相加平均と相乗平均を含む不等式

柳田　五夫

n 個の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

を，これら n 個の数の相加平均といい，n 個の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

を，これら n 個の数の相乗平均という。相加平均と相乗平均の間には次の不等式が成り立つ。

定理　（相加平均と相乗平均の不等式）n 個の任意の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限り成り立つ。

ここでは，相加平均と相乗平均を含む不等式を紹介したい。最終目標は，例題４（例題５）である。

例題 1　次の問いに答えよ。

(1)　$a \geqq 1, b \geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right) \geqq 2\left(ab - \frac{1}{ab}\right)$$

(2)　$a \geqq 1, b \geqq 1, c \geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) + \left(b^3 - \frac{1}{b^3}\right) + \left(c^3 - \frac{1}{c^3}\right) \geqq 3\left(abc - \frac{1}{abc}\right)$$

（2007　早稲田大・教育）

(1) は差をとると，$a \geqq 1,\, b \geqq 1$ から

$$\begin{aligned}
&\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right)-2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)\\
&=a^2-2ab+b^2-\left(\frac{1}{a^2}-2\cdot\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)\\
&=(a-b)^2-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=(a-b)^2-\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}\\
&=\frac{(a-b)^2(a^2b^2-1)}{a^2b^2}\geqq 0
\end{aligned}$$

よって，不等式

$$\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right)\geqq 2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$$

は成り立つことがわかる。

$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ $(x \geqq 1)$ とおくと (1) の結果から，$a \geqq 1,\, b \geqq 1$ のとき $a^2 \geqq 1,\, b^2 \geqq 1$ だから $f(a^2)+f(b^2) \geqq 2f(ab),\quad f(a^4)+f(b^4) \geqq 2f(a^2b^2)$ が成り立つ。

次に 4 個の場合に成り立つことを示そう。

$a \geqq 1,\, b \geqq 1,\, c \geqq 1, d \geqq 1$ のときは $ab \geqq 1,\, cd \geqq 1$ であるから

$$f(a^4)+f(b^4)+f(c^4)+f(d^4) \geqq 2f(a^2b^2)+2f(c^2d^2) \geqq 4f(abcd)$$

より

$$f(a^4)+f(b^4)+f(c^4)+f(d^4) \geqq 4f(abcd)$$

が成り立つ。

これを利用して (2) の 3 個の場合を証明しよう。

$a \geqq 1,\, b \geqq 1,\, c \geqq 1$ のときは

$$p=\sqrt[4]{a^3} \geqq 1,\, q=\sqrt[4]{b^3} \geqq 1,\, r=\sqrt[4]{c^3} \geqq 1,\, s=\sqrt[4]{abc} \geqq 1$$

に対して

$f(p^4)+f(q^4)+f(r^4)+f(s^4) \geqq 4f(pqrs)$ が成り立つことを用いると

$$\begin{aligned}
&f\left(a^3\right)+f\left(b^3\right)+f\left(c^3\right)+f\left(abc\right)\\
&\geqq 4f\left(\sqrt[4]{a^3}\sqrt[4]{b^3}\sqrt[4]{c^3}\sqrt[4]{abc}\right)\\
&=4f(abc)
\end{aligned}$$

よって

$$f\left(a^3\right)+f\left(b^3\right)+f\left(c^3\right) \geqq 3f(abc)$$

すなわち (2) の不等式が成り立つ。 ■

例題 1 の (1)，(2) の不等式はそれぞれ

$$\frac{a^2+b^2}{2}-ab \geqq \frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}{2}-\frac{1}{ab}$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc \geqq \frac{\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}}{3}-\frac{1}{abc}$$

と変形できるから，相加平均と相乗平均を含む不等式となっている。

例題 1 の不等式は，横浜国大の問題

「n 個の任意の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ について

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

が成り立つ」という命題を $P(n)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $P(2)$ が正しいことを証明せよ。

