Bell 数の母関数

柳田　五夫

1　はじめに

Bell 数は

$$a_0 = 1,\, a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \quad (n \geqq 1)$$

を満たしている．

この漸化式から

$a_0 = 1,\, a_1 = 1,\, a_2 = 2,\, a_3 = 5,\, a_4 = 15,\, a_5 = 52,\, a_6 = 203,$

$a_7 = 877,\, a_8 = 4140,\, a_9 = 21147, a_{10} = 115975,\, a_{11} = 678570,\, \ldots$

となる．ただし，$\displaystyle\binom{n}{k}$ は二項係数 ${}_nC_k$ を表す．

まず数列 $\{a_n\}$ の母関数を求めることを考える．

数列 $\{a_n\}$ の指数型母関数を $\displaystyle A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ とおき

$$A(x)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

の x^n の係数を求めると

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{a_r}{r!} x^r \cdot \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r \frac{x^n}{n!} = a_{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

より

$$A(x)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n$$

ここで $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ の両辺を x で微分すると

$$A'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{n!}x^n$$

だから，微分方程式

$$A'(x)=A(x)e^x \qquad \cdots\cdots ①$$

を得る．この式を変形すると

$$\frac{dA}{A}=e^x dx \quad \text{から} \quad \int\frac{dA}{A}=\int e^x dx$$

よって $\log|A|=e^x+C_1$ から $\quad\therefore\quad A(x)=Ce^{e^x},\quad A'(x)=Ce^{e^x}e^x$

この式から $A'(0)=Ce$

ところで $A(x)=1+x+x^2+\frac{5}{3!}x^3+\ldots$ だから

$$A'(x)=1+2x+\cdots$$

$A'(0)=1$ を使うと $C=\frac{1}{e}$ を得て

$$A(x)=\frac{1}{e}e^{e^x}$$

定理 1 (E.T. Bell)

ベル数の数列 $\{a_n\}$ の指数型母関数 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ は

$$A(x)=\frac{1}{e}e^{e^x}$$

である．

これを使うと a_n を次のように表すことができる．

定理 2 (G.Dobinski)

ベル数の数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+1}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{2^n}{1!}+\frac{3^n}{2!}+\frac{4^n}{3!}+\cdots+\frac{n^n}{(n-1)!}+\cdots\right)$$

と表せる．

［証明］ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=\frac{1}{e}e^{e^x}$

$$=\frac{1}{e}\left(1+\frac{e^x}{1!}+\frac{e^{2x}}{2!}+\frac{e^{3x}}{3!}+\cdots+\frac{e^{nx}}{n!}+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dots}{1!}+\right.$$

$$+\frac{1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}+\dots}{2!}+\dots\dots$$

$$\left.+\frac{1+nx+\frac{(nx)^2}{2!}+\cdots+\frac{(nx)^{n+1}}{(n+1)!}+\dots}{n!}+\dots\dots\right)$$

で x^{n+1} の係数を比較して

$$a_{n+1}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{2^n}{1!}+\frac{3^n}{2!}+\frac{4^n}{3!}+\cdots+\frac{n^n}{(n-1)!}+\cdots\right)$$

を得る. ■

2 Bell 数と類似の漸化式

Bell 数の漸化式 $a_0=1,\ a_1=1$

$$a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\quad(n\geqq 1)$$

の左辺を r を正の整数として, $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{r-1}$ は任意, $a_r=a_0$,

$$a_{n+r}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\quad(n\geqq 1)$$

と換えたものを考える.

数列 $\{a_n\}$ の指数型母関数を $A(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ とおき

$$A(x)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

の x^n の係数を求めると

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{a_r}{r!} x^r \cdot \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r \frac{x^n}{n!} = a_{n+r} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

より

$$A(x)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+r}}{n!} x^n$$

ここで

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} x^{r-1} + \sum_{n=r}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

の両辺を x で r 回微分すると

$$A^{(r)}(x) = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{a_n}{(n-r)!} x^{n-r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+r}}{n!} x^n$$

だから，微分方程式

$$A^{(r)}(x) = A(x)e^x \qquad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．

3　$r = 2$ の場合

$a_0 = 1,\, a_1 = 1,\, a_2 = 1$

$$a_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \quad (n \geqq 1)$$

の場合を考えてみる．

まず微分方程式 ② を $r = 2$ のときに解かなければならない．

$y = A(x), z = 2\sqrt{e^x} = 2e^{\frac{x}{2}}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{z}{2} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{z}{2}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{z}{2}\right)\frac{dz}{dx} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} \cdot z + \frac{dy}{dz}\right)\frac{z}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz}\right)
\end{aligned}$$

これらの式を $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^x y$ に代入すると

$$\frac{1}{4}\left(z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^2 y$$

よって

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} - z^2y = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

y は z の関数として変形された Bessell の微分方程式を満たす．

変形された Bessell の微分方程式とは

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} - (z^2+\nu^2)y = 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

