フーリエ級数・ガンマ関数

柳田 五夫

2011 年 8 月 22 日

概要

ここでは,
(1) ベルヌーイ多項式,
(2) オイラー・マクローリンの和公式,
(3) フーリエ級数,
(4) ガンマ関数
を用いて，初等解析学の“真珠”となる数式を扱う.

目次

1　ベルヌーイ多項式，ベルヌーイ数

1.1　ベルヌーイ多項式

ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ は

$$
\begin{array}{ll}
\text{(B0)} & B_0(x) = 1 \\
\text{(B1)} & B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \\
\text{(B2)} & \displaystyle\int_0^1 B_n(x)dx = 0
\end{array}
$$

で定義される．

ベルヌーイ数 はベルヌーイ多項式 を用いて

$$B_n = B_n(0) \quad (n \geqq 0) \tag{1.1}$$

で定義される．

(B1) と (1.1) から

$$B_n(x) = n\int_0^x B_{n-1}(t)dt + B_n \tag{1.2}$$

となり，(B0) と (1.2) から数学的帰納法を使えば

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{*1} B_k x^{n-k} \quad (n \geqq 1) \tag{1.3}$$

が成り立つ．

［証明］$n = 1$ のとき (1.2) から $B_1(x) = \displaystyle\int_0^x B_0(t)dt + B_1 = x + B_1$.

(B2) から

$$0 = \int_0^1 B_1(x)dx = \int_0^1 (x + B_1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + B_1 x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + B_1.$$

よって

$$B_1 = -\frac{1}{2},\ B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

から

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B_k x^{1-k} = \binom{1}{0} B_0 x^1 + \binom{1}{1} B_1 x^0 = x - \frac{1}{2} = B_1(x).$$

すなわち，(1.3) は成り立つ．

[*1] ${}_nC_k = \binom{n}{k}$

n のとき (1.3) が成り立つと仮定すると (1.2) から

$$\begin{aligned}
B_{n+1}(x) &= (n+1)\int_0^x B_n(t)dt + B_{n+1} \\
&= (n+1)\int_0^x \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k t^{n-k} + B_{n+1} \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\left[\frac{t^{n-k+1}}{n-k+1}\right]_0^x + B_{n+1} \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\frac{1}{n-k+1}x^{n-k+1} + B_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

ところで

$$(n+1)\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n-k+1} = (n+1)\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{1}{n-k+1} = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = \binom{n+1}{k}$$

が成り立つことを利用すると

$$\begin{aligned}
B_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}B_k\cdot\frac{1}{n-k+1}x^{n-k+1} + B_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k x^{n-k+1} + B_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}B_k x^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

$n+1$ のときも (1.3) が成り立つ． □

（B2）から，$n \geqq 2$ のとき

$$0 = \int_0^1 B_{n-1}(x)dx = [B_n(x)]_0^1 = B_n(1) - B_n(0)\,.$$

したがって

$$B_n(1) = B_n(0) = B_n \quad (n \geqq 2)\,. \tag{1.4}$$

(1.3) で $x=1$ とおき，(1.4) を使うと

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k \quad (n \geqq 2) \tag{1.5}$$

が成り立つ．

(1.5) を使うと $B_1 = -\dfrac{1}{2}, B_2 = \dfrac{1}{6}, B_3 = 0$ 等々求められる． ベルヌーイ数は具体的には

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}, \\
&B_9 = 0, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{11} = 0, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{13} = 0, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{15} = 0, B_{16} = -\frac{3617}{510}, \\
&B_{17} = 0, B_{18} = \frac{43867}{798}, \ldots
\end{aligned}$$

となっている．

ベルヌーイ数がわかっていれば，ベルヌーイ多項式は (1.2) を使って求められる．

$$
\begin{aligned}
&B_0(x)=1, B_1(x)=x-\frac{1}{2}=t\,, B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}\,, B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\,,\\
&B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}\,, B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x\,,\\
&B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}\,, B_7(x)=x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{6}x\,,\\
&B_8(x)=x^8-4x^7+\frac{14}{3}x^6-\frac{7}{3}x^4+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{30}\,,\\
&B_9(x)=x^9-\frac{9}{2}x^8+6x^7-\frac{21}{5}x^5+2x^3-\frac{3}{10}x\,,\\
&B_{10}(x)=x^{10}-5x^9+\frac{15}{2}x^8-7x^6+5x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{66}\,,\cdots
\end{aligned}
$$

となる．$y=B_{2n}(x)$ のグラフは直線 $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称で，$y=B_{2n+1}(x)$ のグラフは点 $\left(\dfrac{1}{2}\,,0\right)$ に関して対称となることが予測できる．まず，

$$B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x) \tag{1.6}$$

が成り立つことを示す．

［証明］［I］ $n=1$ のとき，$B_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$ だから，

$$B_1(1-x)=1-x-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)=-B_1(x)$$

となり，（1.6）は成り立つ．

［II］ $n=k$ のとき，（1.6）が成り立つと仮定すると $B_k(1-x)=(-1)^kB_k(x)$．

$n=k+1$ のときを考え，$f(x)=B_{k+1}(1-x)-(-1)^{k+1}B_{k+1}(x)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=B'_{k+1}(1-x)(-1)-(-1)^{k+1}B'_{k+1}(x)\\
&=(k+1)B_k(1-x)(-1)-(-1)^{k+1}(k+1)B_k(x)\\
&=-(k+1)\left[B_k(1-x)-(-1)^kB_k(x)\right]=0
\end{aligned}
$$

となるから， $f(x)=C$（定数） とおける．

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1 B_{k+1}(1-x)dx-(-1)^{k+1}\int_0^1 B_{k+1}(x)dx\\
&=\int_1^0 B_{k+1}(s)(-ds) \qquad (s=1-x)\\
&=\int_0^1 B_{k+1}(s)ds=0\,.
\end{aligned}
$$

また， $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 Cdx=C$ だから $C=0$．

したがって， $n=k+1$ のときも （1.6）は成り立つ． □

n が奇数のとき，$B_n(1-x) = -B_n(x)$ で $x=1$ とおいて $B_n(0) = -B_n(1)$ だから (1.4) を使うと，

$$B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0 \quad (n \geqq 1) \tag{1.7}$$

また， $B_{2n+1}(1-x) = -B_{2n+1}(x)$ で $x = \dfrac{1}{2}$ とおくと，

$$B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (n \geqq 0)\,. \tag{1.8}$$

n が偶数のとき (B1) と (1.8) より $B_n'\left(\dfrac{1}{2}\right) = nB_{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ だから，

$$B_{2n}'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (n \geqq 1) \tag{1.9}$$

が成り立つ．

1.2　ベルヌーイ多項式の間に成り立つ関係式

ベルヌーイ多項式の間に成り立つ関係式には次のものがある．

補題 1　自然数 n に対して

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \tag{1.10}$$

が成り立つ．

［証明］　[I]　$n=1$ のとき， $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ だから

$$B_1(x+1) - B_1(x) = x + \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1 = 1x^0$$

となり，(1.10) は成り立つ．

[II] $n=k$ のとき，(1.10) は成り立つと仮定すると，$B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$.

$n = k+1$ のときを考え，$f(x) = B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)$ とおくと，

$$f'(x) = B_{k+1}'(x+1) - B_{k+1}'(x) = (k+1)\{B_k(x+1) - B_k(x)\} = (k+1)kx^{k-1}\,.$$

から，$f(x) = \displaystyle\int (k+1)kx^{k-1}\,dx = (k+1)x^k + C$ となる．C の値は $x=0$ とおくと

$$B_{k+1}(1) - B_{k+1}(0) = C\,.$$

(1.4) より $B_n(1) = B_n(0) = B_n \quad (n \geqq 2)$ が成り立つから， $C=0$．したがって，$f(x) = B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x) = (k+1)x^k$ となり，$n=k+1$ のときも (1.10) は成り立つ．

以上のことより，(1.10) は成り立つ．　□

補題 2　自然数 $q(\geqq 2)$ に対して

$$B_n\left(\frac{x}{q}\right)+B_n\left(\frac{x+1}{q}\right)+B_n\left(\frac{x+2}{q}\right)+\cdots+B_n\left(\frac{x+q-1}{q}\right)=q^{1-n}B_n(x)\,(n\geqq 0) \tag{1.11}$$

が成り立つ．

［証明］ $n=0$ のとき，$B_0(x)=1$ だから明らかに（1.11）は成り立つ．

[I]　$n=1$ のとき，　$B_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$ より，

$$\sum_{k=0}^{q-1}B_1\left(\frac{x+k}{q}\right)=\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{x+k}{q}\right)=x+\frac{1}{q}\cdot\frac{q(q-1)}{2}-\frac{q}{2}=x-\frac{1}{2}=q^{1-1}B_1(x)$$

となり，（1.11）は成り立つ．

[II] n のとき（1.11）は成り立つと仮定する． $n+1$ のときを考えて，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{q-1}B_{n+1}\left(\frac{x+k}{q}\right)-q^{1-(1+n)}B_{n+1}(x)$$

とおく．

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\sum_{k=0}^{q-1}(n+1)B'_{n+1}\left(\frac{x+k}{q}\right)\frac{1}{q}-q^{-n}(n+1)B'_{n+1}(x)\\
&=\sum_{k=0}^{q-1}(n+1)B_n\left(\frac{x+k}{q}\right)\frac{1}{q}-q^{-n}(n+1)B_n(x)\\
&=\frac{n+1}{q}\left[\sum_{k=0}^{q-1}B_n\left(\frac{x+k}{q}\right)-q^{1-n}B_n(x)\right]=0
\end{aligned}$$

から，　$f(x)=C$ （定数）とおける．ところで，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx&=\sum_{k=0}^{q-1}\int_0^1 B_{n+1}\left(\frac{x+k}{q}\right)dx-q^{-n}\int_0^1 B_{n+1}(x)dx\\
&=\sum_{k=0}^{q-1}q\int_{\frac{k}{q}}^{\frac{k+1}{q}}B_{n+1}(s)ds\qquad\left(\frac{x+k}{q}=s\right)\\
&=q\int_0^1 B_{n+1}(s)ds=0\,.
\end{aligned}$$

また，$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 Cdx=C$ だから $C=0$．

よって，（1.11）が成り立つ．　□

（1.11）は $q=2$ のとき

$$B_n\left(\frac{x}{2}\right)+B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)=2^{1-n}B_n(x)\quad(n\geqq 0) \tag{1.12}$$

となる．(1.12) で $x=0$ とおくと　$B_n(0)+B_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}B_n(0)$ より

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)B_n(0)\,. \tag{1.13}$$

1.3　$|B_{2n}(x)|$ の $[0\,,1]$ における最大値

補題 3　$|B_{2n}(x)|$ の $[0\,,1]$ における最大値は $|B_{2n}(0)|=|B_{2n}|(=|B_{2n}(1)|)$ である．

［証明］最初に $y=B_n(x)$ の $[0\,,1]$ における増減を調べる．次の（ア），（イ）を数学的帰納法で証明する．

（ア）　n が偶数のとき，$B_n(x)=0$ の $[0\,,1]$ における実数解は 2 個で，$\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$ と $\left(\frac{1}{2}\,,1\right)$ に存在する．

$y=B_n(x)$ の極値をとる x の値は $x=\frac{1}{2}$ である．

（イ）　n が奇数のとき，$B_n(x)=0$ の $[0\,,1]$ における実数解は $x=0\,,\frac{1}{2}\,,1$ の 3 個である．

$y=B_n(x)$ の極値をとる x の値は $x=\alpha_n\,,\beta_n$，$0<\alpha_n<\frac{1}{2}<\beta_n$ である．

[I] $n=2$ のとき

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{12},\quad B_2(0)=B_2(1)=\frac{1}{6},B_2\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$$

だから，$B_2(x)=0$ の $[0,1]$ における実数解は 2 個で，$\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$ と $\left(\frac{1}{2}\,,1\right)$ に存在する．また，$y=B_2(x)$ は $x=\frac{1}{2}$ で極小値をとる．

$n=3$ のとき $B_3'(x)=3B_2(x)$ で $B_2(x)=0$ の $[0\,,1]$ における実数解を $x=s_2\,,t_2$ $\left(0<s_2<\frac{1}{2}<t_2<1\right)$ とおくと，

x	0		s_2		$\frac{1}{2}$		t_2		1
$B_3'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$B_3(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0

$\alpha_3=s_2,\beta_3=t_2$ とおけば，題意を満たす．

[II] k を偶数として，$n=k,k+1$ のとき（ア），（イ）が成り立つものと仮定する．

$n=k+2$ のとき $B_{k+2}'(x)=(k+2)B_{k+1}(x)$ で，$k+1$ は奇数だから，仮定により $y=B_{k+1}(x)$ の増減は次の増減表 1 か増減表 2 になる．

増減表 1

x	0		α_{k+1}		$\frac{1}{2}$		β_{k+1}		1
$B'_{k+1}(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$B_{k+1}(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0

増減表 2

x	0		α_{k+1}		$\frac{1}{2}$		β_{k+1}		1
$B'_{k+1}(x)$		$-$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$B_{k+1}(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

となる．

増減表 1 の場合， $y = B_{2K+2}(x)$ の増減表は

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$B'_{k+2}(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$B_{k+2}(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

となる． $B_{k+2}\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqq 0$ のとき, $(0\,,1)$ $\left(x \risingdotseq \dfrac{1}{2}\right)$ で $B_{k+2}(x) < 0$ だから $\displaystyle\int_0^1 B_{k+2}(x)dx < 0$ となり $\displaystyle\int_0^1 B_{k+2}(x)dx = 0$ に矛盾する．したがって　$B_{k+2}\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$ となる．このとき，$B_{k+2}(0) = B_{k+2}(1) \geqq 0$ だと $\displaystyle\int_0^1 B_{k+2}(x)dx > 0$ となり $\displaystyle\int_0^1 B_{k+2}(x)dx = 0$ に矛盾する．

したがって，$B_{k+2}(0) = B_{k+2}(1) < 0$ となる．これらのことから，$B_{k+2}(x) = 0$ の $[0, 1]$ における実数解は 2 個で，$\left(0\,, \dfrac{1}{2}\right)$ と $\left(\dfrac{1}{2}\,, 1\right)$ に存在する．

また， $y = B_{k+2}(x)$ は $x = \dfrac{1}{2}$ で極大値をとる．

増減表 2 の場合も同様に示せる．

$n = k+3$ のとき $B'_{k+3}(x) = (k+3)B_{k+2}(x)$ で，$k+2$ は偶数だから，仮定より $y = B_{k+2}(x)$ の増減は次の増減表 3 か増減表 4 になる．

増減表 3

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$B'_{k+2}(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$B_{k+2}(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$B_{k+2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0\,, B_{k+2}(0) = B_{k+2}(1) < 0\,.$$

増減表 4

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$B'_{k+2}(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$B_{k+2}(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$B_{k+2}\left(\frac{1}{2}\right) < 0\,, B_{k+2}(0) = B_{k+2}(1) > 0\,.$$

増減表 3 の場合 $B_{k+2}(x) = 0$ の $[0\,,1]$ における実数解を $x = s_{k+2}\,, t_{t+2}$ $\left(0 < s_{t+2} < \dfrac{1}{2} < t_{t+2} < 1\right)$ とおくと

x	0		s_{k+2}		$\frac{1}{2}$		t_{k+2}		1
$B'_{k+3}(x)$		$-$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$B_{k+3}(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$\alpha_{k+3} = s_{k+2}, \beta_{k+3} = t_{k+2}$ とおけば，題意を満たす．

増減表 4 の場合も同様である．以上のことから，$|B_{2n}(x)|$ の $[0\,,1]$ における最大値は $|B_{2n}(0)| = |B_{2n}|(= |B_{2n}(1)|)$ か $\left|B_{2n}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|$ のいずれかでとることがわかった．

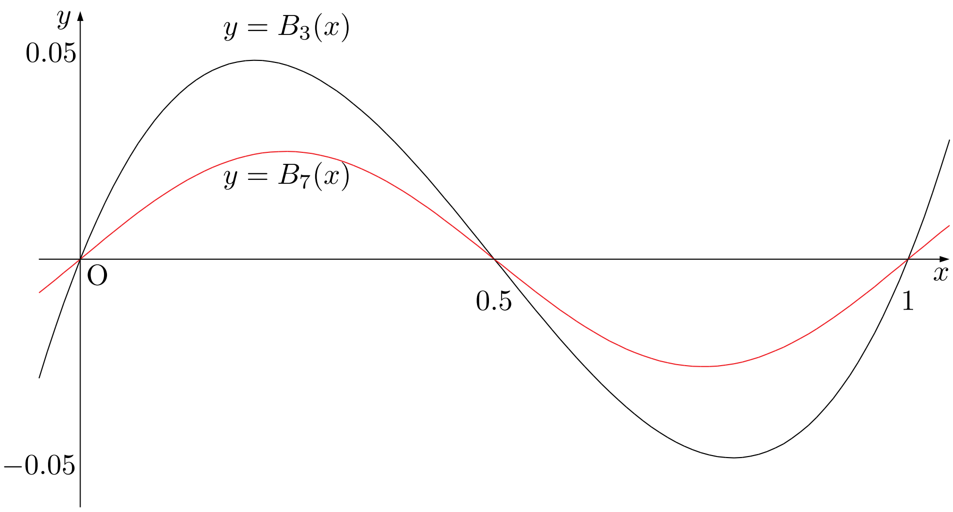
(1.13) から

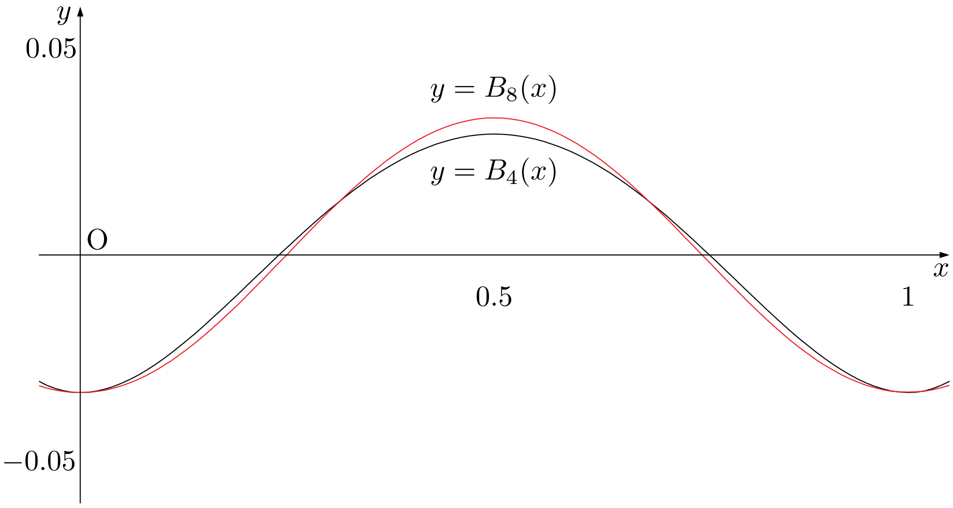
$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) B_n(0) \tag{1.14}$$

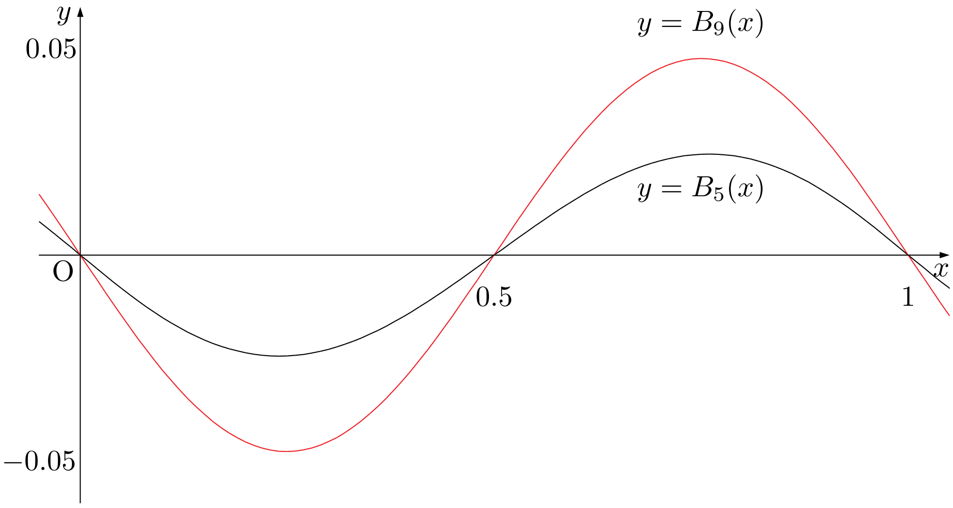
ゆえに

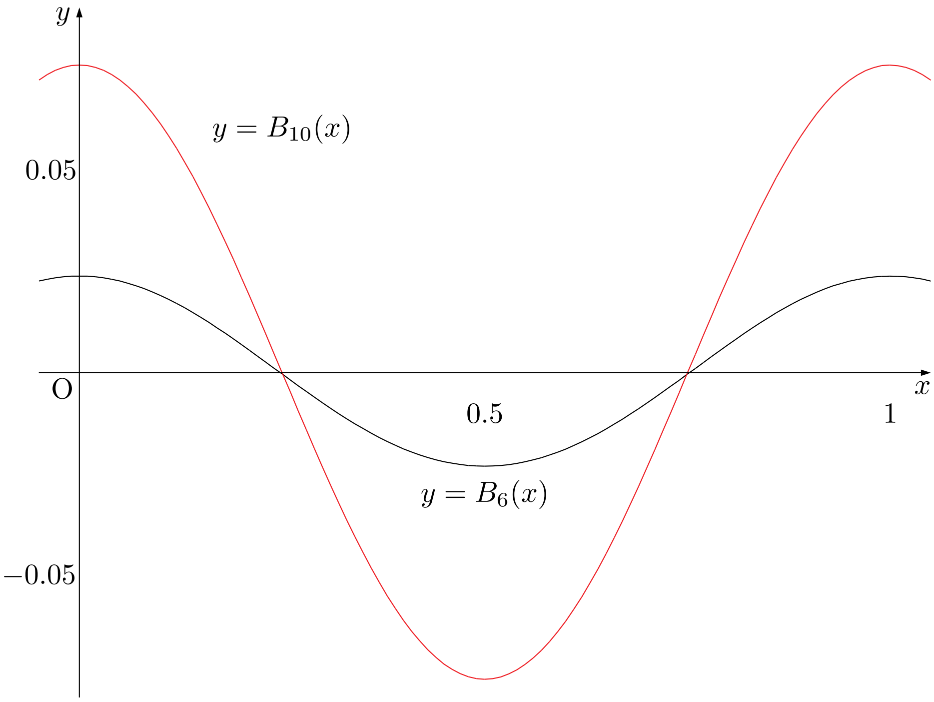
$$\left|B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) |B_n(0)| < |B_n(0)|$$

したがって，$|B_{2n}(x)|$ の $[0\,,1]$ における最大値は $|B_{2n}(0)| = |B_{2n}|(= |B_{2n}(1)$ であることがわかった． $\square$




y
0.05
y = B8(x)
y = B4(x)
O
x
0.5
1
−0.05


y
0.05
y = B9(x)
y = B5(x)
O
x
0.5
1
−0.05


y
y = B10(x)
0.05
O
x
0.5
1
y = B6(x)
−0.05

1.4　オイラー・マクローリンの和公式

ここでは，次のオイラー・マクローリンの和公式を導くことが目的である．

$f(x)$ が $[a\,,b]$ で $2n+2$ 回連続微分可能な関数とする．N を自然数とし，$h=\dfrac{b-a}{N}$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N} f(a+jh) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \\ + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right] \\ + \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}h^{2n+2}\sum_{j=0}^{N-1} f^{(2n+2)}(a+\theta h+jh)\end{aligned}$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する．

ここで，$B_n(x)$ はベルヌーイ多項式，B_n はベルヌーイ数である．

まず，次の補題を証明しておく．

補題 4　$g(x)$ が $[0\,,1]$ で $2n+2$ 回連続微分可能な関数とすると，

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)dt &= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(g^{(2k-1)}(0)-g^{(2k-1)}(1)\right) \\ &\quad + \frac{1}{(2n+2)!}\int_0^1 B_{2n+2}(t)g^{(2n+2)}(t)dt \qquad (1.15) \\ &= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(g^{(2k-1)}(0)-g^{(2k-1)}(1)\right) \\ &\quad - \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^1\left\{1-\frac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}\right\}g^{(2n+2)}(t)dt \qquad (1.16)\end{aligned}$$

が成り立つ．

（ (1.15) と (1.16) の式で $\sum$ の範囲の違いにも注意!! ）

［証明］まず (1.15) が成立することを示し，次に (1.16) の成立を示す．

[I] $n=1$ のとき，（ n のときも同様なのでていねいに式変形を書いてみる.）

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 B_1'(t)g(t)dt \\
&= [B_1(t)g(t)]_0^1 - \int_0^1 B_1(t)g'(t)dt, \quad B_1(t) = t - \frac{1}{2}, B_2'(t) = 2B_1(t) \\
&= \frac{g(0)+g(1)}{2} - \int_0^1 \frac{1}{2} B_2'(t)g'(t)dt \\
&= \frac{g(0)+g(1)}{2} - \left[\frac{1}{2}B_2(t)g'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}B_2(t)g''(t)dt, \quad B_3'(t) = 3B_2(t) \\
&= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \frac{B_2}{2!}\left(g^{(1)}(0) - g^{(1)}(1)\right) + \left[\frac{1}{3!}B_3(t)g''(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3!}B_3(t)g'''(t)dt \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \ B_3(1) = B_3(0) = 0, B_4'(t) = 4B_3(t) \\
&= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \frac{B_2}{2!}\left(g^{(1)}(0) - g^{(1)}(1)\right) - \int_0^1 \frac{1}{4!}B_4'(t)g'''(t)dt \\
&= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \frac{B_2}{2!}\left(g^{(1)}(0) - g^{(1)}(1)\right) - \left[\frac{1}{4!}B_4(t)g'''(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{4!}B_4(t)g^{(4)}(t)dt \\
&= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \frac{B_2}{2!}\left(g^{(1)}(0) - g^{(1)}(1)\right) + \frac{B_4}{4!}\left(g^{(3)}(0) - g^{(3)}(1)\right) \\
&\qquad + \int_0^1 \frac{1}{4!}B_4(t)g^{(4)}(t)dt \\
&= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \sum_{k=1}^{2} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(1)\right) + \frac{1}{4!}\int_0^1 B_4(t)g^{(4)}(t)dt.
\end{aligned}
$$