(2) $P(k)$ が正しいとき，$P(2k)$ も正しいことを証明せよ。

(3) $P(k+1)$ が正しいとき，$P(k)$ も正しいことを証明せよ。

（1987　横浜国立大）

の解法にならって，次のように一般化できる。

例題 2　$x_1 \geqq 1, x_2 \geqq 1, \ldots, x_n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\left(x_1^n-\frac{1}{x_1^n}\right)+\left(x_2^n-\frac{1}{x_2^n}\right)+\cdots+\left(x_n^n-\frac{1}{x_n^n}\right) \geqq n\left(x_1x_2\cdots x_n-\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}\right)$$

が成り立つ。

[証明] $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ $(x \geqq 1)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f\left(x_1^n\right)+f\left(x_2^n\right)+\cdots+f\left(x_n^n\right) \geqq nf\left(x_1x_2\cdots x_n\right)$$

となる。

(1) $n=2$ のとき不等式は成り立つ。（省略）

(2) $n=k$ のとき不等式は成り立つと仮定して，$n=2k$ のときも不等式が成り立つことを示す。

$a_1 \geqq 1, a_2 \geqq 1, \ldots, a_k \geqq 1$ に対して $a_1^2 \geqq 1, a_2^2 \geqq 1, \ldots, a_k^2 \geqq 1$ なので仮定より

$$f(a_1^k)+f(a_2^k)+\cdots+f(a_k^k) \geqq kf(a_1a_2\cdots a_k)$$

$$f(a_1^{2k})+f(a_2^{2k})+\cdots+f(a_k^{2k}) \geqq kf(a_1^2a_2^2\cdots a_k^2)$$

が成り立つ。

$x_1 \geqq 1,\, x_2 \geqq 1,\, \ldots,\, x_{2k} \geqq 1$ に対して

$$f(x_1^{2k}) + f(x_2^{2k}) + \cdots + f(x_k^{2k}) \geqq kf(x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2)$$
$$f(x_{k+1}^{2k}) + f(x_{k+2}^{2k}) + \cdots + f(x_{2k}^{2k}) \geqq kf(x_{k+1}^2 x_{k+2}^2 \cdots x_{2k}^2)$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned} &f(x_1^{2k}) + f(x_2^{2k}) + \cdots + f(x_k^{2k}) + f(x_{k+1}^{2k}) + f(x_{k+2}^{2k}) + \cdots + f(x_{2k}^{2k}) \\ &\geqq k\left\{f(x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2) + f(x_{k+1}^2 x_{k+2}^2 \cdots x_{2k}^2)\right\} \end{aligned} \tag{$*$}$$

(1) の結果から，$a \geqq 1, b \geqq 1$ のとき $f(a^2) + f(b^2) \geqq 2f(ab)$ が成り立つので

$$f(x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2) + f(x_{k+1}^2 x_{k+2}^2 \cdots x_{2k}^2) \geqq 2f(x_1 x_2 \cdots x_{2k}) \tag{$**$}$$

$(*), (**)$ より

$$f(x_1^{2k}) + f(x_2^{2k}) + \cdots + f(x_{2k}^{2k}) \geqq 2kf(x_1 x_2 \cdots x_{2k})$$

$n = 2k$ のときも不等式は成り立つ。

(3)　$n = k + 1$ のとき不等式は成り立つと仮定して，$n = k$ のときも不等式が成り立つことを示す。

仮定より $a_1 \geqq 1,\, a_2 \geqq 1,\, \ldots,\, a_{k+1} \geqq 1$ に対して

$$f(a_1^{k+1}) + f(a_2^{k+1}) + \cdots + f(a_{k+1}^{k+1}) \geqq (k+1)f(a_1 a_2 \cdots a_{k+1})$$

が成り立つ。

k 個の $x_1 \geqq 1,\, x_2 \geqq 1,\, \ldots,\, x_k \geqq 1$ に対して

$$a_1 = \sqrt[k+1]{x_1^k},\, a_2 = \sqrt[k+1]{x_2^k},\, \ldots,\, a_k = \sqrt[k+1]{x_k^k},\ a_{k+1} = \sqrt[k+1]{x_1 x_2 \cdots x_k}$$

