_0 + {}_{k+1}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{k+1}\mathrm{C}_k + {}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1} \\
&= {}_k\mathrm{C}_0 + ({}_k\mathrm{C}_0 + {}_k\mathrm{C}_1) + \cdots + ({}_k\mathrm{C}_{k-1} + {}_k\mathrm{C}_k) + {}_k\mathrm{C}_k \\
&= 2\left({}_k\mathrm{C}_0 + {}_k\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k\right) \\
&= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}
\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$$

が成り立つ．　■

類題 21　(1)　数学的帰納法を用いて，二項定理 $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$ が成立することを証明せよ．

(2)　$\sum_{r=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_r$ を求めよ．　（1981 宇都宮大）

(答) (2) $2^{2n-1} + \dfrac{(2n)!}{2(n!)^2}$

類題 22　次の問いに答えよ．ただし，${}_n\mathrm{C}_r$ は二項係数を表す．

(1)　$(1-x^2)^6$ の展開式における x^4 の係数を求めよ．

(2)　$(1+x)^6(1-y)^6$ の展開式における xy^3 の係数および x^2y^2 の係数を求めよ．

(3)　${}_6\mathrm{C}_0\times{}_6\mathrm{C}_4-{}_6\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2-{}_6\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_4\times{}_6\mathrm{C}_0$ の値を求めよ．

(4)　n を $n\geqq 4$ を満たす整数とし，

$$f(n)={}_n\mathrm{C}_0\times{}_n\mathrm{C}_4-{}_n\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3\times{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_4\times{}_n\mathrm{C}_0$$

とおく．$f(n)$ は n の 2 次式であることを示せ．　（2007 徳島大・工）

(解答) (1) $(1-x^2)^6$ の展開式の一般項は，${}_6\mathrm{C}_r\cdot 1^{6-r}\cdot(-x^2)^r=(-1)^r{}_6\mathrm{C}_rx^{2r}$ である．

x^4 の項は $2r=4$ を解いて $r=2$ のときで，x^4 の係数は

$$(-1)^2{}_6\mathrm{C}_2=15$$

(2) $(1+x)^6$ の展開式の一般項は，${}_6\mathrm{C}_p\cdot 1^{6-p}\cdot x^p={}_6\mathrm{C}_px^p$，
$(1-y)^6$ の展開式の一般項は，${}_6\mathrm{C}_q\cdot 1^{6-q}\cdot(-y)^q=(-1)^q{}_6\mathrm{C}_qy^q$ より
$(1+x)^6(1-y)^6$ の展開式の一般項は，$(-1)^q\,{}_6\mathrm{C}_p\cdot{}_6\mathrm{C}_q\,x^py^q$ となる．
xy^3 の項は $p=1,\ q=3$ のときで，その係数は $(-1)^3\,{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_3=-6\cdot 20=-120$
x^2y^2 の項は $p=2,\ q=2$ のときで，その係数は $(-1)^2\,{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_2=15\cdot 15=225$

(3) ${}_6\mathrm{C}_0\times{}_6\mathrm{C}_4-{}_6\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2-{}_6\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_4\times{}_6\mathrm{C}_0$ の値は，$(1+x)^6(1-y)^6$ の展開式における y^4，xy^3, x^2y^2, x^3y, x^4 の係数の和である．
これは $y=x$ とおいた $(1+x)^6(1-x)^6=(1-x^2)^6$ の展開式における x^4 の係数に等しい．(1) より，求める値は 15 となる．

(4) $f(n)$ は $(1+x)^n(1-y)^n$ の展開式における y^4，xy^3, x^2y^2, x^3y, x^4 の係数の和である．
これは $y=x$ とおいた $(1+x)^n(1-x)^n=(1-x^2)^n$ の展開式における x^4 の係数に等しい．
$(1-x^2)^n$ の展開式の一般項は，${}_n\mathrm{C}_r\cdot 1^{n-r}\cdot(-x^2)^r=(-1)^r{}_n\mathrm{C}_rx^{2r}$ である．
x^4 の項は $2r=4$ を解いて $r=2$ のときで，x^4 の係数は

$$(-1)^2{}_n\mathrm{C}_2=\frac{n(n-1)}{2}$$

となり，n の 2 次式である．　■

(別解) (4) $n \geqq 4$ のとき

$$\begin{aligned}
f(n) &= {}_n\mathrm{C}_0 \times {}_n\mathrm{C}_4 - {}_n\mathrm{C}_1 \times {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_2 \times {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 \times {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_4 \times {}_n\mathrm{C}_0 \\
&= 2\left({}_n\mathrm{C}_0 \times {}_n\mathrm{C}_4 - {}_n\mathrm{C}_1 \times {}_n\mathrm{C}_3\right) + \left({}_n\mathrm{C}_2\right)^2 \\
&= 2\left\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1} - n\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}\right\} + \left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2 \\
&= \frac{n(n-1)}{12}\left((n-2)(n-3) - 4n(n-2) + 3n(n-1)\right) \\
&= \frac{n(n-1)}{12}\left(n^2 - 5n + 6 - 4n^2 + 8n + 3n^2 - 3n\right) \\
&= \frac{n(n-1)}{12}\cdot 6 \\
&= \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