となり，(1.15) は成り立つ．
n のとき成り立つと仮定する．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2n+2)!}\int_0^1 B_{2n+2}(t)g^{(2n+2)}(t)dt &= \frac{1}{(2n+3)!}\int_0^1 B_{2n+3}'(t)g^{(2n+2)}(t)dt \\
&= \left[\frac{1}{(2n+3)!}B_{2n+3}(t)g^{(2n+2)}(t)\right]_0^1 - \frac{1}{(2n+3)!}\int_0^1 B_{2n+3}(t)g^{(2n+3)}(t)dt \\
&= -\frac{1}{(2n+4)!}\int_0^1 B_{2n+4}'(t)g^{(2n+3)}(t)dt \\
&= -\left[\frac{1}{(2n+4)!}B_{2n+4}(t)g^{(2n+3)}(t)\right]_0^1 + \frac{1}{(2n+4)!}\int_0^1 B_{2n+4}(t)g^{(2n+4)}(t)dt \\
&= \frac{B_{2n+4}}{(2n+4)!}\left(g^{(2n+3)}(0) - g^{(2n+3)}(1)\right) + \frac{1}{(2n+4)!}\int_0^1 B_{2n+4}(t)g^{(2n+4)}(t)dt.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 g(t)dt &= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(1)\right) \\
&\qquad + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^1 B_{2n+2}(t) g^{(2n+2)}(t)dt \\
&= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(1)\right) \\
&\quad + \frac{B_{2n+4}}{(2n+4)!} \left(g^{(2n+3)}(0) - g^{(2n+3)}(1)\right) + \frac{1}{(2n+4)!} \int_0^1 B_{2n+4}(t) g^{(2n+4)}(t)dt \\
&= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(1)\right) \\
&\qquad + \frac{1}{(2n+4)!} \int_0^1 B_{2n+4}(t) g^{(2n+4)}(t)dt
\end{aligned}
$$

となり，$n+1$ のときも (1.15) は成り立つ．

等式 (1.15) を次のように変形する．

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 g(t)dt &= \frac{g(0)+g(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(1)\right) \\
&\qquad + \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} \left(g^{(2n+1)}(0) - g^{(2n+1)}(1)\right) + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^1 B_{2n+2}(t) g^{(2n+2)}(t)dt.
\end{aligned}
$$

右辺の最後の 2 項を変形する．

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} \left(g^{(2n+1)}(0) - g^{(2n+1)}(1)\right) + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^1 B_{2n+2}(t) g^{(2n+2)}(t)dt \\
&= -\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} \int_0^1 g^{(2n+2)}(t)dt + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^1 B_{2n+2}(t) g^{(2n+2)}(t)dt \\
&= -\frac{1}{(2n+2)!} \int_0^1 \left\{B_{2n+2} - B_{2n+2}(t)\right\} g^{(2n+2)}(t)dt \\
&= -\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} \int_0^1 \left\{1 - \frac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}\right\} g^{(2n+2)}(t)dt
\end{aligned}
$$

となり，(1.16) は成り立つ． □

定理 1　$F(x)$ が $[0\,,N]$ で $2n+2$ 回連続微分可能な関数とする．このとき

$$\sum_{j=0}^{N} F(j) = \int_0^N F(x)dx + \frac{1}{2}\left[F(0)+F(N)\right] + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[F^{(2k-1)}(N)-F^{(2k-1)}(0)\right]$$
$$+\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\sum_{j=0}^{N-1}F^{(2n+2)}(\theta+j) \tag{1.17}$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する．

［証明］補題 4 で $g(x)=F(x+j),\quad (j=0,1,\ldots,N-1)$ とおくと

$$\int_0^1 F(t+j)dt = \frac{F(j)+F(j+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(F^{(2k-1)}(j)-F^{(2k-1)}(j+1)\right)$$
$$-\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^1\left\{1-\frac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}\right\}F^{(2n+2)}(t+j)dt.$$

$t+j=s$ とおくと，$\displaystyle\int_0^1 F(t+j)dt = \int_j^{j+1}F(s)ds$ が成り立つから

$$\int_j^{j+1} F(t)dt = \frac{F(j)+F(j+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(F^{(2k-1)}(j)-F^{(2k-1)}(j+1)\right)$$
$$-\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^1\left\{1-\frac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}\right\}F^{(2n+2)}(t+j)dt.$$

$j=0,1,\ldots,N-1$ として辺々加えると

$$\sum_{j=0}^{N-1}\int_j^{j+1} F(t)dt = \sum_{j=0}^{N-1}\frac{F(j)+F(j+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\sum_{j=0}^{N-1}\left(F^{(2k-1)}(j)-F^{(2k-1)}(j+1)\right)$$
$$-\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^1\left\{1-\frac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}\right\}\sum_{j=0}^{N-1}F^{(2n+2)}(t+j)dt.$$

よって

$$\int_0^N F(t)dt = \frac{1}{2}\left[F(0)+F(N)\right] + \sum_{j=1}^{N-1}F(k) + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[F^{(2k-1)}(0)-f^{(2k-1)}(N)\right]$$
$$-\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^1\left\{1-\frac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}\right\}\sum_{j=0}^{N-1}F^{(2n+2)}(t+j)dt.\quad\cdots(*)$$

(i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}F^{(2n+2)}(x+j)$ が定数関数でない場合

$\displaystyle G(x)=\sum_{j=0}^{N-1}F^{(2n+2)}(x+j)$ を考え，$[0\,,1]$ における $G(x)$ の最小値を m , 最大値を M とおく．

ここで，$w(t) = 1 - \dfrac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}$ とおき，$0 < t < 1$ のとき $w(t) > 0$ となることを示す．補題 3 から $|B_{2n}(x)|$ の $[0\,,1]$ における最大値は $|B_{2n}(0)| = |B_{2n}|(= |B_{2n}(1)|)$ であるから，
$0 < t < 1$ のとき $|B_{2n+2}(t)| < |B_{2n+2}|$ すなわち $\left|\dfrac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}\right| < 1$ がいえる．
したがって，$0 < t < 1$ のとき $w(t) > 0$ がいえる．

次に，$[0\,,1]$ で連続な関数 $G(x)$ の最小値は m，最大値は M であるから，$m \leqq G(x) \leqq M$．
$w(x)(> 0)$ をかけると，

$mw(x) \leqq w(x)G(x)(x) \leqq Mw(x)$. 積分して

$$m\int_0^1 w(x)dx < \int_0^1 w(x)G(x)dx < M\int_0^1 w(x)dx$$

$\displaystyle\int_0^1 w(x)dx(> 0)$ で割ると

$$m < \int_0^1 w(x)G(x)dx \bigg/ \int_0^1 w(x)dx < M.$$

$G(x)$ は連続関数だから，中間値の定理を使うと

$$G(\theta) = \frac{\displaystyle\int_0^1 w(x)G(x)dx}{\displaystyle\int_0^1 w(x)dx}\,,\ 0 < \theta < 1$$

を満たす θ が存在する．さて，

$$\int_0^1 w(x)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{B_{2n+2}(x)}{B_{2n+2}}dx = 1$$

だから，

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^1 \left\{1 - \frac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}\right\}G(t)dt \\
&= -\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^1 w(t)G(t)dt \\
&= -\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}G(\theta) \\
&= -\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\sum_{j=0}^{N-1} F^{(2n+2)}(\theta + j).
\end{aligned}$$

$(*)$ の両辺に $\dfrac{1}{2}\left[F(0)+F(N)\right]$ を加えると

$$\int_0^N F(t)dt+\frac{1}{2}\left[F(0)+F(N)\right]=\sum_{j=0}^{N}F(k)+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[F^{(2k-1)}(0)-\mathrm{F}^{(2k-1)}(N)\right]$$
$$-\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\sum_{j=0}^{N-1}F^{(2n+2)}(\theta+j).$$

この式を変形すると，(1.17) を得る．

(ii) $G(x)=\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}F^{(2n+2)}(x+j)$ が定数関数の場合

$$\begin{aligned}
R&=-\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^1\left\{1-\frac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}\right\}G(t)dt\\
&=-\frac{B_{2n+2}G(t)}{(2n+2)!}\int_0^1\left\{1-\frac{B_{2n+2}(t)}{B_{2n+2}}\right\}dt\\
&=-\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}G(t)\\
&=-\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}G(\theta)\\
&=-\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\sum_{j=0}^{N-1}F^{(2n+2)}(\theta+j).
\end{aligned}$$

（ただし，θ は $0<\theta<1$ を満たす任意の数でよい.）$(*)$ の両辺に $\dfrac{1}{2}\left[F(0)+F(N)\right]$ を加えると

$$\int_0^N F(t)dt+\frac{1}{2}\left[F(0)+F(N)\right]=\sum_{j=0}^{N}F(k)+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[F^{(2k-1)}(0)-\mathrm{F}^{(2k-1)}(N)\right]$$
$$-\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\sum_{j=0}^{N-1}F^{(2n+2)}(\theta+j).$$

この式を変形すると，(1.17) を得る． □

次に $[0\,,N]$ を $[a\,,b]$ に変える．$[0\,,N]\to[a\,,b]\,,t\to x=a+ht\,,\ h=\dfrac{b-a}{N}$ を利用する．

定理 2　$f(x)$ が $[a\,,b]$ で $2n+2$ 回連続微分可能な関数とする．N を自然数とし，$h=\dfrac{b-a}{N}$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N} f(a+jh)\\
&=\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx+\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]\\
&\quad+\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}h^{2n+2}\sum_{j=0}^{N-1} f^{(2n+2)}(a+\theta h+jh)
\end{aligned} \tag{1.18}$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する．

［証明］定理 1 で $F(x)=f(a+hx)$ とおくと

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} f(a+jh)&=\int_0^N f(a+hx)dx+\frac{1}{2}\left[f(a)+f(a+Nh)\right]\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[h^{2n-1}f^{(2k-1)}(a+Nh)-h^{2n-1}f^{(2k-1)}(a)\right]\\
&\quad+\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}h^{2n+2}\sum_{j=0}^{N-1} f^{(2n+2)}(a+h(\theta+j))\quad (a+hx=s\text{ とおく})\\
&=\frac{1}{h}\int_a^b f(s)ds+\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2n-1}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]\\
&\quad+h^{2n+2}\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\sum_{j=0}^{N-1} f^{(2n+2)}(a+\theta h+jh)).
\end{aligned}$$

したがって，(1.18) は成り立つ．　□

2　フーリエ級数

2.1　準備

2.1.1　区分的に連続な関数

関数 $f(x)$ が開区間 $(a\,,b)$ で区分的に連続な関数であるとは，次の 2 条件を満たすときをいう。

(PCF.1) 区間 $(a\,,b)$ で高々有限個の不連続点しか持たず，各不連続点 x_0 で

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)\,,\quad f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)$$

が（極限値として）存在する.(x_0 を f の**第 1 種不連続点**という)

(PCF.2) 端点 $a\,,b$ について

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x)\,,\quad f(b-0)=\lim_{x\to b-0}f(x)$$

が（極限値として）存在する.

開区間 $(a\,,b)$ で区分的に連続な関数 $f(x)$ は $[a\,,b]$ で積分可能である.

［証明］ まず， $(a\,,b)$ で連続な場合を考える. $(PCF.2)$ より $f(a)=f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x)\,,f(b)=f(b-0)=\lim_{x\to b-0}f(x)$ で $f(a)\,,f(b)$ を定義すると $f(x)$ は $[a\,,b]$ で連続であるから $[a\,,b]$ で積分可能である.

次に $(a\,,b)$ における $f(x)$ の第 1 種の不連続点を $x_1\,,x_2\,,\ldots\,,x_{m-1}$ とおき $(a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<x_m=b)$ とする.

$(a\,,b)$ は m 個の小区間 $(x_0\,,x_1)\,,(x_1\,,x_2)\,,\ldots\,,(x_{m-1}\,,x_m)$ に分けることができる. 小区間 $(x_i\,,x_{i+1})$ で，$f(x_i+0)\,,f(x_{i+1}-0)$ が存在するから，定積分 $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,dx$ が存在する. 定積分の加法性を使うと

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx+\cdots+\int_{x_{m-1}}^{x_m}f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_m}f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

が存在する. □

2π を周期として持ち，開区間 $(-\pi\,,\pi)$ で区分的に連続な関数 $f(x)$ に対して，積分区間 $[-\pi\,,\pi]$ を任意の値 s だけずらしても $f(x)$ の定積分の値は同じである. すなわち

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi+s}^{\pi+s}f(x)\,dx$$

が成り立つ.

このことは，区間の長さが 2π ならばどの区間で積分してもよいことになる。

［証明］ $f(x)$ は周期 2π の周期関数だから，すべての x に対して $f(x+2\pi)=f(x)$ が成り立つ.

$f(x)$ は $(-\pi\,,\pi)$ で区分的に連続であるから $[-\pi+s\,,\pi+s]$ で積分可能である．

$$\int_{-\pi+s}^{\pi+s} f(x)dx = \int_{-\pi+s}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{\pi+s} f(x)dx$$

と変形する．
右辺の第 2 項で $t = x - 2\pi$ とおくと

$$\int_{\pi}^{\pi+s} f(x)dx = \int_{-\pi}^{-\pi+s} f(t+2\pi)dt = \int_{-\pi}^{-\pi+s} f(t)dt\,.$$

ゆえに

$$\int_{-\pi+s}^{\pi+s} f(x)dx = \int_{-\pi+s}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{-\pi+s} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

から

$$\int_{-\pi+s}^{\pi+s} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,.$$

□

2.1.2　右（側）微分係数と左（側）微分係数

x_0 およびその右側の近傍で定義された関数 $f(x)$ に対して，その右側微分係数を存在する限り

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

で定義する．また，x_0 およびその左側の近傍で定義された関数 $f(x)$ に対して，その左側微分係数を存在する限り

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

で定義する．

区分的に連続な関数を対象にした場合

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}\,, \qquad \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0-0)}{x-x_0}$$

を考えるので右微分係数，左微分係数として定義しておく．

x_0 の右側の近傍で定義された関数 $f(x)$ に対して，その**右微分係数**を存在する限り

$$f'_R(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}$$

で定義する．また，x_0 の左側の近傍で定義された関数 $f(x)$ に対して，その**左微分係数**を存在する限り

$$f'_L(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0-0)}{x-x_0}$$

で定義する.

$[-\pi\,,\pi]$ で定義された $f(x)$ の不連続点 x_0 では右側微分係数と右微分係数と一致するとは限らない. 例えば

$$f(x)=\begin{cases} \ \ 0 & (x=-\pi) \\ -1 & (-\pi<x<0) \\ \ \ 0 & (x=0) \\ \ \ 1 & (0<x<\pi) \\ \ \ 0 & (x=\pi) \end{cases}$$

について

$$f'_R(-\pi)=0\,,f'_L(-\pi)=0\,,f'_R(0)=0\,,f'_L(0)=0\,,f'_R(\pi)=0\,,f'_L(\pi)=0$$

だが, $f'_+(-\pi)\,,f'_-(-\pi)\,,f'_+(0)\,,f'_-(0)\,,f'_+(\pi)\,,f'_-(\pi)\,,$ は存在しない.

2.1.3　三角関数の直交性

$m\,,n$ を正の整数とするとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\fallingdotseq n)\\ \pi & (m=n)\end{cases}\quad,$$

$$\int_{0}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\int_{0}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\fallingdotseq n)\\ \\ \dfrac{\pi}{2} & (m=n)\end{cases}\quad.$$

2.1.4　有限三角級数の和

n を正の整数とするとき，次の式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\quad(x\fallingdotseq 2m\pi\,,\ m=0\,,\pm1\,,\pm2\,,\dots)\,, \tag{2.1}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx=\frac{\pi}{2}\,. \tag{2.2}$$

［証明］(2.1) の成立を示すには $2\sin\dfrac{x}{2}$ を (2.1) の両辺にかけるとよい．

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)&=\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\sin\frac{x}{2}\\
&=\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{(2k+1)x}{2}-\cos\frac{(2k-1)x}{2}\right)\\
&=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}\\
&=\sin\frac{(2n+1)x}{2}
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,.$$

(2.1) を用いると

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx&=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)dx\\
&=\left[\frac{1}{2}x+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi}\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

となり，(2.2) が成り立つ．　□

[(2.2) の別証明] $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx \quad (n = 0\,,1\,,\ldots)$ とおき，$I_{n+1} - I_n$ を計算する．

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2} - \sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{2\cos nx \sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \cos nx\,dx \\
&= \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より $I_{n+1} = I_n$ となる．

また，

$$
I_0 = \int_0^{\pi} dx = \frac{\pi}{2}
$$

であるから，$I_n = I_{n-1} = \cdots = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$． □

2.1.5　基本的な不等式

$\boxed{1}$ 次の不等式が成り立つ．

$$
-|\theta| \leqq \sin\theta \leqq |\theta|\,, \tag{2.3}
$$

$$
\frac{2}{\pi}\theta \leqq \sin\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.4}
$$

解 (i) まず，$\theta \geqq 0$ のとき $-\theta \leqq \sin\theta \leqq \theta$ が成り立つことを示す．

$f(\theta) = \theta - \sin\theta\,,\ g(\theta) = \theta + \sin\theta$ とおくと

$$
f'(\theta) = 1 - \cos\theta \geqq 0\,,\ g'(\theta) = 1 + \cos\theta \geqq 0
$$

より $f(\theta)\,, g(\theta)$ は単調増加だから，$\theta \geqq 0$ のとき

$$
f(\theta) \geqq f(0) = 0\,, g(\theta) \geqq g(0) = 0\,.
$$

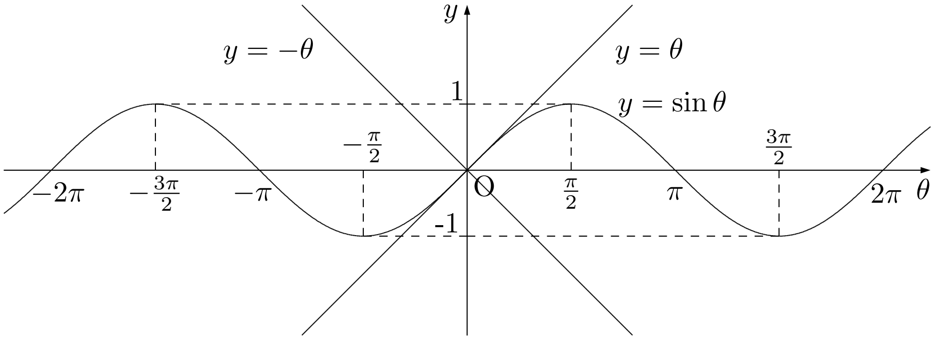
$\theta \leqq 0$ のとき，$-\theta \geqq 0$ だから，$-(-\theta) \leqq \sin(-\theta) \leqq -\theta$ すなわち，$\theta \leqq \sin\theta \leqq -\theta$ が成り立つ

(ii) $F(\theta) = \sin\theta - \dfrac{2}{\pi}\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $F'(\theta) = \cos\theta - \dfrac{2}{\pi}$．

$F'(\theta) = 0$ となる θ が $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の範囲でただ 1 つ存在するから，これを ξ とおく．

x	0	$\cdots$	ξ	$\cdots$	$\pi/2$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

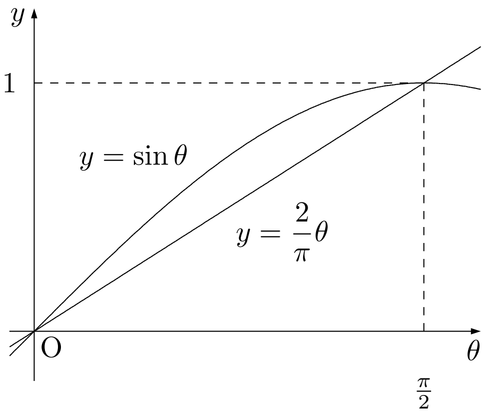
したがって，増減表から $F(\theta) \geqq 0$. □



(2.4) は $\theta = 0$ のときは明らかに成立するから，$F(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ $\left(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおき $F(\theta)$ の増減を調べてもよい． $F'(\theta) = \dfrac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\theta^2}$ となるから， $G(\theta) = \theta\cos\theta - \sin\theta$ とおけば，$G'(\theta) = -\theta\sin\theta < 0$. $G(\theta)$ は $(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ で単調減少で，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0} G(\theta) = 0$ より $G(\theta) < 0$ となるから $F'(\theta) < 0$.
よって，$F(\theta)$ は $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ で単調減少で，

$$F(\theta) \geqq G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

すなわち，$\dfrac{2}{\pi}\theta \leqq \sin\theta$ が得られる．



$\boxed{2}$ 次の不等式が成り立つ．

$$e^x \geqq x + 1\,, \tag{2.5}$$

$$\log x \leqq x - 1 \quad x > 0\,. \tag{2.6}$$

解 (i) $f(x) = e^x - (x+1)$ とおくと
$f'(x) = e^x - 1$. $f'(x) = 0$ を解くと $x = 0$.

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

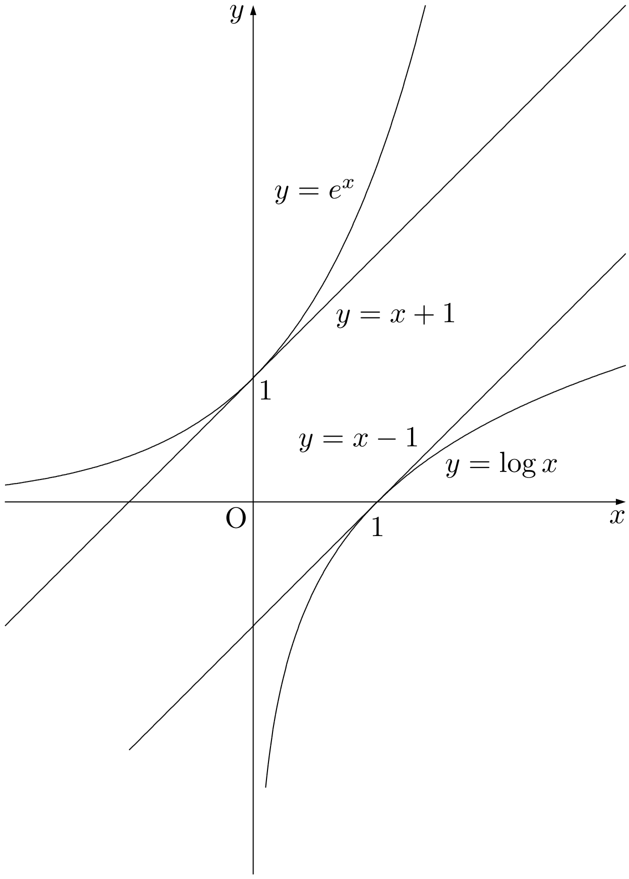
$f(x)$ は $x=0$ で最小値 $f(0)=0$ をとるから，$f(x) \geqq 0$ すなわち $e^x \geqq x+1$.

(ii) $g(x)=x-1-\log x \quad (x>0)$ とおくと

$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$. $g'(x)=0$ を解くと $x=1$.

x	0		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

$g(x)$ は $x=1$ で最小値 $g(1)=0$ をとるから，$g(x) \geqq 0$ すなわち $\log x \leqq x-1$. □



$\boxed{3}$ n を正の整数とするとき，次の不等式が成り立つ.

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} \quad (x>0). \tag{2.7}$$

㊫ n についての数学的帰納法によって，不等式を証明する.

(i) $n=1$ のとき， $f(x)=e^x-(x+1)$ とおくと，$f'(x)=e^x-1$.

$x>0$ で $f'(x)>0$ だから， $[0\,,\infty)$ において $f(x)$ は増加関数である.

また，$f(0)=0$ より

$x>0$ のとき，$f(x)>f(0)=0$ すなわち，$e^x>x+1$.

(ii) $n=m \quad (m \geqq 1)$ のとき (2.7) が成り立つと仮定すると

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^m}{m!} \quad (x>0) \tag{*}$$

$g(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^m}{m!}+\dfrac{x^{m+1}}{(m+1)!}\right)$ とおくと

$$g'(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^m}{m!}\right).$$

(*) から，$x>0$ で $g'(x)>0$ だから，$[0,\infty)$ において $g(x)$ は増加関数である.

また，$g(0)=0$ より

$x>0$ のとき，$g(x)>g(0)=0$ すなわち

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^m}{m!}+\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

よって，$n=m+1$ のときも (2.7) は成り立つ.

