相加平均と相乗平均の不等式

柳田　五夫

1　はじめに

n 個の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

を，これら n 個の数の相加平均といい，n 個の数 $a_1 \geqq 0,\ a_2 \geqq 0,\ \ldots,\ a_n \geqq 0$ に対して

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

を，これら n 個の数の相乗平均という。相加平均と相乗平均の間には次の不等式が成り立つ。

定理　（相加平均と相乗平均の不等式）n 個の任意の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限り成り立つ。

[注] 上の不等式は，$a_1 \geqq 0,\ a_2 \geqq 0,\ \ldots,\ a_n \geqq 0$ に対して成り立つ。

証明方法は数多くあるが大学入試に出題されたものを中心に紹介したい。

2　相加平均と相乗平均の不等式の証明 1

例題 1　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ を $n(\geqq 2)$ 個の正の数とする。

(1)　$x>0$ のとき，関数

$$f(x)=a_1+a_2+\cdots+a_n+x^{n+1}-(n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_n}\,x$$

の最小値を求めよ。

(2)　(1) の結果を用いて，数学的帰納法により

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \qquad (n \geqq 2)$$

となることを証明せよ。　　（大阪市立大・改）

解　$f(x)=a_1+a_2+\cdots+a_n+x^{n+1}-(n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_n}\,x$

(1)　$f'(x)=(n+1)\left(x^n-\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_n}\right)$

$\sqrt[n(n+1)]{a_1a_2\cdots a_n}=\alpha$ とおくと，$f(x)$ の増減は表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，$x>0$ における $f(x)$ の最小値は

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=a_1+a_2+\cdots+a_n+\alpha^{n+1}-(n+1)\alpha^n\cdot\alpha\\&=a_1+a_2+\cdots+a_n-n\alpha^{n+1}\\&=a_1+a_2+\cdots+a_n-n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\end{aligned}$$

(2)　[i] $n=2$ のとき　$\dfrac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\dfrac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\geqq 0$ で不等式は成り立つ。

[ii] $n=k$ (k は自然数, $k\geqq 2$) のとき成立すると仮定する。

正の数 $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_{k+1}$ が与えられているとする。$a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_k$ について仮定を使うと

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\geqq k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\qquad\cdots\cdots①$$

$$f(x)=a_1+a_2+\cdots+a_k+x^{k+1}-(k+1)\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_k}\,x\qquad(x>0)$$

とおくと，その最小値は（１）により

$$f(\alpha)=a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$$

①により $f(\alpha)\geqq 0$ となるから

$$x>0\text{ のとき } f(x)\geqq f(\alpha)\geqq 0$$

よって，$x=\sqrt[k+1]{a_{k+1}}$ に対して $f(\sqrt[k+1]{a_{k+1}})\geqq 0$

ゆえに

$$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}-(k+1)\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}\geqq 0$$

これは，$n=k+1$ のときも問題の不等式が成り立つことを示している。

[i]，[ii] より自然数 $n(n\geqq 2)$ に対して問題の不等式は成り立つ。　■

元の問題は次のようになっている。

類題 1　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ を n 個の正数とする。

(1)　$x > 0$ のとき，関数

$$f(x) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x}$$

の最小値を求めよ。

(2)　(1) の結果を用いて，数学的帰納法により

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

となることを証明せよ。（S 42[1967]　大阪市立大）

例題 2　$a_1, a_2, a_3, \ldots$ を正の実数とする。$n = 2, 3, 4, \ldots$ に対して

$$f_n(x) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x^n}{n} - (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}} x$$

とおき，$x \geqq 0$ における $f_n(x)$ の最小値を p_n とする。

(1)　p_n を求めよ。

(2)　$f_n\left(a_n{}^{\frac{1}{n}}\right)$ を n と p_{n+1} を用いて表せ。

(3)　$p_n \geqq 0$ を示せ。（1991 金沢大）

解　$f_n(x) = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x^n}{n} - (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}} x$

(1)　$f_n'(x) = x^{n-1} - (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}}$

$f_n'(x) = 0$ を解くと $x = (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{(n-1)n}}$

x	0	$\cdots$	$(a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{(n-1)n}}$	$\cdots$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$
$f_n(x)$		↘	極小	↗

増減表から $f_n(x)$ は $x = (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{(n-1)n}}$ のとき最小値

$$\begin{aligned} p_n &= f_n\left((a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{(n-1)n}}\right) \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}{n} - (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}} \cdot (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{(n-1)n}} \end{aligned}$$

簡単のために，

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}, B = (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$$

とおくと

$$\begin{aligned}p_n &= \frac{A+B}{n} - B^{\frac{n-1}{n}} \cdot B^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{A+B}{n} - B \\ &= \frac{A-(n-1)B}{n} \\ &= \frac{n-1}{n}\left\{\frac{A}{n-1} - B\right\}\end{aligned}$$

したがって

$$p_n = \frac{n-1}{n}\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1} - (a_1a_2\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right\}$$

(2)

$$\begin{aligned}f_n\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right) &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\right\} \\ &= \frac{n+1}{n}\,p_{n+1}\end{aligned}$$

(3)　$n \geqq 2$ で $p_n \geqq 0$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=2$ のとき，$p_2 = \dfrac{1}{2}(a_1 - a_1) = 0$ で成り立つ。

(ii) $n = k(\geqq 2)$ のとき成り立つと仮定する。

$f_k(x)$ は $x \geqq 0$ で最小値 p_k をとるから

$$f_k\left(a_k^{\frac{1}{k}}\right) \geqq p_k$$

(2) の結果から

$$\frac{k+1}{k}p_{k+1} \geqq p_k \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad p_{k+1} \geqq 0$$

となり，$n = k+1$ のときも成り立つ。

(i)，(ii) より $n \geqq 2$ で $p_n \geqq 0$ が成り立つ。 ■

例題３　$r_1, r_2, \cdots, r_n$ を $r_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を満たす実数とする。

(1)　関数 $f(x) = x^3 - 3r_1r_2x + {r_1}^3 + {r_2}^3$ は，$x \geqq 0$ において $f(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 n について，${r_1}^n + {r_2}^n + \cdots + {r_n}^n \geqq nr_1r_2\cdots r_n$ が成立することを示せ。

（2001 静岡大・理）

解 (1) $f(x)=x^3-3r_1r_2x+{r_1}^3+{r_2}^3$，$f'(x)=3x^2-3r_1r_2$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{r_1r_2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x=\sqrt{r_1r_2}$ のとき，最小値 $f(\sqrt{r_1r_2})$ をとり

$$f(\sqrt{r_1r_2})={r_1}^3+{r_2}^3-2r_1r_2\sqrt{r_1r_2}=\left(\sqrt{{r_1}^3}-\sqrt{{r_2}^3}\right)^2\geqq 0$$

よって，$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$ である。

(2) すべての自然数 n について

$${r_1}^n+{r_2}^n+\cdots+{r_n}^n\geqq nr_1r_2\cdots r_n \qquad \cdots\cdots①$$

が成立することを，数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき，①で等号が成り立つ。

$n=2$ のとき，${r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2=(r_1-r_2)^2\geqq 0$ より ${r_1}^2+{r_2}^2\geqq 2r_1r_2$

(ii) $n=k-1$ $(k\geqq 3)$ のとき成り立つと仮定する。

$r_1\geqq 0, r_2\geqq 0, \cdots, r_k\geqq 0$ に対して

$f(x)=x^{\,k}+{r_1}^k+{r_2}^k+\cdots+r_{k-1}^k-kr_1r_2\cdots r_{k-1}x$ とおくと

$$f'(x)=kx^{n-1}-kr_1r_2\cdots r_{k-1}$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt[k-1]{r_1r_2\cdots r_{k-1}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x=\sqrt[k-1]{r_1r_2\cdots r_{k-1}}$ のとき，最小値 $f(\sqrt[k-1]{r_1r_2\cdots r_{k-1}})$ をとり

$$f(\sqrt[k-1]{r_1r_2\cdots r_{k-1}})={r_1}^k+{r_2}^k+\cdots+r_{k-1}^k-(k-1)\left(r_1r_2\cdots r_{k-1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$s_i={r_i}^{\frac{k}{k-1}}\geqq 0\quad(1\leqq i\leqq k-1)$ とおき，仮定を使うと

$$f(\sqrt[k-1]{r_1r_2\cdots r_{k-1}})={s_1}^{k-1}+{s_2}^{k-1}+\cdots+s_{k-1}^{k-1}-(k-1)s_1s_2\cdots s_{k-1}\geqq 0$$

よって，$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$ であるから，$n=k$ のとき①は成り立つ。

(i)，(ii) からすべての自然数 n について①は成り立つ。 ■

例題４　A，Bをつぎの２つの命題とする。

A.　n を２以上の自然数，b を正の定数とするとき，任意の正数 x に対して
$\left(\dfrac{x}{n}\right)^n \geqq \left(\dfrac{b}{n-1}\right)^{n-1}(x-b)$　が成り立つ。

B.　n を任意の自然数，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ を任意の n 個の正数とするとき，
$(*)$　$\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geqq a_1a_2\cdots a_n$ が成り立つ。

つぎの問いに答えよ。

(1)　微分法を用いて命題 A を証明せよ。

(2)　命題 A と帰納法とを用いて，つぎのように命題 B を証明することができる。まず，$n=1$ のとき $(*)$ が成り立つことは明らかである。また $n \geqq 2$ のとき，$n-1$ 個の正数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ に対して $(**)$ $\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geqq a_1a_2\cdots a_{n-1}$　が成り立つことを仮定すれば，この仮定と命題 A から不等式 $(*)$ がみちびかれる。
この最後の部分，すなわち帰納法の仮定 $(**)$ と命題 A から $(*)$ がみちびかれることを証明せよ。

（S44[1969] 津田塾大）

解　(1) $f(x) = \left(\dfrac{x}{n}\right)^n - \left(\dfrac{b}{n-1}\right)^{n-1}(x-b)$ とおくと $f'(x) = \left(\dfrac{x}{n}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{b}{n-1}\right)^{n-1}$

n は自然数，b は正の実数であるから，$f'(x) \gtreqqless 0 \iff \dfrac{x}{n} \gtreqqless \dfrac{b}{n-1} \iff x \gtreqqless \dfrac{nb}{n-1}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{nb}{n-1}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表から $x = \dfrac{nb}{n-1}$ で最小値 $f\left(\dfrac{nb}{n-1}\right) = 0$ をとるから，$x > 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ が成り立つ。

(2)　(1) において $x = a_1 + a_2 + \cdots a_n$，$b = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ とおくと

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n &\geqq \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \cdot a_n \\ &\geqq a_1a_2\cdots a_{n-1}\cdot a_n \qquad (\because\ \text{仮定 } (**))\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geqq a_1a_2\cdots a_n \qquad \blacksquare$$

a, b が正の実数で，n が２以上の自然数のとき，津田塾大の A. の不等式

$$\left(\frac{x}{n}\right)^n \geqq \left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}(x-b) \quad (x>0,\ b>0)$$

で $x-b=a$ とおいたものが次の滋賀県立大の (1) の不等式 $\left(\dfrac{a+b}{n}\right)^n \geqq a\left(\dfrac{b}{n-1}\right)^{n-1}$ である。

類題２

(1) a, b が正の実数で，n が 2 以上の自然数のとき，不等式 $\left(\dfrac{a+b}{n}\right)^n \geqq a\left(\dfrac{b}{n-1}\right)^{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(2) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ を正の実数とするとき，$\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geqq a_1a_2\cdots a_n$ であり，等号が成り立つのは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限ることを示せ。

（2000 滋賀県立大）

例題５　n は自然数とする。

(1) A を正の実数とし，関数

$$f(x) = \left(\frac{A+x}{n+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{A}{n}\right)^n x$$

を考える。$x > 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$ とする。次の不等式が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geqq a_1a_2\cdots a_n$$

（2005 徳島大）

解　(1) $f(x) = \left(\dfrac{A+x}{n+1}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{A}{n}\right)^n x$ について $f'(x) = \left(\dfrac{A+x}{n+1}\right)^n - \left(\dfrac{A}{n}\right)^n$

n は自然数，A は正の実数であるから

$$f'(x) \gtreqqless 0 \iff \frac{A+x}{n+1} \gtreqqless \frac{A}{n} \iff x \gtreqqless \frac{A}{n}$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{A}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

増減表から $x = \dfrac{A}{n}$ で最小値 $f\left(\dfrac{A}{n}\right) = 0$ をとるから，$x > 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ が成り立つ。

(2) (i) $n = 1$ のとき，（左辺）$= a_1$，（右辺）$= a_1$ となり成り立つ。

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定する。

$a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_{k+1} > 0$ に対して，$a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_k > 0$ について仮定を適用すると