とおくと，$a_1 \geqq 1,\, a_2 \geqq 1,\, \ldots,\, a_{k+1} \geqq 1$ なので，仮定から

$$f(a_1^{k+1}) + f(a_2^{k+1}) + \cdots + f(a_k^{k+1}) + f(a_{k+1}^{k+1}) \geqq (k+1)f(a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1})$$

ここで

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} &= \sqrt[k+1]{x_1^k} \cdot \sqrt[k+1]{x_2^k} \cdots \sqrt[k+1]{x_k^k} \cdot \sqrt[k+1]{x_1 x_2 \cdots x_k} \\ &= x_1 x_2 \cdots x_k \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &f\left(x_1^k\right) + f\left(x_2^k\right) + \cdots + f\left(x_k^k\right) + f\left(x_1 x_2 \cdots x_k\right) \\ &\geqq (k+1)f(x_1 x_2 \cdots x_k) \end{aligned}$$

よって

$$f\left(x_1^k\right) + f\left(x_2^k\right) + \cdots + f\left(x_k^k\right) \geqq kf(x_1 x_2 \cdots x_k)$$

$n = k$ のときも不等式は成り立つ。以上のことから 2 以上の自然数 n に対して不等式が成り立つ。 ■

例題２の不等式を変形すると，次のようにも書ける。

例題２’　$x_1 \geqq 1, x_2 \geqq 1, \ldots, x_n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n}{n} - x_1 x_2 \cdots x_n \geqq \left(\frac{\dfrac{1}{x_1^n} + \dfrac{1}{x_2^n} + \cdots + \dfrac{1}{x_n^n}}{n} - \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} \right)$$

が成り立つ。

例題２”　$x_1 \geqq 1, x_2 \geqq 1, \ldots, x_n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geqq \left(\frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}{n} - \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} \right)$$

が成り立つ。

これらの不等式は例題３の不等式を一般化した不等式（例題４，例題４’）の特別な場合になる。

例題４　$x_1 \geqq 1, x_2 \geqq 1, \ldots, x_n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n}{n} - x_1 x_2 \cdots x_n \geqq \left(\frac{\dfrac{1}{x_1^n} + \dfrac{1}{x_2^n} + \cdots + \dfrac{1}{x_n^n}}{n} - \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} \right) x_1 x_2 \cdots x_n$$

が成り立つ。

例題４’　$x_1 \geqq 1, x_2 \geqq 1, \ldots, x_n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\begin{aligned} &\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \\ &\geqq \left(\frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}{n} - \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} \right) \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \end{aligned}$$

が成り立つ。

例題３　a, b, c が正の数のとき，不等式 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} - abc \geqq 0$ が成り立つことは知られているものとする。

$a \geqq 1, b \geqq 1, c \geqq 1$ のときには，右辺の条件を厳しくした不等式

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} - abc \geqq \left(\frac{\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}}{3} - \frac{1}{abc} \right) abc \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。この不等式を証明したい。

(1)　まず，①で $a=1$ とした場合の不等式

$$\frac{1+b^3+c^3}{3} - bc \geqq \left(\frac{1+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}}{3} - \frac{1}{bc} \right) bc \qquad \cdots\cdots ②$$

を証明する。

「② の左辺から右辺を引いた式を F とする。F は

$$F = \frac{1}{3b^2c^2}\{{}^{ア}\boxed{} + (b^3+c^3)\,{}^{イ}\boxed{}\}$$

となる。ここで，${}^{ア}\boxed{}$, ${}^{イ}\boxed{}$ は積 bc の整式であり，条件から ${}^{イ}\boxed{} \geqq 0$ である。

また， b^3+c^3 に相加平均・相乗平均の不等式を適用し，$\sqrt{bc}$ を x とおけば，$F \geqq \dfrac{2}{3x} \cdot f(x)$ と表され，$f(x)$ は x の 整式である。$f(x)$ は x の 1 次式の積に因数分解できて，$f(x) = {}^{ウ}\boxed{}$ と表される。