(i)，(ii) から，すべての正の整数 n について (2.7) は成り立つ. □

$\boxed{4}$ n を正の整数，α を正の実数とするとき，次の式が成り立つ.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0, \tag{2.8}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0, \tag{2.9}$$

$$\lim_{x\to+0}x\log x=0, \tag{2.10}$$

$$\lim_{x\to+0}x^\alpha\log x=0. \tag{2.11}$$

解 (i) $x>0$ のとき，(2.7) から，$e^x>\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

変形すると

$$0<\frac{x^n}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x}.$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{x}=0$ だから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0.$$

(ii) (i) から $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ において，$x=e^t \quad (\log x=t)$ とおくと

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0.$$

(iii) $x = \dfrac{1}{t}$ とおくと

$$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right) = -\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t} = 0\,.$$

(iv) $t = x^\alpha$ とおくと

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha \log x = \lim_{x\to+0} \frac{1}{\alpha} x^\alpha \log x^\alpha = \frac{1}{\alpha}\lim_{t\to+0} t\log t = 0\,.$$

□

2.1.6　広義積分

定理 3　(1°)　区間 $(a\,,b]$ において $f(x)$ は連続で，$(x-a)^\alpha|f(x)|$ が有界となるような $\alpha\,(0<\alpha<1)$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．

(2°)　区間 $[a\,,b)$ において $f(x)$ は連続で，$(b-x)^\alpha|f(x)|$ が有界となるような $\alpha\,(0<\alpha<1)$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．

(3°)　区間 $[a\,,\infty)$ において $f(x)$ は連続で，$x^\alpha|f(x)|$ が有界となるような $\alpha\,(\alpha>1)$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は収束する．

$\displaystyle\lim_{x\to a+0}(x-a)^\alpha f(x) =$ 定数 あるいは $\displaystyle\lim_{x\to a+0}(x-a)^\alpha|f(x)| =$ 定数 が成立するときは，$(x-a)^\alpha|f(x)|$ は有界となるから，次の系を得る．

系 1

(1°) 区間 $(a\,,b]$ において $f(x)$ は連続で，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}(x-a)^\alpha f(x) =$ 定数 となるような $\alpha\,(0<\alpha<1)$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．

(2°) 区間 $(a\,,b]$ において $f(x)$ は連続で，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}(x-a)^\alpha|f(x)| =$ 定数 となるような $\alpha\,(0<\alpha<1)$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．

(3°) 区間 $[a\,,b)$ において $f(x)$ は連続で，$\displaystyle\lim_{x\to b-0}(b-x)^\alpha f(x) =$ 定数 となるような $\alpha\,(0<\alpha<1)$ が存すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．

(4°) 区間 $[a\,,b)$ において $f(x)$ は連続で，$\displaystyle\lim_{x\to b-0}(b-x)^\alpha|f(x)| =$ 定数 となるような $\alpha\,(0<\alpha<1)$ が存すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．

(5°) 区間 $[a\,,\infty)$ において $f(x)$ は連続で，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) =$ 定数 となるような $\alpha\,(\alpha>1)$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は収束する．

(6°) 区間 $[a\,,\infty)$ において $f(x)$ は連続で，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}|f(x)| = $ 定数 となるような $\alpha\,(\alpha>1)$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ は収束する．

2.1.7 関数列の一様収束

ある区間 I において定義されている関数列 $\{f_n(x)\}$ を考える．

関数列 $f_n(x)$ が I 上で各点収束するとは，ある関数 $f(x)$ が存在して，
任意の $x\in I$，任意の $\epsilon>0$ に対してある正の整数 N が存在し，すべての $n\geqq N$ について

$$|f(x)-f_n(x)|<\epsilon$$

が成り立つときをいう．

N の値は一般的には ϵ と x とに関係するので $N=N(\epsilon\,,x)$ である. 特に N が ϵ のみに関係して，区間における x に無関係に決められるとき，$f_n(x)$ が I 上で一様収束するという。

関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で一様収束するとは，ある関数 $f(x)$ が存在して，
任意の $\epsilon>0$ に対してある正の整数 N が存在し，すべての $x\in I$ とすべての $n\geqq N$ について

$$|f(x)-f_n(x)|<\epsilon$$

が成り立つときをいう. このとき，区間 I において $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束するという．

関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で各点収束するための必要十分条件は，任意の $x\in I$，任意の $\epsilon>0$ に対してある正の整数 N が存在し，すべての $m\,,n\geqq N$ について

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\epsilon$$

が成り立つことである．

関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で一様収束するための必要十分条件は，任意の $\epsilon>0$ に対してある正の整数 N が存在し，すべての $x\in I$ とすべての $m\,,n\geqq N$ について

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\epsilon$$

が成り立つことである．

定理 4 （一様収束と連続性）区間 I において連続な関数 $f_n(x)\,(n=1\,,2\,,3\,,\ldots)$ が $f(x)$ に一様収束すれば，$f(x)$ も I において連続である．

定理 5 （一様収束と積分）区間 $[a\,,b]$ において連続な関数 $f_n(x)\,(n=1\,,2\,,3\,,\ldots)$ が $f(x)$ に一様収束すれば，

$$n\to\infty \text{ のとき } \quad \int_a^{x} f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^{x} f(x)\,dx\,.$$

両辺とも連続で，収束は一様収束である．

定理 6　（一様収束と微分）区間 $[a\,,b]$ において微分可能な関数 $f_n(x)\,(n=1\,,2\,,3\,,\dots)$ について，
$f_n(x)\to f(x)$ で，かつ $\{f'_n(x)\}$ が一様収束すれば，

$$n\to\infty \text{ のとき}\quad f'_n(x)\longrightarrow f'(x)\,.$$

2.1.8　関数項無限級数

$f_n(x)$ $(n=1\,,2\,,3\,,\dots)$ が区間 I で定義されているとき，

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

という無限級数を考える. まず，与えられた $x\in I$ に対して無限級数が収束するとは，

$$\text{部分和：}S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$$

からできる関数列 $\{S_n(x)\}$ が収束することであり，

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

で表す.

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ が 区間 I 上で各点収束するとは，ある関数 $f(x)$ が存在して，
任意の $x\in I$，任意の $\epsilon>0$ に対してある正の整数 N が存在し，すべての $n\geqq N$ について

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|<\epsilon$$

が成り立つときをいう.

N の値は一般的には ϵ と x とに関係するので $N=N(\epsilon\,,x)$ である. 特に N が ϵ のみに関係して，区間における x に無関係に決められるとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ が I 上で一様収束するという。

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ が I 上で一様収束するとは，ある関数 $f(x)$ が存在して，
任意の $\epsilon>0$ に対してある正の整数 N が存在し，すべての $x\in I$ とすべての $n\geqq N$ について

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|<\epsilon$$

が成り立つときをいう.

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で各点収束するための必要十分条件は，任意の $x \in I$，任意の $\epsilon > 0$ に対してある正の整数 N が存在し，すべての $m > , n \geqq N$ について

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \epsilon$$

が成り立つことである．

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で一様収束するための必要十分条件は，任意の $\epsilon > 0$ に対してある正の整数 N が存在し，すべての $x \in I$ とすべての $m > , n \geqq N$ について

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \epsilon$$

が成り立つことである．

定理 7　（ワイエルシュトラウスの判定法）

すべての n，すべての $x \in I$ に対して $|f_n(x)| \leqq M_n$ が成り立つような数列が存在して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束すれば，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で一様絶対収束する

定理 8　（一様収束と連続性） 区間 I において関数 $f_n(x)\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が連続で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で $f(x)$ に一様収束すれば，$f(x)$ も I において連続である．

定理 9　（一様収束と積分） 区間 $[a, b]$ において関数 $f_n(x)\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が連続で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が $[a, b]$ 上で $f(x)$ に一様収束すれば，$a \leqq x \leqq b$ のとき

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(x)\,dt\,.$$

定理 10　（一様収束と微分） 区間 I において微分可能な関数 $f_n(x)\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$ について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ が I 上で 一様収束するものとする．また，区間内の一点 x_0 において $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ が収束するならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ もまた I で微分可能で

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)\,.$$

2.1.9　連続的変数に関する一様収束

ある区域 $K: a \leqq x \leqq b\,, \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ において定義される関数 $f(x\,,\alpha)$ を考える．

関数 $f(x\,,\alpha)$ が K の各点 x に対して $\alpha \to \alpha_0$ のときに，ある極限値に収束するとする．その極限値は x の関数であるから，$g(x)$ とおけば

任意の $x \in [a\,,b]$，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，$|\alpha - \alpha_0| < \delta\,, \alpha \fallingdotseq \alpha_0$ ならば $|f(x\,,\alpha) - g(x)| < \epsilon$ が成り立つ．

δ の値は一般的には ϵ と x とに関係するので $\delta = \delta(\epsilon\,,x)$ である．特に δ が ϵ のみに関係して，x に無関係に決められるとき，$f(x\,,\alpha)$ は $\alpha \to \alpha_0$ のとき，K における x に関して一様に $g(x)$ に収束するという。

$f(x\,,\alpha)$ は $\alpha \to \alpha_0$ のとき，K における x に関して一様に $g(x)$ に収束するというのは，

任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，任意の $x \in [a\,,b]$ と $|\alpha - \alpha_0| < \delta\,, \alpha \fallingdotseq \alpha_0$ を満たす α に対して $|f(x\,,\alpha) - g(x)| < \epsilon$ が成り立つことである．

$\alpha_0 = \infty$ のときも同様にして

ある区域 $K: a \geqq x \leqq b\,, \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ において定義される関数 $f(x\,,\alpha)$ が $\alpha \to \infty$ のとき，K における x に関して一様に $g(x)$ に収束するというのは，

任意の $\epsilon > 0$ に対してある $R > 0$ が存在し，任意の $x \in [a\,,b]$ と $\alpha > R$ を満たす α に対して $|f(x\,,\alpha) - g(x)| < \epsilon$ が成り立つことである．

定理 11　閉区域 $K: a \leqq x \leqq b\,, \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ において定義される関数 $f(x\,,\alpha)$ が 二変数 $x\,,\alpha$ の関数として連続ならば

(1°)　$\displaystyle\int_a^b f(x\,,\alpha)\,dx$ は $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ で α の関数として連続である．

(2°)　$\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_a^b f(x\,,\alpha)\,dx\,d\alpha = \int_a^b\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x\,,\alpha)\,d\alpha\,dx\,.$

(3°)　$f_\alpha(x\,,\alpha)$ が K において連続ならば，

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x\,,\alpha)\,dx = \int_a^b f_\alpha(x\,,\alpha)\,dx\,.$$

区域 $K: x \geqq c\,, \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ において，$f(x\,,\alpha)$ は連続で，

$$F(\alpha) = \int_c^\infty f(x\,,\alpha)\,dx$$

が一様に収束するとは，$F(\alpha\,,t) = \displaystyle\int_c^t f(x\,,\alpha)\,dx$ が α に関して一様に $F(\alpha)$ に収束すること，すなわち

任意の $\epsilon > 0$ に対してある $R > 0$ が存在し，任意の $\alpha \in [\alpha_1\,,\alpha_2]$ と $t > R$ を満たす t に対して $|f(\alpha\,,t) - g(x)| < \epsilon$ が成り立つことである．

定理 12　区域 $K : x \geqq c, \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ において定義される関数 $f(x\,,\alpha)$ が 二変数 $x\,,\alpha$ の関数として連続で，$F(\alpha) = \displaystyle\int_c^{\infty} f(x\,,\alpha)\,dx$ が一様に収束ならば

(1°)　$F(\alpha) = \displaystyle\int_c^{\infty} f(x\,,\alpha)\,dx$ は $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ で α の関数として連続である．

(2°)　$\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_c^{\infty} f(x\,,\alpha)\,dx\,d\alpha = \int_c^{\infty}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x\,,\alpha)\,d\alpha\,dx\,.$

(3°)　$f_\alpha(x\,,\alpha)$ が K において連続で，$F(\alpha) = \displaystyle\int_c^{\infty} f(x\,,\alpha)\,dx$ が一様に収束するならば，

$$\frac{d}{d\alpha}\int_c^{\infty} f(x\,,\alpha)\,dx = \int_c^{\infty} f_\alpha(x\,,\alpha)\,dx\,.$$

定理 13　$\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ に対して $|f(x\,,\alpha)| \leqq M(x)$ で，かつ $\displaystyle\int_c^{\infty} M(x)\,dx$ が収束すれば，$\displaystyle\int_c^{\infty} f(x\,,\alpha)\,dx$ は $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ で一様収束する．

2.1.10　べき級数

べき級数

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \tag{2.12}$$

において，

$|x| < R$ の x に対しては (2.12) は収束，

$|x| > R$ の x に対しては (2.12) は発散

となるような R をべき級数 (2.12) の収束半径という。

定理 14　$x = \alpha(\fallingdotseq 0)$ のとき 式 (2.12) が収束するならば，$|x| < |\alpha|$ である任意の x に対して式 (2.12) は絶対収束する．

定理 15　$x = \beta$ のとき 式 (2.12) が発散するならば，$|x| > |\beta|$ である任意の x に対して式 (2.12) は発散する．

定理 16　（コーシー・アダマール）べき級数 (2.12) の収束半径を R とすると

$$R^{-1} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

定理 17　べき級数 (2.12) の収束半径を R とする. 極限値 $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が存在するならば，

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

定理 18　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 を $R>0$ とし，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \quad |x| < R$$

と定義する．このとき次のことが成り立つ．

a)　べき級数は $(-R\,,R)$ で絶対収束し，収束区間 $(-R\,,R)$ 内の任意の閉区間 $[-\rho\,,\rho]$ $(\rho < R)$ で一様収束する.$f(x)$ は $(-R\,,R)$ で連続である．

b)　$(-R\,,R)$ を定義域とする関数 $f(x)$ は無限回微分可能である．

c)　$|x| < R$ で $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ が成り立ち，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径は R である．

d)　$|x| < R$ で $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ が成り立ち，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ の収束半径は R である．

二つのべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ について，第 1 の級数の各項を第 2 の級数の各項にかけて x^n の項を求めると $(a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0)x^n$ となるので，次の級数ができる。

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n$$

この級数について，次の定理が成り立つ。

定理 19　二つのべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ の収束半径をそれぞれ $R_1\,,R_2$ とすれば，
$|x| < R = \min(R_1\,,R_2)$ で $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n$ は収束し，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 を R とすると，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \quad |x| < R$$

で定義される関数 $f(x)$ は $(-R, R)$ で連続である. 以下に示すように，収束区間の端点においてべき級数が収束すれば，連続的に拡張ができる.

定理 20 （アーベルの連続性定理） べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が $R>0$ で $x=R$ に対してもこのべき級数が収束するならば，このべき級数の表す関数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束端点でも連続性が保たれる.

$$\lim_{x\to R-0} f(x) = f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \,.$$

2.1.11 リーマンのゼータ関数関数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s>0)$$

は $s>1$ ならば収束し，$s \leqq 1$ ならば発散する.

［証］ $y=x^{-s}\,(x>1)$ は $y'=-sx^{-s-1}<0$ より単調に減少するから
$y=x^{-s}\,(x>1)$ のグラフを考え

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^s} = 1 + \frac{1}{s-1}\left(1-\frac{1}{N^{s-1}}\right) < 1 + \frac{1}{s-1}\,.$$

$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ は単調増加で上に有界だから収束する.

$s \leqq 1$ のときは，$\dfrac{1}{n^s} \geqq \dfrac{1}{n}$ だから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せばよい.
$y=x^{-1}\,(x>1)$ のグラフを考え

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1)\,.$$

右辺は $N\to\infty$ のとき $+\infty$ に発散するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は $+\infty$ に発散する. □

このことから，$s>1$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ の和は s の関数となるから，それを $\zeta(s)$ と書く. $\zeta(s)$ をリーマンの**ゼータ関数**という.

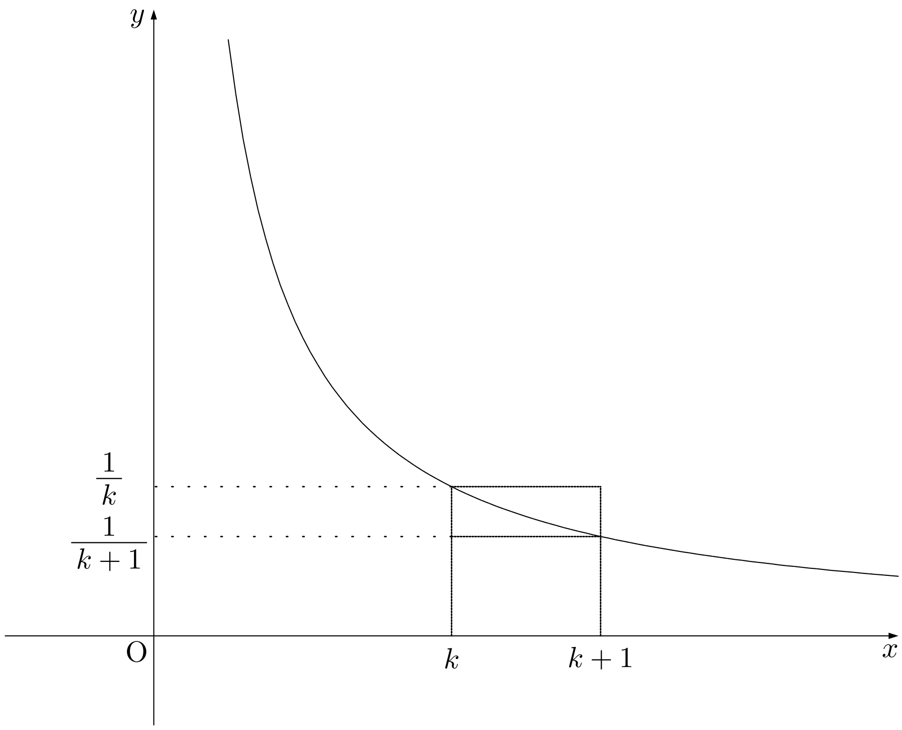
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s>1).$$

2.1.12 オイラー定数

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \quad (n = 1\,, 2\,, \ldots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える.

$y = \dfrac{1}{x}\ (x > 1)$ は $y' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ より単調に減少するから，$y = \dfrac{1}{x}\ (x > 1)$ のグラフを考えて，



k が正の整数のとき，不等式

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k} \tag{2.13}$$

が成り立つ.
右側の不等式より

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1)\,.$$

よって

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n > \log \frac{n+1}{n} > 0\,.$$

また (2.13) 左側の不等式より

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) - \log n\,.$$

よって

$$a_n - a_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} > 0\,.$$

$\{a_n\}$ は（狭義に）減少し，下に有界であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n = \gamma$ が存在する．この極限値 γ をオイラーの定数という．

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

2.1.13　リーマン・ルベーグの定理

フーリエ級数論で重要なリーマン・ルベーグの定理の特別な場合を証明する。

定理 21　（リーマン・ルベーグ）

$[a\,,b]$ で $f(x)$ と $|f(x)|$ が積分可能ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = 0\,,\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0\,. \tag{2.14}$$

ここでは，条件を強くしたものを証明しておく。

定理 22　$f(x)$ が $(a\,,b)$ で区分的に連続な関数ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = 0\,,\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0\,. \tag{2.15}$$

［証明］ まず，$(a\,,b)$ で連続な場合に証明する．$f(a+0)\,,f(b-0)$ が存在するから，必要があれば $f(a)=f(a-0)\,,f(b)=f(b-0)$ と定義し直すことにより，$f(x)$ が 閉区間 $[a\,,b]$ で連続な関数としてよい.

$f(x)$ は $[a\,,b]$ で連続であるから，そこで一様に連続である。（ハイネの定理）
任意の正の数 ϵ に対して十分小さい δ をとると，

$$|x-\xi|<\delta \text{ のとき } |f(x)-f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

とできる. 区間 $[a\,,b]$ を N 等分し，分点を $x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N=b$ とする. ただし，$\dfrac{b-a}{N}<\delta$ を満たすように N をとるものとする．また，$f(x)$ は $[a\,,b]$ で連続であるから，常に $|f(x)|\leqq M$ が成り立つような M をとる.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\cos nx\,dx\right| &= \left|\sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos nx\,dx\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x)-f(x_k))\cos nx\,dx + \sum_{k=1}^N f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\cos nx\,dx\right| \\
&\leqq \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)-f(x_k)|\,dx + \sum_{k=1}^N |f(x_k)|\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\cos nx\,dx\right| \\
&< N\cdot\frac{\epsilon}{2(b-a)}\cdot(x_k-x_{k-1}) + N\cdot M\cdot\frac{|\sin x_k - \sin x_{k-1}|}{n} \\
&\leqq N\cdot\frac{\epsilon}{2(b-a)}\cdot\frac{b-a}{N} + N\cdot M\cdot\frac{2}{n} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2MN}{n}\,.
\end{aligned}$$

n を $\dfrac{4MN}{\epsilon}$ より大きくとれば，$\dfrac{2MN}{n} < \dfrac{\epsilon}{2}$ を満たすから，

$$\left| \int_a^b f(x) \cos nx \, dx \right| < \epsilon \,.$$

よって

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0 \,.$$

次に，$f(x)$ が $m-1$ 個の不連続点を $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$ ($\mu_0 = a < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_{m-1} < \mu_m = b$) を持っているとする. 区間 $[a, b]$ を m 個の小区間 $[\mu_0, \mu_1], [\mu_1, \mu_2], \ldots, [\mu_{m-1}, \mu_m]$ に分けられる. 各小区間 $[\mu_k, \mu_{k+1}]$ では上に示したことにより，

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} f(x) \cos nx \, dx = 0 \,.$$

よって

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} f(x) \cos nx \, dx = 0 \,.$$

同様にして

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0$$

を示すことができる. □

定理 23　区間 $(-\pi\,, \pi)$ で定義された区分的に連続な関数 $f(x)$ に対して

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots) \,.$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1\,, 2\,, \ldots)$$

とおくと，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2)$ は収束する.

［証明］ $S_N(x) = \dfrac{\alpha_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ とおき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - S_N(x)\}^2 \, dx$ を評価する

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - S_N(x)\}^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 \, dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \{S_N(x)\}^2 \, dx$$

の右辺の第 2 項と第 3 項を計算する.

三角関数の直交性を用いると

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_N(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left\{\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx\right\}dx\\ &= \frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx+\sum_{n=1}^{N}\left\{\alpha_n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx+\beta_n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,dx\right\}\\ &= \frac{\alpha_0}{2}\cdot\pi\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n\cdot\pi\alpha_n+\beta_n\cdot\pi\beta_n)\\ &= \pi\left\{\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2)\right\}.\end{aligned}$$

第 3 項は

$$\begin{aligned}\{S_N(x)\}^2 &= \left\{\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)\right\}^2\\ &= \frac{{\alpha_0}^2}{4}+\alpha_0\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)+\left\{\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)\right\}^2\\ &= \frac{{\alpha_0}^2}{4}+\alpha_0\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)+\sum_{n=1}^{N}({\alpha_n}^2\cos^2 nx+{\beta_n}^2\sin^2 nx)\\ &\qquad +2\sum_{i<j}(\alpha_i\alpha_j\cos ix\cos jx+\beta_i\beta_j\sin ix\sin jx)+\sum_{i\,,j}(\alpha_i\alpha_j\cos ix\sin jx\\ &= \frac{{\alpha_0}^2}{4}\cdot 2\pi+\sum_{n=1}^{N}({\alpha_n}^2\cdot\pi+{\beta_n}^2\cdot\pi)\\ &= \pi\left\{\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2)\right\}.\end{aligned}$$

したがって

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)-S_N(x)\}^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx-\pi\left\{\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2)\right\}$$

となる. 左辺は非負であるから

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx \geqq \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2)\,. \tag{2.16}$$

$A_n=\sum_{n=1}^{N}\left({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2\right)$ とおくと, $\{A_N\}$ は単調増加で有界だから収束する.

ゆえに, $\sum_{n=1}^{\infty}({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2)$ は収束する. □

［注 1］定理 23 と同じ条件の下で，不等式（2.16）が成り立つから，$N \to \infty$ とすると，ベッセルの不等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx \geqq \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2) \tag{2.17}$$

が成り立つ．

［注 2］定理 23 と同じ条件の下で，${\alpha_n}^2 \leqq {\alpha_n}^2+{\beta_n}^2$，${\beta_n}^2 \leqq {\alpha_n}^2+{\beta_n}^2$ が成り立ち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2)$ は収束するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{\alpha_n}^2$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{\beta_n}^2$ はともに収束する．このことから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}{\alpha_n}^2=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}{\beta_n}^2=0$ すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$ を得る．

定理 24　区間 $(0,\pi)$ で定義された区分的に連続な関数 $g(x)$ に対して

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2,\dots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\dots)$$

とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$

［証明］ 定理 23 と［注 2］を用いて証明する．

$$f(x)=\begin{cases} g(-x) & (-\pi<x<0)\\ g(+0) & (x=0)\\ g(x) & (0<x<\pi)\end{cases}$$

で $f(x)$ を $(-\pi,\pi)$ で定義すると偶関数で，しかも $f(x)$ は $(-\pi,\pi)$ で区分的に連続な関数である。

$f(x)\cos nx$ は偶関数だから

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\cos nx\,dx=a_n\,.$$

［注 2］より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$．

後半は

$$f(x)=\begin{cases} -g(-x) & (-\pi<x<0)\\ 0 & (x=0)\\ g(x) & (0<x<\pi)\end{cases}$$

で $f(x)$ を $(-\pi,\pi)$ で定義すると奇関数で，しかも $f(x)$ は $(-\pi,\pi)$ で区分的に連続な関数である。

$f(x)\sin nx$ は偶関数だから

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = b_n\,.$$

［注 2］より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0\,.$ □

定理 25　区間 $(0\,,\pi)$ で定義された区分的に連続な関数 $g(x)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} g(x)\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)\,dx = 0\,.$$

［証明］ 定理 24 を用いて証明する．

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} g(x)\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)\,dx &= \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\sin nx\cos\frac{x}{2}+\cos nx\sin\frac{x}{2}\right)\,dx\\ &= \int_0^{\pi}\left(g(x)\cos\frac{x}{2}\right)\sin nx\,dx + \int_0^{\pi}\left(g(x)\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx\,.\end{aligned}$$

$g(x)\cos\dfrac{x}{2}\,,g(x)\sin\dfrac{x}{2}$ は $(0\,,\pi)$ で区分的に連続な関数だから，定理 24 より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left(g(x)\cos\frac{x}{2}\right)\sin nx\,dx = 0\,,\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left(g(x)\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx = 0\,.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} g(x)\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)\,dx = 0\,.$$

□

定理 26　$f(x)$ は区間 $(0\,,\pi)$ で定義された区分的連続関数で，右微分係数 $f'_R(0)$ を持つならば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2}f(+0)\,.$$

［証明］ 定理 25 を用いて証明する．

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx &= \int_0^{\pi}\{f(x)-f(+0)\}\,\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx\\ &\quad + f(+0)\int_0^{\pi}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx\,.\end{aligned}$$

(2.2) より

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

である. 次に,

$$\int_0^{\pi} \{f(x)-f(+0)\}\,\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{f(x)-f(+0)}{2\sin\dfrac{x}{2}}\sin\frac{(2n+1)x}{2}\,dx$$

と変形し, $g(x)=\dfrac{f(x)-f(+0)}{2\sin\dfrac{x}{2}}$ とおくと,

$$\lim_{x\to+0} g(x) = \lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(+0)}{x}\cdot\frac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} = f_R'(0)\,.$$

よって, $g(x)$ は $(0\,,\pi)$ で区分的に連続だから, 定理 25 より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} g(x)\sin\frac{(2n+1)x}{2}\,dx = 0\,.$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \{f(x)-f(+0)\}\,\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx = 0\,.$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2}f(+0)\,.$$

$\square$

2.1.14 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,,\quad \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$

ここでの目標は, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ の値を求めることである.

まず, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ が収束することを示す. これは, 任意の ϵ に対して $\dfrac{2}{\epsilon} < p < q$ となる $p<q$ をとると

$$\int_p^q \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_p^q \frac{1}{x}(-\cos x)'\,dx = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_p^q - \int_p^q \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\cos p}{p} - \frac{\cos q}{q} - \int_p^q \frac{\cos x}{x^2}\,dx\,,$$

$$\left|\int_p^q \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\int_p^q \frac{dx}{x^2} \leqq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\left[-\frac{1}{x}\right]_p^q = \frac{2}{p} < \epsilon$$

が成り立つことからわかる。

次に，(2.2) を変形すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{2.18}$$

この式と定理 22 を用いて $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ を示す.

$f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \quad \left(0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$， $f(0) = 0$ で $f(x)$ を定義すると，$f(x)$ は $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ で連続となる. これを示すには $f(x)$ が $x=0$ で連続であることを示せばよい.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} f(x) &= \lim_{x\to+0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} \left(= \lim_{x\to+0} \frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}\right) \\
&= \lim_{x\to+0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \left(= \lim_{x\to+0} \frac{\sin^2 x}{(\sin x + x\cos x)(1+\cos x)}\right) \\
&= \lim_{x\to+0} \frac{x\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\right)(1+\cos x)} = 0 \\
&= f(0)\,.
\end{aligned}$$

定理 22 より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2n+1)x\,dx = 0\,.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx\,.$$

(2.18) を使うと

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

一方 $t=(2n+1)x$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

と変形できるから

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

を得る.