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k \geqq a_1a_2\cdots a_k$$

$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ とおくと

$$\left(\frac{A}{k}\right)^k \geqq a_1a_2\cdots a_k \qquad \cdots\cdots①$$

となる。また (1) で得られた不等式

$$\left(\frac{A+x}{n+1}\right)^{n+1} \geqq \left(\frac{A}{n}\right)^{n} x$$

において $x = a_{k+1}$ とおくと

$$\left(\frac{A+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \geqq \left(\frac{A}{k}\right)^{k} a_{k+1}$$

が成り立つので，①を使うと

$$\left(\frac{A+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \geqq \left(\frac{A}{k}\right)^{k} a_{k+1} \geqq a_1 a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1}$$

したがって

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k}\right)^{k+1} \geqq a_1 a_2 \cdots a_{k+1}$$

となり，$n = k+1$ のときも成り立つ。

(i)，(ii) より任意の自然数について

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n} \geqq a_1 a_2 \cdots a_n$$

が成り立つ。 ■

[注]　n は自然数，A, x は正の実数とする。(1) で得られた不等式

$$\left(\frac{A+x}{n+1}\right)^{n+1} \geqq \left(\frac{A}{n}\right)^{n} x$$

は滋賀県立大の（1）の不等式で n のかわりに $n+1$ とおいたものである。

例題 6　(1)　k を正の整数とし，$x > 0$ に対して $f(x) = \dfrac{1}{k+1}(x+\alpha) - \sqrt[k+1]{\beta x}$ とおく。

ただし，α, β は $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \dfrac{\alpha}{k} \geqq \sqrt[k]{\beta}$ を満たす定数である。このとき，$f(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(2)　n を正の整数とする。$x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$ のとき

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1 x_1 \cdots x_n}$$

が成立することを示せ。

(3)　M を正の定数とし，5 個の正の数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 が $a_1a_2a_3a_4a_5 = M$ を満たしているとする。a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 から取り出した 3 つの数の積 $a_ia_ja_k$ を S_{ijk} と表すことにする。
$1 \leqq i < j < k \leqq 5$ を満たすすべての整数 i, j, k についての S_{ijk} の和を S とおく。このとき，$S \geqq 10\sqrt[5]{M^3}$ であることを示せ。

（2009 富山大）

解 (1) $f(x)=\dfrac{1}{k+1}(x+\alpha)-\sqrt[k+1]{\beta x}\quad (x>0)$

$$f'(x)=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+1}(\beta x)^{\frac{1}{k+1}-1}\cdot\beta=\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{\beta}{(\beta x)^{\frac{k}{k+1}}}\right)$$
$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{(\beta x)^{\frac{k}{k+1}}-\beta}{(\beta x)^{\frac{k}{k+1}}}$$

x	0	$\cdots$	$\beta^{\frac{1}{k}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x=\beta^{\frac{1}{k}}$ で最小値

$$f\left(\beta^{\frac{1}{k}}\right)=\frac{1}{k+1}\left(\sqrt[k]{\beta}+\alpha\right)-\sqrt[k+1]{\beta^{\frac{k+1}{k}}}=\frac{1}{k+1}\left(\sqrt[k]{\beta}+\alpha\right)-\sqrt[k]{\beta}=\frac{1}{k+1}\left(\alpha-k\sqrt[k]{\beta}\right)$$

をとる。仮定から $\dfrac{\alpha}{k}\geqq\sqrt[k]{\beta}$ だから $f\left(\beta^{\frac{1}{k}}\right)\geqq 0$ すなわち $f(x)\geqq 0$ が成り立つ。

(2) $$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqq\sqrt[n]{x_1x_1\cdots x_n}\qquad\cdots\cdots①$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき，①で等号が成り立つ。

$n=2$ のとき，$\dfrac{x_1+x_2}{2}-\sqrt{x_1x_2}=\dfrac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{2}\geqq 0$ より $\dfrac{x_1+x_2}{2}\geqq\sqrt{x_1x_2}$

したがって，$n=2$ のとき ①は成り立つ。

(ii) $n=k$ $(k\geqq 2)$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\geqq\sqrt[k]{x_1x_1\cdots x_k}$$

この不等式は $\alpha=x_1+x_2+\cdots+x_k$，$\beta=x_1x_2\cdots x_k$ とおくと $\dfrac{\alpha}{k}\geqq\sqrt[k]{\beta}$ となる。したがって，$x=x_{k+1}$ とおき (1) の不等式

$$\frac{1}{k+1}(x+\alpha)\geqq\sqrt[k+1]{\beta x}$$

を使うと

$$\frac{1}{k+1}(x_{k+1}+x_1+x_2+\cdots+x_k)\geqq\sqrt[k+1]{x_1x_2\cdots x_k\cdot x_{k+1}}$$

ゆえに

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\geqq\sqrt[k+1]{x_1x_2\cdots x_{k+1}}$$

となり，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

(i)，(ii) から，すべての自然数 n に対して①は成り立つ。

(3)　$1 \leqq i < j < k \leqq 5$ を満たす i, j, k の組 (i, j, k) は全部で ${}_5C_3 = 10$ 個あるから

$$S = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 + a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_2a_3a_4 + a_2a_3a_5 + a_2a_4a_5 + a_3a_4a_5$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ であるから，(2) の不等式を使うと

$$\begin{aligned} S &= a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 + a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_2a_3a_4 + a_2a_3a_5 + a_2a_4a_5 + a_3a_4a_5 \\ &\geqq 10\sqrt[10]{a_1a_2a_3 \cdot a_1a_2a_4 \cdot a_1a_2a_5 \cdot a_1a_3a_4 \cdot a_1a_3a_5 \cdot a_1a_4a_4 \cdot a_2a_3a_4 \cdot a_2a_3a_5 \cdot a_2a_4a_5 \cdot a_3a_4a_5} \\ &= 10\sqrt[10]{(a_1a_2a_3a_4a_5)^6} \\ &= 10\sqrt[10]{M^6} \end{aligned}$$

よって，$S \geqq 10\sqrt[5]{M^3}$ が成り立つ。 ■

(3) の別解も含め，一般の場合を考えてみたい。

問題　M を正の定数とし，m 個の正の数 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ が $a_1a_2a_3 \cdots a_m = M$ を満たしているとする。$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ から取り出した n 個の数の積 $a_{i_1}a_{i_2} \cdots a_{i_n}$ を $S_{i_1\,i_2\,\ldots\,i_n}$ と表すことにする。
$1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqq m$ を満たすすべての整数 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ についての $S_{i_1\,i_2\,\ldots\,i_n}$ の和を S とおく。
このとき，$S \geqq_m C_n \sqrt[m]{M^n}$ であることを示せ。

解　$1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqq m$ を満たす整数 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ の組 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ は全部で ${}_mC_n$ 個あるから，相加平均と相乗平均の不等式から

$$S \geqq_m C_n \sqrt[{}_mC_n]{a_1^{e_1}a_2^{e_2}\cdots a_m^{e_m}}$$

明らかに，$e_1 = e^2 = \cdots = e_m$ $(= e$ とおく $)$ であるから

$$m \cdot e =_m C_n \cdot n$$

よって，$e = \dfrac{n_mC_n}{m}$ となるから

$$\begin{aligned} S &\geqq_m C_n \sqrt[{}_mC_n]{a_1^{e_1}a_2^{e_2}\cdots a_m^{e_m}} \\ &= mC_n \sqrt[{}_mC_n]{(a_1a_2\cdots a_m)^{\frac{n_mC_n}{m}}} \\ &=_m C_n M^{\frac{n}{m}} \\ &=_m C_n \sqrt[m]{M^n} \end{aligned}$$

■

[注]　$S \geqq_m C_n \sqrt[{}_mC_n]{a_1^{e_1}a_2^{e_2}\cdots a_m^{e_m}}$ において $a_k^{e_k}$ となる e_k は

$$1 \leqq i_1 < \cdots < i_{l-1} < k = i_l < i_{l+1} < \cdots < i_n \leqq m$$

となる組の総数であるから，k を除く $m-1$ 個の $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots a_m$ から $n-1$ 個取る組み合わせの総数

$${}_{m-1}C_{n-1} = \frac{n_mC_n}{m}$$

に等しい。

[注]　k を正の整数とし，$x>0$，α,β は $\alpha>0,\ \beta>0,\ \dfrac{\alpha}{k} \geqq \sqrt[k]{\beta}$ とする。
(1) の不等式

$$\frac{1}{k+1}(x+\alpha) \geqq \sqrt[k+1]{\beta x}$$

は，例題 5 の (1) より，n が正の整数で $A>0,\ x>0$ のとき，不等式

$$\left(\frac{A+x}{n+1}\right)^{n+1} \geqq \left(\frac{A}{n}\right)^{n} x$$

が成り立つことと，条件 α,β は $\alpha>0,\ \beta>0,\ \dfrac{\alpha}{k} \geqq \sqrt[k]{\beta}$ を使うと

$$\left(\frac{x+\alpha}{k+1}\right)^{k+1} \geqq \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{k} x \geqq \beta x$$

から得られる。

例題 7　以下の問いに答えよ。

(1)　n を自然数，a を正の定数として，

$$f(x) = (n+1)\{\log(a+x) - \log(n+1)\} - n(\log a - \log n) - \log x$$

とおく。$x > 0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

（2014 東北大）

解　(1)　$f'(x) = (n+1)\cdot\dfrac{1}{a+x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{nx-a}{(a+x)x}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表から $x = \dfrac{a}{n}$ で極小になる。極小値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{n}\right) &= (n+1)\log\frac{a+\frac{a}{n}}{n+1} - n\log\frac{a}{n} - \log\frac{a}{n} \\ &= (n+1)\frac{a}{n} - n\log\frac{a}{n} - \log\frac{a}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2)　(1) の増減表から $x = \dfrac{a}{n}$ で最小値 $f\left(\dfrac{a}{n}\right) = 0$ をとるから

$x > 0$ のとき，不等式 $f(x) \geqq 0$ が成り立つ．$f(x) \geqq 0$ を書き直すと

$x > 0$ のとき，不等式

$$\left(\frac{a+x}{n+1}\right)^{n+1} \geqq \left(\frac{a}{n}\right)^{n} x \qquad (*)$$

が成り立つ。

n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で示す。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}} \qquad \cdots\cdots①$$

$n = 2$ のとき，(左辺)$= \dfrac{7}{4}$，(右辺)$= \sqrt{3}$ で

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} > 3 = (\sqrt{3})^2$$

より，(左辺)>(右辺) は成り立つ。

$n = m\ (m \geqq 2)$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{k+1}{k} > (m+1)^{\frac{1}{m}} \qquad \cdots\cdots ②$$

このとき

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k+1}{k} > (m+2)^{\frac{1}{m+1}} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つことを示す。

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{m+1}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{k+1}{k} + \frac{m+2}{m+1}\right)$$

と変形できるから，不等式

$$\left(\frac{a+x}{m+1}\right)^{m+1} \geqq \left(\frac{a}{m}\right)^{m} x \qquad (x>0)$$

において

$$a = \sum_{k=1}^{m}\frac{k+1}{k},\ x = \frac{m+2}{m+1}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k+1}{k}\right]^{m+1} &= \left[\frac{1}{m+1}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{k+1}{k} + \frac{m+2}{m+1}\right)\right]^{m+1} \\ &\geqq \left[\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{k+1}{k}\right]^{m}\cdot\frac{m+2}{m+1} \\ &> \left[(m+1)^{\frac{1}{m}}\right]^{m}\cdot\frac{m+2}{m+1} \qquad (\because\ ②) \\ &= m+2\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k+1}{k} > (m+2)^{\frac{1}{m+1}}$$

すなわち，③が成り立つ.

したがって，2 以上の自然数 n に対して ①は成り立つ. ■

[注]　不等式 $(*)$ は**例題 5** の (1) に現れた不等式と同じである.