となり，n の 2 次式である． □

問題 19　ω を $1+\omega+\omega^2=0$ を満たす複素数とするとき．次の問いに答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1)　$\omega^3 = 1$ が成り立つことを示せ．

(2)　$(1+\omega)^{3n} = (-1)^n$ が成り立つことを示せ．

(3)　次の 2 つの等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1} = (-1)^n$$

（2007 和歌山大）

(解答) (1) $1+\omega+\omega^2=0$ から $\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

よって，$\omega^3=1$

(2) $1+\omega+\omega^2=0$ から $1+\omega=-\omega^2$

よって

$$(1+\omega)^{3n} = (-\omega^2)^{3n} = (-1)^{3n}(\omega^2)^{3n} = \left\{(-1)^3\right\}^n (\omega^3)^{2n} = (-1)^n\cdot 1^{2n} = (-1)^n$$

(3) 二項定理より

$$
\begin{aligned}
(1+\omega)^{3n} &= \sum_{r=0}^{3n} {}_{3n}\mathrm{C}_r \omega^r \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k}\omega^{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1}\omega^{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}\omega^{3k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1}\omega + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}\omega^{2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1}\omega + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}(-\omega-1) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}\right)\omega
\end{aligned}
$$

(2) より $(1+\omega)^{3n}=(-1)^n$ であることを使うと

$$
(-1)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}\right)\omega
$$

$\sum\limits_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}$，$\sum\limits_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}$ は実数，ω は虚数であるから

$$
\sum_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2} = (-1)^n \qquad \cdots\cdots ①
$$

$$
\sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2} = 0 \qquad \cdots\cdots ②
$$

① − ② から

$$
\sum_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1} = (-1)^n \qquad \blacksquare
$$

問題 20　$(1+x+x^2)^n$ を展開したときの x^r の係数を a_r とすると，次の等式が成立することを示せ．

(1)　$a_{n-r}=a_{n+r}$

(2)　$a_0+a_1+\cdots+a_{2n}=3^3$

(3)　$a_0+a_3+a_6+\cdots=a_1+a_4+a_7+\cdots=a_2+a_5+a_8+\cdots$

(解答) (1) $(1+x+x^2)^n$ は次のように展開できる．

$$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n} \qquad \cdots\cdots①$$

$(1+x+x^2)^n=x^n\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ と変形すると

$$x^n\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^n=\sum_{s=0}^{2n}a_sx^s \qquad \cdots\cdots②$$

②において，x^{n+r} の係数は a_{n+r} で，これは $\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ を展開したときの x^r の係数に等しいことがわかる．

②において，x のかわりに $\dfrac{1}{x}$ とおきかえると

$$\frac{1}{x^n}\left(1+\frac{1}{x}+x\right)^n=\sum_{s=0}^{2n}a_s\frac{1}{x^s}$$

すなわち

$$\left(1+\frac{1}{x}+x\right)^n=\sum_{s=0}^{2n}a_sx^{n-s} \qquad \cdots\cdots③$$

③から $\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ を展開したときの x^r の係数は $n-s=r$ $(s=n-r)$ とおくことにより a_{n-r} である．したがって，$a_{n-r}=a_{n+r}$ が成り立つ．

(2) ①において，$x=1$ とおくと，$a_0+a_1+\cdots+a_{2n}=3^3$

(3) 1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とすると，$\omega^3=1$

$\omega^3-1=0$ から $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

ω は虚数であるから $\omega^2+\omega+1=0$

①において，$x=\omega$ とおくと，左辺は 0 となるから

$$
\begin{aligned}
(1+\omega+\omega^2)^n &= \sum_{s=0}^{2n} a_s\omega^s \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n}{3}\right]} a_{3k}\omega^{3k} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-1}{3}\right]} a_{3k+1}\omega^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2}\omega^{3k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n}{3}\right]} a_{3k} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-1}{3}\right]} a_{3k+1}\omega + \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2}\omega^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n}{3}\right]} a_{3k} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-1}{3}\right]} a_{3k+1}\omega + \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2}(-\omega-1) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{2n}{3}\right]} a_{3k} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-1}{3}\right]} a_{3k+1} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2}\right)\omega
\end{aligned}
$$

$1+\omega+\omega^2=0$ を使うと

$$
0 = \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{2n}{3}\right]} a_{3k} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-1}{3}\right]} a_{3k+1} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2}\right)\omega
$$

$\sum_{k=0}^{\left[\frac{2n}{3}\right]} a_{3k} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2}$，$\sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-1}{3}\right]} a_{3k+1} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2}$ は実数で，ω は虚数であるから

$$
\sum_{k=0}^{\left[\frac{2n}{3}\right]} a_{3k} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2} = 0, \quad \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-1}{3}\right]} a_{3k+1} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2} = 0
$$