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ から $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ の値を求めることができる.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx &= \int_0^\infty (1-\cos x)\left(-\frac{1}{x}\right)'\,dx \\
&= \left[(1-\cos x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

$1-\cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ を用いると

$$\int_0^\infty \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

$t = \dfrac{x}{2}$ とおくことにより

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

を得る.

2.2 周期 2π のフーリエ級数

2.2.1 フーリエ級数の定義

区間 $[-\pi\,,\pi]$ で定義された $f(x)$ は $f(-\pi)=f(\pi)$ を満たし，$(-\pi\,,\pi)$ で区分的に連続であるとする．この $f(x)$ に対して

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0\,,1\,,\dots)\,, \tag{2.19}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1\,,2\,,\dots) \tag{2.20}$$

で与えられる $a_n\,,b_n$ を $f(x)$ のフーリエ係数といい，フーリエ係数 $a_n\,,b_n$ を係数とする三角級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

を $f(x)$ のフーリエ級数といい

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{2.21}$$

と表す．

(2.21) の右辺は周期 2π の関数と考えられるから， $f(x)$ を $f(x+2\pi)=f(x)$ によって，定義域を $(-\infty\,,\infty)$ まで拡張することができる。

　$f(x+2\pi)=f(x)$ の式において $x=-\pi$ とおくと $f(-\pi)=f(\pi)$ となるので，最初から条件に入れておいた．

2.2.2　フーリエ級数の点収束

準備が整ったので，フーリエ級数の点収束の定理を証明する．

定理 27　$(-\infty\,,\infty)$ で定義され，周期 2π を持つ周期関数 $f(x)$ は区間 $(-\pi\,,\pi)$ で区分的に連続であるとする．$f(x)$ のフーリエ級数は左右の微分係数 $f_L'(x)$ および $f_R'(x)$ が存在する各点で，

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,. \tag{2.22}$$

特に，x で $f(x)$ が連続ならば

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,. \tag{2.23}$$

［証明］ 定理 26 を用いて証明する．

部分和を

$$S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

とおき

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\,,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1\,,2\,,\dots)$$

を使うと

$$\begin{aligned}
S_N(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds+\sum_{n=1}^{N}\left\{\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos ns\,ds\right)\cos nx\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\sin ns\,ds\right)\sin nx\right\}\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\left(\cos ns\cos nx+\sin ns\sin nx\right)\,ds\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos n(s-x)\,ds\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n(s-x)\right\}\,ds\,.
\end{aligned}$$

$f(s)\left\{\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(\cos n(s-x)\right\}$ は $(-\infty\,,\infty)$ で定義され，周期 2π を持つ周期関数で，区間 $(-\pi\,,\pi)$ で区分的に連続であるから，積分区間を だけずらしても積分値は等しいので

$$
\begin{aligned}
S_N(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(s)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n(s-x)\right\}ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{x} f(s)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n(s-x)\right\}ds \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{x}^{\pi+x} f(s)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n(s-x)\right\}ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x-u)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nu\right\}(-du) \qquad (u=x-s) \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nu\right\}du \qquad (u=s-x) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nu\right\}du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nu\right\}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\frac{\sin\dfrac{(2N+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\dfrac{(2N+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}du\,.
\end{aligned}
$$

まず，$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\frac{\sin\dfrac{(2N+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}du$ について考える.

$g(u)=f(x-u)$ とおくと $g(u)$ は $(0\,,\pi)$ で区分的に連続な関数で $x=0$ における右微分係数

$$
g_R'(0)=\lim_{u\to+0}\frac{g(u)-g(+0)}{u}=\lim_{u\to+0}-\frac{f(x-u)-f(x-0)}{-u}=-f_L'(x)
$$

が存在するから，定理 26 より

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\frac{\sin\dfrac{(2N+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}du=\frac{\pi}{2}g(+0)=\frac{\pi}{2}f(x-0)
$$

が成り立つ.

同様にして

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\dfrac{(2N+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}du=\frac{\pi}{2}f(x+0)
$$

が示せるから

$$\lim_{n\to\infty} S_N(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}f(x-0) + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}f(x+0) = \frac{\pi}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\}\,. \qquad \square$$

上記の定理は，フーリエ級数の点収束のための十分条件を示しており，通常はこれで足りるものと思われる．

$f(x)$ は高々第 1 種の不連続点だけをもつ周期 2π の有界な関数とする．左右の微分係数が存在する点 x でフーリエ級数は収束し，その和は連続点では $f(x)$ に，不連続点では $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ に等しい．

他にも点収束するための十分条件がいくつかあるが，その中で，Dini の判定条件について調べておきたい．

上記の証明中で示したこと

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x-u)\frac{\sin\dfrac{(2N+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\dfrac{(2N+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}\,du$$

と，$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin\dfrac{(2N+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}\,du = \frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned} S_N(x)-f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x-u)+f(x+u)-2f(x)\}\frac{\sin\dfrac{(2N+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-u)+f(x+u)-2f(x)}{u}\,\frac{u}{2\sin\dfrac{u}{2}}\,\sin\frac{(2N+1)u}{2}\,du \end{aligned}$$

と変形できる．ここで，

$$\varphi_x(u) = f(x+u)+f(x-u)-2f(x)$$

とおく．

$\dfrac{|\varphi_x(u)|}{u}$ が $[0\,,\pi]$ で積分可能ならば，$\left|\dfrac{\varphi_x(u)}{u}\,\dfrac{u}{2\sin\dfrac{u}{2}}\right|$ も $[0\,,\pi]$ で積分可能だから，リーマン・ルベーグの定理 21 より

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-u)+f(x+u)-2f(x)}{u}\,\frac{u}{2\sin\dfrac{u}{2}}\,\sin\frac{(2N+1)u}{2}\,du = 0\,.$$

すなわち，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\{S_N(x)-f(x)\}=0$.
よって，$f(x)$ のフーリエ級数は点 x で $f(x)$ に収束する．

定理 28　$(-\infty\,,\infty)$ で定義され，周期 2π を持つ周期関数 $f(x)$ に対して, x を固定したときの積分

$$\int_0^\pi \frac{f(x-u)+f(x+u)-2f(x)}{u}\,du$$

が存在するならば，$f(x)$ のフーリエ級数は点 x で $f(x)$ に収束する．

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,.$$

2.2.3　フーリエ級数の一様 (絶対) 収束

定理 29　$[-\pi\,,\pi]$ で連続な関数 $f(x)$ が，$f(-\pi)=f(\pi)$ を満たし，かつ $f'(x)$ が $(-\pi\,,\pi)$ で区分的に連続ならば，$f(x)$ のフーリエ級数は $[-\pi\,,\pi]$ で $f(x)$ に一様絶対収束する．

［証明］ $f(x+2\pi)=f(x)$ により $(-\infty\,,\infty)$ に拡張すると，$f(x)$ は $(-\infty\,,\infty)$ で連続で，周期 2π を持つ周期関数である. すべての点 x で $f'(x)$ が存在するから，$f'_R(x)=f'_L(x)=f'(x)$ は存在する. したがって，定理 27 より，$f(x)$ のフーリエ級数は各点収束する．

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,.$$

$f'(x)$ が $(-\pi\,,\pi)$ で区分的に連続であるから，定理 23 より

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx\quad(n=0\,,1\,,2\,,\dots)\,,$$
$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx\quad(n=1\,,2\,,\dots)$$

とおくと，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2)$ は収束する．

ところで，

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx\\
&=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin nx}{n}f(x)\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\}\\
&=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx\\
&=-\frac{\beta_n}{n}\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)'\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos nx}{n}f(x)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos n\pi}{n}f(\pi) + \frac{\cos n\pi}{n}f(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\} \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx \qquad (\ f(-\pi) = f(\pi)\ ) \\
&= \frac{\alpha_n}{n}\,.
\end{aligned}
$$

$$
{\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2 + \frac{2}{n^2} - \left(\frac{|2\alpha_n|}{n} + \frac{|2\beta_n|}{n}\right) = \left(|\alpha_n| - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(|\beta_n| - \frac{1}{n}\right)^2 \geqq 0
$$

より，不等式 $\dfrac{|\alpha_n|}{n} + \dfrac{|\beta_n|}{n} \leqq \dfrac{{\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2}{2} + \dfrac{1}{n^2}$ が成り立つことに注意すると

$$
|a_n\cos nx + b_n\sin nx| \leqq |a_n| + |b_n| = \frac{|\alpha_n|}{n} + \frac{|\beta_n|}{n} \leqq \frac{{\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2}{2} + \frac{1}{n^2}\,.
$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2)$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するから，ワイエルシュトラウスの判定法により，フーリエ級数は一様（絶対）収束する． □

定理 30 （項別微分）

$[-\pi\,,\pi]$ で連続な関数 $f(x)$ が，$f(-\pi) = f(\pi)$ を満たし，かつ $f'(x)$ が $(-\pi\,,\pi)$ で区分的に連続であるとする．$f''(x)$ が点 x で存在するならば，この点で

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)
$$

は項別微分可能で

$$
f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx + nb_n\cos nx)\,.
$$

［証明］ $f(x)$ の周期は 2π であるから，すべての x について $f(x+2\pi) = f(x)$ が成り立つ．$f(x)$ は微分可能だから，両辺を x で微分して $f'(x+2\pi) = f'(x)$ を得る．ゆえに $f'(x)$ の周期は 2π である．また，$f'(x+2\pi) = f'(x)$ で $x = -\pi$ とおくと $f'(-\pi) = f'(\pi)$ が成り立つ．
$f''(x)$ が点 x で存在するならば，この点で $f''_R(x) = f''_L(x) = f''(x)$ が存在する．定理 27 より，$f''(x)$ が点 x で存在するならば，この点で $f'(x)$ は連続だから

$$
f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx)\,.
$$

ただし，

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx \quad (n=0\,,1\,,2\,,\dots)\,.$$
$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx \quad (n=1\,,2\,,\dots)$$

とする．

定理 29 の証明の中で示したことにより，$\alpha_n = nb_n\,,\beta_n = -na_n$ が成り立つ．
また，

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = f(\pi)-f(-\pi) = 0$$

であるから $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx) = \left(\frac{a_0}{2}\right)' + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)'\,.$

□

定理 31 （項別積分）

$(-\pi\,,\pi)$ で連続で，$f(-\pi+0)\,,f(\pi-0)$ が存在するような関数 $f(x)$ に対して

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

であるとき，$f(x)$ の不定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$ は

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}(x+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx - b_n\cos nx + (-1)^{n+1}}{n}$$

とフーリエ展開される．

［証明］ $\displaystyle F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}(x+\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}(x+\pi)$
とおくと

1° $F(x)$ は $[-\pi\,,\pi]$ で連続である．
2° $F(-\pi) = F(\pi) = 0\,.$
3° $F'(x) = f(x) - \dfrac{a_0}{2}$ は $(-\pi\,,\pi)$ で連続である．

したがって定理 27 より，$(-\infty\,,\infty)$ で

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx)$$

が成り立つ．ただし，

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0\,,1\,,2\,,\dots)$$
$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1\,,2\,,\dots)$$

とする．

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[F(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\} = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x) - \frac{a_0}{2}\right\}\sin nx\,dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx + \frac{a_0}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx \\
&= -\frac{b_n}{n}\,, \\
\beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)' dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-F(x)\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\} = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x) - \frac{a_0}{2}\right\}\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - \frac{a_0}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx \\
&= \frac{a_n}{n}
\end{aligned}$$

となる．

α_0 は $F(\pi) = 0$ から求める．

$$0 = F(\pi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos n\pi = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n$$

から

$$\frac{\alpha_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha_n\,.$$

したがって

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt &= \frac{a_0}{2}(x+\pi) + \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx) \\
&= \frac{a_0}{2}(x+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\left\{\cos nx + (-1)^{n+1}\right\} + \beta_n\sin nx\right] \\
&= \frac{a_0}{2}(x+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_n}{n}\left\{\cos nx + (-1)^{n+1}\right\} + \frac{a_n}{n}\sin nx\right]
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{x} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{x} a_n \cos nx\, dx + \int_{-\pi}^{x} b_n \sin nx\, dx \right)$$

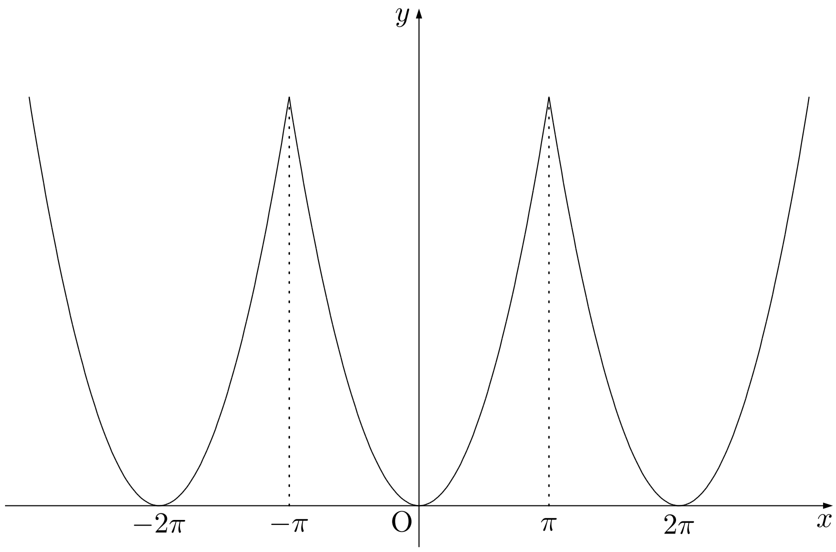
となり，$f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ の両辺を a から x まで項別積分したものになっている. □

2.3 フーリエ級数の例

ここでは，与えられた関数 $f(x)$ は，$f(x+2\pi)=f(x)$ により，2π を周期として，$(-\infty\,,\infty)$ に拡張されているものとする.

2.3.1 フーリエ級数の例 1

例 1　$f(x)=x^2 \quad (-\pi\,,\pi)$　（偶関数）



$f(x)\sin nx$ は奇関数だから，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0$. $f(x)\cos nx$ は奇関数である.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}\,.$$

$n \geqq 1$のとき

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'\,dx\\
&=\frac{2}{\pi}\left\{\left[x^2\cdot\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 2x\cdot\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\}=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\\
&=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\left(\frac{\cos nx}{n}\right)'\,dx\\
&=\frac{4}{n\pi}\left\{\left[x\cdot\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\}\\
&=\frac{4}{n\pi}\left\{\frac{\pi\cos n\pi}{n}-\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right\}\\
&=(-1)^n\frac{4}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

よって $-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + \cdots\right). \tag{2.24}$$

(2.24) で $x = \pi$ とおくと

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2.25}$$

(2.24) で $x = 0$ とおくと

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}. \tag{2.26}$$

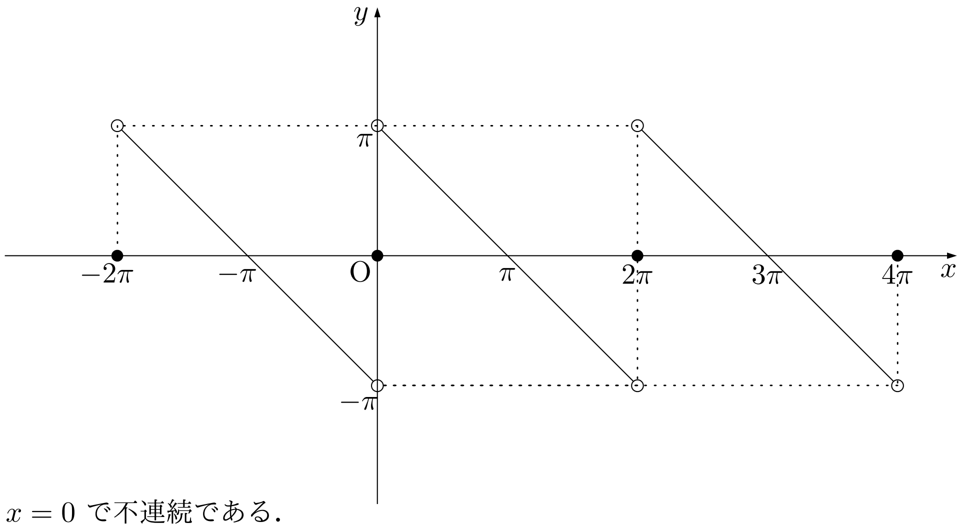
(2.25)，(2.26) の二式の辺々を加えると

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}. \tag{2.27}$$

2.3.2　フーリエ級数の例 2

例 2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = -\pi) \\ -\pi - x & (-\pi < x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \pi - x & (0 < x < \pi) \\ 0 & (x = \pi) \end{cases} \qquad \text{（奇関数）}$$



◆ $x = 0$ で不連続である.

$f(x)\cos nx$ は奇関数だから，$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$. $f(x)\sin nx$ は偶関数である.

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)'\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\left[(\pi - x)\cdot\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{n} - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right\} \\
&= \frac{2}{n}\,.
\end{aligned}
$$

よって, $0 < x < 2\pi$ のとき，$\pi - x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$. すなわち

$$
\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi)\,. \tag{2.28}
$$

(2.28) で $t = \dfrac{x}{2\pi}$ とおくと，$\dfrac{\pi - 2\pi t}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nt}{n} \qquad (0 < t < 1)$. すなわち，

$$
\frac{1}{2} - t = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nt}{n} \qquad (0 < t < 1)\,.
$$

t を x に書き直して

$$
\frac{1}{2} - x = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n} \qquad (0 < x < 1)\,. \tag{2.29}
$$

この式は 1744 年にオイラーによって得られた等式である.

(2.29) で $t = \dfrac{1}{4}$ とおくと，ライプニッツの公式

$$
1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}
$$

が得られる.

2.3.3　フーリエ級数の例 3

例 3

$$
f(x) = \begin{cases} 0 & (x = -\pi) \\ x & (-\pi < x < \pi) \\ 0 & (x = \pi) \end{cases} \qquad \text{（奇関数）}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0\,, \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)'\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-x\cdot\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{(-1)^{n-1}\frac{\pi}{n} - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi\right\} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2}{n}\,.
\end{aligned}
$$

よって, $x = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi < x < \pi)$ から

$$
\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi < x < \pi)\,. \tag{2.30}
$$

(2.30) で x のところに $\pi - x$ を代入すると

$$
\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi)\,.
$$

となり，(2.28) と同じ式である.

$f(x)$ は $(-\pi\,,\pi)$ であるから，(2.30) は項別積分可能である. 両辺を $-\pi$ から x まで積分すると

$$
\int_{-\pi}^{x}\frac{t}{2}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_{-\pi}^{x}\sin nt\,dt\,.
$$

よって

$$
\frac{x^2-\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right\}\,.
$$

両辺に $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ を加えると

$$
\frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi)
$$

となり，(2.24) と同じ式である.

両辺を $-\pi$ から x まで積分すると

$$
\int_{-\pi}^{x}\left(\frac{t^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\int_{-\pi}^{x}\cos nt\,dt\,.
$$

よって

$$\frac{x^3-\pi^2 x}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}\,. \tag{2.31}$$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\cdots=\frac{1}{32}\pi^3\,. \tag{2.32}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\zeta(3)$ の値をもとめることは未解決だから，(2.32) は興味深い式になっている.

2.3.4 フーリエ級数の例 4

例 4　$f(x)=\cos\lambda x\quad(-\pi\,,\pi)$　（偶関数）

$$\begin{aligned}
b_n&=0\,,\\
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\lambda x\cos nx\,dx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\cos(\lambda+n)x+\cos(\lambda-n)x\}\,dx\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\lambda+n)x}{\lambda+n}+\frac{\sin(\lambda-n)x}{\lambda-n}\right]_0^{\pi}\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\lambda+n)\pi}{\lambda+n}+\frac{\sin(\lambda-n)\pi}{\lambda-n}\right)\,.
\end{aligned}$$

ここで

$$\sin(\lambda\pm n)\pi=\sin\lambda\pi\cos n\pi\pm\cos\lambda\pi\sin n\pi=\sin\lambda\pi\cos n\pi=(-1)^n\sin\lambda\pi$$

より

$$a_n=(-1)^n\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda+n}+\frac{1}{\lambda-n}\right)=(-1)^n\frac{2\lambda\sin\lambda\pi}{\pi(\lambda^2-n^2)}\,.$$

よって

$$\cos\lambda x=\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}+\frac{2\lambda\sin\lambda\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda^2-n^2}\cos nx\,.$$

$x=\pi$ とおくと

$$\cos\lambda\pi=\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}+\frac{2\lambda\sin\lambda\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2-n^2}\,.$$

λ を x と書くと

$$\cos \pi x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} + \frac{2x \sin \pi x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}\,.$$

$\sin \pi x$ で割って変形すると

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) \quad (x \fallingdotseq 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \dots)\,. \tag{2.33}$$

$t = \pi x$ とおくと

$$\cot t = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right)\,.$$

t を x と書くと

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right)\,. \tag{2.34}$$

この級数は $x = n\pi\,(n = \pm 1\,, \pm 2\,, \dots)$ を含まない閉区間において一様収束する．0 から x $(0 \leqq x < \pi)$ まで項別積分すると

$$\int_0^x \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\, dx\,.$$

$\dfrac{d}{dx} \log \dfrac{\sin x}{x} = \cot x - \dfrac{1}{x}$ より

$$\log \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log(n^2 - x^2) \right]_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right) = \log \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)\,.$$

よって，$\dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$ すなわち

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right) \quad (0 \leqq x < \pi)\,. \tag{2.35}$$

(2.33)

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) \quad (0 < x < 1)$$

において $g_n(x) = \dfrac{1}{x-n} + \dfrac{1}{x+n}$ とおくと，$g_n'(x) = -\dfrac{1}{(x-n)^2} - \dfrac{1}{(x+n)^2}$.
$0 < x < 1\,, n \geqq 2$ のとき，
$|g_n'(x)| \leqq \dfrac{1}{(n-x)^2} + \dfrac{1}{(n+x)^2} \leqq \dfrac{2}{n^2}$ で $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束することから，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} g_n'(x)$ は $0 < x < 1$

で一様収束する。
(2.33) の両辺を x で項別微分すると

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}\,. \tag{2.36}$$

$x = \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = \pi^2\,. \tag{2.37}$$

2.3.5　フーリエ級数の例 5

例 5　$f(x) = \sin \lambda x \quad (-\pi\,, \pi)$　（奇関数）

$$\begin{aligned}
a_n &= 0\,,\\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin \lambda x \sin nx\, dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\cos(\lambda+n)x - \cos(\lambda-n)x\}\, dx\\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\lambda+n)x}{\lambda+n} - \frac{\sin(\lambda-n)x}{\lambda-n}\right]_0^{\pi}\\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\lambda+n)\pi}{\lambda+n} - \frac{\sin(\lambda-n)\pi}{\lambda-n}\right) = -\frac{1}{\pi}(-1)^n \sin \lambda\pi \left(\frac{1}{\lambda+n} - \frac{1}{\lambda-n}\right)\\
&= (-1)^n \frac{2n \sin \lambda\pi}{\pi(\lambda^2-\pi^2)}\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\sin \lambda x = \frac{2\sin \lambda\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\lambda^2 - n^2} \sin nx\,.$$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ とおくと

$$\sin \frac{\lambda\pi}{2} = \frac{2\sin \lambda\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\lambda^2 - n^2} \sin \frac{n\pi}{2}\,.$$

$\sin \lambda\pi = 2 \sin \dfrac{\lambda\pi}{2} \cos \dfrac{\lambda\pi}{2}$ を使うと

$$\frac{1}{\cos \frac{\lambda\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{\lambda^2 - (2n-1)^2}\,.$$

$z = \dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{\sec \pi z} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{4z^2 - (2n-1)^2}\,. \tag{2.38}$$

$x = \pi z$ とおくと

$$\frac{1}{\sec x} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{4x^2 - (2n-1)^2\pi^2} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{x^2 - \left(\dfrac{2n-1}{2}\pi\right)^2} . \tag{2.39}$$

2.3.6 フーリエ級数の例 6

例 6　$a > 0$ とする.

$$f(x) = \begin{cases} \cosh a(\pi + x) & (-\pi \leqq x \leqq 0) \\ \cosh a(\pi - x) & (0 \leqq x \leqq \pi) \end{cases} \qquad \text{（偶関数）}$$

$$\int e^{px} \cos qx\, dx = \frac{e^{px}}{p^2 + q^2}(p \cos qx + q \sin qx) + C\,, \tag{2.40}$$

$$\int e^{px} \sin qx\, dx = \frac{e^{px}}{p^2 + q^2}(p \sin qx - q \cos qx) + C\,. \tag{2.41}$$

を用いると

$b_n = 0\,,$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{a(\pi - x)} + e^{-a(\pi - x)}}{2} \cos nx\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ e^{a\pi} \int_0^{\pi} e^{-ax} \cos nx + e^{-a\pi} \int_0^{\pi} e^{ax} \cos nx \right\} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ e^{a\pi} \left[\frac{e^{-ax}}{a^2 + n^2} (-a \cos nx + n \sin nx) \right]_0^{\pi} + e^{-a\pi} \left[\frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \right]_0^{\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{e^{a\pi}}{a^2 + n^2} (-ae^{-a\pi} \cos n\pi + a) + \frac{e^{-a\pi}}{a^2 + n^2} (ae^{-a\pi} \cos n\pi - a) \right\} \\
&= \frac{a(e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{\pi(a^2 + n^2)} \,.
\end{aligned}$$

よって

$$\cosh a(\pi - x) = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} \cos nx \right) .$$

$x = 0$ とおくと

$$\frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{2} = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} \right) .$$

すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + n^2} = \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} - \frac{1}{a} \,.$$

$-\infty$ から ∞ の和を考えると

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+n^2} = \frac{2}{a} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2+n^2} = \frac{2\pi(e^{a\pi}+e^{-a\pi})}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}\,.$$

よって

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi(e^{a\pi}+e^{-a\pi})}{a(e^{a\pi}-e^{-a\pi})} \tag{2.42}$$

が成り立つ．特に，$a = 1\,, \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,, \tag{2.43}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4}+n^2} = \frac{2\pi(e^{\pi}+1)}{e^{\pi}-1}\,. \tag{2.44}$$

2.3.7　フーリエ級数の例 7

例 7　$|a| < 1$ とする．

$$f(x) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2} \quad (-\pi \leqq x \leqq \pi) \quad \text{（偶関数）}$$

まず，$1-2a\cos x + a^2 = (1-a\cos x)^2 + \sin^2 x > 0$ である．

$$\begin{aligned}
\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2} &= \frac{1-a^2}{(1-ae^{ix})(1-ae^{-ix})} \\
&= \frac{1}{1-ae^{ix}} + \frac{ae^{-ix}}{1-ae^{-ix}} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{-inx} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (e^{inx}+e^{-inx}) \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx\,.
\end{aligned}$$

