ガンマ関数を含む不等式 の証明

柳田　五夫

1　はじめに

第 30 回北海道高等学校数学コンテスト（H24.1.10）の問題 4 にガンマ関数 $\Gamma(x)$ に関係する問題が出題された．

$x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ で条件

(i)　$f(x) > 0,\ f(1) = 1$

(ii)　$f(x+1) = xf(x)$

(iii)　$2 \leqq x < y$ ならば $f(x) < f(y)$

を満たすものについての問題である．小問 (3) で，条件 (i) から (iii) に加えて，次の条件

(iv)　$\dfrac{f(x+1/2)}{f(x)} > \sqrt{x - \dfrac{1}{4}}\quad (x \geqq 2)$

を仮定している．小問 (4) で，さらに次の条件

(v)　$\dfrac{f(x+1/3)}{f(x)} > \sqrt[3]{x - \dfrac{1}{3}}\quad (x \geqq 2)$

を仮定している．講評では，条件 (iv)，(v) が正しいか間違いか不明ですとありましたので，$f(x)$ がガンマ関数のときに成り立つことを示し，条件 (iv)，(v) を追加しても誤りではないことを示したい．すなわち，ガンマ関数 $\Gamma(x)$ に対して

(iv′)　$\dfrac{\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x)} > \sqrt{x - \dfrac{1}{4}}\quad (x \geqq 1/4)$,

(v′)　$\dfrac{\Gamma(x+1/3)}{\Gamma(x)} > \sqrt[3]{x - \dfrac{1}{3}}\quad (x \geqq 1/3)$

が成り立つことを示す．

さらに一般化して，2 以上の自然数 n について

$$\frac{\Gamma(x+1/n)}{\Gamma(x)} > \sqrt[n]{x - \frac{n-1}{2n}} \quad \left(x \geqq \frac{n-1}{2n}\right)$$

が成り立つことを示す．

[注 1] 一意性定理

$G:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を対数的凸で $G(x+1)=xG(x)$ かつ $G(1)=1$ を満たす関数とすると，$x>0$ に対して $G(x)=\Gamma(x)$ となる． （参考文献 [3] P.95）

から，条件 (i),(ii) に

f が $(0,\infty)$ 上で対数的凸である

という条件を付け加えれば，f はガンマ関数となる．

2 ガンマ関数 $\Gamma(x)$ の性質

簡単に不等式の証明に必要な定義，性質を簡単にまとめておきたい．詳しくは参考文献 3 等を参照されたい．

(D1) 区間 I で定義された関数 $f:I\to\mathbb{R}$ が I で凸関数であるとは

$\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0, \alpha+\beta=1$ を満足する任意の 2 数 α,β と任意の 2 数 $x,y\in I$ に対して

$$f(\alpha x+\beta y) \leqq \alpha f(x)+\beta f(y)$$

が成り立つときをいう．

(D2) オイラーのガンマ関数は $x>0$ に対して，

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

によって定義される．

(P1) 関数 Γ は $(0,\infty)$ 上で対数的凸である． （参考文献 [3] P.89）

(D3) I を開区間とする．関数 $f:I\to\mathbb{R}$ が対数的凸であるとは，

全ての $x\in I$ に対して $f(x)>0$,

$\log f$ 　が凸

なる 2 つの条件をみたすときをいう．

(D4) $\dfrac{d}{dx}(\log\Gamma(x)) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ はディ Γ (digamma) 関数またはプサイ (psi) 関数と呼ばれている．すなわち

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}(\log\Gamma(x))$$

で定義される．

(P2) $\psi(x) = -\gamma - \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right)$ が成り立つ．ただし，γ はオイラーの定数とする． （参考文献 [3] P.90）

(P3) $\dfrac{d^m}{dx^m}\psi(x) = (-1)^{m+1}m!\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{m+1}}\quad(m \geqq 1)$ が成り立つ．

（参考文献 [3] P.92）

(P4) $x > 0$ に対して $-\dfrac{1}{x} < \psi(x) - \log x < -\dfrac{1}{2x}$ が成り立つ．

（参考文献 [3] P.105）

(P5) $x > 0$ に対して $\log\Gamma(x) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\log x - x + \mu(x)$ が成り立つ．