和歌山県立医科大

例題８　次の証明の $\boxed{}$ の中へ入れるものを下欄の所定の桝（省略）の中に記入せよ。

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \qquad (a_1>0,\ a_2>0,\ \ldots,\ a_n>0)$$

を証明するのに数学的帰納法を用いる。

$n=1$ のときは明らかである。$n=2$ のときは $\dfrac{a_1+a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1a_2}$ であることは

$\left(\boxed{ア}\right)^2 \geqq 0$ より明らかである。

$n=h$ のとき成立すると仮定する。

そして $\sqrt[h]{a_1a_2\cdots a_h}=A,\ a_1+a_2+\cdots+a_h=B$ とおく。

$a_{h+1}=\boxed{イ}$ $(\alpha>0)$ とおくことより【$\boxed{イ}$ は α を用いてあらわせ】

$$(a_1+a_2+\cdots+a_h+a_{h+1})^{h+1}=\left(B+\boxed{イ}\right)^{h+1}=\sum_{r=0}^{h+1}B^r\boxed{イ}^{h-r+1}{}_{h+1}C_r \qquad \cdots\cdots (1)$$

さて $\boxed{ウ}$ であるから

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{h+1})^{h+1} \geqq \sum_{r=0}^{h+1}A^{h+1}h^r\alpha^{h-r+1}{}_{h+1}C_r=\frac{(h+\alpha)^{h+1}}{\alpha}\boxed{エ}$$

【$\boxed{エ}$ は A と α であらわせ】　$\cdots\cdots$ (2)

$\dfrac{(h+\alpha)^{h+1}}{\alpha} \geqq (h+1)^{h+1}$ が証明されたならば，$\boxed{エ}=\boxed{オ}$ であるから (2) より

$$a_1+a_2+\cdots+a_{h+1} \geqq (h+1)\cdot\sqrt[h+1]{a_1a_2\cdots a_ha_{h+1}}$$

すなわち $n=h+1$ のとき成立する。

さて $\dfrac{(h+\alpha)^{h+1}}{\alpha} \geqq (h+1)^{h+1}$ の証明には微分法の不等式への応用を使う。すなわち

$f(\alpha)=\boxed{カ}$ とおけば $f'(\alpha)=\dfrac{df}{d\alpha}=\boxed{キ}$

【$\boxed{キ}$ は最も簡単な形に変形しておけ】

すると $f(1)=0$ であって $\boxed{ク}$ であるから $f(\alpha)\boxed{ケ}0$ である。

【$\boxed{ク}$ は精しく記入すべきこと】　【$\boxed{ケ}$ は満足すべき不等号，等号を入れよ】

故に $\dfrac{(h+\alpha)^{h+1}}{\alpha} \geqq (h+1)^{h+1}$

すなわち数学的帰納法で証明された。

上の定理を用いて　$\log\displaystyle\int_0^1 \sin x\,dx \geqq \int_0^1 \log(\sin x)\,dx$ を証明しよう。

$\dfrac{\pi}{2}>1$ であるから　$\sin\dfrac{1}{n}>0,\ \ldots,\ \sin\dfrac{n}{n}>0$ である。

さて $\int_0^1 \log(\sin x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} \boxed{\text{コ}}$ であり $\int_0^1 \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} \boxed{\text{サ}}$ である。

また $\boxed{\text{シ}}$ であるから　$\log\sum_{r=1}^{n} \boxed{\text{サ}} \geqq \sum_{r=1}^{n} \boxed{\text{コ}}$，$\sin x$ も $\log x$ も単調連続関数であるから

$\lim_{n\to\infty}\log\sum_{r=1}^{n} \boxed{\text{サ}} = \log\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} \boxed{\text{サ}} = \log\int_0^1 \sin x\,dx$ である。よって証明せられた。

（S 44[1969]　和歌山県立医科大）

解　（ア）　$\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}$

（イ）　(1) の展開から (2) の中央の式に移るには

$$ {}_{h+1}C_r B^r {a_{h+1}}^{h-r+1} \geqq {}_{h+1}C_r A^{h+1} h^r \alpha^{h-r+1} $$

が成り立ってほしい。指数の同じ項をまとめると

$$ \left(\frac{B}{h}\right)^r \left(\frac{a_{h+1}}{\alpha}\right)^{h-r+1} \geqq A^{h+1} $$

$n=h$ のときの仮定は $\dfrac{B}{h} \geqq A$ だから

$$ \left(\frac{B}{h}\right)^r \left(\frac{a_{h+1}}{\alpha}\right)^{h-r+1} \geqq A^r \left(\frac{a_{h+1}}{\alpha}\right)^{h-r+1} $$

右辺が $A^{h+1} = A^r A^{h-r+1}$ となればよいから，$\dfrac{a_{h+1}}{\alpha} = A$ すなわち $a_{h+1} = A\alpha$ ととればよい。

（イ）　$A\alpha$

（ウ）　$B \geqq hA$

（エ）

$$ \begin{aligned} (a_1+a_2+\cdots+a_h+a_{h+1})^{h+1} &\geqq \sum_{r=0}^{h+1} A^{h+1} h^r \alpha^{h-r+1}{}_{h+1}C_r \\ &= A^{h+1}\sum_{r=0}^{h+1} h^r \alpha^{h-r+1}{}_{h+1}C_r \\ &= A^{h+1}(h+\alpha)^{h+1} \\ &= \frac{(h+\alpha)^{h+1}}{\alpha}\,\alpha A^{h+1} \end{aligned} $$

（エ）　αA^{h+1}

（オ）　$\alpha A^{h+1} = \alpha A \cdot A^h = a_{k+1}\cdot a_1a_2\cdots a_h = a_1a_2\cdots a_h a_{h+1}$

より　（オ）　$a_1a_2\cdots a_h a_{h+1}$

(カ)，(キ)　$f(\alpha)=\dfrac{(h+\alpha)^{h+1}}{\alpha}-(h+1)^{h+1}$ とおくと

$$f'(\alpha)=\frac{(h+1)(h+\alpha)^h\cdot\alpha-(h+\alpha)^{h+1}}{\alpha^2}=\frac{h(\alpha-1)(h+\alpha)^h}{\alpha^2}$$

より　(カ)　$\dfrac{(h+\alpha)^{h+1}}{\alpha}-(h+1)^{h+1}$　(キ)　$\dfrac{h(\alpha-1)(h+\alpha)^h}{\alpha^2}$

(ク)　$0<\alpha<1$ のとき $f'(\alpha)<0$，$1<\alpha$ のとき $f'(\alpha)>0$

(ケ)　（ク）から $f(\alpha)$ は $\alpha=1$ のとき最小値 $f(1)=0$ をとるから　$0<\alpha$ のとき $f(\alpha)\geqq 0$ である。

(ケ)　$\geqq$

(コ)　区分求積法から $\displaystyle\int_0^1 \log(\sin x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left\{\sin\left(\frac{r}{n}\right)\right\}$

(コ)　$\dfrac{1}{n}\log\left\{\sin\left(\dfrac{r}{n}\right)\right\}$

(サ)　$\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{r}{n}\right)$

(シ)　相加平均と相乗平均の不等式から　(シ)　$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\sin\frac{r}{n}\geqq\sqrt[n]{\sin\frac{1}{n}\sin\frac{2}{n}\cdots\sin\frac{n}{n}}$　■

[注]　h が自然数，$\alpha>0$ とする。

$$f(\alpha)\geqq 0\iff\frac{(h+\alpha)^{h+1}}{\alpha}\geqq(h+1)^{h+1}\iff\left(\frac{h+\alpha}{h+1}\right)^{h+1}\geqq\alpha$$

が成り立つ。

不等式

$$\left(\frac{h+\alpha}{h+1}\right)^{h+1}\geqq\alpha$$

は，例題５の (1) より，n が正の整数で $A>0,\ x>0$ のとき，不等式

$$\left(\frac{A+x}{n+1}\right)^{n+1}\geqq\left(\frac{A}{n}\right)^{n}x$$

が成り立つから，$n=h, A=h, x=\alpha$ とおけば得られる。

例題９　正の数 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ に対して，次の不等式

$$(*) \qquad \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\left(=(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\right)$$

が成立することを次の手順で証明してみよう。

(1)　$\dfrac{x_1+x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1x_2}$ を示しなさい。

(2)　$a \geqq 0$ のとき，$(1+a)^n \geqq 1+na$ を示しなさい。

(3)　x_3 を x_1, x_2, x_3 の中で最も大きい数，$A=\dfrac{x_1+x_2}{2}, B=\sqrt{x_1x_2}$ とする。

$\left(1+\dfrac{x_3-A}{3A}\right)^3$ に対して，(1) と (2) の結果を運用し，不等式 $(*)$ において $n=3$ の場合を証明しなさい。

(4)　(3) での証明方法を参考にして，一般の n に対し，数学的帰納法を用いて不等式 $(*)$ を証明しなさい。

（2004　立正大・地球環境）

解　(1)　$\dfrac{x_1+x_2}{2}-\sqrt{x_1x_2}=\dfrac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_1})^2}{2} \geqq 0$ より $\dfrac{x_1+x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1x_2}$ は成り立つ。

(2)　二項定理より

$$\begin{aligned}(1+a)^n &={}_nC_0+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots+{}_nC_na^n\\ &\geqq {}_nC_0+{}_nC_1a \qquad (\because \quad a>0\,)\\ &=1+na\end{aligned}$$

よって，$a \geqq 0$ のとき，$(1+a)^n \geqq 1+na$ は成り立つ。

(3)　x_3 は x_1, x_2, x_3 の中で最も大きい数だから，$x_3 \geqq x_1, x_3 \geqq x_2$ が成り立ち

$$2x_3 \geqq x_1+x_2 \qquad \therefore \quad x_3 \geqq \frac{x_1+x_2}{2}=A$$

$\left(1+\dfrac{x_3-A}{3A}\right)^3$ に対して，(2) の不等式を使うと

$$\left(1+\frac{x_3-A}{3A}\right)^3 \geqq 1+3\cdot\frac{x_3-A}{3A} \quad \text{から} \quad \left(\frac{x_3+2A}{3A}\right)^3 \geqq \frac{x_3}{A}$$

よって

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3 \geqq A^2x_3$$

(1) の結果から $A \geqq B$ が成り立つから

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3 \geqq A^2x_3 \geqq B^2\cdot x_3=x_1x_2x_3$$

ゆえに

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geqq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

(4)　(i) $n=1$ のとき，$(*)$ で等号が成り立つ。

$n=2$ のときは，(1) から成り立つ。

(ii) $n=k-1 \quad (k \geqq 3)$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する。

x_k を $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ の中で最も大きい数，$A=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}, B=\sqrt[k-1]{x_1x_2\cdots x_{k-1}}$ とする。

$$(k-1)x_k \geqq x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}$$

から

$$x_k \geqq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}=A$$

$\left(1+\dfrac{x_k-A}{kA}\right)^k$ に対して，(2) の不等式を使うと

$$\left(1+\frac{x_k-A}{kA}\right)^k \geqq 1+k\cdot\frac{x_k-A}{kA}$$

から

$$\left(\frac{x_k+(k-1)A}{kA}\right)^k \geqq \frac{x_k}{A}$$

よって

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)^k \geqq A^{k-1}x_k$$

仮定から $A \geqq B$ が成り立つので

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)^k \geqq A^{k-1}x_k \geqq B^{k-1}\cdot x_k = x_1x_2\cdots x_{k-1}\cdot x_k$$

ゆえに

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k} \geqq \sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}$$

$n=k$ のときも $(*)$ は成り立つ。

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ。 ■

[注]　類題 2 の（1）から，A, B が正の実数で，n が 2 以上の自然数のとき，不等式

$$\left(\frac{A+B}{n}\right)^n \geqq a\left(\frac{B}{n-1}\right)^{n-1}$$

が成り立つことから，$A=1+na,\ B=n-1$ とおくと

$a \geqq 0,\ n \geqq 2$ のとき，$(1+a)^n \geqq 1+na$ は成り立つことがわかる。

3　相加平均と相乗平均の不等式の証明２

例題 10　「n 個の任意の正の数 $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ について

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

が成り立つ」という命題を $P(n)$ とする。次の問に答えよ。

(1)　$P(2)$ が正しいことを証明せよ。
(2)　$P(k)$ が正しいとき，$P(2k)$ も正しいことを証明せよ。
(3)　$P(k+1)$ が正しいとき，$P(k)$ も正しいことを証明せよ。

（S 62[1987]　横浜国立大）

解　(1)　$\dfrac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \dfrac{\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2}{2} \geqq 0$ から $P(2)$ は正しい。

(2)　$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} = b_1,\ \dfrac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{k} = b_2$ とおくと，

$P(2)$ が正しいことより

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{2k} = \frac{b_1 + b_2}{2} \geqq \sqrt{b_1 b_2} \qquad \cdots\cdots ②$$

ところが $b_1,\ b_2$ については $P(k)$ が正しいことより

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \geqq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k},$$

$$b_2 = \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{k} \geqq \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}$$

したがって

$$\sqrt{b_1 b_2} \geqq \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}\,\sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{2k}} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。よって，②，③から

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{2k} \geqq \sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{2k}}$$

すなわち $P(2k)$ も正しい。

(3)　k 個の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ に対して $a_{k+1} = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$ とおくと

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_k + a_{k+1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \\ &= \frac{k+1}{k}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{1}{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \qquad \cdots\cdots④$$