この級数は一様に収束するから，フーリエ級数である．

よって

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx\,. \tag{2.45}$$

フーリエ係数を考えると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\cdot \cos nx\,dx = 1\,, \\
&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\cdot \cos nx\,dx = 2a^n \quad (n \geqq 1)\,.
\end{aligned}$$

すなわち

$$\int_0^\pi \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2} \quad (n \geqq 0) \tag{2.46}$$

が得られたことになる．

2.3.8　フーリエ級数の例 8

例 8　$|a|<1$ とする．

$$f(x) = \log(1-2a\cos x+a^2) \quad (-\pi \leqq x \leqq \pi) \quad \text{（偶関数）}$$

(2.45) の等式

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$$

を変形すると

$$\frac{2a\cos x-2a^2}{1-2a\cos x+a^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx\,.$$

$a \fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{2\cos x-2a}{1-2a\cos x+a^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \cos nx\,.$$

この式は $a=0$ のときも成り立つ．

$|q|<1$ となる q をとると，$|a| \leqq |q|$ のとき，$|a^{n-1}\cos nx| \leqq |q|^{n-1}$ が成り立ち，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |q|^{n-1}$ は収束するから

$|a| \leqq |q| < 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\cos nx$ は一様収束する．

0 から a まで

$$\frac{2\cos x-2a}{1-2a\cos x+a^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \cos nx$$

を項別積分すると

$$-\int_0^a \frac{(1-2a\cos x+a^2)'}{1-2a\cos x+a^2}\,da = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a a^{n-1}\,da\,.$$

よって

$$\log(1-2a\cos x+a^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}\cos nx\,. \tag{2.47}$$

この級数は一様に収束するから，フーリエ級数である．
フーリエ係数を考えると

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^2)\,dx=0\,,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^2)\cos nx\,dx=-\frac{2a^n}{n}\quad(n\geqq 1)\,.$$

すなわち

$$\int_0^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^2)\,dx=0\,,\tag{2.48}$$

$$\int_0^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^2)\cos nx\,dx=-\frac{\pi a^n}{n}\quad(n\geqq 1)\tag{2.49}$$

を得る．

2.3.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos nx$ の収束

次の命題

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ は $x=2m\pi$ $(m=0\,,\pm1\,,\pm2\,,\dots)$ を除く点で収束，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ は すべての点で収束する．いずれの級数も $x=2m\pi$ を除く閉区間で一様収束する．

を使用したいので，一般化した次の補題の形で示しておく．

補題 5　$\{\lambda_n\}$ は（狭義の）減少列で， $\lambda_n>0$ $(n=1\,,2\,,\dots)$ を満たせば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos nx$ は $x=2m\pi$ $(m=0\,,\pm1\,,\pm2\,,\dots)$ を除く点で収束，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\sin nx$ は すべての点で収束する．いずれの級数も $x=2m\pi$ を除く閉区間で一様収束する．

［証明］ $\delta>0$ として $[\delta\,,2\pi-\delta]$ で一様収束することを証明する．

$m>n$ として $\displaystyle\left|\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\nu\cos\nu x-\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\cos\nu x\right|=\left|\sum_{\nu=n+1}^{m}\lambda_\nu\cos\nu x\right|$ を考える．

$\displaystyle 2\sin\frac{x}{2}\cos\nu x=\sin\frac{2\nu+1}{2}x-\sin\frac{2\nu-1}{2}x$ を用いると

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2}\sum_{\nu=n+1}^{m}\lambda_\nu\cos\nu x&=\sum_{\nu=n+1}^{m}\lambda_\nu\sin\frac{2\nu+1}{2}x-\sum_{\nu=n+1}^{m}\lambda_\nu\sin\frac{2\nu-1}{2}x\\&=\sum_{\nu=n+1}^{m-1}\lambda_\nu\sin\frac{2\nu+1}{2}x+\lambda_m\sin\frac{2m+1}{2}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\nu=n+2}^{m} \lambda_\nu \sin\frac{2\nu-1}{2}x - \lambda_{n+1}\sin\frac{2n+1}{2}x \\
&= \sum_{\nu=n+1}^{m-1} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}) \sin\frac{2\nu+1}{2}x + \lambda_m \sin\frac{2m+1}{2}x - \lambda_{n+1}\sin\frac{2n+1}{2}x\,.
\end{aligned}
$$

よって，$[\delta\,, 2\pi-\delta]$ で

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{\nu=n+1}^{m} \lambda_\nu \cos\nu x\right| &\leqq \frac{\displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{m-1} |\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}| + \lambda_m + \lambda_{n+1}}{2\sin\dfrac{x}{2}} \\
&\leqq \frac{\displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{m-1} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}) + \lambda_m + \lambda_{n+1}}{2\sin\dfrac{\delta}{2}} \\
&\leqq \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_m + \lambda_m + \lambda_{n+1}}{2\sin\dfrac{\delta}{2}} \\
&= \frac{\lambda_{n+1}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

したがって，$\epsilon > 0$ に対して n_0 を $\dfrac{\lambda_{n_0}}{\sin\dfrac{\delta}{2}} < \epsilon$ をとれば， $m > n > n_0$ に対して

$$
\left|\sum_{\nu=n+1}^{m} \lambda_\nu \cos\nu x\right| \leqq \frac{\lambda_{n+1}}{\sin\dfrac{\delta}{2}} \leqq \frac{\lambda_{n_0}}{\sin\dfrac{\delta}{2}} < \epsilon\,.
$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$ は $[\delta\,, 2\pi-\delta]$ で一様収束する． $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$ の周期は 2π だから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$ は $[2m\pi+\delta\,, 2(m+1)\pi-\delta]$ で一様収束することがわかる．

δ $(0 < \delta < \pi)$ は任意にとれるから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$ は $x = 2m\pi$ $(m = 0\,, \pm1\,, \pm2\,, \dots)$ を除く点で収束する．

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin nx$ についても同様に示せる。($x = 2m\pi$ $(m = 0\,, \pm1\,, \pm2\,, \dots)$ でも収束することに注意.) □

$\alpha > 0\,, \lambda_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ とおくと，次の補題を得る．

補題 6　$\alpha > 0$ とすると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$ は $x = 2m\pi$ $(m = 0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\ldots)$ を除く点で収束，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ は すべての点で収束する. いずれの級数も $x = 2m\pi$ を除く閉区間で一様収束する.

2.3.10　フーリエ級数の例 9

例 9 (点収束条件を満たさない場合)

$$f(x) = \log\left(2\cos\frac{x}{2}\right) \quad (-\pi < x < \pi) \quad \text{（偶関数）}$$

$f(-\pi+0)\,,f(\pi-0)$ が存在しないため，$f(x)$ が $(-\pi\,,\pi)$ で区分的に連続ではないことに注意.

(2.47) 式

$$\log(1 - 2a\cos x + a^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}\cos nx \quad (\,|a| < 1\,) \tag{2.50}$$

とアーベルの定理を利用する.

$a = 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ は補題 6 より $x = 2m\pi$ $(m = 0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\ldots)$ を除く点で収束するから，アーベルの定理より，(2.50) 式 で $a \to 1-0$ として

$$\log 2(1-\cos x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}\,.$$

$2(1-\cos x) = \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2$ より

$$\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2 = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}\,,$$

$$\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi)\,.$$

区間を $(-\pi\,,\pi)$ とすると $x = 0$ で収束しないから，0 を除く区間 $(0\,,2\pi)$ とするとよい.

$$\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi)\,. \tag{2.51}$$

$t = \pi - x$ とおくと

$$\log\left(2\cos\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\cos nt}{n} \quad (-\pi < t < \pi)\,.$$

t を x と書くと

$$\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi)\,. \tag{2.52}$$

この級数がフーリエ級数になっていることを定理 28 の Dini の条件を満たすことで示す.

［証明］$-\pi < x < \pi$ では $f(x) = \log\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)$ で，$f(x+2\pi) = f(x)$ を用いて $(-\infty\,,\infty)$ に拡張されているものとする. ただし，$x = 2m\pi$ $(m = 0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\dots)$ では (適当に決め) $f(2m\pi) = 0$ としておく. また，$\varphi_x(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)$ とおき

$$\int_0^{\pi} \frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du < \infty \tag{2.53}$$

となることを示す.

$f(x)$ は偶関数であるから，$0 \leqq x < \pi$ となる x を固定する.

$$\int_0^{\pi} \frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du = \int_0^{\pi-x} \frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du + \int_{\pi-x}^{\pi} \frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du$$

と積分区間を分ける.

$\pi - x < u < \pi$ のとき $\pi < x + u < x + \pi (< 2\pi)$ であるから，

$$f(x+u) = f(x+u-2\pi) = \log 2\cos\left(\frac{x+u-2\pi}{2}\right) = \log\left\{-2\cos\left(\frac{x+u}{2}\right)\right\}$$

となることに注意する.

よって，$\varphi_x(u)$ は

$0 \leqq u < \pi - x$ のとき

$$\begin{aligned}
\varphi_x(u) &= \log\left\{2\cos\left(\frac{x+u}{2}\right)\right\} + \log\left\{2\cos\left(\frac{x-u}{2}\right)\right\} - 2\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\\
&= \log\frac{\cos\dfrac{x+u}{2}\cdot\cos\dfrac{x-u}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\\
&= \log\frac{\cos u + \cos x}{1+\cos x}\,.
\end{aligned}$$

$\pi - x < u < \pi$ のとき

$$\begin{aligned}
\varphi_x(u) &= \log\left\{-2\cos\left(\frac{x+u}{2}\right)\right\} + \log\left\{2\cos\left(\frac{x-u}{2}\right)\right\} - 2\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\\
&= \log -\frac{\cos\dfrac{x+u}{2}\cdot\cos\dfrac{x-u}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\\
&= \log\left\{-\frac{\cos u + \cos x}{1+\cos x}\right\}.
\end{aligned}$$

$0 < \delta < \pi - x$ となる δ をとると

$$\int_0^{\pi-x} \frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du = \int_0^{\delta} \frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du + \int_{\delta}^{\pi-x} \frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du\,.$$ ここで

$$\lim_{u\to+0}\frac{\varphi_x(u)}{u} = \lim_{u\to+0}\frac{\bigl(\varphi_x(u)\bigr)'}{u'} = \lim_{u\to+0}\frac{-\sin u}{\cos u + \cos x} = 0$$

となり，$\displaystyle\int_0^\delta \frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du$ は存在する．

次に，$\displaystyle\lim_{u\to\pi-x-0}\frac{|\varphi_x(u)|}{u}=\infty$ となるが，$\alpha>0$ のとき（ $x_0=\pi-x$ とおく．）

$$
\begin{aligned}
&(x_0-u)^\alpha|\varphi_x(u)| \\
&=\left|(x_0-u)^\alpha\log\frac{\cos u-\cos x_0}{x_0-u}+(x_0-u)^\alpha\log(x_0-u)-(x_0-u)^\alpha\log(1+\cos x)\right| \\
&=\left|(x_0-u)^\alpha\log-\frac{\cos u-\cos x_0}{u-x_0}+\frac{1}{\alpha}(x_0-u)^\alpha\log(x_0-u)^\alpha-(x_0-u)^\alpha\log(1+\cos x)\right| \\
&\to\left|0\cdot\log\sin x_0+\frac{1}{\alpha}\cdot 0-0\right|=0 \quad (u\to x_0) \\
&\qquad\left(\lim_{u\to x_0}\frac{\cos u-\cos x_0}{u-x_0}=(\cos u)'|_{u=x_0}=-\sin x_0\,,\quad \lim_{t\to+0}t\log t=0\right).
\end{aligned}
$$

したがって，$\alpha>0$ のとき

$$
\lim_{u\to\pi-x}(\pi-x-u)^\alpha\frac{|\varphi_x(u)|}{u}=0
$$

となり，$\displaystyle\int_\delta^{\pi-x}\frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du$ は存在する．

以上のことから，$\displaystyle\int_0^{\pi-x}\frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du$ は存在する．

$\displaystyle\int_{\pi-x}^{\pi}\frac{|\varphi_x(u)|}{u}\,du$ の存在については同様に $\pi-x$ のところを考えればよい． □

$$
\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n} \quad (-\pi<x<\pi)\,.
$$

この級数がフーリエ級数になっていることがわかったので，フーリエ係数を考えて

$$
\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\,dx=0\,,
$$

$$
\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,.
$$

よって

$$
\int_0^\pi\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\,dx=0\,, \tag{2.54}
$$

$$
\int_0^\pi\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx=\frac{(-1)^{n-1}\pi}{2n}\,. \tag{2.55}
$$

(2.54) を変形すると

$$
\int_0^\pi\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,dx=-\pi\log 2\,.
$$

$\theta = \dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos\theta)\ d\theta = -\frac{\pi}{2}\log 2\,. \tag{2.56}$$

(2.56) で $x = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx = -\frac{\pi}{2}\log 2\,. \tag{2.57}$$

2.3.11 $[0\,,1]$ におけるベルヌーイ多項式のフーリエ級数展開

(2.29)

$$\frac{1}{2} - x = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n} \qquad (0 < x < 1)\,.$$

より，ベルヌーイ多項式 $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ のフーリエ級数展開が得られたことになる．

$$\varphi(x) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\nu x}{2\nu\pi} \qquad (0 < x < 1) \tag{2.58}$$

$$\varphi_{2n}(x) = (-1)^{n-1}2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n}} \qquad (n = 1\,,2\,,\dots) \tag{2.59}$$

$$\varphi_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n+1}} \qquad (n = 0\,,1\,,2\,,\dots) \tag{2.60}$$

とおくと，

$$\varphi_1(x) = -\varphi(x) = x - \frac{1}{2} \qquad (0 < x < 1) \tag{2.61}$$

$n \geqq 1$ のとき

$$\left|\frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n}}\right| \leqq \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\frac{1}{\nu^2}\,, \qquad \left|\frac{\sin 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n+1}}\right| \leqq \frac{1}{(2\pi)^{2n+1}}\frac{1}{\nu^3}$$

で $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$，$\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^3}$ は収束するから $\varphi_{2n}(x)\,,\varphi_{2n+1}(x)$ は一様に収束する．
よって， $n \geqq 2$ のとき $\varphi_n(x)$ は一様に収束する．

$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\varphi'_{2n}(x) &= (-1)^{n-1}2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{-\sin 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n-1}} = (-1)^{n}2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n-1}} \\
&= \varphi_{2n-1}(x) \\
\varphi'_{2n+1}(x) &= (-1)^{n+1}2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n}} = (-1)^{n-1}2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n}} \\
&= \varphi_{2n}(x)
\end{aligned}$$

より，$n \geqq 1$ のとき

$$\varphi'_{n+1}(x) = \varphi_n(x) \tag{2.62}$$

また，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_1(x)\,dx &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\,dx = \left[\frac{x^2 - x}{2}\right]_0^1 = 0\,, \\
\int_0^1 \varphi_{2n}(x)\,dx &= (-1)^{n-1} 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n}}\,dx \\
&= (-1)^n 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{\sin 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n+1}}\right]_0^1 \\
&= 0\,, \\
\int_0^1 \varphi_{2n+1}(x)\,dx &= (-1)^{n+1} 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\sin 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n}}\,dx \\
&= (-1)^{n+1} 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{-\cos 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n+2}}\right]_0^1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

から

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = 0 \quad (n = 1\,, 2\,, \ldots) \tag{2.63}$$

(2.61)，(2.62)，(2.63) より $\varphi_n(x)$ は n 次の多項式となる．

$$P_0(x) = 1\,, \quad P_n(x) = n!\varphi_n(x)$$

とおくと

$$P_0(x) = 1\,, \quad P'_n(x) = nP_n(x)\,, \quad \int_0^1 P_n(x)\,dx = 0 \quad (n = 1\,, 2\,, \ldots)$$

したがって，$P_n(x) = B_n(x)$ となるから，$[0\,, 1]$ におけるベルヌーイ多項式のフーリエ級数展開

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n-1} 2(2n)! \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n}} \qquad (n = 1\,, 2\,, \ldots) \tag{2.64}$$

$$B_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2(2n+1)! \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n+1}} \qquad (n = 1\,, 2\,, \ldots) \tag{2.65}$$

が得られた．(2.64) で $x = 0$ とおくと

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)\,. \tag{2.66}$$

(2.64) を用いると，補題 3

$|B_{2n}(x)|$ の $[0,1]$ における最大値は $|B_{2n}(0)| = |B_{2n}|(= |B_{2n}(1)|)$ である.

が証明できる．

［証明］ (2.64) より $[0,1]$ で

$$|B_{2n}(x)| = 2(2n)!\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n}}\right| \leqq 2(2n)!\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu\pi)^{2n}} = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)\,. \tag{2.67}$$

等号は，例えば $x = 0\,,1$ のとき成り立つ. □

(2.66) より

$$|B_{2n}| = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n) \leqq \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2) = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\cdot\frac{\pi^2}{6} \leqq \frac{4(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\,.$$

よって，不等式

$$|B_{2n}| \leqq \frac{4(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\,.$$

が成り立つ. $B_0 = 1\,, B_1 = -\frac{1}{2}\,, B_{2n+1} = 0\,(n = 1\,,2\,,\dots)$ だから

$$|B_n| \leqq \frac{4(n)!}{(2\pi)^n} \quad (n = 0\,,1\,,2\,,\dots)\,. \tag{2.68}$$

2.3.12　ベルヌーイ多項式の母関数

すべての x と $|z| < 2\pi$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} \tag{2.69}$$

が成り立つ.

(2.64) と (2.65) より，$[0\,,1]$ におけるベルヌーイ多項式のフーリエ級数展開

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n-1}2(2n)!\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n}} \qquad (n = 1\,,2\,,\dots)$$

$$B_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}2(2n+1)!\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\nu x}{(2\nu\pi)^{2n+1}} \qquad (n = 1\,,2\,,\dots)$$

が成り立つ. また， (2.65) より，$|B_{2n}(x)| \leqq \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n) \leqq \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2)$ が成り立つから

$$\left|\frac{B_{2n}(x)z^{2n}}{(2n)!}\right| \leqq 2\left|\frac{z}{2\pi}\right|^{2n}\zeta(2)\,.$$

したがって，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$ は $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $|z| < 2\pi$ で t に関して絶対収束し，x について一様に収束する．

$$\varphi(x\,,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \tag{2.70}$$

とおくと, $0 \leqq x \leqq 1\,, |z| < 2\pi$ のとき，$B_n(x+1) = B_n(x) + nx^{n-1}$ を用いると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} z^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(x) + nx^{n-1}}{n!} z^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xz)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \varphi(x\,,z) + ze^{xz}\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\varphi(x+1\,,z) = \varphi(x\,,z) + ze^{xz} \tag{2.71}$$

が成り立つ．

この関係式を用いれば，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$ は $|z| < 2\pi$ で t に関して絶対収束し，任意の有界区間上で x について一様に収束することがわかる．

次に，$B_n'(x) = nB_{n-1}$ を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\varphi(x\,,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n'(x)}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nB_{n-1}(x)}{n!} z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!} z^{n-1} \\
&= z\varphi(x\,,z)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\varphi(x\,,z)e^{-xz}\right) &= \frac{d}{dx}\varphi(x\,,z)e^{-xz} - \varphi(x\,,z)ze^{-xz} \\
&= z\varphi(x\,,z)e^{-xz} - \varphi(x\,,z)ze^{-xz} \\
&= 0
\end{aligned}$$

から $\varphi(x\,,z)e^{-xz} = g(z)$ すなわち

$$\varphi(x\,,z) = g(z)e^{xz}$$

とおける．これを (2.71) に代入すると

$$g(z)e^{(x+1)z} = g(z)e^{xz} + ze^{xz}\,.$$

これから，$g(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ となり，$\varphi(x\,,z) = \dfrac{ze^{xz}}{e^z - 1}$ を得る． □

$B_n = B_n(0)$ だから

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}$$

で $x = 0$ とおくと，ベルヌーイ数列 $\{B_n\}$ の（指数型）母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1}$$

を得る．

ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ をここでは

$(B0)$ $\quad B_0(x) = 1$

$(B1)$ $\quad B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$

$(B2)$ $\quad \displaystyle\int_0^1 B_n(x)dx = 0$

で定義して利用してきたが，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}$$

で定義する場合も多い．

2.3.13 フーリエ級数の例に現れた定積分

（DI　1）
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\ dx = -\frac{\pi}{2}\log 2\,.$$

フーリエ級数の例 9 で，フーリエ級数

$$\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n} \qquad (-\pi < x < \pi)\,.$$

のフーリエ係数を考えて

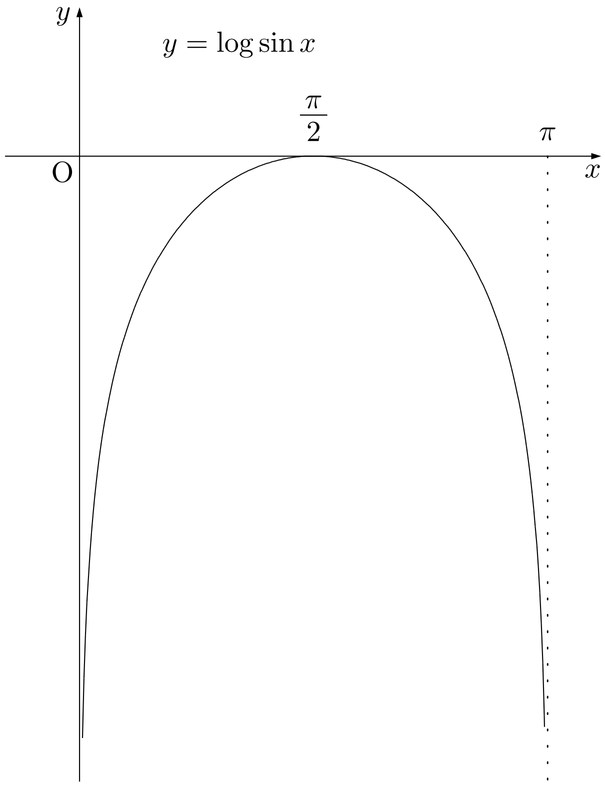
$$\int_0^{\pi}\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)\ dx = -\pi\log 2\,.$$

から

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)\ dx = -\frac{\pi}{2}\log 2\,, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\ dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

を導いた．

フーリエ級数を使わないで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\ dx$ を求めることを考える．



$x \to +0$ のとき $\log\sin x \to -\infty$ となるので積分が収束するかどうか検討する．

$\alpha > 0$ として

$$x^\alpha \log \sin x = x^\alpha \left(\log \frac{\sin x}{x} + \log x \right) = x^\alpha \log \frac{\sin x}{x} + x^\alpha \log x$$

と変形する.

$x \to +0$ のとき $x^\alpha \log \dfrac{\sin x}{x} \to 0$. また, $\displaystyle\lim_{t \to +0} t \log t = 0$ だから

$x \to +0$ のとき, $x^\alpha \log x = \dfrac{1}{\alpha} x^\alpha \log x^\alpha \to 0$.

よって $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^\alpha \log \sin x = 0$ となるから積分は収束する.

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx$ とおく.

$t = \pi - x$ とおくと $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin t)\ dt$. これらの式を使うと

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin x)\ dx = \int_0^{\pi} \log(\sin x)\ dx\,.$$

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx$ において $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ とおくと $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos t)\ dt$.

これらの式を使うと

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\ dx = \int_0^{\pi} \log(\sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin 2x}{2} dx\,.$$

$\theta = 2x$ とおくと

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin 2x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log \frac{\sin \theta}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log(\sin \theta)\, d\theta - \frac{1}{2} \log 2 \int_0^{\pi}\ d\theta \\
&= I - \frac{\pi}{2} \log 2 \qquad\qquad \left(\int_0^{\pi} \log(\sin \theta)\ d\theta = 2I \right)
\end{aligned}$$

から

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\ dx = -\frac{\pi}{2} \log 2\,. \tag{2.72}$$

(DI　2)　$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2} \quad (\,|a|<1\,,n=0\,,1\,,2\,,\dots\,)\,.$

フーリエ級数の例 7 では，一様に収束する級数

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$$

がフーリエ級数だから，フーリエ係数を考えて

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\cdot\cos nx\,dx = 1\,,$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\cdot\cos nx\,dx = 2a^n \quad (n \geqq 1)\,.$$

すなわち

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2} \quad (n \geqq 0)$$

を求めたが，直接この積分を求めるには，級数を項別積分するか複素積分を利用するとよい.

［級数を項別積分する解法］ $|a|<1$ のとき，$|a^n\cos nx| \leqq |a|^n$ で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a|^n$ が収束するから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n\cos nx$ は一様収束する. まず

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx\,. \tag{2.73}$$

を示す. フーリエ級数の例 7 では部分分数に分けて証明したが，ここでは，両辺に $1-2a\cos x+a^2$ をかけて $(1-2a\cos x+a^2)\left(1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nx\right)$ の a^n の係数を調べる.

定数項　$1\,,$

a を含む項　$1\cdot 2a\cos x+(-2a\cos x)\cdot 1 = 0\,,$

a^2 を含む項

$$\begin{aligned}1\cdot 2a^2\cos 2x+(-2a\cos x)\cdot 2a\cos x+a^2\cdot 1 &= a^2(2\cos 2x-4\cos^2 x+1)\\ &= a^2\{2(\cos^2 x-1)-4\cos^2 x+1\}\\ &= -a^2\,,\end{aligned}$$

a^n $(n \geqq 3)$ を含む項

$$\begin{aligned}&1\cdot 2a^n\cos nx+(-2a\cos x)\cdot 2a^{n-1}\cos(n-1)x+a^2\cdot 2a^{n-2}\cos(n-2)x\\ &= a^n\{2\cos nx-4\cos(n-1)x\cos x+2\cos(n-2)x\}\\ &= a^n\,[2\cos nx-2\{\cos nx+\cos(n-1)x\}+2\cos(n-2)x]\\ &= 0\end{aligned}$$

から

$$(1-2a\cos x+a^2)(1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nx)=1-a^2\,.$$

$|a|<1$ より $1-2a\cos x+a^2=(a-\cos x)^2+\sin^2 x>0$ だから 両辺を $1-2a\cos x+a^2$ で割れば (2.73) は成り立つ.