条件より $x \geqq 1$ であるから，$f(x) \geqq 0$ である。よって，$F \geqq 0$ であり，不等式②が証明された。

等号は ${}^{ウ}\boxed{}$ のときにのみ成り立ち，このとき式 ② の両辺の値は ${}^{オ}\boxed{}$ である。」

(2)　不等式②を用いて，①を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。ただし，不等式①の両辺は a, b, c のどの 2 つを入れ替えても不変であるから，$a \leqq b, a \leqq c$ と仮定してもよい。

（2003　東京慈恵医大）

解　(1)　F は② の左辺から右辺を引いた式であるから

$$F = \frac{1+b^3+c^3}{3} - bc - \left(\frac{1+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3} - \frac{1}{bc} \right) bc$$

$$= \frac{1+b^3+c^3}{3} - bc - \frac{1}{3}\left(bc + \frac{c}{b^2} + \frac{b}{c^2} \right) + 1$$

$$= \frac{1}{3b^2c^2}\left\{ b^2c^2 + b^2c^2(b^3+c^3) - 3b^3c^3 - (b^3c^3+b^3+c^3) + 3b^2c^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{3b^2c^2}\left\{ 4b^2c^2(1-bc) + (b^3+c^3)(b^2c^2-1) \right\}$$

$b>0,\, c>0$ であるから，相加平均・相乗平均の不等式から

$$b^3+c^3 \geqq 2\sqrt{b^3c^3}$$

よって

$$F \geqq \frac{1}{3b^2c^2}\left\{ 4b^2c^2(1-bc) + 2\sqrt{b^3c^3}(b^2c^2-1) \right\}$$

$x=\sqrt{bc}$ を使うと

$$F \geqq \frac{1}{3x^4}\left\{ 4x^4(1-x^2) + 2x^3(x^4-1) \right\}$$

$$= \frac{2}{3x}(x^2-1)(-2x+x^2+1)$$

$$= \frac{2}{3x}(x-1)^3(x+1)$$

$F \geqq \dfrac{2}{3x} \cdot f(x)$ となるから

$$f(x) = (x-1)^3(x+1)$$

条件より $x \geqq 1$ であるから，$f(x) \geqq 0$ である。よって，$F \geqq 0$ であり，不等式②が証明された。等号は $b^3=c^3$ かつ $x=1$ すなわち $b=c=1$ のときにのみ成り立ち，このとき式 ② の両辺の値は 0 である。

(2)　(1) から，$x \geqq 1,\, y \geqq 1$ のとき

$$\frac{1+x^3+y^3}{3} - xy \geqq \left(\frac{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}{3} - \frac{1}{xy} \right) xy$$

が成り立つ。$a \leqq b,\, a \leqq c,\, a \geqq 1$ であるから

$$x = \frac{b}{a},\ y = \frac{c}{a}$$

とおくと

$$\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^3+\left(\frac{c}{a}\right)^3}{3}-\frac{bc}{a^2} \geqq \left(\frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{a}{c}\right)^3}{3}-\frac{a^2}{bc}\right)\frac{bc}{a^2}$$

両辺に $a^3(>0)$ をかけると

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc \geqq \left(\frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3}-\frac{1}{abc}\right)abc\cdot a^3 \qquad (*)$$

$p>0,\ q>0,\ r>0$ のとき $\dfrac{p^3+q^3+r^3}{3}-pqr \geqq 0$ が成り立つから

$$p=\frac{1}{a},\ q=\frac{1}{b},\ r=\frac{1}{c}$$

とおくと

$$\frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3}-\frac{1}{abc} \geqq 0$$

また，$a \geqq 1$ であるから

$$\left(\frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3}-\frac{1}{abc}\right)abc\cdot a^3 \geqq \left(\frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3}-\frac{1}{abc}\right)abc \qquad (**)$$

$(*), (**)$ より

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc \geqq \left(\frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3}-\frac{1}{abc}\right)abc$$