一方，$P(k+1)$ の仮定により

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}) &\geqq \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}} \\ &= \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_k\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤から

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} &\geqq \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_k}\sqrt[k+1]{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}} \\ \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{k+1} &\geqq a_1a_2\cdots a_k\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \\ \therefore\quad \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{k} &\geqq a_1a_2\cdots a_k\end{aligned}$$

よって

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\geqq\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$$

が成り立つから $P(k)$ も正しい。 ■

※ (2) については $P(k)$ が正しいことを先に適用し，次に $P(2)$ が正しいことを利用してもよい。

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\geqq\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\,,\ \frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}{k}\geqq\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{2k}}$$

より

$$\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}=c_1,\ \sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{2k}}=c_2$$

とおくと

$$\begin{aligned}&\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}{2k} \\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}{k}\right)\geqq\frac{1}{2}(c_1+c_2)\end{aligned}$$

ここで $P(2)$ が正しいことより

$$\frac{c_1+c_2}{2}\geqq\sqrt{c_1c_2}=\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{2k}}}=\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{2k}}$$

よって

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}{2k}\geqq\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{2k}}$$

すなわち $P(2k)$ も正しい。

例題 11　正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し，$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$，$T_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ と定める。

(1)　$S_2 \geqq T_2$ を示せ。

(2)　(1) を用いて $S_4 \geqq T_4$ を示せ。

(3)　$S_n \geqq T_n$ が $n = 2^k$ (k は自然数) のとき成立するならば，$n = 2^{k+1}$ のときも成立することを示せ。

(4)　$S_{n+1} \geqq T_{n+1}$ ($n \geqq 1$) が 成立するならば，$S_n \geqq T_n$ が成立することを示せ。

（2003　芝浦工大）

解　(1)（省略）

(2)　(1) を用いると

$$\begin{aligned}
S_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} &= \frac{\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{x_3 + x_4}{2}}{2} \\
&\geqq \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2} \\
&\geqq \sqrt{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4}} \\
&\geqq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = T_4
\end{aligned}$$

(3)　$n = 2^k$ (k は自然数) のとき成立すると仮定して，$n = 2^{k+1}$ のときも成り立つことを示せばよい。$m = 2^k$ とおくと，m のときの成立を仮定して，$2m$ のとき成り立つことを示せばよいから**例題 10** の (2) と同様である。

(4)　(省略)　■

慶應大

例題 12　選択肢から最も適切なものを選びその番号を解答欄（省略）に記入しなさい。

自然数 n を含む命題 $P(n)$ がすべての自然数 n に対して成り立つことを証明するには，数学的帰納法の変形として，次の 3 つを示せばよい。

(A)　$P(1), P(2)$ が成り立つ。

(B)　$P(k), k \geqq 2,$ が成り立つとき，$P(2k)$ も成り立つ。

(C)　$P(k), k \geqq 2,$ が成り立つとき，$P(k-1)$ も成り立つ。

この方法を用いて，次の命題 $P(n)$ がすべての自然数 n に対して成り立つことを証明する。

命題 $P(n)$ ：すべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqq 0$ に対して $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$

証明：$x_i\,(1 \leqq i \leqq n)$ に 0 が含まれるときは，右辺は 0 となるので命題は明らか。よって以下の議論ではすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は $\boxed{\text{ア}}$ より大きいとする。

（A)　$n=1$ のとき，両辺とも x_1 となり $P(1)$ は成り立つ。 $n=2$ のときも

$$x_1 - 2\sqrt{x_1x_2} + x_2 = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geqq 0$$

より $P(2)$ は成り立つ。

（B)　$n=k, k \geqq 2$ ，のとき命題は成り立つとする。

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{x_{\boxed{\text{エ}}}+\cdots+x_{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$\geqq \frac{(x_1x_2\cdots x_k)^{\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}}}{\boxed{\text{キ}}} + \frac{\left(x_{\boxed{\text{エ}}}\cdots x_{\boxed{\text{オ}}}\right)^{\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

$$\geqq \left(x_1x_2\cdots x_{\boxed{\text{ク}}}\right)^{\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}}$$

となり，$P(2k)$ が成り立つことが分かる。ここで最後の式の変形では $P\left(\boxed{\text{コ}}\right)$ を用いている。

（C)　$n=k, k \geqq 2$ ，のとき命題は成り立つとする。とくに

$$x_k = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}$$

とすれば，$x_k^{\boxed{\text{サ}}} \geqq x_1x_2\cdots x_k$ となる。両辺を x_k で割れば

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1} = x_k \geqq (x_1x_2\cdots x_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}$$

となる。よって $P(k-1)$ が成り立つことが分かる。

以上の（A),（B),（C）により命題 $P(n)$ はすべての自然数 n に対して成り立つ。

［選択肢］ (0) 0　(1) 1　(2) 2　(3) $k-1$　(4) k

(5) $k+1$　(6) $2k$　(7) $n-1$　(8) n　(9) $n+1$

（2006　慶応・環境情報学部）

解　命題 $P(n)$ ：すべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqq 0$ に対して

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

証明：

$x_i\,(1 \leqq i \leqq n)$ に 0 が含まれるときは，右辺は 0 となるので命題は明らか。よって以下の議論ではすべての $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は 0 より大きいとする。

（A）　$n=1$ のとき，両辺とも x_1 となり $P(1)$ は成り立つ。 $n=2$ のときも

$$x_1 - 2\sqrt{x_1x_2} + x_2 = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geqq 0$$

より $P(2)$ は成り立つ。

（B）　$n=k, k \geqq 2$ ，のとき命題は成り立つとする。

$$\begin{aligned}
\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k}}{2k} &= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{2k} + \frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{2k}}{2k} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k} + \frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{2k}}{k}\right) \\
&\geqq \frac{1}{2}\left\{(x_1x_2\cdots x_k\}^{\frac{1}{k}} + (x_{k+1}x_{k+2}\,\cdots\, x_{2k})^{\frac{1}{k}}\right) \\
&\geqq \frac{(x_1x_2\cdots x_k)^{\frac{1}{k}} + (x_{k+1}x_{k+2}\,\cdots\, x_{2k})^{\frac{1}{k}}}{2} \\
&\geqq \left\{(x_1x_2\cdots x_k)^{\frac{1}{k}}\,(x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{2k})^{\frac{1}{k}}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (\because \quad P(2)\,) \\
&= (x_1x_2\cdots x_{2k})^{\frac{1}{2k}}
\end{aligned}$$

となり，$P(2k)$ が成り立つことが分かる。ここで最後の式の変形では $P(2)$ を用いている。

（C）　$n=k, k \geqq 2,$ のとき命題は成り立つとする。とくに $x_k = \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}$ とすれば,

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k} = \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1})+x_k}{k} = \frac{(k-1)x_k+x_k}{k} = x_k$$

仮定から $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k} \geqq (x_1x_2\cdots x_k)^{\frac{1}{k}}$ が成り立つから

$$x_k \geqq (x_1x_2\cdots x_k)^{\frac{1}{k}} \qquad \therefore \quad {x_k}^k \geqq x_1x_2\cdots x_k$$

となる。両辺を x_k で割れば

$$x_k^{k-1} \geqq x_1 x_2 \cdots x_{k-1}$$

したがって

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1} = x_k \geqq (x_1 x_2 \cdots x_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}$$

となる。よって $P(k-1)$ が成り立つことが分かる。

以上の（A），（B），（C）により命題 $P(n)$ はすべての自然数 n に対して成り立つ。 ■

次の気象大学校の問題の解法は，横浜国大の問題の解法と本質的には同じである。

例題 13　次のような命題 A がある。

命題 A：n を 2 以上の整数，$g(x)$ を定義域が実数全体で値域が正の実数である関数とする（$g(x) > 0$）。
任意の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，

$$g\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geqq \{g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)\}^{\frac{1}{n}}$$

ならば

$$g\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right) \geqq \{g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_{n-1})\}^{\frac{1}{n-1}}$$

以下の設問について答えよ。ただし，(1-ii)，(1-iii)，(2-ii) は命題 A が真であるとして，これを適用して答えよ。なお，前の設問の結果を用いてもよい。

(1)　定義域が実数全体で値域が正の実数である関数 $f(x)$ が，任意の実数 x_1, x_2 に対して，$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqq \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ を満たすとき，以下の問いに答えよ。

(1-i)　任意の実数 x_1, x_2, x_3, x_4 に対して，次の不等式を証明せよ。

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \geqq \{f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)\}^{\frac{1}{4}}$$

(1-ii)　任意の実数 x_1, x_2, x_3 に対して，次の不等式を証明せよ。

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geqq \{f(x_1)f(x_2)f(x_3)\}^{\frac{1}{3}}$$

(1-iii)　任意の正の整数 n と任意の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，次の不等式を証明せよ。

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geqq \{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\}^{\frac{1}{n}}$$

(2)　$x_1,\, x_2,\, x_3$ は $-\frac{\pi}{2} < x_1,\, x_2,\, x_3 < \frac{\pi}{2}$ を満たす任意の実数とするとき，以下の問いに答えよ。

(2-i)　次の不等式を証明し，等号が成立する場合を示せ。

$$\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqq \sqrt{\cos x_1 \cos x_2}$$

(2-ii)　次の不等式を証明せよ。　$\cos\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geqq \{\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3\}^{\frac{1}{3}}$

(3)　定義域が実数全体で値域が正の実数である関数 $f(x)$ が，任意の実数 x_1, x_2 に対して，$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqq \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ を満たすとき，$f(x)$ に対して命題 A が真であることを証明せよ。

（2007 気象大学校・改）

解 (1) (1-i)

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{x_3+x_4}{2}}{2}\right) \\
&\geqq \sqrt{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)} \\
&\geqq \sqrt{\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\sqrt{f(x_3)f(x_4)}} \\
&= \{f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)\}^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \geqq \{f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)\}^{\frac{1}{4}}
$$

(1-ii) （1-i）の不等式が成り立つから，命題 A で，$g(x)=f(x), n=4$ とすると

$$
f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \geqq \{f(x_1)f(x_2)f(x_3)\}^{\frac{1}{3}}
$$

(1-iii) $n=k$ のとき不等式がなりたつとき，$n=2k$ のとき不等式が成り立てば，$n=2$ のとき不等式が成り立つから，$n=2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^m$ のとき不等式が成り立つことがわかる。命題 A を繰り返し適用することにより，

$n=2^m-1, 2^m-2, \ldots, 2^{m-1}$ の場合成り立つことがわかるので，2 以上の自然数 n に対して不等式が成り立つことがいえる。

したがって，$n=k$ のとき不等式がなりたつとき，$n=2k$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい。

$x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ に対して

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k}}{2k}\right) \\
&= f\left(\frac{\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}+\dfrac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{2k}}{k}}{2}\right) \\
&\geqq \left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)f\left(\frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{2k}}{k}\right)\right]^{\frac{1}{2}} && (\because \quad (1)\,) \\
&\geqq \left[\{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_k)\}^{\frac{1}{k}}\{f(x_{k+1})f(x_{k+2})\cdots f(x_{2k})\}^{\frac{1}{k}}\right]^{\frac{1}{2}} && (n=k \text{ のときの仮定}) \\
&= \{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{2k})\}^{\frac{1}{2k}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \qquad f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k}}{2k}\right) \geqq \{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{2k})\}^{\frac{1}{2k}}
$$

となり，$n=2k$ のときも不等式は成り立つ。

(別解)　n が 2^m のとき不等式が成り立てば，命題 A を繰り返し適用することにより，
$n=2^m-1, 2^m-2, \dots, 2^{m-1}$ の場合成り立つことがわかる。したがって，m を自然数として，

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m}\right) \geqq \{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{2^m})\}^{\frac{1}{2^m}} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示せばよい。

①を m に関する数学的帰納法で証明する。

$m=1$ のとき，①は $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq \sqrt{\{f(x_1)f(x_2)\}}$ という不等式であるから，仮定により成り立つ。

$m=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)\\
&=f\left(\frac{\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}+\dfrac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right)\\
&\geqq\left\{f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right)f\left(\frac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\geqq\left\{\{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{2^k})\}^{\frac{1}{2^k}}\{f(x_{2^k+1})f(x_{2^k+2})\cdots f(x_{2^{2^{k+1}}})\}^{\frac{1}{2^k}}\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&=\{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{2^{k+1}})\}^{\frac{1}{2^{k+1}}}
\end{aligned}$$

となり，$m=k+1$ のときも①は成り立つ。

したがって，任意の自然数 m に対しても，①は成り立つ。

(2)　(2-i) x_1, x_2, x_3 は $-\dfrac{\pi}{2}<x_1, x_2, x_3<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，
$\cos\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>0, \cos x_1>0, \cos x_2>0$ であるから，両辺を 2 乗した

$$\cos^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq \{\sqrt{\cos x_1\cos x_2}\}^2$$