（参考文献 [3] P.104）

(P6) $0 < \mu(x) \leqq \dfrac{1}{12x},\quad x > 0$ が成り立つ． （参考文献 [3] P.103）

[注 2] $f : I \to \mathbb{R}$ が連続関数であるとする．このとき，f が凸関数であることと，任意の 2 数 $x, y \in I$ に対して

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{$*$}$$

が成り立つことは同値である．

便宜上，$(*)$ が成り立つとき，f を中点凸関数と呼ぶことにする．

安田　富久一先生は，「対数凸関数の紹介 数学コンテスト問題との関係」において，条件 (iv)，(v) のかわりに f の対数的中点凸を仮定してコンテストの不等式と類似の不等式を得ている．

3 $\dfrac{\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x)} > \sqrt{x-\dfrac{1}{4}} \quad \left(x \geqq \dfrac{1}{4}\right)$ の証明

一般化して，2 以上の自然数 n について

$$\frac{\Gamma(x+1/n)}{\Gamma(x)} > \sqrt[n]{x-\frac{n-1}{2n}} \quad \left(x \geqq \frac{n-1}{2n}\right)$$

が成り立つことを示せば

$$\frac{\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x)} > \sqrt{x-\frac{1}{4}} \quad \left(x \geqq \frac{1}{4}\right),$$

$$\frac{\Gamma(x+1/3)}{\Gamma(x)} > \sqrt[3]{x-\frac{1}{3}} \qquad \left(x \geqq \frac{1}{3}\right)$$

は証明されたことになるが，まず手始めに $n=2$ のときの証明を試みる．

$$F(x) = \log \Gamma(x+1/2) - \log \Gamma(x) - \frac{1}{2}\log\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

とおくと，$x > \dfrac{1}{4}$ のとき

$$F'(x) = \psi(x+1/2) - \psi(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1/4},$$

$$F''(x) = \psi'(x+1/2) - \psi'(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1/4)^2}$$

となる．(P3) から

$$\frac{d^m}{dx^m}\psi(x) = (-1)^{m+1} m! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^{m+1}} \quad (m \geqq 1)$$

が成り立つので，$m=1$ とおくと

$$\psi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

また

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(x+k)^2} - \frac{1}{(x+k+1)^2}\right]$$

が成り立つので，これらを使うと

$$
\begin{aligned}
F''(x) &= \psi'(x+1/2) - \psi'(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1/4)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k+1/2)^2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(x+k-1/4)^2} - \frac{1}{(x+k+3/4)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{G(x+k)}{(x+k+1/2)^2(x+k)^2(x+k-1/4)^2(x+k+3/4)^2}\,.
\end{aligned}
$$

$t = x+k \quad \left(x > \dfrac{1}{4}\right)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
G(t) &= 2t^2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2 \\
&\quad + \left(t+\frac{3}{4}\right)^2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 t^2 - \left(t-\frac{1}{4}\right)^2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 t^2 \\
&= -\left(2t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{4}\right)^2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(2t+\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 t^2 \\
&= \left(2t+\frac{1}{2}\right)\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 t^2 - \left(t-\frac{1}{4}\right)^2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2\right] \\
&= \frac{3}{512}\,(4t+1)(32t^2+16t-3)\,.
\end{aligned}
$$

$x > \dfrac{1}{4}$ より $t = x+k \geqq x > \dfrac{1}{4}$. よって $4t > 1$ が成り立つから

$$32t^2+16t-3 = 32t^2+4(4t-1)+1 > 0\,.$$

以上のことから，$x > \dfrac{1}{4}$ のとき $F''(x) > 0$.

したがって $x \geqq \dfrac{1}{4}$ のとき $F'(x)$ は増加関数であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} F'(x)$ を調べる．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\psi(x)$ は有限確定値にならないから，工夫が必要となる．(P4) より

$x > 0$ のとき $-\dfrac{1}{x} < \psi(x) - \log x < -\dfrac{1}{2x}$ が成り立つことから

$$\lim_{x\to\infty}\bigl[\psi(x) - \log x\bigr] = 0$$

となるので，$\psi(x)-\log x$，　$\psi(x+1/2)-\log(x+1/2)$ を作りだす．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}F'(x)&=\lim_{x\to\infty}\left[\psi\left(x+\frac{1}{2}\right)-\psi(x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1/4}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\psi\left(x+\frac{1}{2}\right)-\log\left(x+\frac{1}{2}\right)+\log x-\psi(x)\right.\\&\qquad\left.+\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-\log x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1/4}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\psi\left(x+\frac{1}{2}\right)-\log\left(x+\frac{1}{2}\right)+\log x-\psi(x)\right.\\&\qquad\left.+\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1/4}\right]\\&=0\end{aligned}$$