等号成立は $x=y=1$ すなわち $a=b=c$

かつ

$a=1$ または $\dfrac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3}-\dfrac{1}{abc}=0$

より，$a=b=c$ のときである。 ■

東京慈恵医大で出題された不等式は次のように一般化される。

例題 4 $x_1 \geqq 1,\ x_2 \geqq 1,\ \ldots,\ x_n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{n}-x_1x_2\cdots x_n \geqq \left(\frac{\frac{1}{x_1^n}+\frac{1}{x_2^n}+\cdots+\frac{1}{x_n^n}}{n}-\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}\right)x_1x_2\cdots x_n$$

が成り立つ。

不等式は次の形に変形できる。

例題5　$a_1 \geqq 1,\, a_2 \geqq 1,\, \ldots,\, a_n \geqq 1$ のとき，不等式

$$n + \sum_{i=1}^{n} a_i \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\left(n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

が成り立つ。（参考文献［1］）

［証明］ $a_1 \geqq 1,\, a_2 \geqq 1,\, \cdots,\, a_n \geqq 1$ のとき $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ の値を変えないで $n + \sum_{i=1}^{n} a_i - G\left(n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$ を順次小さくしていくことを考える。

ここで，$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ に対して

$$F(\mathbf{a}) = n + \sum_{i=1}^{n} a_i - G\left(n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

とおき，$F(\mathbf{a}) = F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を定義しておく。

$$a_1 a_2 \cdots a_n = G^n \qquad \cdots\cdots①$$

とおく。

$n = 2$ のとき

$$\begin{aligned}
2 + a_1 + a_2 - G\left(2 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1}\right) &= 2 + a_1 + a_2 - G\left(2 + \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}\right) \\
&= 2 + a_1 + a_2 - 2G - \frac{a_1 + a_2}{G} \\
&\qquad\qquad (\because \quad a_1 a_2 = G^2\ ) \\
&= \left(1 - \frac{1}{G}\right)(a_1 + a_2 - 2G)
\end{aligned}$$

$a_1 \geqq 1,\, a_2 \geqq 1,\, G = \sqrt{a_1 a_2}$ より $G \geqq 1$ で，相加平均・相乗平均の関係から $a_1 + a_2 \geqq 2\sqrt{a_1 a_2} = 2G$ が成り立つので

$$2 + a_1 + a_2 \geqq G\left(2 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1}\right)$$

$n \geqq 3$ とする。①から $a_i \geqq G$ となる a_i と，$a_j \leqq G$ となる a_j がそれぞれ少なくとも 1 つ存在しなければならない。なぜなら，もしすべての i について $1 \leqq a_i < G$ とすると

$$a_1 a_2 \cdots a_n < G \cdot G \cdots G = G^n$$

となり ①に反する。すべての j について $a_j > G$ としても ①に反する。そこで $a_i \geqq G$ となる a_i と，$a_j \leqq G$ となる a_j を 1 つずつ選べる。$i = j$ のときは $a_i = G$ で $a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n = G^{n-1}$ あるから，同じ論法で $a_{i'} \geqq G$ となる $a_{i'}$ と，$a_{j'} \leqq G$ となる $a_{j'}$ がそれぞれ少なくとも 1 つ存在する。$i \fallingdotseq j'$ であるから，最初から $i \fallingdotseq j$ と仮

定しても一般性を失わない。必要ならば番号の付け替えをすることで，$i=n, j=n-1$ と仮定することができる。つまり $a_n \geqq G, a_{n-1} \leqq G$ とする。

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し，$b_{n-1}\,(\geqq 1)$, $b_n\,(\geqq 1)$ を $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, b_{n-1}, b_n$ の相乗平均と $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ の相乗平均が等しくなるようにとる。
すなわち，$b_{n-1}b_n = a_{n-1}a_n$ とする。（後で b_{n-1}, b_n は確定するが，ここでは $b_{n-1}b_n = a_{n-1}a_n$，$b_{n-1} \geqq 1, b_n \geqq 1$ の条件だけを考えておく。）このとき