を証明すればよい。差をとると

$$\begin{aligned}
2\cos^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-2\cos x_1\cos x_2&=1+\cos(x_1+x_2)-2\cos x_1\cos x_2\\
&=1+\cos x_1\cos x_2-\sin x_1\sin x_2-2\cos x_1\cos x_2\\
&=1-\cos(x_1-x_2)\geqq 0
\end{aligned}$$

（等号は $x_1=x_2$のとき成立する。）

よって　$\cos\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq \sqrt{\cos x_1\cos x_2}$ が成り立つ。

また，等号は $x_1=x_2$ のとき成立する。

(2-ii)　（2-i）より，$f(x)=\cos x$ は（1）の条件を満たすから，（1-ii）より題意の不等式は成り立つ。

(3) $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ に対して $x_n = \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$ とおくと

$$g\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geqq \{g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)\}^{\frac{1}{n}}$$

が成り立つ。$x_n = \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n}$ となるから

$$\{g(x_n)\}^n \geqq g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)$$

$$\therefore \quad \{g(x_n)\}^{n-1} \geqq g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_{n-1})$$

よって

$$g\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geqq \{g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)\}^{\frac{1}{n}}$$

■

(2-i) でみたように，$g(x)$ の定義域は実数全体でなくても，値域が正の実数である関数ならば特に問題ない。定義域を正の実数全体として $g(x)=x$ とおけば相加平均・相乗平均の不等式を証明する横浜国大の問題の解法で解ける。

また，$g(x)>0$ より $h(x)=\log g(x)$ とおけば，次のことがいえたことになる。(「相加平均と相乗平均の不等式の証明その 6」の武蔵工大の問題の解説等も参照。)

関数 $h(x)$ の定義域を I とし，定義域に属する任意の実数 x_1, x_2 に対して，

$h\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq \dfrac{h(x_1)+h(x_2)}{2}$ を満たすとき，

任意の正の整数 n と，定義域に属する任意の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，次の不等式が成り立つ。

$$h\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geqq \frac{h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_n)}{n}$$

4　相加平均と相乗平均の不等式の証明３

例題 14

(1)　$a \geqq 1,\, b \leqq 1$ である任意の正の数 $a,\, b$ に対し，$a+b \geqq 1+ab$ となることを証明せよ。

(2)　$a_1a_2\cdots a_n = 1$ である任意の n 個の正の数 $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ に対し $a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq n$ となることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　(2) を用いて，任意の n 個の正の数 $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ に対し

$$\frac{{a_1}^n+{a_2}^n+\cdots+{a_n}^n}{n} \geqq a_1a_2\cdots a_n$$

となることを証明せよ。　　（S 55[1980]　秋田大）

解　(1)　$a+b-1-ab=(a-1)(1-b),\ a-1 \geqq 0,\ 1-b \geqq 0$ あるから $a+b-1-ab \geqq 0$

$$\therefore \quad a+b \geqq 1+ab$$

(2)　$a_1a_2\cdots a_n = 1 \Longrightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq n$　　$\cdots\cdots$①

①は，$n=1$ のとき明らかに成立する。

$n=2$ のときは，相加平均相乗平均の不等式から　$\dfrac{a_1+a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1a_2}=1$

よって，$a_1+a_2 \geqq 2$ となり①は，$n=2$ のとき成立する。

①が $n=k\,(\geqq 2)$ のときに成り立つと仮定する。すなわち

$$x_1x_2\cdots x_k=1,\ x_i>0\ (1 \leqq i \leqq k) \Longrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_k \geqq k$$

として，$n=k+1$ のとき成立することを証明する。

$$a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=1 \qquad \cdots\cdots②$$

を満たす $k+1$ 個の正の数 $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k,\, a_{k+1}$ とする。

> ②から $a_i \geqq 1$ となる a_i と，$a_j \leqq 1$ となる a_j がそれぞれ少なくとも 1 つ存在しなければならない。なぜなら, もしすべての i について $0<a_i<1$ とすると, $a_1a_2\cdots a_{k+1} < 1\cdot1\cdot\cdots\cdot1=1$ となり②に反する。すべての j について $a_j>1$ としても ②に反する。そこで $a_i \geqq 1$ となる a_i と，$a_j \leqq 1$ となる a_j を 1 つずつ選べる。$i=j$ のときは $a_i=1$ で, $a_1a_2\cdots a_ka_{l-1}a_{l+1}\cdots a_{k+1}=1$ でなるから，同じ論法で $a_{i'} \geqq 1$ となる $a_{i'}$ と，$a_{j'} \leqq 1$ となる $a_{j'}$ がそれぞれ少なくとも 1 つ存在する。$i \fallingdotseq j'$ であるから，最初から $i \fallingdotseq j$ と仮定しても一般性を失わない。
> 番号の付け替えだけなので，$i=1, j=2$ と考える。つまり $a_1 \geqq 1, a_2 \leqq 1$ とする。

(1) から

$$a_1 + a_2 \geqq 1 + a_1 a_2$$

a_1a_2 を 1 つの正の数と考えれば，k 個の正の数 $a_1a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k,\ a_{k+1}$ の積が 1 であるから，帰納法の仮定より（$x_1 = a_1a_2,\ x_2 = a_3,\ \ldots,\ x_k = a_{k+1}$ とおけばよい。）

$$a_1a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geqq k$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geqq a_1a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} + 1 \geqq k + 1$$

すなわち，①は $n = k + 1$ のときも成り立つ。ゆえに，①はすべての自然数 n について成り立つ。

(3)　$b_k = \dfrac{{a_k}^n}{a_1a_2\cdots a_n}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ とおけば，正の数 $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ については

$b_1b_2\cdots b_n = 1$ が成り立つから，（２）より $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqq n$

すなわち　$$\frac{{a_1}^n + {a_2}^n + \cdots + {a_n}^n}{n} \geqq a_1a_2\cdots a_n$$ ■

(2) の$\boxed{}$の中は，次のように考えることもできる。

②から $a_i \geqq 1$ となる a_i と，$a_j \leqq 1$ となる a_j がそれぞれ少なくとも 1 つ存在しなければならない。なぜなら，もしすべての i について $0 < a_i < 1$ とすると，$a_1a_2\cdots a_{k+1} < 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 1$ となり ②に反する。すべての j について $a_j > 1$ としても ②に反する。そこで $a_i \geqq 1$ となる a_i と，$a_j \leqq 1$ となる a_j を 1 つずつ選べる。$i = j$ のときは $a_i = 1$ である。

②から $a_1 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_{k+1} = 1$ であるから，仮定から

$a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_{k+1} \geqq k$

両辺に $1 = a_i$ を加えると

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geqq k + 1$$

次に $i \fallingdotseq j$ の場合を考える。番号の付け替えだけなので，$i = 1, j = 2$ と考える。つまり $a_1 \geqq 1, a_2 \leqq 1$ とする。

$0 < a_1 \leqq 1, 0 < a_2 \leqq 1, \ldots, 0 < a_{k+1} \leqq 1$ とすると，$a_1a_2\cdots a_{k+1} \leqq 1$ が成り立つ。②より等号が成り立つから $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1} = 1$ となる。このとき，不等式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geqq k + 1$ は明らかに成り立つ。

「$0 < a_1 \leqq 1, 0 < a_2 \leqq 1, \ldots, 0 < a_{k+1} \leqq 1$」でないとすると，$a_i > 1$ となる a_i が存在する。$a_1 > 1, a_2 > 1, \ldots, a_{k+1} > 1$ とすると $a_1a_2\cdots a_{k+1} > 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 1$ となり ②に反するから $a_j \leqq 1$ となる a_j が存在する。明らかに $i \fallingdotseq j$ である。番号の付け替えだけなので，$i = 1, j = 2$ と考える。つまり $a_1 > 1, a_2 \leqq 1$ とする。

$a_1=1, a_2=1, \ldots, a_{k+1}=1$ とすると，このとき，不等式 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geqq k+1$ は明らかに成り立つ。「$a_1=1, a_2=1, \ldots, a_{k+1}=1$」でないとき，$a_l>1$ か $a_l<1$ が成り立つ a_l が存在する。
$a_l>1$ のとき，$a_1>1, a_2>1, \ldots, a_{k+1}>1$ とすると②に反するから $a_j \leqq 1$ となる a_j が存在する。明らかに $l \fallingdotseq j$ である。番号の付け替えだけなので，$l=1, j=2$ と考える。つまり $a_1>1, a_2 \leqq 1$ とする。$a_l<1$ のとき，$a_1<1, a_2<1, \ldots, a_{k+1}<1$ とすると②に反するから $a_i \geqq 1$ となる a_i が存在する。明らかに $i \fallingdotseq l$ である。番号の付け替えだけなので，$i=1, l=2$ と考える。つまり $a_1 \geqq 1, a_2<1$ とする。

例題 15　次の問いに答えよ。

(1)　$a \geqq 0, b \leqq 0$ のとき，$2^a+2^b \geqq 2^{a+b}+1$ を示せ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ を満たすとき，$2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n} \geqq n$ が成立することを数学的帰納法で示せ。

(3)　n を 2 以上の整数とする。実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して，次の不等式が成立することを示せ。

$$\frac{2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}}{n} \geqq 2^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}$$

（2002　岡山県立大）

(1) は $A=2^a, B=2^b$ とおくと $A \geqq 1, 0<B \leqq 1$ で，このとき $A+B \geqq AB+1$ となることを証明することと同じである。

(2) は $A_i=2^{a_i}(1 \leqq i \leqq n)$ とおくと $A_1A_2\cdots A_n=1$ である任意の $n(\geqq 2)$ 個の正の数 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対し $A_1+A_2+\cdots+A_n \geqq n$ となることを数学的帰納法を用いて証明することと同じである。

(3) は (2) を用いて，任意の $n(\geqq 2)$ 個の正の数 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対し

$$\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n} \geqq \sqrt[n]{A_1A_2\cdots A_n}$$

を証明することと同じである。

$$B_k=\frac{A_k}{\sqrt[n]{A_1A_2\cdots A_n}}(k=1, 2, \ldots, n)$$

とおけば,正の数 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ について $B_1B_2\cdots B_n=1$ が成り立つから,(2)より $B_1+B_2+\cdots+B_n \geqq n$ すなわち

$$\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n} \geqq \sqrt[n]{A_1A_2\cdots A_n}$$

が成り立つ。

例題 16　(1) すべての実数 t に対して，不等式 $e^t \geqq 1+t$ が成り立つことを示せ。
また，等号が成り立つ場合はどのようなときか。

(2)　正の数 $x_j\,(j=1, 2, \ldots, n)$ に対して，$x_j = e^{t_j}$ とおく。$x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ のとき，不等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq n$$

が成りたつことを示せ。また，等号が成り立つ場合はどのようなときか。

(3)　$x_1 > 0,\, x_2 > 0,\, \ldots,\, x_n > 0$ のとき，不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つ場合はどのようなときか。　（2005　静岡大・後期）

解　(1)　$f(t) = e^t - 1 - t$ とおくと，$f'(t) = e^t - 1$

t	0		0	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$t=0$ で最小値 $f(0)=0$ をとるから，すべての実数 t に対して，不等式 $f(t) \geqq 0$ すなわち $e^t \geqq 1+t$ が成り立つ。

等号は $t=0$ のときに成り立つ。

(2)　(1) の不等式を使うと

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= e^{t_1} + e^{t_2} + \cdots + e^{t_n} \\ &\geqq (1+t_1) + (1+t_2) + \cdots + (1+t_n) \\ &= n + t_1 + t_2 + \cdots + t_n \qquad (*) \end{aligned}$$

ここで，$x_j = e^{t_j}$ より $t_j = \log x_j$ であるから

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n = \log x_1 x_2 \cdots x_n = \log 1 = 0$$

よって，$(*)$ より

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq n$$

が成りたつ。

等号は，$t_j = 0\,(j=1, 2, \ldots, n)$ すなわち $x_j = 1\,(j=1, 2, \ldots, n)$ のときに成り立つ。

(3)　$x_1 > 0,\, x_2 > 0,\, \ldots,\, x_n > 0$ のとき，$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = G$ とおき

$$y_j = \frac{x_j}{G} > 0\,(j=1, 2, \ldots, n)$$

とおくと

$$y_1y_2\cdots y_n = \frac{x_1x_2\cdots x_n}{G^n} = 1$$

を満たすから，(2) より

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geqq n$$

よって

$$\frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \cdots + \frac{x_n}{G} \geqq n$$

から

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq G = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

等号は $y_j = 1\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ すなわち $x_j = G\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ のときであるから，結局