すなわち

$$
\sum_{k=0}^{\left[\frac{2n}{3}\right]} a_{3k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-1}{3}\right]} a_{3k+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{2n-2}{3}\right]} a_{3k+2}
$$

を得る．よって

$$
a_0+a_3+a_6+\cdots = a_1+a_4+a_7+\cdots = a_2+a_5+a_8+\cdots \qquad \blacksquare
$$

問題 21　n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　二項定理を用いて，$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$ の値が 2^n に等しいことを示せ．

(2)　複素数 z が $z^2 - 2z + 2 = 0$ を満たすとき，z および z^{4n} の値を求めよ．

(3)　$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot {}_{4n}\mathrm{C}_{2k} = {}_{4n}\mathrm{C}_0 - {}_{4n}\mathrm{C}_2 + \cdots - {}_{4n}\mathrm{C}_{4n-2} + {}_{4n}\mathrm{C}_{4n}$ の値が $(-4)^n$ に等しいことを示せ．

（2012 福井大・工）

(解答) (1) 二項定理 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$ において，

$x = 1$ とおくと

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n$$

(2) $z^2 - 2z + 2 = 0$ を解くと $z = 1 \pm i$

$z = 1 \pm i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right]$（複号同順）となるから

$$\begin{aligned} z^{4n} &= (\sqrt{2})^{4n}\left[\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right]^{4n} \\ &= 2^{2n}\left[\cos\left(\pm n\pi\right) + \sin\left(\pm n\pi\right)\right] \\ &= 4^n(-1)^n \\ &= (-4)^n \end{aligned}$$

(3) 二項定理 $(1+x)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} {}_{4n}\mathrm{C}_k x^k$ において，$x = 1 + i$ とおくと

$$\begin{aligned} &(1+i)^{4n} \\ &= \sum_{k=0}^{4n} {}_{4n}\mathrm{C}_k i^k \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r} i^{4r} + \sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+1} i^{4r+1} + \sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+2} i^{4r+2} + \sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+3} i^{4r+3} \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r} + \sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+1} i + \sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+2} i^2 + \sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+3} i^3 \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r} + \sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+1} i - \sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+2} - \sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+3} i \end{aligned}$$

(2) から $(1+i)^{4n}=(-4)^n$ なので

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r}+\sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+1}i-\sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+2}-\sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+3}i=(-4)^n$$

実数部分を比較して

$$\sum_{r=0}^{n} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r}-\sum_{r=0}^{n-1} {}_{4n}\mathrm{C}_{4r+2}=(-4)^n$$

すなわち

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k {}_{4n}\mathrm{C}_{2k}={}_{4n}\mathrm{C}_0-{}_{4n}\mathrm{C}_2+\cdots-{}_{4n}\mathrm{C}_{4n-2}+{}_{4n}\mathrm{C}_{4n}=(-4)^n \qquad \blacksquare$$

[注] (2) で z^{4n} は次のように求めてもよい．

$$\begin{aligned}(1\pm i)^{4n}&=\left\{(1\pm i)^2\right\}^{2n}\\&=(\pm 2i)^{2n}\\&=\left\{(\pm 2i)^2\right\}^{n}\\&=(-4)^n\end{aligned} \qquad \square$$

問題 22　整数 $p,\, q\,(p \geqq q \geqq 0)$ に対して二項係数を ${}_p\mathrm{C}_q=\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める．なお $0!=1$ とする．

(1)　$n,\, k$ が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ．

(2)　m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ．

（2013 千葉大）

(解答) (1) $n,\, k$ が 0 以上の整数のとき

$$
\begin{aligned}
&{}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right) \\
&= \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!} \times \left(\frac{k!n!}{(n+k)!} - \frac{k!(n+1)!}{(n+k+1)!} \right) \\
&= \frac{n+k+1}{k+1} - \frac{n+1}{k+1} \\
&= \frac{k}{k+1}
\end{aligned}
$$

となり，n によらない値である.

(2) (1) の結果より

$$
{}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right) = \frac{k}{k+1} \qquad \cdots\cdots①
$$

①で $k=2$ とおくと

$$
{}_{n+3}\mathrm{C}_3 \times \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) = \frac{2}{3}
$$

から

$$
\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) \qquad \cdots\cdots②
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3} \\
&= \sum_{k=0}^{m-3} \frac{1}{{}_{k+3}\mathrm{C}_3} \\
&= \sum_{k=0}^{m-3} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{{}_{k+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{k+3}\mathrm{C}_2} \right) \\
&= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2} \right) \\
&= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{m(m-1)} \right) \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2-m-2}{m(m-1)} \\
&= \frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

参考文献

[1]：柳田　五夫，数学の問題，数学のいずみ

[2]：柳田　五夫，フーリエ級数・ガンマ関数，数学のいずみ

[3]：柳田　五夫，二項係数を含む等式の証明方法について，数学のいずみ

[4]：柳田　五夫，二項係数を含む等式について (2)，数学のいずみ