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\cos kx$$

の両辺に $\cos nx$ $(n\geqq 1)$ をかけたものを，0 から π まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{(1-a^2)\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx&=\int_0^{\pi}\cos nx\,dx+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\int_0^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx\\&=\Big[\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi}+2a^n\cdot\frac{\pi}{2}\\&=\pi a^n\,.\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx=\frac{\pi a^n}{1-a^2}\qquad(\,|a|<1\,,n=1\,,2\,,\dots\,)\,.$$

$n=0$ のときは

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\cos kx$$

を 0 から π まで項別積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{(1-a^2)}{1-2a\cos x+a^2}\,dx&=\int_0^{\pi}\,dx+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\int_0^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx\\&=[x]_0^{\pi}+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\Big[\frac{\sin kx}{k}\Big]_0^{\pi}\\&=\pi\,.\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx=\frac{\pi a^n}{1-a^2}\quad(\,|a|<1\,,n=0\,,1\,,2\,,\dots\,)\,.\quad\Box$$

［複素積分による解法 1］ $1-2a\cos\theta+a^2=(e^{i\theta}-a)(e^{-i\theta}-a)=-\dfrac{(e^{i\theta}-a)(ae^{i\theta}-1)}{e^{i\theta}}$ より

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\theta}}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta$$

とおくと

$$J=\int_0^{2\pi}-\frac{e^{in\theta}}{\dfrac{(e^{i\theta}-a)(ae^{i\theta}-1)}{e^{i\theta}}}\,d\theta$$

$z=e^{i\theta}\,,dz=izd\theta$ とおき単位円 C に関する積分にかえると

$$J=\int_C-\frac{z^n}{\dfrac{(z-a)(az-1)}{z}}\frac{dz}{iz}=i\int_C\frac{z^n}{(z-a)(az-1)}\,dz$$

$$f(z)=\frac{z^n}{(z-a)(az-1)}$$

とおくと，積分路 $C:z=e^{i\theta}$ 内の特異点は一位の極 $z=a$ のみであるから，留数は

$$\mathrm{Res}(a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\frac{z^n}{az-1}=\frac{a^n}{a^2-1}\,.$$

よって

$$J=i\cdot 2\pi i\cdot\frac{a^n}{a^2-1}=\frac{2a^n}{1-a^2}\,.$$

実部を比較して

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta=\frac{2\pi a^n}{1-a^2}\,.$$

ここで，左辺の積分区間を $[0\,,\pi]$ と $[\pi\,,2\pi]$ に分けて第二の積分で変数 θ を $2\pi-\phi$ に置き換えれば

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta&=\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta+\int_\pi^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta\\&=\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta+\int_0^{\pi}\frac{\cos n\phi}{1-2a\cos\phi+a^2}\,d\phi\\&=2\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta\end{aligned}$$

となるから，結局

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta=\frac{\pi a^n}{1-a^2}$$

を得る． □

［複素積分による解法 2］ 分母 $= 1 - 2a\cos x + a^2 = (e^{ix} - a)(e^{-ix} - a)$ より，単位円 C に関する積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(tz-1)(z-a)(az-1)} \quad (\,|t| < 1\,)$$

を考える. 単位円内で考えれば $z = a$ のみが $f(z) = \dfrac{1}{(tz-1)(z-a)(az-1)}$ の極であるから，留数は

$$\mathrm{Res}(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{1}{(tz-1)(az-1)} = \frac{1}{(1-at)(1-a^2)}\,.$$

$z = e^{i\theta}$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(tz-1)(z-a)(az-1)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{(te^{i\theta}-1)(e^{i\theta}-a)(ae^{i\theta}-1)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-te^{i\theta})(1-2a\cos\theta+a^2)}\end{aligned}$$

となるから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-te^{i\theta})(1-2a\cos\theta+a^2)} = \frac{1}{(1-at)(1-a^2)}\,.$$

t^n の係数を比較するために t のべき級数にすると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}\left\{1+te^{i\theta}+t^2e^{i2\theta}+\cdots+t^ne^{in\theta}+\cdots\right\}d\theta \\ &= \frac{1}{1-a^2}(1+at+a^2t^2+\cdots+a^nt^n+\cdots)\,.\end{aligned}$$

t^n の係数を比較すると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\theta}}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = \frac{a^n}{1-a^2}\,.$$

実部を比較すると

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}\,. \tag{2.74}$$

積分区間を 2 つに分けると

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = \int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta + \int_\pi^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta\,.$$

等式の右辺の第 2 項において，$s = 2\pi - \theta$ とおくと

$$\int_\pi^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = \int_0^{\pi}\frac{\cos ns}{1-2a\cos s+a^2}\,ds$$

となるから

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta\,.$$

(2.74) は

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2} \quad (\,|a|<1\,, n=0\,,1\,,2\,,\dots) \tag{2.75}$$

となる. □

$|a|>1$ のときは $\left|\dfrac{1}{a}\right|<1$ であるから，(2.75) 式の a のところに $\dfrac{1}{a}$ を代入した式を変形して

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a^n(a^2-1)} \quad (\,|a|>1\,, n=0\,,1\,,2\,,\dots) \tag{2.76}$$

を得る.

（DI　3）

$$\int_0^{\pi} \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx = \begin{cases} 0 & (\,|a|<1\,) \\ 2\pi\log|a| & (\,|a|>1\,) \\ 0 & (\,|a|=1\,) \end{cases}$$

$$f(x,a)=\log(1-2a\cos x+a^2)\,, \varphi(a)=\int_0^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^2)\,dx=\int_0^{\pi} f(x,a)\,dx$$

とおく.

(1)　$|a|<1$ の場合; $1-2a\cos x+a^2=(a-\cos x)^2+\sin^2 x>0$

$f(x,a)\,, f_a(x,a)=\dfrac{2(a-\cos x)}{1-2a\cos x+a^2}$ は連続関数だから，$\varphi(a)$ は微分可能である.

$$\begin{aligned}\varphi'(a) &= \int_0^{\pi} f_a(x,a)\,dx = \int_0^{\pi}\frac{2(a-\cos x)}{1-2a\cos x+a^2}\,dx\\ &= 2a\int_0^{\pi}\frac{1}{1-2a\cos x+a^2}\,dx - 2\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx\\ &= 2a\cdot\frac{\pi}{1-a^2} - 2\cdot\frac{\pi a}{1-a^2} \qquad ((2.75)\text{ を利用})\\ &= 0\end{aligned}$$

だから，　$\varphi(a)=\varphi(0)=0\,.$

よって，$|a|<1$ のとき

$$\int_0^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^2)\,dx=0\,. \tag{2.77}$$

(2)　(1) の結果より

$$\int_0^{\pi} \log\left(1 - 2\cdot\frac{1}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}\right)\,dx = 0\,,$$

$$\int_0^{\pi} \left\{\log(1 - 2a\cos x + a^2) - \log a^2\right\}\,dx = 0\,.$$

よって $|a| > 1$ のとき

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = 2\pi\log|a|\,. \tag{2.78}$$

(3)　$a = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= \int_0^{\pi} \log 2(1-\cos x)\,dx = \int_0^{\pi} \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx \\
&= 2\int_0^{\pi} \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\,dx \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(2\sin\theta\right)\,d\theta \qquad \left(\theta = \frac{x}{2}\right) \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\log\sin\theta + \log 2\right)\,d\theta = 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\theta\,d\theta + \frac{\pi}{2}\log 2\right) \\
&= 4\left(-\frac{\pi}{2}\log 2 + \frac{\pi}{2}\log 2\right) \qquad \text{((2.72) を利用)} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

$a = -1$ のとき

$$\begin{aligned}
\varphi(-1) &= \int_0^{\pi} \log 2(1+\cos x)\,dx = \int_0^{\pi} \log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx \\
&= 2\int_0^{\pi} \log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\,dx \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(2\cos\theta\right)\,d\theta \qquad \left(\theta = \frac{x}{2}\right) \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\log\cos\theta + \log 2\right)\,d\theta = 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\theta\,d\theta + \frac{\pi}{2}\log 2\right) \\
&= 4\left(-\frac{\pi}{2}\log 2 + \frac{\pi}{2}\log 2\right) \qquad \text{((2.72) を利用)} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

（DI　4）$n \geqq 1$ のとき

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2a\cos x + a^2)\cos nx\,dx = \begin{cases} -\dfrac{\pi a^n}{n} & (\,|a| < 1\,) \\ -\dfrac{\pi}{na^n} & (\,|a| > 1\,) \end{cases}$$

$n \geqq 1\,,|a| < 1$ のとき

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \log(1-2a\cos x + a^2)\cos nx\,dx = \int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx \\
&= \left[\log(1-2a\cos x+a^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}\left(\frac{\sin nx}{n}\right) dx \\
&= \frac{a}{n}\int_0^\pi \frac{-2\sin nx \sin x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx \\
&= \frac{a}{n}\left(\int_0^\pi \frac{\cos(n+1)x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx - \int_0^\pi \frac{\cos(n-1)x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx\right) \\
&= \frac{a}{n}\left(\frac{\pi a^{n+1}}{1-a^2} - \frac{\pi a^{n-1}}{1-a^2}\right) \qquad \text{((2.75) を利用)} \\
&= -\frac{\pi a^n}{n}\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\cos nx\,dx = -\frac{\pi a^n}{n} \qquad (|a|<1\,, n=1\,,2\,,\dots)\,. \tag{2.79}$$

$|a| > 1$ のときは，a のところに $\dfrac{1}{a}$ を代入して

$$\int_0^\pi \left\{\log(1-2a\cos x+a^2) - \log a^2\right\}\cos nx\,dx = -\frac{\pi}{na^n}$$

から

$$\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\cos nx\,dx = -\frac{\pi}{na^n} \qquad (|a|>1\,, n=1\,,2\,,\dots)\,.$$

次に，$\displaystyle\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\cos nx\,dx$ において $|a|=1$ 場合は次のようになる.

（DI　5）

$$\int_0^\pi \log\left(2\sin\frac{x}{2}x\right)\cos nx\,dx = -\frac{\pi}{2n} \qquad (n=1\,,2\,,\dots)\,,$$

$$\int_0^\pi \log\left(2\cos\frac{x}{2}x\right)\cos nx\,dx = (-1)^{n-1}\frac{\pi}{2n} \qquad (n=1\,,2\,,\dots)\,.$$

(2.79) で $a \to 1-0$ とするための準備をしておく.

補題 7　関数列 $\{f_n(x)\}$ が任意の $\delta\left(0<\delta<\dfrac{a+b}{2}\right)$ に対して $[a+\delta\,,b-\delta]$ で連続で，$f(x)$ に一様収束するものとする．また， $[a+\delta\,,b-\delta]$ で $|f_n(x)|\leqq g(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が存在するような $g(x)$ があれば，
$\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx$，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ も存在して

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,.$$

［証明］ まず，$[a+\delta\,,b-\delta]$ で $|f_n(x)|\leqq g(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が存在することより，

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f_n(x)|\,dx\leqq\int_{a+\delta}^{b-\delta}g(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx<\infty$$

が成り立つ．
$\delta\to+o$ とすれば積分区間が広くなるから $\displaystyle\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f_n(x)|\,dx$ は単調増加で上に有界であるから収束する．
したがって　$\displaystyle\int_a^b|f_n(x)|\,dx$ も存在して

$$\int_a^b|f_n(x)|\,dx\leqq\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

同様にして $\{f_n(x)\}$ が $[a+\delta\,,b-\delta]$ で $f(x)$ に一様収束するから，$|f_n(x)|\leqq g(x)$ において $n\to\infty$ とすると $|f_(x)|\leqq g(x)$ を得るから，同様にして $\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,dx$ も存在して

$$\int_a^b|f(x)|\,dx\leqq\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

したがって $|f(x)|$ が積分可能となるから $f(x)$ も積分可能である．
　次に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ の成立を示す．
$\{f_n(x)\}$ が $[a+\delta\,,b-\delta]$ で $f(x)$ に一様収束するから，任意の $\epsilon>0$ に対して，ある n_0 が存在して，$n>n_0$ ならば $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$　が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b\{f_n(x)-f(x)\}\,dx\right|\\
&=\left|\int_a^{a+\delta}\{f_n(x)-f(x)\}\,dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}\{f_n(x)-f(x)\}\,dx+\int_{b-\delta}^b\{f_n(x)-f(x)\}\,dx\right|\\
&=\int_a^{a+\delta}(|f_n(x)|+|f(x)|)\,dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f_n(x)-f(x)|\,dx+\int_{b-\delta}^b(|f_n(x)|+|f(x)|)\,dx
\end{aligned}$$

$$\leqq 2\int_a^{a+\delta} g(x)\,dx + (b-a-2\delta)\epsilon + 2\int_{b-\delta}^b g(x)\,dx$$

から

$$\left|\int_a^b \{f_n(x)-f(x)\}\,dx\right| \leqq 2\int_a^{a+\delta} g(x)\,dx + (b-a-2\delta)\epsilon + 2\int_{b-\delta}^b g(x)\,dx$$

を得る．$\delta \to +0$ とすると

$$\left|\int_a^b \{f_n(x)-f(x)\}\,dx\right| \leqq (b-a)\epsilon\,.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

□

$-1 < a_n < 1$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ をとる．(2.79) より

$$\int_0^\pi \log(1-2a_n\cos x + {a_n}^2)\cos kx\,dx = -\frac{\pi a^k}{k}\,. \tag{2.80}$$

ここで，$f_n(x) = \log(1-2a_n\cos x + {a_n}^2)\cos kx$ とおく．

まず，任意の δ $(0<\delta<\pi)$ に対して $[\delta\,,\pi-\delta]$ で $|f_n(x)| \leqq g(x)$ が成り立ち，$\displaystyle\int_0^\pi g(x)\,dx$ が存在するような $g(x)$ があることを示す。

$1-2a_n\cos x + {a_n}^2 = (a-\cos x)+\sin^2 x \quad (-1<a_n<1)$ より

$$\sin^2 x \leqq (a-\cos x)+\sin^2 x \leqq max\left\{(1-\cos x)+\sin^2 x\,,(-1-\cos x)+\sin^2 x\right\}\,.$$

よって

$$|f_n(x)| \leqq \max\left\{-\log\sin^2 x\,,\max\left(\log 4\sin^2\frac{x}{2}\,,\log 4\cos^2\frac{x}{2}\right)\right\}\,.$$

$g(x) = \max\left\{-2\log|\sin x|\,,\max\left[2\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\,,2\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\right]\right\}$ とおくと，$|f_n(x)| \leqq g(x)$ が成り立つ．また

$$\int_0^\pi \log\sin x\,dx\,,\int_0^\pi \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\,dx\,,\int_0^\pi \log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\,dx$$

は存在する．

次に，任意の δ $(0<\delta<\pi)$ に対して $[\delta\,,\pi-\delta]$ で $f_n(x)$ は $f(x)=\log(2-2\cos x)$ に一様収

束することを示す.

$$
\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &\leqq \left|\log(1-2a_n\cos x+{a_n}^2)-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2\right| \\
&= \left|\log\frac{1-2a_n\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)+{a_n}^2}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right| \\
&= \left|\log\left\{a_n+\frac{(1-a_n)^2}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right\}\right| .
\end{aligned}
$$

$\dfrac{1}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}$ の $[\delta\,,\pi-\delta]$ における最大値を $M=\dfrac{1}{\left(2\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}$ とおくと

$$
a_n \leqq a_n+\frac{(1-a_n)^2}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} \leqq a_n+M(1-a_n)^2 .
$$

$n\to\infty$ のとき a_n と $a_n+M(1-a_n)^2$ はともに 1 に収束するから，$-\log a_n$，$\log\left\{a_n+M(1-a_n)^2\right\}$ は 0 に収束する.

したがって，任意の $\epsilon>0$ に対して，ある n_0 が存在して，$n>n_0$ のとき

$$
|\log a_n|<\epsilon\,,\left|a_n+M(1-a_n)^2\right|<\epsilon
$$

とできるから

$$
|f_n(x)-f(x)| \leqq \left|\log\left\{a_n+\frac{(1-a_n)^2}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right\}\right| \leqq \max\left\{-\log a_n\,,a_n+M(1-a_n)^2\right\}<\epsilon .
$$

したがって，補題 7 より

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f_n(x)\,dx=\int_0^\pi f(x)\,dx .
$$

が成り立つから

$$
-\lim_{n\to\infty}\frac{\pi{a_n}^k}{k}=\int_0^\pi \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2\cos kx\,dx .
$$

よって

$$
\int_0^\pi \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos kx\,dx=-\frac{\pi}{2k} .
$$

$\theta=\pi-x$ とおくことにより

$$
\int_0^\pi \log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos k\theta\,d\theta=(-1)^{k-1}\frac{\pi}{2k} .
$$

3　ガンマ関数

3.1　凸関数

区間 I で定義された関数 $f(x)$ が I で凸関数であるとは
$\alpha \geqq 0\,,\beta \geqq 0\,,\alpha+\beta=1$ を満足する任意の 2 数 $\alpha\,,\beta$ と任意の 2 数 $x\,,y \in I$ に対して

$$f(\alpha x+\beta y) \leqq \alpha f(x)+\beta f(y)$$

が成り立つときをいう。

関数 $f: I \to \mathbb{R}$ が I で凸関数のとき，I に含まれる任意の $x_1\,,x\,,x_2\,(x_1<x<x_2)$ に対して

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{3.1}$$

が成り立つ.

［証明］ $x=\dfrac{(x_2-x)x_1+(x-x_1)x_2}{(x-x_1)+(x_2-x)}$

$=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2$ より

$$f(x) \leqq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)\,.$$

$\cdots(*)$

$(*)$ の両辺から $f(x_1)$ を引いて変形すると

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,.$$

$(*)$ の両辺から $f(x_2)$ を引いて変形すると

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\,.$$

したがって

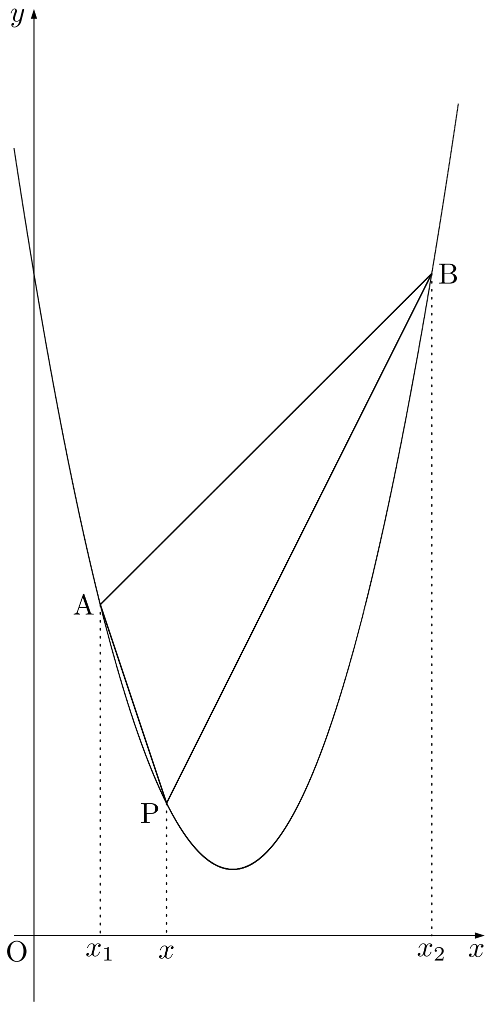
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

が成り立つ. □

(3.1) は図形的には，$\mathrm{A}(x_1\,,f(x_1))\,,\mathrm{P}(x\,,f(x))\,,$ $\mathrm{B}(x_2\,,f(x_2))$ とおくと，

(AP の傾き) $\leqq$ (AB の傾き) $\leqq$ (PB の傾き)

ということを表している.



補題 8　関数 $f : I \to \mathbb{R}$ について，$f'(x)$ が存在する場合には

(1°)　$f(x)$ が凸関数ならば，$f'(x)$ は単調増加である.
(2°)　$f'(x)$ が単調増加ならば，$f(x)$ は凸関数である.

［証明］ (1°) I に含まれる任意の $x_1, x, x_2\,(x_1 < x < x_2)$ に対して，(3.1) より

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

$x \to x_1 + 0$ のとき，左側の不等式より

$$f'(x_1) \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,.$$

$x \to x_2 - 0$ のとき，右側の不等式より

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq f'(x_2)\,.$$

これらの不等式より，$f'(x_1) \leqq f'(x_2)$ を満たすから，$f'(x)$ は単調増加である.

(1°) $x < y$ として，2 数を固定する.

$F(X) = \alpha f(X) + \beta f(y) - f(\alpha X + \beta y)$　$(\,x \leqq X \leqq y\,)$ とおくと

$$F'(X) = \alpha\,[f'(X) - f'(\alpha X + \beta y)]\,.$$

$X - (\alpha X + \beta y) = (\alpha X + \beta X) - (\alpha X + \beta y) = \beta(X - y) \leqq 0$ より $X \leqq \alpha X + \beta y$ だから，$f'(X) \leqq f'(\alpha X + \beta y)$. $F(X)$ は単調減少で，$F(y) = 0$ より $F(X) \geqq 0$.
よって，$F(x) \geqq 0$ より，$f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y)$. □

系 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ について，$f''(x)$ が存在する場合には

(1°) $f(x)$ が凸関数ならば，I で $f''(x) \geqq 0$ である.
(2°) I で $f''(x) \geqq 0$ ならば，$f(x)$ は凸関数である.

3.2　ガンマ関数の定義

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$$

は収束することを示す. $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$ とすると，$0 < x < 1$ の場合，$t \to +0$ のとき $f(t) \to +\infty$ となるから，この積分を

$$g_1(x) = \int_0^1 f(t)\,dt\,, \quad g_2(x) = \int_1^\infty f(t)\,dt$$

の２つに分け，それぞれの収束を確かめる．
$0 < x < 1$ の場合

$$(t-0)^{\alpha}|f(t)| = e^{-t}t^{\alpha-(1-x)}$$

となるから，$\alpha = 1 - x$ とおけば，$0 < \alpha < 1$ で $\displaystyle\lim_{t\to+0} t^{\alpha}|f(t)| = \lim_{t\to+0} e^{-t} = 1$．
したがって，J_1 は収束する．$x \geqq 1$ のときは $g_1(x)$ は明らかに収束する．
次に，$g_2(x)$ については，$\alpha > 1$ ならば，

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha}|f(t)| = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+\alpha-1}}{e^t} = 0$$

となるから，$g_2(x)$ は収束する．
以上のことから，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ は収束する．

オイラーのガンマ関数は $x > 0$ に対して，

$$\mathit{\Gamma}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \tag{3.2}$$

によって定義される．
次に，$\mathit{\Gamma}(x)$ が $x > 0$ で連続であることを示す．
$\displaystyle g_1(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt = \lim_{s\to+0}\int_s^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt$ は $0 < x_0 \leqq x$ において一様収束する．なぜならば，$0 < t < 1$ から $e^{-t}t^{x-1} \leqq e^{-t}t^{x_0-1}$ で $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x_0-1}\,dt$ は収束するからである．
よって，$x_0 \leqq x$ のとき $g_1(x)$ は連続である．$x_0 > 0$ は任意だから，$g_1(x)$ は $x > 0$ で連続である．
$\displaystyle g_2(x) = \int_1^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ は $0 \leqq x \leqq x_0$ において一様収束する．なぜならば，$1 < t$ から $e^{-t}t^{x-1} \leqq e^{-t}t^{x_0-1}$ で $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-t}t^{x_0-1}\,dt$ は収束するからである．
よって，$x \leqq x_0$ のとき $g_2(x)$ は連続である．$x_0 > 0$ は任意だから，$g_2(x)$ は $x > 0$ で連続である．
したがって

$$\mathit{\Gamma}(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

は $x > 0$ で連続である．
定義式から，

$$\mathit{\Gamma}(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x}dt = \left[-e^{-t}t^{x}\right]_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = x\mathit{\Gamma}(x)$$

$$\mathit{\Gamma}(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1$$

ゆえに，

$$\mathit{\Gamma}(x+1) = x\mathit{\Gamma}(x) \qquad , \quad \mathit{\Gamma}(1) = 1 \tag{3.3}$$

が成り立つ．特に任意の自然数 n に対して，

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = n!$$

を得る．ガンマ関数がなぜ階乗（$n!$）から正の実数への拡張と見ることができるのかをこの式は教えてくれる．

ガンマ関数の微分に関しては，

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t dt$$

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log^{(n)} t dt$$

が成り立つ．

まず

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{d}{dx}(e^{-t}t^{x-1})dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t dt$$

が成り立つことを示す. このためには，右辺の積分が一様に収束することを示せばよい.
限界 ∞ に関しては，$x \leqq x_0$ とすると，t を十分大きくとれば，

$t > 0$ のとき 不等式 $\log t \leqq t-1 < t$ が成り立つことに注意して

$$\int_t^\infty e^{-x}t^{x-1}\log t\, dt \leqq \int_t^\infty e^{-x}t^{x_0}\frac{\log t}{t}\, dt < \int_t^\infty e^{-x}t^{x_0}\, dt < \epsilon\,.$$

また限界 0 に関しては，$0 < x_1 < x_2 \leqq x$ とすると，$\lim_{t\to+0} t^{x_2-x_1}\log t = 0$ より t を十分小さくとれば，$|t^{x_2-x_1}\log t| < 1$ が成り立つことに注意して

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t e^{-x}t^{x-1}\log t\, dt\right| &\leqq \int_0^t \left|e^{-x}t^{x_2-1}\log t\right|\, dt \\ &= \int_0^t \left|e^{-x}t^{x_1-1}\left(t^{x_2-x_1}\log t\right)\right|\, dt \\ &\leqq \int_0^t \left|e^{-x}t^{x_1-1}\right|\, dt < \epsilon\end{aligned}$$

とできる.

同様にして

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log^{(n)} t dt$$

が成り立つ.