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

のときに成り立つ． ■

例題 17

(1)　すべての実数 x に対して，不等式 $x \leqq e^{x-1}$ が成り立つことを示せ。

(2)　正の数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ を満たすとき，$x_1x_2\cdots x_n \leqq 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して，$A = \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ とするとき，
$a_1a_2\cdots a_n \leqq A^n$ が成り立つことを示せ。　　（2007　横浜市大・国際総合科学）

解　(1)　$f(x) = e^{x-1} - x$ とおくと $f'(x) = e^{x-1} - 1$

$f'(x) = 0$ を解くと $x = 1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

$f(x)$ は $x = 1$ で最小値 $f(1) = 0$ をとるので　$f(x) \geqq 0$ したがって $x \leqq e^{x-1}$ が成り立つ。

(2)　(1) から　$x_1 \leqq e^{x_1-1}, x_2 \leqq e^{x_2-1}, \ldots, x_n \leqq e^{x_n-1}$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の数だから辺々かけると

$$x_1x_2\cdots x_n \leqq e^{x_1-1}e^{x_2-1}\cdots e^{x_n-1} = e^{x_1+x_2+\cdots+x_n-n} = e^{n-n} = 1$$

したがって　$x_1x_2\cdots x_n \leqq 1$ が成り立つ。

(3) $x_k = \dfrac{a_k}{A}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ とおくと，$x_k > 0$ $(1 \leqq k \leqq n)$ で $x_1+x_2+\cdots+x_n = \dfrac{1}{A}(a_1+a_2+\cdots+a_n) = n$ を満たす。

よって (2) の結果から

$$\frac{a_1}{A} \cdot \frac{a_2}{A} \cdot \ \cdots \ \cdot \frac{a_n}{A} \leqq 1$$

したがって

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leqq A^n$$

が成り立つ。 ■

※ (2) は相加平均と相乗平均の不等式の証明 3 の秋田大の問題のように (1) の不等式 $x \leqq e^{x-1}$ を使わずに証明できる。

(2) $x_i > 0\,(i = 1, 2, \cdots n)\,,\, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \Longrightarrow x_1 x_2 \cdots x_n \leqq 1$ $\cdots\cdots$①

①は，$n = 1$ のとき明らかに成立する。

$n = 2$ のときは，相加平均と相乗平均の不等式から $1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1 x_2}$

よって，$x_1 x_2 \leqq 1$ となり①は，$n = 2$ のとき成立する。

①が $n = k(\geqq 2)$ のときに成り立つと仮定する。

$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = k + 1\,,\, x_i > 0$ $(1 \leqq i \leqq k + 1)$ として，$n = k + 1$ のとき成立することを証明する。

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = k + 1 \qquad \cdots\cdots②$$

を満たす $k + 1$ 個の正の数 $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ に対して

②から $x_i \geqq 1$ となる x_i と，$x_j \leqq 1$ となる x_j がそれぞれ少なくとも 1 つ存在しなければならない。なぜなら，もしすべての i について $0 < x_i < 1$ とすると，$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} < k + 1$ となり②に反する。すべての j について $x_j > 1$ としても ②に反する。そこで $x_i \geqq 1$ となる x_i と，$x_j \leqq 1$ となる x_j を 1 つずつ選べる。$i = j$ のときは $x_i = 1$ で $x + x_2 + x_{l-1} + x_{l+1} + \cdots + x_{k+1} = k$ となるから，同じ論法で $x_{i'} \geqq 1$ となる $x_{i'}$ と，$x_{j'} \leqq 1$ となる $x_{j'}$ がそれぞれ少なくとも 1 つ存在する。$i \fallingdotseq j'$ であるから，最初から $i \fallingdotseq j$ と仮定しても一般性を失わない。

番号の付け替えだけなので，$i = 1, j = 2$ と考える。つまり $x_1 \geqq 1, x_2 \leqq 1$ とする。秋田大の（1）から

$$x_1 + x_2 \geqq 1 + x_1 x_2$$

(i) $x_1 > 1$ のとき

$(x_1 - 1) + x_2$ を 1 つの正の数と考えれば，k 個の正の数 $(x_1 - 1) + x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}$ の和が k であるから，帰納法の仮定より

$$\{(x_1 - 1) + x_2\} x_3 \cdots x_k x_{k+1} \leqq 1$$

$x_1 x_2 \leqq x_1 + x_2 - 1 = (x_1 - 1) + x_2$ を使うと

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_k x_{k+1} \leqq \{(x_1 - 1) + x_2\} x_3 \cdots x_k x_{k+1} \leqq 1$$

すなわち

$$x_1x_2x_3\cdots x_kx_{k+1} \leqq 1$$

①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

(ii)　$x_1=1$ のとき

$x_2+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}=k$ だから仮定より $x_2x_3\cdots x_kx_{k+1} \leqq 1$

したがって　$x_1x_2x_3\cdots x_kx_{k+1}=1\cdot x_2x_3\cdots x_kx_{k+1} \leqq 1$

ゆえに，①はすべての自然数 n について成り立つ。 ■

※ (1) では x に対して，不等式 $x \leqq e^{x-1}$ が成り立つことを証明したが，

$x \leqq e^{x-1} \Longleftrightarrow ex \leqq e^x$ から $y=e^x$ のグラフは下に凸で，グラフ上の点 (0 , 1) における接線を引くと，$y=x$ になることから，直感的に理解できる。

また (2) では $x>0$ のときしか使用していないので

$$x \leqq e^{x-1} \quad (x>0) \Longleftrightarrow \log x \leqq x-1$$

から

$$\log x \leqq x-1 \quad (x>0)\ [\text{等号は } x=1 \text{ のときに成り立つ}]$$

を利用してもよい。これは $y=\log x$ 上の点 (1,0) における接線を引くと，$y=x-1$ になることから，直感的に理解できる。

同様に $f''(x)>0$ で $y=f(x)$ の $(p,f(p))$ における接線を考えたものが 1995 年の京都教育大学の問題である。

5　相加平均と相乗平均の不等式の証明４

例題 18

(1)　a を与えられた正の定数とするとき，$f(x) = \dfrac{a-x}{x} + \log x$ の最小値を求めよ。ただし $\log x$ は x の自然対数を表すものとする。

(2)　n 個の関数 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ とそれらの和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ がいずれも最小値をもつとき，これらの最小値をそれぞれ $m_1, m_2, \ldots, m_n, M$ とすれば，$m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leqq M$ となることを示せ。

(3)　上の結果を利用して，n 個の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に関する不等式 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ を証明せよ。また，この不等式で等号が成り立つ場合を吟味せよ。

（S 44[1969]　慶応大・医）

解　$f'(x) = -\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-a}{x^2}$

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

ゆえに $f(x)$ は $x = a$ で最小値 $f(a) = \log a$ をとる。

(2)　m_k は $f_k(x)$ の最小値であるから

$$m_1 \leqq f_1(x),\ m_2 \leqq f_2(x),\ \ldots,\ m_n \leqq f_n(x)$$

これらを辺々加えると

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leqq f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = F(x) \qquad \cdots\cdots①$$

がすべての x について成り立つ。

$F(x)$ が最小となる x の値を x_0 とおくと $F(x_0) = M$ が成り立つから，①で $x = x_0$ とおくと

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leqq f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) = F(x_0) = M \qquad \cdots\cdots②$$

したがって

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leqq M$$

は成り立つ。

(3)　$f_k(x) = \dfrac{a_k - x}{x} + \log x$ とおくと，(1) から $m_k = \log a_k$

$$F(x) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nx}{x} + n \log x = n \left\{ \frac{\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - x}{x} + \log x \right\}$$

となるから

$$M = n \log \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)$$

したがって (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} \log a_k \leqq n \log \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right) \qquad \cdots\cdots③$$

$$\log \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq \log \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$\therefore \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

等号が成り立つのは③で等号が成り立つ場合である。③で等号が成り立つのは，②において等号が成り立つ場合だから

$$m_1 = f_1(x_0), m_2 = f_2(x_0), \ldots, m_n = f_n(x_0)$$

が成り立たなくてはならない。すなわち $f_k(x)(k = 1, 2, \ldots, n)$ が同じ x の値で最小となるから，

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

のときである。 ■

例題 19　すべての正の実数よりなる集合を S とする。共通の定義域 S をもつ n 個の関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$ に対して

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

とおく。$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$ および $F(x)$ の S における最小値はすべて存在すると仮定し，これらの値を，それぞれ，$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ および M で表す。さらに，$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ を任意に与えられた正の数とする。

(1)　$m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leqq M$ を示せ。

(2)　$f_k(x) = \dfrac{a_k}{e}x - \log x \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ のとき，m_k および M を求めよ。ただし，e は自然対数の底を，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(3)　(1) と (2) の結果を利用して，不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq \frac{1}{n}\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

が成り立つことを証明せよ。

（S 54[1979]　鹿児島大）

解　(1)　m_k は $f_k(x)$ の最小値であるから

$$m_1 \leqq f_1(x),\ m_2 \leqq f_2(x),\ \ldots,\ m_n \leqq f_n(x)$$

これらを辺々加えると

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leqq f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = F(x) \quad \cdots\cdots①$$

がすべての x について成り立つ。

$F(x)$ が最小となる x の値を x_0 とおくと $F(x_0) = M$ が成り立つから，①で $x = x_0$ とおくと

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leqq f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) = F(x_0) = M$$

したがって

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leqq M$$

(2)　$f_k'(x) = \dfrac{a_k}{e} - \dfrac{1}{x}$　これを 0 とおくと $x = \dfrac{e}{a_k}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{e}{a_k}$	$\cdots$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$
$f_k(x)$		↘	極小	↗

ゆえに $f_k(x)$ は $x=\dfrac{e}{a_k}$ で最小値をとる。よって

$$m_k = f_k\left(\frac{e}{a_k}\right) = \frac{a_k}{e}\cdot\frac{e}{a_k} - \log\frac{e}{a_k} = 1-(\log e - \log a_k) = \log a_k$$

から

$$m_k = \log a_k \qquad \text{……(答)}$$

また

$$F(x) = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{e}x - n\log x = n\left(\frac{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}{e}x - \log x\right)$$

と変形できるから

$$M = n\log\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \qquad \text{……(答)}$$

となる。

(2)　(3) の m_k および M を（１）の不等式に代入し

$$\begin{aligned}\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n &\leqq n\log\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\ \frac{1}{n}\log a_1a_2\cdots a_n &\leqq \log\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\ \therefore\quad \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} &\leqq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\end{aligned} \qquad ■$$

6　相加平均と相乗平均の不等式の証明５

例題 20　a, b, c を正の数とするとき，不等式

$$2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right) \leqq 3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)$$

を証明せよ。また，等号が成立するのはどんな場合か。　（S 53[1978]　京都大）

この不等式は次のように一般化できる。

例題 21

(1)　$a>0, n$ を自然数として $f(x)=x-(n+1)(ax)^{\frac{1}{n+1}}+na^{\frac{1}{n}}$ とおく。$x>0$ での $f(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ をすべて正の数として，

$$I_n = n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)$$

とおく。このとき，2 以上の自然数 N に対して

$$I_2 \leqq I_3 \leqq \cdots\cdots \leqq I_N$$

が成立することを示せ。　（代ゼミ模試・改）

解　(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{1}{n+1}\cdot a\cdot(n+1)(ax)^{\frac{1}{n+1}-1} \\ &= 1-a(ax)^{\frac{-n}{n+1}} \\ &= 1-a^{\frac{1}{n+1}}x^{\frac{-n}{n+1}} \\ &= 1-\left(\frac{a}{x^n}\right)^{\frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	$a^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

したがって，$f(x)$ は $x=a^{\frac{1}{n}}$ のとき最小値

$$
\begin{aligned}
f(a^{\frac{1}{n}}) &= a^{\frac{1}{n}} - (n+1)(a^{\frac{n+1}{n}})^{\frac{1}{n+1}} + na^{\frac{1}{n}} \\
&= a^{\frac{1}{n}} - (n+1)a^{\frac{1}{n}} + na^{\frac{1}{n}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

をとる。

(2)　$I_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ であるから

$$I_{n+1} - I_n = a_{n+1} - (n+1)(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} + n(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

ここで，$a_1 a_2 \cdots a_n = a$ とおくと

$$I_{n+1} - I_n = a_{n+1} - (n+1)(a a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} + na^{\frac{1}{n}}$$

ところが，これは（1）の $f(a_{n+1})$ になるから（1）の結果 $f(a_{n+1}) \geqq 0$ から

$$I_{n+1} - I_n \geqq 0 \qquad \therefore \quad I_{n+1} \geqq I_n$$

したがって，$n = 2, \ldots, N-1$ として

$$I_2 \leqq \cdots\cdots \leqq I_N$$

が成立する。 ■

(注)　$n = 2$ のとき

$$I_2 = 2\left(\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2}\right) = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}^2 \geqq 0$$