より $F'(x)<0$．

したがって $x\geqq\dfrac{1}{4}$ のとき $F(x)$ は減少関数であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)=0$ を示せばよい．

(P5) より

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x)&=\log\sqrt{2\pi}-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+\mu(x)\,,\\\log\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)&=\log\sqrt{2\pi}-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\log\left(x+\frac{1}{2}\right)\\&\qquad+\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

が成り立つから，差をとると

$$\begin{aligned}\log\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)-\log\Gamma(x)&=-\frac{1}{2}+x\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x\\&\qquad+\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)-\mu(x).\end{aligned}$$

これを使うと，$F(x)$ は

$$\begin{aligned}F(x)&=-\frac{1}{2}+x\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-\frac{1}{2}\log\left(x-\frac{1}{4}\right)\\&\qquad+\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)-\mu(x)\\&=-\frac{1}{2}+x\left[\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-\log x\right]+\frac{1}{2}\left[\log x-\log\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]\\&\qquad+\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)-\mu(x)\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{x-1/4}\right)+\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)-\mu(x)\end{aligned}$$

と変形できる．

ここで

$$\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=\log e\,,\ \lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{x}{x-1/4}\right)=\log 1=0\,.$$

また，(P6) より

$x>0$ のとき $0<\mu(x)\leqq\dfrac{1}{12x}$ が成り立つから

$$\lim_{x\to\infty}\mu(x)=0\,,\quad \lim_{x\to\infty}\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)=0\,.$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log e=0$ となるから $F(x)>0$ すなわち

$$\frac{\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x)}>\sqrt{x-\frac{1}{4}}\quad\left(x\geqq\frac{1}{4}\right)$$

が証明できた．

$$\frac{\Gamma(x+1/3)}{\Gamma(x)}>\sqrt[3]{x-\frac{1}{3}}\qquad\left(x\geqq\frac{1}{3}\right)$$

も同様に証明できる．次のセクションで一般の場合を証明することで，この不等式の証明は省略する．

4 $\dfrac{\mathit{\Gamma}(x+1/n)}{\mathit{\Gamma}(x)} > \sqrt[n]{x-\dfrac{n-1}{2n}} \quad \left(x \geqq \dfrac{n-1}{2n}\right)$ の証明

2 以上の自然数 n について

$$\frac{\mathit{\Gamma}(x+1/n)}{\mathit{\Gamma}(x)} > \sqrt[n]{x-\frac{n-1}{2n}} \quad \left(x \geqq \frac{n-1}{2n}\right)$$

が成り立つ.

[証明] $p=\dfrac{2n}{n-1}$ とし，$F(x)=\log\mathit{\Gamma}(x+1/n)-\log\mathit{\Gamma}(x)-\dfrac{1}{n}\log\left(x-\dfrac{1}{p}\right)$ とおくと，$x>\dfrac{n-1}{2n}=\dfrac{1}{p}$ のとき

$$F'(x)=\psi(x+1/n)-\psi(x)-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x-1/p}\,,$$

$$\begin{aligned}
F''(x)&=\psi'(x+1/n)-\psi'(x)+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(x-1/p)^2}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k+1/n)^2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(x+k-1/p)^2}-\frac{1}{(x+k+1-1/p)^2}\right]\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{G(x+k)}{(x+k+1/n)^2(x+k)^2(x+k-1/p)^2(x+k+1-1/p)^2}\,.
\end{aligned}$$

$t=x+k \quad \left(x>\dfrac{n-1}{2n}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}
G(t)&=nt^2\left(t-\frac{1}{p}\right)^2\left(t+1-\frac{1}{p}\right)^2-n\left(t+\frac{1}{n}\right)^2\left(t-\frac{1}{p}\right)^2\left(t+1-\frac{1}{p}\right)^2\\
&\quad+\left(t+1-\frac{1}{p}\right)^2\left(t+\frac{1}{n}\right)^2t^2-\left(t-\frac{1}{p}\right)^2\left(t+\frac{1}{n}\right)^2t^2\\
&=-\left(2t+\frac{1}{n}\right)\left(t-\frac{1}{p}\right)^2\left(t+1-\frac{1}{p}\right)^2+\left(2t+1-\frac{2}{p}\right)\left(t+\frac{1}{n}\right)^2t^2\\
&=\left(2t+\frac{1}{n}\right)\left[\left(t+\frac{1}{n}\right)^2t^2-\left(t-\frac{1}{p}\right)^2\left(t+1-\frac{1}{p}\right)^2\right]\\
&=\frac{(n+1)(n-1)}{16n^5}(2nt+1)(8n^2t^2+8nt-n^2+1)\,.
\end{aligned}$$

$x > \dfrac{n-1}{2n}$ より $t = x + k \geqq x > \dfrac{n-1}{2n}$ が成り立つから $2nt + 1 > n$.