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = n + \sum_{i=1}^{n-2} a_i + a_{n-1} + a_n - G\left(n + \sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right)$$

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, b_{n-1}, b_n) = n + \sum_{i=1}^{n-2} a_i + b_{n-1} + b_n - G\left(n + \sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_{n-1}} + \frac{1}{b_n}\right)$$

の差をとると

$$\begin{aligned}
&F(\mathbf{a}) - F(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, b_{n-1}, b_n)\\
&= a_{n-1} + a_n - G\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right) - b_{n-1} - b_n + G\left(\frac{1}{b_{n-1}} + \frac{1}{b_n}\right)\\
&= a_{n-1} + a_n - G\left(\frac{a_{n-1} + a_n}{a_{n-1}a_n}\right) - b_{n-1} - b_n + G\left(\frac{b_{n-1} + b_n}{a_{n-1}a_n}\right)\\
&\hspace{20em} (\because \quad b_{n-1}b_n = a_{n-1}a_n)\\
&= (a_{n-1} + a_n)\left(1 - \frac{G}{a_{n-1}a_n}\right) - (b_{n-1} + b_n)\left(1 - \frac{G}{a_{n-1}a_n}\right)\\
&= \left(1 - \frac{G}{a_{n-1}a_n}\right)(a_{n-1} + a_n - b_{n-1} - b_n)
\end{aligned}$$

$a_n \geqq G, G \geqq a_{n-1} \geqq 1$ から $a_{n-1}a_n \geqq a_{n-1}G \geqq G$ が成り立つ。

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_n}{G}\ (\ \geqq 1\ ),\ b_n = G$$

とおくと

$$a_{n-1} + a_n - b_{n-1} - b_n = a_{n-1} + a_n - \frac{a_{n-1}a_n}{G} - G = \frac{(a_n - G)(G - a_{n-1})}{G} \geqq 0$$

よって

$$\mathbf{a}^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}) = \left(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, \frac{a_{n-1}a_n}{G}, G\right)$$

とおくと

$$F(\mathbf{a}) \geqq F(\mathbf{a}^{(1)})$$

$n-1=2$ のときはここで終了とする。$n-1 \geqq 3$ の場合は，この操作を繰り返す。

$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{n-1}^{(1)}$ の相乗平均は G で $n-1 \geqq 3$ より同様にして $a_i^{(1)} \geqq G \geqq a_J^{(1)}$ となる $i, j\,(i \neq j)$ が存在する。必要があれば番号の付け替えることで，$a_{n-1}^{(1)} \geqq G \geqq a_{n-2}^{(1)}$ と仮定できる。

$$F(\mathbf{a}^{(1)}) = n + \sum_{i=1}^{n-3} a_i^{(1)} + a_{n-2}^{(1)} + a_{n-1}^{(1)} + G - G\left(n + \sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{a_i^{(1)}} + \frac{1}{a_{n-2}^{(1)}} + \frac{1}{a_{n-1}^{(1)}} + \frac{1}{G}\right)$$

$a_{n-1}^{(1)} \geqq G,\ G \geqq a_{n-2}^{(1)} \geqq 1$ から $a_{n-2}^{(1)} a_{n-1}^{(1)} \geqq a_{n-2} G \geqq G$ が成り立つので

$$a_{n-2}^{(2)} = \frac{a_{n-2}^{(1)} a_{n-1}^{(1)}}{G} (\geqq 1),\ a_{n-1}^{(2)} = G,\ a_i^{(2)} = a_i^{(1)} = a_i\ (1 \leqq i \leqq n-3),\ a_n^{(2)} = G,$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)}) = \left(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{n-3}^{(1)}, \frac{a_{n-2}^{(1)} a_{n-1}^{(1)}}{G}, G, G\right)$$