で，$I_\nu(z), K_\nu(z)$ は解になっている．

ここで，$I_\nu(z)$ は

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}$$

で定義されている．また，$K_\nu(z)$ は次のように定義されている．

ν が整数でないとき

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\nu\pi}$$

ν が整数 n のとき

$$K_n(z) = \lim_{\nu\to n}K_\nu(z) = \frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial\nu(z)} - \frac{\partial I_\nu}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

ただし，$\Gamma(s)(s>0$ は $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}$ で定義される Euler のガンマ関数である．

したがって，③ の解は

$$A(x) = c_1I_0(2\sqrt{e^x}) + c_2K_0(2\sqrt{e^x})$$

と表せることがわかる．$a_0 = a_1 = 1$ から

$$\begin{aligned}c_1 &= 2(K_1(2)a_0 + K_0(2)a_1) = 2(K_1(2) + K_0(2))\\ c_2 &= 2(I_1(2)a_0 - I_0(2)a_1) = 2(I_1(2) - I_0(2))\end{aligned}$$

となる．（計算省略）

計算には $I_0{}'(z) = I_1(z), K_0{}'(z) = -K_1(z)$,

$$I_\nu(z)K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z)K_\nu(z) = \frac{1}{z}$$

を使う．

4　$r \geqq 3$ の場合

$r \geqq 3$ の場合を考えると，微分方程式 ②は解けそうにないので mathematica で調べると，$y^{(r)} = y(x)e^x$ の解は次のようになった．

$r = 3$ の場合

$$\begin{aligned} y(x) = &c_1 HypergeometricPFQ[\{\}, \{1,1\}, e^x] \\ &+ c_2 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0\},\{0\}\}, e^x] \\ &+ c_3 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0,0\},\{\}\}, -e^x] \end{aligned}$$

$r = 4$ の場合

$$\begin{aligned} y(x) = &c_1 HypergeometricPFQ[\{\}, \{1,1,1\}, e^x] \\ &+ c_2 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0\},\{0,0\}\}, e^x] \\ &+ c_3 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0,0\},\{0\}\}, -e^x] \\ &+ c_4 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0,0,0\},\{\}\}, e^x] \end{aligned}$$

$r = 5$ の場合

$$\begin{aligned} y(x) = &c_1 HypergeometricPFQ[\{\}, \{1,1,1,1\}, e^x] \\ &+ c_2 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0\},\{0,0,0\}\}, e^x] \\ &+ c_3 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0,0\},\{0,0\}\}, -e^x] \\ &+ c_4 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0,0,0\},\{0\}\}, e^x] \\ &+ c_5 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0,0,0,0\},\{\}\}, -e^x] \end{aligned}$$

$r = 6$ の場合

$$\begin{aligned} y(x) = &c_1 HypergeometricPFQ[\{\}, \{1,1,1,1,1\}, e^x] \\ &+ c_2 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0\},\{0,0,0,0\}\}, e^x] \\ &+ c_3 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0,0\},\{0,0,0\}\}, -e^x] \\ &+ c_4 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0,0,0\},\{0,0\}\}, e^x] \\ &+ c_5 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0,0,0,0\},\{0\}\}, -e^x] \\ &+ c_6 MeijerG[\{\{\},\{\}\}, \{\{0,0,0,0,0,0\},\{\}\}, e^x] \end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots$

上記の関数は $MATHEMATICA$ DOCUMENTATION に次のように記されている．

一般化された超幾何級数またはバーンズ (Barnes) の拡張超幾何関数

HypergeometricPFQ[$a_1, \ldots, a_p$,$b_1, \ldots, b_q$,z] は

$$ {}_pF_q(a;b;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \ldots (a_p)_k}{(b_1)_k \ldots (b_q)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} $$

と級数展開できる．

ただし，$(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)$ として

マイヤー (Meijer) の G 関数

MeijerG[{{$a_1, \ldots, a_n$},{$a_{n+1}, \ldots, a_p$}},{{$b_1, \ldots, b_m$},{$b_{m+1}, \ldots, b_q$}},z] は線積分表現

$$ G_{pq}^{mn}\left(z \left| \begin{matrix} a_1 \ldots a_p \\ b_1 \ldots b_q \end{matrix} \right.\right) $$

$$ = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(1-a_1-s)\cdots\Gamma(1-a_n-s)\Gamma(b_1+s)\cdots\Gamma(b_m+s)}{\Gamma(a_{n+1}+s)\cdots\Gamma(a_p+s)\Gamma(1-b_{m+1}-s)\cdots\Gamma(1-b_q-s)} z^{-s} ds $$

で与えられる．積分路は $\Gamma(1-a_i-s)$ の極と $\Gamma(b_i+s)$ の極の間にあるものとする．

《参考文献》

[1] 組合せ論の基礎, C. ベルジュ著　野崎　昭弘訳, サイエンス社

[2] *MATHEMATICA* DOCUMENTATION

ver 1　　2007 年 8 月 22 日