よって

$$8n^2t^2 + 8nt - n^2 + 1 = 2(2nt+1)^2 - n^2 - 1 > 2n^2 - n^2 - 1 = n^2 - 1 > 0.$$

以上のことから，$x > \dfrac{n-1}{2n} = \dfrac{1}{p}$ のとき $F''(x) > 0$.

$x \geqq \dfrac{n-1}{2n} = \dfrac{1}{p}$ のとき $F'(x)$ は増加関数である.

$x > 0$ のとき $-\dfrac{1}{x} < \psi(x) - \log x < -\dfrac{1}{2x}$ が成り立つことから

$$\lim_{x\to\infty} [\psi(x) - \log x] = 0.$$

これを使うと

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F'(x) &= \lim_{x\to\infty} \left[\psi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \psi(n) - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x - 1/p}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty} \left[\psi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \log\left(x + \frac{1}{n}\right) + \log x - \psi(x)\right. \\
&\qquad \left. + \log\left(x + \frac{1}{n}\right) - \log x - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x - 1/p}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty} \left[\psi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \log\left(x + \frac{1}{n}\right) + \log x - \psi(x)\right. \\
&\qquad \left. + \log\left(1 + \frac{1}{nx}\right) - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x - 1/p}\right] = 0
\end{aligned}$$

より $F'(x) < 0$ となるから，$x \geqq \dfrac{n-1}{2n} = \dfrac{1}{p}$ のとき $F(x)$ は減少関数である.

$$\begin{aligned}
\log\Gamma(x) &= \log\sqrt{2\pi} - x + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + \mu(x), \\
\log\Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \log\sqrt{2\pi} - \left(x + \frac{1}{n}\right) + \left(x + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\log\left(x + \frac{1}{n}\right) \\
&\qquad + \mu\left(x + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
\log\Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) - \log\Gamma(x) = -\frac{1}{n} + \left(x + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\log\left(x + \frac{1}{n}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x \\
+ \mu\left(x + \frac{1}{n}\right) - \mu(x).
\end{aligned}$$

これを使うと

$$
\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{1}{n} + \left(x + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\log\left(x + \frac{1}{n}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - \frac{1}{n}\log\left(x - \frac{1}{p}\right) \\
&\quad + \mu\left(x + \frac{1}{n}\right) - \mu(x) \\
&= -\frac{1}{n} + x\left[\log\left(x + \frac{1}{n}\right) - \log x\right] + \frac{1}{n}\left[\log\left(x + \frac{1}{n}\right) - \log\left(x - \frac{1}{p}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\log\left(x + \frac{1}{n}\right) - \log x\right] + \mu\left(x + \frac{1}{n}\right) - \mu(x) \\
&= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\log\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{nx} + \frac{1}{n}\log\left(\frac{x + 1/n}{x - 1/p}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{nx}\right) \\
&\quad + \mu\left(x + \frac{1}{n}\right) - \mu(x).
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\lim_{x\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{nx} = \log e\,,
$$

$$
\lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{x + 1/n}{x - 1/p}\right) = \log 1 = 0\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{nx}\right) = \log 1 = 0\,.
$$

また，$x > 0$ のとき $0 < \mu(x) \leqq \dfrac{1}{12x}$ が成り立つから

$$
\lim_{x\to\infty} \mu(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \mu\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0\,.
$$

したがって，$\lim_{x\to\infty} F(x) = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\log e = 0$ となるから $F(x) > 0.$ ■

参考文献

[1]　第 30 回北海道高等学校数学コンテスト（H24.1.10）の問題 4

[2]　安田　富久一，対数凸関数の紹介　数学コンテスト問題との関係

[3]　柳田　五夫，フーリエ級数・ガンマ関数

(佐野日本大学中等教育学校)