とおくと，$a_{n-2}^{(2)} a_{n-1}^{(2)} = a_{n-2}^{(1)} a_{n-1}^{(1)}$ が成り立つ。

$$F(\mathbf{a}^{(2)}) = n + \sum_{i=1}^{n-3} a_i^{(1)} + a_{n-2}^{(2)} + a_{n-1}^{(2)} + G - G\left(n + \sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{a_i^{(1)}} + \frac{1}{a_{n-2}^{(2)}} + \frac{1}{a_{n-1}^{(2)}} + \frac{1}{G}\right)$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}^{(1)}) - F(\mathbf{a}^{(2)}) &= \left(1 - \frac{G}{a_{n-2}^{(1)} a_{n-1}^{(1)}}\right)(a_{n-2}^{(1)} + a_{n-1}^{(1)} - a_{n-2}^{(2)} - a_{n-1}^{(2)}) \\ &= \left(1 - \frac{G}{a_{n-2}^{(1)} a_{n-1}^{(1)}}\right) \frac{(a_{n-1}^{(1)} - G)(G - a_{n-2}^{(1)})}{G} \geqq 0 \end{aligned}$$

から $F(\mathbf{a}^{(1)}) \geqq F(\mathbf{a}^{(2)})$ となる。これをくり返すと

$$F(\mathbf{a}) \geqq F(\mathbf{a}^{(1)}) \geqq F(\mathbf{a}^{(2)}) \geqq \cdots \geqq F(\mathbf{a}^{(n-2)})$$

が成り立つ。

ただし，$j = 2, \ldots, n-2$ に対して

$$a_i^{(j)} = a_i^{(j-1)}\ (1 \leqq i \leqq n-j-1),\ a_{n-j}^{(j)} = \frac{a_{n-j}^{(j-1)} a_{n-j-1}^{(j-1)}}{G} (\geqq 1),$$

$$a_{n-j+1}^{(j)} = a_{n-j+2}^{(j)} = \cdots = a_n^{(j)} = G \qquad \text{を満たすものとし}$$

$$\mathbf{a}^{(j)} = (a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)}) = \left(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \ldots, a_{n-j}^{(j)}, \underbrace{G, \ldots, G}_{j}\right)$$

とおく。

で

$$F(\mathbf{a}^{(n-2)}) = n + a_1^{(n-2)} + a_2^{(n-2)} + (n-2)G - G\left(n + \frac{1}{a_1^{(n-2)}} + \frac{1}{a_2^{(n-2)}} + \frac{n-2}{G}\right)$$
$$= (a_1^{(n-2)} + a_2^{(n-2)} - 2G)\left(1 - \frac{1}{G}\right)$$

ここで $a_1 \geqq 1,\, a_2 \geqq 1,\ a_1^{(n-2)}a_2^{(n-2)} = G^2$ より $G \geqq 1$ で，相加・相乗平均の不等式から

$$a_1^{(n-2)} + a_2^{(n-2)} - 2G \geqq 2\sqrt{a_1^{(n-2)}a_2^{(n-2)}} - 2G = 2G - 2G = 0$$

したがって，$F(\mathbf{a}^{(n-2)}) \geqq 0$ から $F(\mathbf{a}) \geqq 0$ ■

$0 < a_1 \leqq 1, 0 < a_2 \leqq 1, \ldots, 0 < a_n \leqq 1$ のときも同じような不等式が成り立つ。（不等号の向きが変わる。）

例題 6 $0 < a_1 \leqq 1, 0 < a_2 \leqq 1, \ldots, 0 < a_n \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$
$$\leqq \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} - \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}\right)\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

が成りたつ。

例題 7 $0 < a_1 \leqq 1, 0 < a_2 \leqq 1, \ldots, 0 < a_n \leqq 1$ のとき，不等式

$$n + \sum_{i=1}^{n} a_i \leqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\left(n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

が成りたつ。

これらの不等式は

$$b_i = \frac{1}{a_i} \geqq 1$$

に対して 不等式

$$n + \sum_{i=1}^{n} b_i \geqq \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}\left(n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}\right)$$

が成り立つことから得られる。

〈参考文献〉

[1] 大関信雄・大関清太共著　不等式への招待, P．90 近代科学社