であるから，(2) の結果より $I_n \geqq 0$ すなわち

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

が成り立つ。

例題 22

(1) n を 1 より大きい定数とする。$t>0$ ならば，常に $t^n-1\geqq n(t-1)$ であることを示せ。また，等号は $t=1$ の場合に限ることを示せ。

(2) 正数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して，$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ とおく。

(ア) (1) の事実を用いて，$a_n\geqq nG_n-(n-1)G_{n-1}$ であることを示せ。また，等号がなりたつのはどのような場合か。$a_1, a_2, \ldots, a_n$ の関係式で示せ。

(イ) $A_n-nG_n\geqq A_{n-1}-(n-1)G_{n-1}$ を示せ。

(ウ) 以上より $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ であることと，等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときのみ成りたつことを示せ。（1989 順天堂大・医）

解 (1) $f(t)=t^n-1-n(t-1)$ とおく。

$f'(t)=nt^{n-1}-n=n(t^{n-1}-1)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	極小	↗

したがって，$f(t)$ は $t=1$ のとき最小値 $f(1)=0$ をとるから，
$t>0$ ならば，常に $t^n-1\geqq n(t-1)$ である。
また，等号は $t=1$ の場合に限る。

(2) (ア) (1) の不等式で $t=\dfrac{G_n}{G_{n-1}}$ とおくと

$$\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n \geqq n\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}-1\right)$$

$$\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n=\frac{{G_n}^n}{G_{n-1}^{\,n-1}G_{n-1}}=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_1a_2\cdots a_{n-1}G_{n-1}}=\frac{a_n}{G_{n-1}}$$

であるから，不等式は

$$\frac{a_n}{G_{n-1}}\geqq n\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}-1\right)$$

両辺に G_{n-1} (>0) をかけると

$$a_n\geqq nG_n-(n-1)G_{n-1}$$

等号は $t=\dfrac{G_n}{G_{n-1}}=1$ すなわち $\dfrac{a_n}{G_{n-1}}=1$ のときである。
よって $a_n=G_{n-1}$ すなわち $a_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$ のとき等号が成り立つ。

（イ） $a_n = A_n - A_{n-1}$ を用いると，(ア) の不等式から

$$A_n - A_{n-1} \geqq nG_n - (n-1)G_{n-1}$$

すなわち

$$A_n - nG_n \geqq A_{n-1} - (n-1)G_{n-1}$$

（ウ） [1] $n = 2$ のとき

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2}{2} \geqq 0$$

で不等式は成り立つ。また，等号は $\sqrt{a_1} = \sqrt{a_2}$ すなわち $a_1 = a_2$ のときのみ成り立つ。

[2] $n = k$ (k は自然数, $k \geqq 2$) のとき成立すると仮定すると,

$A_k \geqq kG_k$ （等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$ のときのみ成り立つ。）

(イ) の不等式を $n = k + 1$ のとき用いると

$$A_{k+1} - (k+1)G_{k+1} \geqq A_k - kG_k \geqq 0$$

すなわち，$A_{k+1} - (k+1)G_{k+1} \geqq 0$ となり $n = k + 1$ のときも不等式は成り立つ。

等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$, $a_{k+1} = G_k$ のときである。$a_1 = a_2 = \cdots = a_k$ のとき $G_k = a_1$ であるから，等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$ のときのみ成り立つ。

[1]，[2] から

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

が成立し，等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときのみ成り立つ。 ■

[注] (1) で得られた不等式は $n = 1$ のときも成り立つので
n が正の整数，$t > 0$ のとき

$$t^n - 1 \geqq n(t-1)$$

が成り立つ。

この不等式で $t - 1 = a(> -1)$ とおくと
n が正の整数，$a > -1$ のとき

$$(1+a)^n \geqq 1 + na$$

が成り立つ。これは，例題 9 の (2) の不等式となっている。

7　相加平均と相乗平均の不等式の証明６

例題 23　$f(x)$ を $a < x < b$ で第２次導関数が負であるような関数とするとき，

(1)　$a < c < b,\ a < d < b,\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ p + q = 1$ のとき，
$f(pc + qd) \geqq pf(c) + qf(d)$ を証明せよ。

(2)　(1) において $p = q = \dfrac{1}{2},\ c = c_1,\ d = c_2,\ a < c_i < b\,(i = 1,\ 2)$ とすると
$f\left(\dfrac{c_1 + c_2}{2}\right) \geqq \dfrac{f(c_1) + f(c_2)}{2}$ が得られる。一般に n が自然数のとき $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ が $a < c_i < b\,(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ を満たすならば，

$$f\left(\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}\right) \geqq \frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n}$$

であることを証明せよ。（滋賀医大・改）

解　(1)　$pq = 0$ または $c = d$ のときは，等号が成り立つ。$pq \fallingdotseq 0,\ c < d$ のときは $c < pc + qd < d$ で平均値の定理により

$$\frac{f(pc + qd) - f(c)}{pc + qd - c} = f'(u), \quad (c < u < pc + qd),$$

$$\frac{f(d) - f(pc + qd)}{d - (pc + qd)} = f'(v), \quad (pc + qd < v < d)$$

となる u, v が存在して，$u < v$ である。$f'(x)$ が減少関数であることを用いると $f'(u) > f'(v)$
よって

$$\frac{f(pc + qd) - f(c)}{pc + qd - c} > \frac{f(d) - f(pc + qd)}{d - (pc + qd)}$$

$$\frac{f(pc + qd) - f(c)}{q(d - c)} > \frac{f(d) - f(pc + qd)}{p(d - c)}$$

$$p\{f(pc + qd) - f(c)\} > q\{f(d) - f(pc + qd)\}$$

$(p + q)f(pc + qd) > pf(c) + qf(d)$ から $f(pc + qd) > pf(c) + qf(d)$

(2)　$n = 1$ のときは，明らかに等号が成り立つ。（$n = 2$ のときは，問題中に含まれている。）

$n = k$ のとき成り立つと仮定する。$n = k + 1$ のとき，$a < c_i < b\,(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k + 1)$ に対して

$$p = \frac{1}{k + 1},\ q = \frac{k}{k + 1},\ c = c_1,\ d = \frac{c_2 + c_3 + \cdots + c_{k+1}}{k}$$

とすると，$a<d<b$ で仮定から　$f(d) \geqq \dfrac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_k)}{k}$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} f\left(\frac{c_1+c_2+\cdots+c_k+c_{k+1}}{k+1}\right) &= f\left(\frac{1}{k+1}c+\frac{k}{k+1}d\right) \\ &\geqq \frac{1}{k+1}f(c)+\frac{k}{k+1}f(d) \\ &\geqq \frac{1}{k+1}f(c)+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{f(c_2)+f(c_3)+\cdots+f(c_{k+1})}{k} \\ &\geqq \frac{f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\cdots+f(c_{k+1})}{k+1} \end{aligned}$$

よって

$$f\left(\frac{c_1+c_2+\cdots+c_k+c_{k+1}}{k+1}\right) \geqq \frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_k)+f(c_{k+1})}{k+1}$$

$n=k+1$ のときも成り立つ。 □

(※)　$f(x)=\log x \quad (x>0)$ とおくと $f'(x)=\dfrac{1}{x}, f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ が成り立つから，(2) より
n が自然数のとき $c_1, c_2, \ldots, c_n$ が $c_i>0\,(i=1, 2, \ldots, n)$ を満たすならば，

$$f\left(\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}\right) \geqq \frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n}$$

が成り立つから

$$\log\left(\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}\right) \geqq \frac{\log c_1+\log c_2+\cdots+\log c_n}{n} = \log\sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}$$

すなわち　$\dfrac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} \geqq \sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}$　が成り立つ。

(※)　(2) と同様に次のことが証明できる。（次の (3) の不等式で $p_i=1\,(i=1, 2, \ldots, n)$ とおいたものが (2) の不等式になる。）

(3)　一般に n が自然数のとき $p_i>0\,(i=1, 2, \ldots, n)$，$c_1, c_2, \ldots, c_n$ が $a<c_i<b\,(i=1, 2, \ldots, n)$ を満たすならば，

$$f\left(\frac{p_1c_1+p_2c_2+\cdots+p_nc_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right) \geqq \frac{p_1f(c_1)+p_2f(c_2)+\cdots+p_nf(c_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

が成り立つ。

$n=1$ のときは，明らかに等号が成り立つ。

$n=k$ のとき，成り立つと仮定する。$n=k+1$ のとき，$a<c_i<b\,(i=1, 2, 3, \ldots, k+1)$ に対して

$$p=\frac{p_1+p_2+\cdots+p_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}},\ q=\frac{p_{k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}},$$

$$c=\frac{p_1c_1+p_2c_2+\cdots+p_kc_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k},\ d=c_{k+1}$$

とおく。すると，不等式 $ap_i<p_ic_i<bp_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k)$ の辺々を加えると

$$a(p_1+p_2+\cdots+p_k)<p_1c_1+p_2c_2+\cdots+p_kc_k<b(p_1+p_2+\cdots+p_k)$$

$$\therefore\ \ a<\frac{p_1c_1+p_2c_2+\cdots+p_kc_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}<b$$

よって $a<c<b$ を満たす。

次に仮定から　$f(c)\geqq\dfrac{p_1f(c_1)+p_2f(c_2)+\cdots+p_kf(c_k)}{p_1+p_2+\cdots+p_k}$　が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{p_1c_1+p_2c_2+\cdots+p_kc_k+p_{k+1}c_{k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}\right)\\
&=f\left(\frac{p_1+p_2+\cdots+p_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}\ \frac{p_1c_1+p_2c_2+\cdots+p_kc_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}+\frac{p_{k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}\ c_{k+1}\right)\\
&=f\left(\frac{p_1+p_2+\cdots+p_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}\ c+\frac{p_{k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}\ d\right)\\
&=f(pc+qd)\\
&\geqq pf(c)+qf(d)\\
&=\frac{p_1+p_2+\cdots+p_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}f(c)+\frac{p_{k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}f(d)\\
&\geqq\frac{p_1+p_2+\cdots+p_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}\cdot\frac{p_1f(c_1)+p_2f(c_2)+\cdots+p_kf(c_k)}{p_1+p_2+\cdots+p_k}\\
&\qquad\qquad+\frac{p_{k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}f(c_{k+1})\qquad(n=k\ \text{のときの仮定})\\
&=\frac{p_1f(c_1)+p_2f(c_2)+\cdots+p_kf(c_k)+p_{k+1}f(c_{k+1})}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}
\end{aligned}$$

よって

$$f\left(\frac{p_1c_1+p_2c_2+\cdots+p_kc_k+p_{k+1}c_{k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}\right)\geqq\frac{p_1f(c_1)+p_2f(c_2)+\cdots+p_kf(c_k)+p_{k+1}f(c_{k+1})}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}$$

より $n=k+1$ のときも成り立つ。 ■

元の問題は次のようになっている。

例題 24　$f(x)$ を $a < x < b$ で第 2 次導関数が負であるような関数とするとき，次の各問に答えよ。

(1)　$a < c < b,\ a < d < b,\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ p + q = 1$ のとき，

$f(pc + qd) \geqq pf(c) + qf(d)$ を証明せよ。

(2)　(1) において $p = \dfrac{1}{3},\ c = c_1,\ d = \dfrac{c_2 + c_3}{2},\ a < c_i < b\,(i = 1,\ 2,\ 3)$ とすると簡単な計算により

$f\left(\dfrac{c_1 + c_2 + c_3}{3}\right) \geqq \dfrac{f(c_1) + f(c_2) + f(c_3)}{3}$ が得られることに注意して（証明不要），

n が自然数のとき $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ が $a < c_i < b\,(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ を満たすならば

$f\left(\dfrac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}\right) \geqq \dfrac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n}$ であることを証明せよ。

（S57[1982]　滋賀医大）

例題 25　ある開区間 D で与えられた関数 $f(x)$ は，2 階微分可能で，第 2 次導関数 $f''(x)$ は連続で，更に $f''(x) < 0$ と仮定する。以下の問いに答えよ。

(1)　$a_1 < a_2 < a_3$ を満たす D の a_1, a_2, a_3 に対して

$$\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} > \frac{f(a_3) - f(a_2)}{a_3 - a_2}$$

を示せ。

(2)　x_1, x_2 を D の実数とする。$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす α に対して

$$f\left(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2\right) \geqq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

を示せ。

(3)　x_1, x_2, x_3 を D の実数とする。$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqq 0$ 及び $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ を満たす $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に対して