オイラー定数は

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0.5772156649015328606\ldots,$$

で定義される．また簡単のため，

$$\mathbb{R}^{\#} = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \fallingdotseq 0, -1, -2, \ldots\} \tag{3.4}$$

なる記号を使う．

$x \in \mathbb{R}^{\#}$ に対して**ガウス数列**

$$\varGamma_n(x) = \frac{n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{3.5}$$

は収束し，

$$\varGamma(x) = \lim_{n\to\infty} \varGamma_n(x) \tag{3.6}$$

と定義する．$(0\,,\infty)$ から $\mathbb{R}^{\#} = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \fallingdotseq 0, -1, -2, \ldots\}$ に拡張されていることに注意したい．

a) 関数 $\varGamma$ は $(0\,,\infty)$ 上で対数的凸である．

I を開区間とする．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が対数的凸であるとは，

(LC1)　　全ての $x \in I$ に対して $f(x) > 0$,

(LC2)　　$\log f$　が凸

なる 2 つの条件をみたすときをいう．

［証明］ $I = (0\,,\infty)$ とする．$x > 0$ のとき $\varGamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt > 0\,.$

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\varGamma(x) = \frac{d}{dx}\frac{\varGamma'(x)}{\varGamma(x)} = \frac{\varGamma(x)\varGamma''(x) - \{\varGamma'(x)\}^2}{\{\varGamma(x)\}^2} \geqq 0$$

であることを示す．

$$\varGamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\,, \varGamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t dt\,, \varGamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2 dt$$

から，任意の実数 u に対して

$$\begin{aligned}\varGamma(x)u^2 + 2\varGamma'(x)u + \varGamma''(x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\left[u^2 + 2u\log t + (\log t)^2\right]\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,(u + \log t)^2\,dt \geqq 0\,.\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{D}{4} = \{\varGamma'(x)\}^2 - \varGamma(x)\varGamma''(x) \leqq 0$ から

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\varGamma(x) = \frac{\varGamma(x)\varGamma''(x) - \{\varGamma'(x)\}^2}{\{\varGamma(x)\}^2} \geqq 0\,. \qquad \square$$

b) 関数 $\varGamma : \mathbb{R}^{\#} \to \mathbb{R}$ は零点をもたず，

$$\varGamma(x) = e^{-\gamma x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}} = e^{-\gamma x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}} \qquad \text{（ワイエルシュトラウス積）} \tag{3.7}$$

が成り立つ．(3.7) は次のように書き直して使うことが多い．

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}. \tag{3.8}$$

この式からオイラー定数はガンマ関数に深く関連していることがわかる．

ガウス数列の逆数は

$$\begin{aligned}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!n^x} &= e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)}x\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-x}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\\ &= xe^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\end{aligned}$$

と変形できるから，(3.6) より (3.8) が得られる．

c) 関数 $\Gamma : \mathbb{R}^{\#} \to \mathbb{R}$ は無限回微分可能で，その対数微分については，

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right). \tag{3.9}$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = (-1)^{m+1}m!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{m+1}}, \qquad m \geqq 1. \tag{3.10}$$

［証明］ (3.7) を利用して，まず $(0\,,\infty)$ で $\Gamma(x)$ が微分可能であることを示す．

(I) $(0\,,\infty)$ で $\Gamma(x)$ が微分可能であることの証明

$x > 0$ として，(3.7) の両辺の対数をとると

$$\log\Gamma(x) = -\gamma x - \log x + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{x}{k} - \log\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}.$$

ここで，右辺の無限級数を項別微分した級数

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{x}{k} - \log\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}' &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+k)}\end{aligned}$$

を考える．

$$\frac{1}{k(x+k)} = \frac{x}{k^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{k}} < \frac{x}{k^2}$$

が成り立ち，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ が収束することから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+k)}$ は $(0\,,\infty)$ で一様収束する．

したがって，$\log\Gamma(x)$ は $(0\,,\infty)$ で微分可能で，

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right)$$

が成り立つ．$\Gamma(x)=e^{\log\Gamma(x)}$ も $(0\,,\infty)$ で微分可能である．

(II) $\mathbb{R}^{\#}$ で $\Gamma(x)$ が微分可能であることの証明

$(m\,,m+1)$ で $\Gamma(x)$ がで微分可能ならば $(m-1\,,m)$ で $\Gamma(x)$ が微分可能であることを証明すればよい．なぜならば，$(0\,,1)$ で $\Gamma(x)$ が微分可能であるから，帰納的に，すべての整数 m について $(m\,,m+1)$ で $\Gamma(x)$ が微分可能となるからである．

$(m\,,m+1)$ で $\Gamma(x)$ がで微分可能であるとする．$x_0\,,x\in(m-1\,,m)$ とし，$u_0=x_0+1$，$u=x+1$ とおくと，$u_0\,,u\in(m\,,m+1)$ となる．$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ を使うと

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0}&=\frac{\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}-\dfrac{\Gamma(x_0+1)}{x_0}}{x-x_0}=\frac{\dfrac{\Gamma(u)}{u-1}-\dfrac{\Gamma(u_0)}{u_0-1}}{u-u_0}\\&=\frac{1}{(u_0-1)(u-1)}\frac{(u_0-1)\{\Gamma(u)-\Gamma(u_0)\}-\Gamma(u_0)(u-u_0)}{u-u_0}\,.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{u\to u_0}\frac{1}{(u_0-1)(u-1)}\left[(u_0-1)\frac{\{\Gamma(u)-\Gamma(u_0)\}}{u-u_0}-\Gamma(u_0)\right]\\&=\frac{1}{(u_0-1)^2}\{(u_0-1)\Gamma'(u_0)-\Gamma(u_0)\}\end{aligned}$$

から，$(m-1\,,m)$ の各点で $\Gamma(x)$ は微分可能である．

$\mathbb{R}^{\#}$ で $\Gamma(x)$ が微分可能であることがわかったから，

$$\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\{\log\Gamma(x)\}'$$

とおく．$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ の両辺を x で微分した

$$\Gamma'(x+1)=\Gamma(x)+x\Gamma'(x)$$

から

$$\psi(x+1)=\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\frac{\Gamma(x)+x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)}=\frac{1}{x}+\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{1}{x}+\psi(x)\,.$$

よって，$\mathbb{R}^{\#}$ で

$$\psi(x+1)=\psi(x)+\frac{1}{x}$$

が成り立つ．

(I) より，$(0\,,\infty)$ で

$$\psi(x)=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\Big)$$

が成り立っているから，

m を整数として，$(m\,,m+1)$ で

$$\psi(x)=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\Big)$$

が成り立つならば

$(m-1\,,m)$ で

$$\psi(x)=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\Big)$$

が成り立つことを示せばよい．$x\in(m-1\,,m)$ とすると $x+1\in(m\,,m+1)$ で

$$\begin{aligned}
\psi(x)&=\psi(x+1)-\frac{1}{x}\\
&=-\gamma-\frac{1}{x+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k+1}\Big)-\frac{1}{x}\\
&=-\gamma-\frac{1}{x+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{x+k+1}+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)-\frac{1}{x}\\
&=-\gamma-\frac{1}{x+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{x+k+1}\Big)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)-\frac{1}{x}\\
&=-\gamma-\frac{1}{x+1}+\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\Big)+1-\frac{1}{x}\\
&=-\gamma-\frac{1}{x+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\Big)-\Big(1-\frac{1}{x+1}\Big)+1-\frac{1}{x}\\
&=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\Big)
\end{aligned}$$

となる．

(III) $\mathbb{R}^{\#}$ で $\mathit{\Gamma}(x)$ が無限回微分可能であることの証明

$\mathbb{R}^{\#}$ で $\mathit{\Gamma}(x)$ が微分可能であることは (ii) で示したから，　$\psi(x)=\dfrac{\mathit{\Gamma}'(x)}{\mathit{\Gamma}(x)}=\{\log\mathit{\Gamma}(x)\}'$ が無限回微分可能であることを示せばよい．

$$\frac{d^m}{dx^m}\psi(x)=(-1)^{m+1}m!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{m+1}},\qquad m\geqq 1 \tag{3.11}$$

が成り立つことを m に関する帰納法で証明する．

(i) $m=1$ のとき

$$\psi(x)=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\Big)$$

の右辺の無限級数を項別微分した級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$ を考える．
$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-2}=1$ より すべての k について $\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-2}<M$ を満たす定数 M が存在する．よって

$$\frac{1}{(x+k)^2}=\frac{1}{k^2}\cdot\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-2}<\frac{M}{k^2}$$

が成り立ち，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ が収束することから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$ は $(0\,,\infty)$ で一様収束する．
したがって，$\psi(x)$ は $(0\,,\infty)$ で微分可能で，

$$\psi'(x)=\frac{1}{x^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$$

が成り立つ．
(ii) m のとき成り立つと仮定すると

$$\frac{d^m}{dx^m}\psi(x)=(-1)^{m+1}m!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{m+1}}$$

が成り立つから，右辺の無限級数を項別微分した級数 $\displaystyle(-1)^{m+2}(m+1)!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{m+2}}$ を考える．
$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-(m+2)}=1$ より すべての k について $\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-(m+2)}<M$ を満たす定数 M が存在する．よって

$$\frac{1}{(x+k)^{m+2}}=\frac{1}{k^{m+2}}\cdot\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-(m+2)}<\frac{M}{k^{m+2}}$$

が成り立ち，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{m+2}}$ が収束するから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{m+2}}$ は $(0\,,\infty)$ で一様収束する．
したがって，$\psi^m(x)$ は $(0\,,\infty)$ で微分可能で，

$$\frac{d^m}{dx^{m+1}}\psi(x)=(-1)^{m+2}(m+1)!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{m+2}}$$

となる． □

ここで現れた

$$\frac{d}{dx}(\log\Gamma(x))=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

はディ Γ (digamma) 関数またはプサイ (psi) 関数と呼ばれている．

$$\psi(x)=\frac{d}{dx}(\log\Gamma(x)) \tag{3.12}$$

で定義され，(3.9)，(3.10) から，

$$\psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) \tag{3.13}$$

$$\frac{d^m}{dx^m} \psi(x) = (-1)^{m+1} m! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^{m+1}}, \qquad m \geqq 1 \tag{3.14}$$

が成り立つ．(3.13) の式を

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \geqq 1$$

を用いて書き直すと簡単な表現が得られる．

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) = -\gamma - \frac{1}{x} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma \right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\log n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \right).\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\log n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \right). \tag{3.15}$$

また， $\mathit{\Gamma}(x+1) = x\mathit{\Gamma}(x)$ の両辺を x で微分した

$$\mathit{\Gamma}'(x+1) = \mathit{\Gamma}(x) + x\mathit{\Gamma}'(x)$$

から

$$\psi(x+1) = \frac{\mathit{\Gamma}'(x+1)}{\mathit{\Gamma}(x+1)} = \frac{\mathit{\Gamma}(x) + x\mathit{\Gamma}'(x)}{x\mathit{\Gamma}(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\mathit{\Gamma}'(x)}{\mathit{\Gamma}(x)} = \frac{1}{x} + \psi(x).$$

よって，$\mathbb{R}^{\#}$ で

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x} \tag{3.16}$$

が成り立つ．

3.3 ガンマ関数の特性

x と $1-x$ の補完的な値に対するガンマ関数に関して重要な等式がある．

$$\mathit{\Gamma}(x)\mathit{\Gamma}(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad (0 < x < 1) \tag{3.17}$$

［証明］ $\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x)$ で，(3.8) より

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\,,\quad \frac{1}{\Gamma(-x)}=-xe^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{k}\right)e^{\frac{x}{k}}\,.$$

よって

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

を得る．(2.35) より

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\qquad(0<x<1)$$

だから， (3.17) は成り立つ． □

(3.17) で $x=\dfrac{1}{2}$ とおくと，$\left\{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2=\pi$ となり，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$ だから

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

を得る．

3.4 ガンマ関数の一意性定理

(3.3) を満たすガンマ関数は

$$f(x+1)=xf(x)\qquad,\quad f(1)=1$$

を満たす唯一の解であるか？ たとえば，n を自然数として，関数 $\cos(2n\pi x)\Gamma(x)$ は上記の式を満足するが，次の一意性定理はある条件を付け加えれば，ガンマ関数はこの関数方程式の唯一の解になることを示している．

定理 32 (一意性定理) $G:(0\,,\infty)\to\mathbb{R}$ を対数的凸で $G(x+1)=xG(x)$ かつ $G(1)=1$ を満たす関数とすると，$x>0$ に対して $G(x)=\Gamma(x)$ となる．

$G:(0\,,\infty)\to\mathbb{R}$ が $G(x+1)=xG(x)$ かつ $G(1)=1$ を満たす関数とすると，n が自然数のとき，$G(n)=(n-1)!\,,G(x+n)=x(x+1)\cdots(x+n-1)G(x)$ が成り立つ．

これは，

$$\begin{aligned}G(x+n)&=(x+n-1)G(x+n-1)\\&=(x+n-1)(x+n-2)G(x+n-2)\\&=\dots\\&=(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xG(x)\end{aligned}$$

から，$G(x+n)=x(x+1)\cdots(x+n-1)G(x)\,.$

この式で $x=1$ とおけば，$G(n+1)=1\cdot 2\cdots n=n!$ で $G(1)=1$ だから，$G(n)=(n-1)!$.

［一意性定理の証明］ $0<s<1\,,n\geqq 2$ とする．$y=\log G(x)$ が下に凸であるから

$$\frac{\log G(n+s)-\log G(n)}{n+s-n}\leqq\frac{\log G(n+1)-\log G(n)}{n+1-n}\leqq\frac{\log G(n+1)-\log G(n+s)}{n+1-(n+s)}\,.$$

また

$$\frac{\log G(n)-\log G(n-1)}{n-(n-1)}\leqq\frac{\log G(n+s)-\log G(n-1)}{n+s-(n-1)}\leqq\frac{\log G(n+s)-\log G(n)}{n+s-n}\,.$$

よって

$$\log G(n)-\log G(n-1)\leqq\frac{\log G(n+s)-\log G(n)}{s}\leqq\log G(n+1)-\log G(n)\,.$$

$G(n-1)=(n-2)!\,,G(n)=(n-1)!\,,G(n+1)=n!$ より

$$\log(n-1)\leqq\frac{\log G(n+s)-\log G(n)}{s}\leqq\log n\,,$$

$$(n-1)^sG(n)\leqq G(n+s)\leqq n^sG(n)\,.$$

$G(n+s)=s(s+1)\cdots(s+n-1)G(s)$ を用いると

$$\frac{(n-1)^sG(n)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}\leqq G(s)\leqq\frac{n^sG(n)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}=\frac{n^sG(n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)}\frac{s+n}{n}\,.$$

左辺の $n(\geqq 2)$ は任意だから，n を $n+1$ にかえて

$$\frac{n^sG(n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)}\leqq G(s)\leqq\frac{n^sG(n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)}\frac{s+n}{n}\,.$$

よって

$$\frac{n}{s+n}G(s)\leqq\frac{n^sG(n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)}\leqq G(s)\,.$$

$n\to\infty$ とすると

$$G(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^sG(n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^sn!}{s(s+1)\cdots(s+n)}\,.$$

$\mathit{\Gamma}:(0\,,\infty)\to\mathbb{R}$ も対数的凸で $\mathit{\Gamma}(x+1)=x\mathit{\Gamma}(x)$ かつ $\mathit{\Gamma}(1)=1$ を満たす関数であるから，

$$\mathit{\Gamma}(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^sn!}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

が成り立つ．

したがって，$G(s)=\mathit{\Gamma}(s)\quad(0<s<1)\,.$

$G(s+n)=s(s+1)\cdots(s+n-1)G(s)=s(s+1)\cdots(s+n-1)\mathit{\Gamma}(s)=\mathit{\Gamma}(s+n)$. と $G(n)=\mathit{\Gamma}(n)=(n-1)!$ から，すべての $x>0$ について，$G(x)=\mathit{\Gamma}(x)$ が成り立つ． □

$x\in(0\,,\infty)$ に限定した場合，**ガウス数列**

$$\mathit{\Gamma}_n(x)=\frac{n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

に対して

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x)$$

が成り立つことも証明できた．

$x \in \mathbb{R}^{\#}$ に対して，

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)} = \frac{n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{nx}{(x+n+1)} = \Gamma_n(x)\frac{nx}{x+n+1}$$

より

$$\Gamma_n(x) = \frac{x+n+1}{nx} \cdot \Gamma_n(x+1) \tag{3.18}$$

が成り立つ．$x \in (-1\,,0)$ のとき $x+1 \in (0\,,1)$ だから，(3.18) の右辺が収束することから (3.18) の左辺が収束する．すなわち，$\Gamma_n(x)$ が区間 $x \in (-1\,,0)$ でもで収束することがわかる．同様に，$\Gamma_n(x)$ が区間 $(m\,,m+1)$ で収束すれば，区間 $(m-1\,,m)$ でも収束することがわかる．したがって，帰納的に $x \in \mathbb{R}^{\#}$ に対して，$\Gamma_n(x)$ が収束する．

次に，(3.18) で $n \to \infty$ とすれば，$x \in \mathbb{R}^{\#}$ に対して， $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ すなわち

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^{\#}$$

が成り立つ．

系　$f : (0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ を対数的凸で $f(x+1) = xf(x)$ を満たす関数とすると，$x > 0$ に対して $f(x) = f(1)\Gamma(x)$ となる．

これは，$G(x) = \dfrac{f(x)}{f(1)}$ とおいて，一意性定理を適用すればよい．

一意性定理の応用として，**ガウスの乗法公式**が証明される．

ガンマ関数の倍法公式

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2x}\Gamma(2x). \tag{3.19}$$

ガウスの乗法公式　2 以上の整数 n に対して

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx) \tag{3.20}$$

が成り立つ．

補題 9　2 以上の整数 n に対して

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \tag{3.21}$$

が成り立つ.

［証明］ $z^n = 1$ の解を $z_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n} = e^{2k\pi i/n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ とおくと

$$z^n - 1 = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)\,.$$

両辺を $z - 1$ で割ると

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_{n-1})\,.$$

$z = 1$ とおくと

$$(1 - z_1)(1 - z_2)\cdots(1 - z_{n-1}) = n$$

から

$$|1 - z_1|\,|1 - z_2|\,\cdots\,|1 - z_{n-1}| = n$$

ここで,

$$\begin{aligned}
|1 - z_k|^2 &= \left|1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right|^2 \\
&= \left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2 \\
&= 2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right) \\
&= 4\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

から, $|1 - z_k| = 2\left(\sin\dfrac{k\pi}{n}\right)$ を用いると

$$n = |1 - z_1|\,|1 - z_2|\,\cdots\,|1 - z_{n-1}| = \prod_{k=1}^{n-1} 2\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\,.$$

よって, (3.21) が得られる. □

［注］ $(1 - z_1)(1 - z_2)\cdots(1 - z_{n-1}) = n$ の絶対値を考えないと次のように計算することになる.

$$\begin{aligned}
1 - z_k &= 1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} \\
&= 2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= -2i\sin\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right) = -2i\sin\frac{k\pi}{n}e^{k\pi i/n}
\end{aligned}$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
(1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_{n-1}) &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(-2i\sin\frac{k\pi}{n}e^{k\pi i/n}\right)\\
&= 2^{n-1}(-i)^{n-1}e^{(n-1)\pi i/2}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\,.
\end{aligned}
$$

$f_n=(-i)^{n-1}e^{(n-1)\pi i/2}=(-i)^{n-1}\left(\cos\dfrac{n-1}{2}\pi+i\sin\dfrac{n-1}{2}\pi\right)$ とおき具体的に計算してみる.

$m\geqq 0$ を整数とすると

$$
\begin{aligned}
f_{4m+1} &= (-i)^{4m}\left(\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi\right)=1\cdot 1=1\,,\\
f_{4m+2} &= (-i)^{4m+1}\left\{\cos\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\
&= (-i)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=(-i)\cdot(-i)=1\,,\\
f_{4m+3} &= (-i)^{4m+2}\left\{\cos(2m\pi+\pi)+i\sin(2m\pi+\pi)\right\}\\
&= (-i)^2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=(-1)\cdot(-1)=1\,,\\
f_{4m+4} &= (-i)^{4m+3}\left\{\cos\left(2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}\\
&= (-i)^3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=i\cdot(-i)=1
\end{aligned}
$$

から, $f_n=1$. したがって,

$$
\begin{aligned}
n &= (1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_{n-1})\\
&= 2^{n-1}(-i)^{n-1}e^{(n-1)\pi i/2}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}f_n\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}
\end{aligned}
$$

となる.

［ガウスの乗法公式の証明］ $g(x)=\mathit{\Gamma}(x)\mathit{\Gamma}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)\mathit{\Gamma}\left(x+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\mathit{\Gamma}\left(x+\dfrac{n-1}{n}\right)$,

$G(x)=n^x g\left(\dfrac{x}{n}\right)$ とおく.

まず

$$
\begin{aligned}
G(x+1) &= n^{x+1}\mathit{\Gamma}\left(\frac{x+1}{n}\right)\mathit{\Gamma}\left(\frac{x+1}{n}+\frac{1}{n}\right)\cdots\mathit{\Gamma}\left(\frac{x+1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)\\
&= n^{x+1}\mathit{\Gamma}\left(\frac{x}{n}+\frac{1}{n}\right)\mathit{\Gamma}\left(\frac{x}{n}+\frac{2}{n}\right)\cdots\mathit{\Gamma}\left(\frac{x}{n}+1\right)\\
&= n^{x+1}\frac{x}{n}\mathit{\Gamma}\left(\frac{x}{n}\right)\mathit{\Gamma}\left(\frac{x}{n}+\frac{1}{n}\right)\mathit{\Gamma}\left(\frac{x}{n}+\frac{2}{n}\right)\cdots\mathit{\Gamma}\left(\frac{x}{n}+\frac{n-1}{n}\right)\\
&= xG(x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 次に,

$$\log G(x) = x\log n + \sum_{k=0}^{n-1}\log\Gamma\left(\frac{x}{n}+\frac{k}{n}\right)$$

で, $\log\Gamma(x)$ は凸関数だから

$$\log G''(x) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma\left(\frac{x}{n}+\frac{k}{n}\right) \geqq 0\,.$$

したがって, $G(x)$ は対数的凸であるから, $G(x) = c\Gamma(x)$ とかけるから, $g(x) = cn^{-nx}\Gamma(nx)$. 定数 c を求めるために, $x = \dfrac{1}{n}$ とおくと

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma(1) = cn^{-1}\Gamma(1)\,.$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2 \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\pi^{n-1}}{\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}} \qquad (\,(3.17)\text{ を利用}\,) \\
&= \frac{\pi^{n-1}}{\dfrac{n}{2^{n-1}}} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n} \qquad (\,\text{補題 } 9)\,)\,.
\end{aligned}$$

よって

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

より, $c = n\cdot\dfrac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} = n^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$ となる. したがって, $g(x) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx)$. □

［注］ ガンマ関数の倍法公式はガウスの乗法公式で $n = 2$ とおいたものである.

［注］ ガウスの乗法公式の証明の中で定数 c の値を求めているが, 後述のスターリングの公式 $x > 0$ に対して

$$\log\Gamma(x) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

が成り立つことを利用する方法もある.

$x > 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\log g(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \log \mathit{\Gamma}\left(x + \frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \log\left(x + \frac{k}{n}\right) - \left(x + \frac{k}{n}\right) \right\} + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \log x - \left(x + \frac{k}{n}\right) \right\} \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \log\left(x + \frac{k}{n}\right) - \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \log x \right\} + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \log x - \left(x + \frac{k}{n}\right) \right\} \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{k}{nx}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= n\log\sqrt{2\pi} + \left(nx - \frac{1}{2}\right)\log x - \left(nx + \frac{n-1}{2}\right) \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{k}{nx}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) .
\end{aligned}
$$

$\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ を用いると

$$
\left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{k}{nx}\right) = \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{k}{nx} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right\} = \frac{k}{n} + O\left(\frac{1}{x}\right) .
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{k}{nx}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{n-1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right) .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log g(x) &= n\log\sqrt{2\pi} + \left(nx - \frac{1}{2}\right)\log x - \left(nx + \frac{n-1}{2}\right) + \frac{n-1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= n\log\sqrt{2\pi} + \left(nx - \frac{1}{2}\right)\log x - nx + O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

と

$$
\log c - nx + \log \mathit{\Gamma}(nx) = \log c + \log\sqrt{2\pi} + \left(nx - \frac{1}{2}\right)\log nx - nx + O\left(\frac{1}{x}\right)
$$

を比較して，$\log c = (n-1)\log\sqrt{2\pi} + \left(\dfrac{1}{2} - nx\right)\log n$ すなわち $c = n^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$ を得る.

3.5　スターリングの公式

x が大きくなるとき，ガンマ関数がどのように振る舞うかは検討することは興味深い．x を自然数に限定すれば，次のスターリングの公式がある．

定理 33　（$\log n!$ に関するスターリングの公式）

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ガンマ関数が階乗 $n!$ から正の実数への拡張と見ることができるので，$\Gamma(x)$ に関する等式

$x>0$ に対して

$$\log\Gamma(x) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \mu(x) \qquad \cdots\cdots①$$

となるような，$\mu(x)$ が存在することを証明する．まず，①が成り立つと仮定して，$\mu(x)$ がどのような式になるのか考えてみる．

①で x のところに $x+1$ を代入すると

$$\log\Gamma(x+1) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log(x+1) - x - 1 + \mu(x+1) \qquad \cdots\cdots②$$

① − ②から

$$-\log x = \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - \left(x+\frac{1}{2}\right)\log(x+1) + 1 + \mu(x) - \mu(x+1)$$

よって

$$\mu(x) - \mu(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\frac{x+1}{x} - 1$$

となる．$\lambda(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$ で定義すると，$\mu(x)-\mu(x+1)=\lambda(x)$ となる．例えば，$\mu(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(x+n)$ は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(x+n) - \sum_{n=0}^{\infty}\lambda(x+n+1) = \lambda(x)$$

より，$\mu(x)-\mu(x+1)=\lambda(x)$ を満たすことがわかる．

まず関数 $\lambda(x)$ を $\lambda(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$ で定義する．

補題 10　$x>0$ について，

$$\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k}}, \quad 0<\lambda(x)<\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

が成り立つ．

［証明］ $\log(1+t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n, \quad |t|<1.$ $\cdots\cdots$(i)

t を $-t$ にかえて

$$\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n\,, \quad |t| < 1\,. \qquad \cdots\cdots\text{(ii)}$$

(i) − (ii) から

$$\log\frac{1+t}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \{t^n - (-t)^n\}\,, \quad |t| < 1\,.$$

よって

$$\log\frac{1+t}{1-t} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\,, \quad |t| < 1\,.$$

$t = \dfrac{1}{2x+1}$ $(x > 0)$ とおくと

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k}}\,.$$

したがって

$$\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k}}\,.$$

$\lambda(x) > 0$ は明らかに成り立ち，

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k}} \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3(2x+1)^{2k}} = \frac{\dfrac{1}{3(2x+1)^2}}{1 - \dfrac{1}{(2x+1)^2}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2 - 1} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x^2 + x} \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\,.
\end{aligned}$$

よって

$$0 < \lambda(x) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\,. \qquad \square$$

補題 10 から，

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x+n) \qquad (3.22)$$

によって関数 $\mu : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ が定義できる．さらに，

$$0 < \mu(x) \leqq \frac{1}{12x}\,, \qquad x > 0 \qquad (3.23)$$

が成り立つ．

［証明］ $0 < \mu(x)$ は明らかに成り立つ．

補題 10 より，$\lambda(x+n) < \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{x+n} - \dfrac{1}{x+n+1}\right)$ が成りたつから

$$\sum_{n=0}^{m} \lambda(x+n) < \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+m+1}\right).$$

$m \to \infty$ とすると， $\mu(x) \leqq \dfrac{1}{12x}$. □

定理 34　$x > 0$ に対して $\log \Gamma(x) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\log x - x + \mu(x)$ が成り立つ．

［証明］ $F(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\log x - x + \mu(x)$ とおく．

$\mu(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x+n)$ より

$$\mu(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x+n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x+n) - \lambda(x) = \mu(x) - \lambda(x)$$

となり

$$\begin{aligned}
F(x+1) &= \left(x + \frac{1}{2}\right)\log(x+1) - x - 1 + \mu(x+1) \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)\log(x+1) - x - 1 + \mu(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \mu(x) \\
&= F(x) + \log x .
\end{aligned}$$

ここで，$G(x) = e^{F(x)}$ とおくと，$G(x+1) = xG(x)$ が成り立つ．

$\lambda(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - 1$ より

$$\lambda'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x + \frac{1}{2}}{x(x+1)},$$

$$\lambda''(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{x^2 + x + \frac{1}{2}}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$$

となり，$\lambda(x)$ は凸関数だから，$\mu(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x+n)$ も凸関数である．

$f_1(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\log x - x$ とおくと

$$f_1'(x) = \log x - \frac{1}{2x}, \quad f_1''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} > 0$$

から $f_1(x)$ は $(0,\infty)$ で凸関数であるから，$F(x)$ は凸関数であることがわかる. したがって，$G(x)$ は対数的凸であるから，定理 32 の系より，$G(x)=G(1)\varGamma(x)$ と なる. したっがって

$$\log\varGamma(x)=F(x)+C$$

と書ける. 定数 C の値を求めるために，$x=n$ とおくと，$\log\varGamma(n)=F(n)+C$ より

$$\log(n-1)!=\left(n-\frac{1}{2}\right)\log n-n+\mu(n)+C\,.$$

両辺に $\log n$ を加えると

$$\log n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\mu(n)+C\,.$$

この式でスターリングの公式（定理 33）

$$\log n!=n\log n-n+\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{2}\log 2\pi+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

を使うと

$$\frac{1}{2}\log 2\pi+O\left(\frac{1}{n}\right)=\mu(n)+C\,. \qquad \cdots(*)$$

$0<\mu(x)\leqq\dfrac{1}{12x}$ より，$0<\mu(n)\leqq\dfrac{1}{12n}$ が成り立つから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mu(n)=0$.