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3\right) \geqq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3)$$

を示せ。

(4)　$D = (0, \infty)$ とする。上の議論を用いて，D の x_1, x_2, x_3 に対して不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geqq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

を示せ。

（2014 横浜市立大）

解 (1) $f(x)$ は D で微分可能だから，平均値の定理により

$$\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}=f'(c_1) \quad (a_1<c_1<a_2)$$

$$\frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2}=f'(c_2) \quad (a_2<c_2<a_3)$$

となる c_1, c_2 が存在して，$c_1<c_2$ である。$f''(x)<0$ より $f'(x)$ が減少関数であることを用いると $f'(c_1)>f'(c_2)$

よって

$$\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}>\frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2}$$

(2) $x_1, x_2 \in D$ で，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす α に対して

$$f\left(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\right) \geqq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2) \qquad \cdots\cdots ①$$

を示す。

$\alpha=0,1$ または $x_1=x_2$ のときは，①で等号が成り立つ。

$0<\alpha<1$，$x_1<x_2$ と仮定しも一般性を失わない。$x_1<\alpha x_1+(1-\alpha)x_2<x_2$ が成り立つから，(1) の不等式で

$$a_1=x_1, a_2=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, a_3=x_2$$

とおくと

$$\frac{f(a_2)-f(x_1)}{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2-x_1}>\frac{f(x_2)-f(a_2)}{x_2-\alpha x_1-(1-\alpha)x_2}$$

$$\frac{f(a_2)-f(x_1)}{(1-\alpha)(x_2-x_1)}>\frac{f(x_2)-f(a_2)}{\alpha(x_2-x_1)}$$

$x_2-x_1>0, 0<\alpha<1$ であるから

$$\alpha\left[f(a_2)-f(x_1)\right]>(1-\alpha)\left[f(x_2)-f(a_2)\right]$$

よって

$$f(a_2)>\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

すなわち

$$f\left(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\right)>\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

(3) (省略)

(4) (省略) ■

例題 26　$\log x$ を自然対数，n を 2 以上の自然数として，次の各不等式を証明せよ。ただし，等号成立条件には言及しなくてよい。

(1)　$0 < a < b,\ a \leqq x \leqq b$ のとき，$\log x \geqq \log a + \dfrac{x-a}{b-a}(\log b - \log a)$

(2)　$a_1, a_2 > 0$ とし，$p_1, p_2 \geqq 0$, $p_1 + p_2 = 1$ のとき，

$\log(p_1a_1 + p_2a_2) \geqq p_1 \log a_1 + p_2 \log a_2$

(3)　$a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ とし，$p_1, p_2, \ldots, p_n \geqq 0, p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ のとき，

$$\log \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log a_i$$

(4)　$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n > 0$ のとき，$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

（2006 滋賀医大・改）

解　(1)　$f(x) = \log x - \log a - \dfrac{x-a}{b-a}(\log b - \log a)$ $(a \leqq x \leqq b)$ とおくと

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\log b - \log a}{b-a}$

$\log x$ に対して平均値の定理を適用すると　$\dfrac{\log b - \log a}{b-a} = \dfrac{1}{c}$，$(a < c < b)$ となる c が存在する。

これを使うと $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{c} = \dfrac{c-x}{cx}$ となる 。

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$f'(x)$		$+$	0	-	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

$f(x)$ の増減表から　$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq 0$

すなわち，$\log x \geqq \log a + \dfrac{x-a}{b-a}(\log b - \log a)$

(2)　$p_1p_2 = 0$ または $a_1 = a_2$ のときは，等号が成り立つ。

$p_1p_2 \fallingdotseq 0,\ a_1 < a_2$ のときは

$$a_1 = (p_1 + p_2)a_1 < p_1a_1 + p_2a_2 < (p_1 + p_2)a_2 = a_2$$

で，(1) の不等式において $a = a_1,\ b = a_2,\ x = p_1a_1 + p_2a_2$ とおくと $\dfrac{x-a}{b-a} = p_2$ だから

$$\log(p_1a_1 + p_2a_2) \geqq \log a_1 + p_2(\log a_2 - \log a_1) = p_1 \log a_1 + p_2 \log a_2$$

よって　$\log(p_1a_1 + p_2a_2) \geqq p_1 \log a_1 + p_2 \log a_2$

（$p_1p_2 \fallingdotseq 0,\ a_1 > a_2$ のときも同様である。）

(3)　$n = 2$ のときは，(2) より成り立つ。

$n = k\,(k \geqq 2)$ のとき，成り立つと仮定する。

$n = k+1$ のとき，$a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} > 0$ とし，$p_1, p_2, \ldots, p_{k+1} \geqq 0,\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{k+1} = 1$ のとき

$$\log \sum_{i=1}^{k+1} p_i a_i \geqq \sum_{i=1}^{k+1} p_i \log a_i \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示す。

$p_{k+1} = 1$ のときは $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = 0$ で，① において等号が成り立つ。

$p_{k+1} < 1$ のときは $p_1 + p_2 + \cdots + p_{k+1} = 1$ から $\dfrac{p_1}{1-p_{k+1}} + \dfrac{p_2}{1-p_{k+1}} + \cdots + \dfrac{p_k}{1-p_{k+1}} = 1$

したがって，仮定から

$$\log \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{1-p_{k+1}} a_i \geqq \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{1-p_{k+1}} \log a_i \qquad \cdots\cdots ②$$

(2) と②から

$$\begin{aligned}
\log \sum_{i=1}^{k+1} p_i a_i &= \log \left((1-p_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{1-p_{k+1}} a_i + p_{k+1} a_{k+1} \right) \\
&\geqq (1-p_{k+1}) \log \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{1-p_{k+1}} a_i \right) + p_{k+1} \log a_{k+1} \\
&\geqq (1-p_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{1-p_{k+1}} \log a_i + p_{k+1} \log a_{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} p_i \log a_i
\end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも成り立つ。

(4)　$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n > 0$ のとき，(3) で $p_i = \dfrac{1}{n}\ (1 \leqq i \leqq n)$ とおくと

$$\log \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geqq \frac{1}{n}(\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n)$$

すなわち

$$\log \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geqq \log \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

となるので

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

が成り立つ。 ■

例題 27　関数 $f(x)$ が $0 \leqq t \leqq 1$ に対して，$tf(x)+(1-t)f(y) \geqq f\{tx+(1-t)y\}$ を満たすとき，

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geqq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \quad (n=2,\,3,\,\ldots\ldots)$$

であることを示せ。これを使って，a を正の定数とするとき，

$$\frac{a^{x_1}+a^{x_2}+\cdots+a^{x_n}}{n} \geqq a^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} \quad (n=2,\,3,\,\ldots\ldots)$$

が成り立つことを示せ。　　　　（S 54[1979]　武蔵工大）

[解説]　$n=2$ のときは，$x=x_1,\,y=x_2,\,t=\frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2) \geqq f\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)$$

$$\therefore\quad \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$n=4$ のときは

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{f(x_3)+f(x_4)}{2}\right)\\
&\geqq \frac{1}{2}f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\\
&\geqq f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)\\
&= f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)
\end{aligned}$$

この調子でやっていけば，n が 2 の累乗 2^k のときは，数学的帰納法で証明できる。
n が 2 の累乗でないときは, $2^{k-1}<n<2^k$ となる k をとり $m=2^k$ とおく。そして $x_{n+1},\,\ldots,\,x_m$ という $m-n$ 個の数を
$x_{n+1}=\cdots=x_m=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ ($=A$ とおく) として定めてやると $m=2^k$ であるから，$x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_m$ については

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_m)}{m} \geqq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}\right)$$

ところで，

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}\right) &= f\left(\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(x_{n+1}+\cdots+x_m)}{m}\right)\\
&= f\left(\frac{nA+(m-n)A}{m}\right) = f(A)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_m)}{m} &= \frac{f(x_1)+f(x_2)\cdots+f(x_n)+f(x_{n+1})+\cdots+f(x_m)}{m}\\
&= \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{m}+(m-n)\frac{f(A)}{m}\\
&= \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{m}+f(A)-\frac{nf(A)}{m}
\end{aligned}
$$

より

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{m}+f(A)-\frac{nf(A)}{m} \geqq f(A)$$

よって

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \geqq nf(A)$$

から

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geqq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \qquad \Box$$

証明すべき最初の不等式は，例題 23 で不等号の向きが逆の場合である。

解　数学的帰納法により

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geqq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(*)$$

であることを証明する。

$n=2$ のときは，$x=x_1$, $y=x_2$, $t=\frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2) \geqq f\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)$$

$$\therefore \quad \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(*)$$

$n=k$ のとき成り立つと仮定する。$n=k+1$ のとき

$$t=\frac{1}{k+1},\ 1-t=\frac{k}{k+1},\ x=x_1,\ y=\frac{x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}}{k}$$

とすると，仮定から　$f(y) \leqq \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)}{k}$ が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right) &= f\left(\frac{1}{k+1}x+\frac{k}{k+1}y\right)\\
&\leqq \frac{1}{k+1}f(x)+\frac{k}{k+1}f(y)\\
&\leqq \frac{1}{k+1}f(x)+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_{k+1})}{k}\\
&\leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_{k+1})}{k+1}
\end{aligned}
$$

よって

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right) \leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})}{k+1}$$

$n=k+1$ のときも成り立つ。

以上のことから，2 以上の自然数に対して $(*)$ は成り立つ。

次に $y=a^x(a \fallingdotseq 1)$ について $y'=a^x\log a,\ y''=a^x(\log x)^2>0$ であるから，この関数のグラフは下に凸である。したがって $f(x)=a^x$ について

$0 \leqq t \leqq 1$ に対して，$tf(x)+(1-t)f(y) \geqq f\{tx+(1-t)y\}$ が成り立つ。（**例題 23(1)** 参照。）

よって

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geqq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

が成り立つから

$$\frac{a^{x_1}+a^{x_2}+\cdots+a^{x_n}}{n} \geqq a^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} \quad (n=2,\,3,\,\cdots\cdots)$$

が成り立つ。($a=1$ のときは明らかに等号が成り立つ。) ■

(※)　$a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n>0$ のとき，$a=e, x_i=\log a_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq e^{\frac{\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n}{n}} = e^{\log\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ (n=2,\,3,\,\ldots\ldots)$$

から　$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$　が成り立つ。

例題 28　関数 $f(x)$ がつねに $f''(x)>0$ をみたしているとする。

(1)　p を定数としたとき，すべての x に対して不等式
$f(x) \geqq f(p)+f'(p)(x-p)$ が成立することを示せ。

(2)　n 個の実数 $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$ に対して $p=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ とおくと
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(x_k) \geqq nf(p)$ が成立することを示せ。

(3)　n 個の実数 $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$ に対して
$\dfrac{1}{n}(e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots\cdots+e^{x_n}) \geqq e^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$ を示し相加・相乗平均の不等式：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ (a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n\text{は正の数})$$

を導け。（1995　京都教育大）

解 (1) $F(x)=f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)$ とおくと

$$F'(x)=f'(x)-f'(p),\ F''(x)=f''(x)>0$$

したがって $F'(x)$ は増加関数である。また，$F'(p)=0$ だから，$F'(x)$ の符号は $x=p$ の前後で負から正にかわる。よって $F(x)$ の最小値は $F(p)=0$ となるから $F(p)\geqq 0$ すなわち $f(x)\geqq f(p)+f'(p)(x-p)$ が成立する。等号は $x=p$ のとき成り立つ。

x	$\cdots$	p	$\cdots$
$F''(x)$	$+$	$+$	$+$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	極小	↗

(2) (1) の不等式の x を x_k とおきかえると

$f(x_k)\geqq f(p)+f'(p)(x_k-p)$ （等号は $x_k=p$ のとき成り立つ。）

$$\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\geqq nf(p)+f'(p)\left\{\sum_{k=1}^{n}x_k-np\right\}=nf(p) \qquad \left(\because\ np=\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\geqq nf(p)$$

が成立する。等号は $x_1=x_2=\cdots=p$ のとき成り立つ。

(3) $f(x)=e^x$ とおくと $f''(x)=e^x>0$ だから (2) より

$$e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots\cdots+e^{x_n}\geqq ne^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$$

よって

$$\frac{1}{n}(e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots\cdots+e^{x_n})\geqq e^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$$

ここで，n 個の正の数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ に対して $x_1=\log a_1, x_2=\log a_2,\ldots,x_n=\log a_n$ とおくと

$$\frac{1}{n}(e^{\log a_1}+e^{\log a_2}+\cdots\cdots+e^{\log a_n})\geqq e^{\frac{1}{n}(\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n)}=e^{\log\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

$$\therefore\quad \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

（ただし，等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき成り立つ。） ■