$(*)$ で $n\to\infty$ として，$C=\dfrac{1}{2}\log 2\pi$ を得る. □

定理 34 の式を利用すれば ψ 関数の基本不等式を導くことができる.

定理 35　$x>0$ に対して $-\dfrac{1}{x}<\psi(x)-\log x<-\dfrac{1}{2x}$ が成り立つ.

［証明］ $\log\varGamma(x)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\log x+\mu(x)$ の両辺を微分すると

$$\psi(x)=\log x-\frac{1}{2x}+\mu'(x)\,.$$

したがって，$-\dfrac{1}{2x}<\mu'(x)<0$ が成立することを示せばよい. $\mu'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\lambda'(x+n)$ で，

$$\begin{aligned}\lambda'(x)&=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{2\cdot 2k}{(2k+1)(2x+1)^{2k+1}}=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1-1}{(2k+1)(2x+1)^{2k+1}}\\&=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^{2k+1}}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k+1}}\\&>-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^{2k+1}}=-2\frac{\dfrac{1}{(2x+1)^3}}{1-\dfrac{1}{(2x+1)^2}}=\frac{-2}{(2x+1)[(2x+1)^2-1]}\\&>\frac{-2}{(2x+1)^2-1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\quad.\end{aligned}$$

したがって，

$$\mu'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda'(x+n)>-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right)=\frac{1}{2x}\,.$$

一方 $\mu'(x)<0$ は明らかに成り立つ． □

3.6 ψ 関数の不等式

補題 11 非負の整数 m に対して $B_{4m}<0,\quad B_{4m+2}>0$ が成り立つ．ただし，B_n はベルヌーイ数とする．

［証明］ $B_{2n}=\dfrac{(-1)^{n-1}2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$ において

$n=2m$ とおくと， $B_{4m}=\dfrac{(-1)^{2m-1}2(4m)!}{(2\pi)^{4m}}\zeta(4m)=-\dfrac{2(4m)!}{(2\pi)^{4m}}\zeta(4m)<0.$

$n=2m+1$ とおくと， $B_{4m+2}=\dfrac{(-1)^{2m}2(4m+2)!}{(2\pi)^{4m+2}}\zeta(4m+2)=\dfrac{2(4m+2)!}{(2\pi)^{4m+2}}\zeta(4m+2)>0.$

□

定理 36 $x>0$ に対して

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}<\psi'(x)<\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3} \tag{3.24}$$

が成り立つ．

［証明］ $\psi'(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$ が成り立つから，

$$\begin{aligned}\psi'(x)-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+k)^2}-\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x+k+1}\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{2(x+k)^2}+\frac{1}{2(x+k+1)^2}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2(x+k)^2(x+k+1)^2}>0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi'(x)-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+k)^2}-\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x+k+1}\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{2(x+k)^2}+\frac{1}{2(x+k+1)^2}-\frac{1}{6(x+k)^3}+\frac{1}{6(x+k+1)^3}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2(x+k)^2(x+k+1)^2}-\frac{3(x+k)^2+3(x+k)+1}{6(x+k)^3(x+k+1)^3}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{6(x+k)^3(x+k+1)^3}<0\,.\end{aligned}$$

したがって，(3.24) が成り立つ． □

定理 37　$x > 0$, 自然数 N に対して

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \sum_{k=1}^{2N} \frac{B_{2k}}{x^{2k+1}} < \psi'(x) < \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{B_{2k}}{x^{2k+1}} \tag{3.25}$$

が成り立つ．

［証明］ 定理 36 より，$N = 1$ のときは，(3.25) の右側の不等式が成り立っている．また，(3.14) より

$$\psi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \qquad (x \fallingdotseq 0, -1, -2, \dots)$$

が成り立つから，

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \sum_{k=1}^{2N} \frac{B_{2k}}{x^{2k+1}} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{B_{2k}}{x^{2k+1}}$$

が成り立つことを示せばよい．
$f(x) = x^{-2}$ に対してオイラー・マクローリンの和公式を適用する．
「$f(x)$ が $[x\,, x+m]$ で，$f^{(2N+2)}(x)$ が連続のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} f(x+k) = \int_x^{x+m} f(t)dt + \frac{1}{2}\left(f(x+m) + f(x)\right) \\ + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(x+m) - f^{(2k-1)}(x)\right) \\ + \frac{B_{2N+2}}{(2N+2)!}\sum_{k=0}^{m-1} f^{(2N+2)}(x+k+\theta)\end{aligned}$$

を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する．」ことを利用する．
$f(x) = x^{-2}$ とおくと，

$$\int_x^{x+m} f(t)dt = \int_x^{x+m} t^{-2}dt = -\left[t^{-1}\right]_x^{x+m} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+m},$$

$$f^{(2k-1)}(x) = -(2k)!, \quad f^{(2N+2)}(x) = (2N+3)!$$

より

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{(x+m)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+m}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+m)^2}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$+\frac{B_{2k}}{(2k)!}\sum_{k=1}^{N}\Big[-(2k)!(x+m)^{-(2k+1)}+(2k)!x^{-(2k+1)}\Big]$$
$$+\frac{B_{2N+2}}{(2N+2)!}\sum_{k=0}^{m-1}(2N+3)!(x+k+\theta)^{-(2N+4)}$$

右辺を整理して，

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{(x+m)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\sum_{k=1}^{N}\frac{B_{2k}}{x^{2k+1}}$$
$$+\frac{1}{2(x+m)^2}-\frac{1}{x+m}-\sum_{k=1}^{N}\frac{B_{2k}}{(x+m)^{2k+1}}$$
$$+(2N+3)B_{2N+2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(x+k+\theta)^{2N+4}}.$$

$$S(N)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\sum_{k=1}^{N}\frac{B_{2k}}{x^{2k+1}},\quad T(m,N)=\frac{1}{2(x+m)^2}-\frac{1}{x+m}-\sum_{k=1}^{N}\frac{B_{2k}}{(x+m)^{2k+1}},$$

$$E(m,N)=(2N+3)B_{2N+2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(x+k+\theta)^{2N+4}}$$

とおく．$E(m,N)$ の符号は B_{2N+2} の符号と同じで，補題 11 から $(-1)^N$ となる．よって，

$$S(2N)+T(m,2N)<\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{(x+m)^2}<S(2N+1)+T(m,2N+1).\tag{3.26}$$

さて，$x>0$ と $N\geqq 1$ を固定して，(3.26) で $m\to\infty$ とする．$T(m,2N)$ と $T(m,2N+1)$ は 0 に収束するから，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{x^{2k+1}}\leqq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}\leqq\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{B_{2k}}{x^{2k+1}}$$

が成り立つ． この不等式で $x>0$ と $N\geqq 1$ は任意であるから，等号は成立しない．よって，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{x^{2k+1}}<\psi'(x)<\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{B_{2k}}{x^{2k+1}}$$

□

定理 37 の不等式 (3.25) で $N=1,2$ とおくと，

$x>0$ に対して

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}-\frac{1}{30x^5}<\psi'(x)<\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}\,,$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}-\frac{1}{30x^5}<\psi'(x)<\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}-\frac{1}{30x^5}+\frac{1}{42x^7}\,. \tag{3.27}$$

が成り立つ.

定理 38　$x>0$, 自然数 N に対して

$$\log x-\frac{1}{2x}-\sum_{k=1}^{2N-1}\frac{B_{2k}}{2kx^{2k}}<\psi(x)<\log x-\frac{1}{2x}-\sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}} \tag{3.28}$$

が成り立つ.

［証明］ $f(x)=\psi(x)-\left(\log x-\dfrac{1}{2x}-\displaystyle\sum_{k=1}^{2N-1}\frac{B_{2k}}{2kx^{2k}}\right)$ とおくと，定理 37 の不等式 (3.25) より

$$f'(x)=\psi'(x)-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\sum_{k=1}^{2N-1}\frac{B_{2k}}{x^{2k+1}}<0$$

定理 35 より，$x>0$ に対して，$-\dfrac{1}{x}<\psi(x)-\log x<-\dfrac{1}{2x}$ が成り立つから，

$$\lim_{x\to\infty}(\psi(x)-\log x)=0$$

となるので，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. よって，$x>0$ のとき $f(x)>0$ すなわち，

$$\log x-\frac{1}{2x}-\sum_{k=1}^{2N-1}\frac{B_{2k}}{2kx^{2k}}<\psi(x)$$

となる.

同様にして，$g(x)=\psi(x)-\left(\log x-\dfrac{1}{2x}-\displaystyle\sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{2kx^{2k}}\right)$ とおくと，定理 37 の不等式 (3.25) より

$$g'(x)=\psi'(x)-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{x^{2k+1}}>0$$

$$\lim_{x\to\infty}(\psi(x)-\log x)=0$$

を用いると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=0$. よって，$x>0$ のとき $g(x)<0$ すなわち，

$$\psi(x)<\log x-\frac{1}{2x}-\sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}}$$

となる. □

定理 38 の不等式 (3.28) において，$N \geqq 1$ は任意だから，N を $N+1$ にかえて

$$\log x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{B_{2k}}{2kx^{2k}} < \psi(x) < \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=1}^{2N} \frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}}$$

が成り立つから

$$-\frac{B_{4N+2}}{(4N+2)x^{4N+2}} < \psi(x) - \left\{ \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=1}^{2N} \frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}} \right\} < 0$$

よって

$$\psi(x) - \left\{ \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=1}^{2N} \frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}} \right\} = -\frac{B_{4N+2}}{(4N+2)} \frac{\theta_1}{x^{4N+2}} \qquad (0 < \theta_1 < 1)$$

となる θ_1 が存在する．

定理 38 の不等式 (3.28) より

$$0 < \psi(x) - \left\{ \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}} \right\} < -\frac{B_{4N}}{(Nx^{4N}}$$

よって

$$\psi(x) - \left\{ \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}} \right\} = -\frac{B_{4N}}{4N} \frac{\theta_1}{x^{4N}} \qquad (0 < \theta_2 < 1)$$

となる θ_2 が存在する．

以上のことをまとめると，次の定理を得る．

定理 39 $x > 0$, 自然数 n に対して

$$f_n(x) = \psi(x) - \left\{ \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}} \right\}$$

$$g_n(x) = \psi(x) - \left\{ \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}} \right\}$$

とおくと

$$f_n(x) = -\frac{B_{4n+2}}{(4n+2)} \frac{\theta_1}{x^{4n+2}} \qquad (\, 0 < \theta_1 < 1 \,) \tag{3.29}$$

$$g_n(x) = -\frac{B_{4n}}{(4n)} \frac{\theta_1}{x^{4n}} \qquad (\, 0 < \theta_2 < 1 \,) \tag{3.30}$$

を満たす θ_1, θ_2 が存在する．

定理 38 の不等式 (3.28) で $N=1\,,2$ とおくと，
$x>0$ に対して

$$\log x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}<\psi(x)<\log x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}\,,$$

$$\log x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}-\frac{1}{252x^6}<\psi(x)<\log x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}\,. \tag{3.31}$$

定理 40　$x>0$, 自然数 N に対して

$$\begin{aligned}&\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\\&\quad<\log\Gamma(x)\\&\quad\quad<\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\sum_{k=1}^{2N-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\end{aligned} \tag{3.32}$$

が成り立つ．

［証明］ $F(x)=\Gamma(x)-\left\{\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\right\}$ とおくと，
定理 38 の不等式 (3.28) より

$$F'(x)=\psi(x)-\log x+\frac{1}{2x}+\sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}}<0$$

スターリングの公式から

$$\lim_{x\to\infty}\left[\Gamma(x)-\left\{\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x\right\}\right]=0$$

となるので， $\lim_{x\to\infty}F(x)=0$. よって， $x>0$ のとき $F(x)>0$ すなわち，

$$\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}<\log\Gamma(x)$$

となる．

同様にして，$G(x)=\Gamma(x)-\left\{\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+x+\sum_{k=1}^{2N-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\right\}$ とおくと，定理 38 の不等式 (3.28) より

$$G'(x)=\psi(x)-\log x+\frac{1}{2x}+\sum_{k=1}^{2N-1}\frac{B_{2k}}{2kx^{2k+1}}>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\psi(x)-\log x\right)=0$$

を用いると， $\lim_{x\to\infty} G(x)=0$. よって， $x>0$ のとき $G(x)<0$ すなわち，

$$\log\Gamma(x) < \log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \sum_{k=1}^{2N-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}$$

となる． □

定理 40 の不等式 (3.32) において，$N \geqq 1$ は任意だから，N を $N+1$ にかえて

$$\begin{aligned}\log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}} \\ < \log\Gamma(x) \\ < \log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \sum_{k=1}^{2N+1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}0 &< \log\Gamma(x) - \left\{\log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\right\} \\ &< \frac{B_{4N+2}}{(4N+1)(4N+2)x^{4N+1}}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}&\log\Gamma(x) - \left\{\log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \sum_{k=1}^{2N}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\right\} \\ &= \frac{B_{4N+2}}{(4N+1)(4N+2)}\frac{\theta_1}{x^{4N+1}} \qquad (\,0<\theta_1<1\,)\end{aligned}$$

となる θ_1 が存在する．

定理 40 の不等式 (3.32) より

$$\begin{aligned}0 &> \log\Gamma(x) - \left\{\log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \sum_{k=1}^{2N-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\right\} \\ &> \frac{B_{4N}}{(4N-1)(4N)x^{4N-1}}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}&\log\Gamma(x) - \left\{\log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \sum_{k=1}^{2N-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\right\} \\ &= \frac{B_{4N}}{(4N-1)(4N)}\frac{\theta_2}{x^{4N-1}} \qquad (\,0<\theta_2<1\,)\end{aligned}$$

となる θ_2 が存在する．

以上のことをまとめると，次の定理を得る．

定理 41　$x>0$, 自然数 n に対して

$$F_n(x)=\log\varGamma(x)-\left\{\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\sum_{k=1}^{2n}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\right\}$$

$$G_n(x)=\log\varGamma(x)-\left\{\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\right\}$$

とおくと

$$F_n(x)=\frac{B_{4n+2}}{(4n+1)(4n+2)}\frac{\theta_1}{x^{4n+1}}\qquad(0<\theta_1<1)\tag{3.33}$$

$$G_n(x)=\frac{B_{4n}}{(4n-1)(4n)}\frac{\theta_2}{x^{4n-1}}\qquad(0<\theta_2<1)\tag{3.34}$$

を満たす $\theta_1\,,\theta_2$ が存在する.

定理 41 において，(3.33)，(3.34) から

$$\lim_{x\to\infty}F_n(x)=0\,,\quad\lim_{x\to\infty}G_n(x)=0$$

だから，漸近的等式

$$\log\varGamma(x)\sim\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}$$

$$\log\varGamma(x)\sim\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}$$

を得る. 十分大きなの値に対して，適当な $2n-1$ または $2n$ までの部分和をとることにより，$\log\varGamma(x)$ の値の近似値を計算することができる.

漸近展開の形で書くと

$$\log\varGamma(x)\sim\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}\qquad[x\to\infty]$$

となる.

定理 40 の不等式 (3.32) で $N=1\,,2$ とおくと，

$x > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\log\sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} \\
&\qquad < \log \mathit{\Gamma}(x) \\
&\qquad\qquad < \log\sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x}\ , \\
&\log\sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} \\
&\qquad < \log \mathit{\Gamma}(x) \\
&\qquad\qquad < \log\sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5}\ .
\end{aligned}$$

4 ラマンジャンの不等式を使わないガンマ関数の不等式の証明について

N.Batir が Inequalities for the gamma function[2000] で，C.Mortici が Ramanujan's estimate for the gamma function via monotonicity arguments [2011] で，ラマンジャンの不等式

すべての $x \geqq 1$ について

$$\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{6}} < \frac{\log\Gamma(x+1)}{\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x} < \left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}\right)^{\frac{1}{6}} \tag{4.1}$$

を用いて，次の不等式を証明した.

Theorem 1.6. (N.Batir) For all positive real numbers $x \geq 1$ we have

$$x^x e^{-x}\sqrt{2\pi(x+a)} < \Gamma(x+1) \leqq x^x e^{-x}\sqrt{2\pi(x+b)},$$

with the best possible constants $a = \dfrac{1}{6} = 0.1666666\cdots$ and $b = \dfrac{e^2}{2\pi} - 1 = 0.176005$

Theorem 1.1. (C.Mortici) For every $x \in [1, \infty)$, we have

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2x+\alpha} < \Gamma(x+1) < \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2x+\beta},$$

where $\alpha = \dfrac{1}{3} = 0.33333\cdots$ and $\beta = \sqrt[3]{\dfrac{391}{30}} - 2 = 0.35334\cdots$.

N.Batir の得た結果を

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2x+\alpha} < \Gamma(x+1) \leqq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2x+\beta},$$

with the best possible constants $\alpha = \dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ and $\beta = \dfrac{e^2}{\pi} - 2 = 0.35201 < 0.35334$ と変形すると，C.Mortici の得た不等式よりも良い評価式になっていることがわかる. ここでは，ラマンジャンの不等式を使わないで，N.Batir の得た不等式を証明したい. これは，N.Batir の証明が不完全に思われるので，正しく証明しておくことも無意味ではないと判断した.

最初に $x \geqq 1$ のとき，$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\sqrt{2x+\dfrac{1}{3}} < \Gamma(x+1)$ の成立を証明する.

［証明］ $\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\sqrt{2x+\dfrac{1}{3}} < \Gamma(x+1)$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\log\pi + x(\log x - 1) + \frac{1}{2}\log\left(2x+\frac{1}{3}\right) < \log\Gamma(x+1) = \log\Gamma(x) + \log x$$

差をとり，(3.33)

$$\log\Gamma(x) > \log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&\log\Gamma(x) + \log x - \left\{\frac{1}{2}\log\pi + x(\log x - 1) + \frac{1}{2}\log\left(2x+\frac{1}{3}\right)\right\} \\
&> \log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \log x \\
&\quad - \left\{\frac{1}{2}\log\pi + x(\log x - 1) + \frac{1}{2}\log\left(2x+\frac{1}{3}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} - \frac{1}{2}\log\left(2x+\frac{1}{3}\right) \quad (= f(x) \text{ とおく})
\end{aligned}$$

となる.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{2x+\frac{1}{3}} \\
&= \frac{60x^3 - 10x^2 + 1}{120x^4} - \frac{1}{2x+\frac{1}{3}} = \frac{(60x^3-10x^2+1)(2x+\frac{1}{3}) - 120x^4}{120x^4(2x+\frac{1}{3})} \\
&= \frac{-\dfrac{10}{3}x^2 + 2x + \dfrac{1}{3}}{120x^4(2x+\frac{1}{3})} = \frac{-10(x-1)^2 - 14(x-1) - 3}{120x^4(6x+1)} < 0
\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は単調減少で，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log\frac{x}{2x+\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 = 0\,.$$

したがって， $x \geqq 1$ のとき $f(x) > 0$ だから，題意の不等式は成り立つ. □

次に，$x \geqq 1$ のと $\Gamma(x+1) \leqq \sqrt{\pi}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\sqrt{2x+\beta} = \sqrt{2\pi}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\sqrt{x+\dfrac{\beta}{2}}$， $\beta = \dfrac{e^2}{\pi} - 2$ の成立を証明する.

［証明］ $g(x) = \dfrac{\{\Gamma(x+1)\}^2}{2\pi x^{2x}e^{-2x}} - x$， $(x \geqq 1)$ は $[1\,,\infty)$ で単調減少であることを示す

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{2\Gamma(x+1)\Gamma'(x+1)x^{2x}e^{-2x} - \{\Gamma(x+1)\}^2\left\{2x^{2x}(\log x+1)e^{-2x} - 2x^{2x}e^{-2x}\right\}}{2\pi(x^{2x}e^{-2x})^2} - 1 \\
&= \frac{\Gamma(x+1)\Gamma'(x+1) - \{\Gamma(x+1)\}^2\log x}{\pi x^{2x}e^{-2x}} - 1 = \frac{\{\Gamma(x+1)\}^2\left\{\dfrac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \log x\right\}}{\pi x^{2x}e^{-2x}} - 1 \\
&= \frac{\{\Gamma(x+1)\}^2\{\psi(x+1) - \log x\}}{\pi x^{2x}e^{-2x}} - 1 \\
&= \frac{\{\Gamma(x+1)\}^2}{\pi x^{2x}e^{-2x}}\left(\psi(x) - \log x + \frac{1}{x}\right) - 1
\end{aligned}$$

ここで

$$g'(x)<0 \iff \{\mathit{\Gamma}(x+1)\}^2\left(\psi(x)-\log x+\frac{1}{x}\right)<\pi x^{2x}e^{-2x}$$
$$\iff 2\log\mathit{\Gamma}(x+1)+\log\left(\psi(x)-\log x+\frac{1}{x}\right)<\log\pi+2x\log x-2x$$

$G(x)=\psi(x)-\log x+\dfrac{1}{x}$ とおくと $-\dfrac{1}{x}<\psi(x)-\log x<-\dfrac{1}{2x}$ より

$$0<G(x)<\frac{1}{2x}.$$

$H(x)=2\log\mathit{\Gamma}(x+1)+\log G(x)-\log\pi-2x\log x+2x \quad (x\geqq 1)$ とおくと

$$H'(x)=2\psi(x+1)+\frac{G'(x)}{G(x)}-2\log x=2(\psi(x)+\frac{1}{x}-\log x)+\frac{G'(x)}{G(x)}$$
$$=2G(x)+\frac{G'(x)}{G(x)}=\frac{2\,[G(x)]^2+G'(x)}{G(x)}$$

(3.27) の左側の不等式

$x>0$ に対して $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{6x^3}-\dfrac{1}{30x^5}<\psi'(x)$ が成り立つことから，

$$G'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\psi'(x)<-\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{30x^5}.$$

また， $0<[G(x)]^2<\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2=\dfrac{1}{4x^2}$ が成り立つから

$$2\big[G(x)\big]^2+G'(x)<\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{30x^5}=-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{30x^5}$$

$x\geqq 1$ より明らかに $-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{6x^3}+\dfrac{1}{30x^5}<0$ である．

$\left(\text{たとえば}-\dfrac{1}{6x^3}+\dfrac{1}{30x^5}<0\iff\dfrac{1}{30x^5}<\dfrac{1}{6x^3}\iff 6x^3<30x^5\text{のように考えればよい．}\right)$

よって， $H'(x)<0$ から $g'(x)<0$ となる．したがって，$g(x)=\dfrac{\{\mathit{\Gamma}(x+1)\}^2}{2\pi x^{2x}e^{-2x}}-x$， $(x\geqq 1)$ は $[1\,,\infty)$ で単調減少だから

$$g(x)=\frac{\{\mathit{\Gamma}(x+1)\}^2}{2\pi x^{2x}e^{-2x}}-x\leqq g(1)=\frac{e^2}{2\pi}-1=\frac{\beta}{2}$$

□

$2\,[G(x)]^2+G'(x)<0$ の証明は，$x>0$ のとき $1+\dfrac{1}{x^2}-e^{-\frac{1}{x}}<\psi'(x)$ が成り立つことを用いても証明できる．

$$G'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\psi'(x)<-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-1-\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}$$

より $2\,[G(x)]^2+G'(x)<\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-1+e^{-\frac{1}{x}}=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2x^2}-\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)<0\,.$

4.1 NECDET BATIR　の論文について

NECDET BATIR　は論文「INEQUALITIES FOR THE GAMMA FUNCTION 」において，定理1．6.

> **Theorem 1.6.** (N.Batir) For all positive real numbers $x \geq 1$ we have
> $$x^x e^{-x}\sqrt{2\pi(x+a)} < \Gamma(x+1) \leqq x^x e^{-x}\sqrt{2\pi(x+b)}\,,$$
> with the best possible constants $a = \dfrac{1}{6} = 0.1666666\cdots$ and $b = \dfrac{e^2}{2\pi} - 1 = 0.176005$

の証明に不等式

$$\log x - \psi(x) > \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{120x^4} + \frac{1}{252x^6}$$

を使い

$$\frac{1}{x} - \log x + \psi(x) < \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6}$$

としているが，不等号の向きが間違えている．なぜならば，(3.31) より
$x > 0$ に対して

$$\log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} < \psi(x) < \log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4}\,.$$

が成立するからである.

論文の中で，$g(x) = \dfrac{\{\Gamma(x+1)\}^2}{2\pi x^{2x}e^{-2x}} - x\,,\quad (x \geqq 1)$ は $[1\,,\infty)$ で単調減少であることを示すために.

$$g'(x) = \frac{\{\Gamma(x+1)\}^2}{\pi x^{2x}e^{-2x}}\left(\psi(x) - \log x + \frac{1}{x}\right) - 1$$

を求め

$$\frac{1}{x} - \log x + \psi(x) <? \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6}$$

とラマンジャンの不等式

すべての $x \geqq 1$ について

$$\left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{6}} < \frac{\log \Gamma(x+1)}{\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x} < \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{30}\right)^{\frac{1}{6}}$$

を用いて

$$g'(x) < \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{30}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} - 1$$

としているが，この不等式は成立しない.

次に，NECDET BATIR の論文”INEQUALITIES FOR THE GAMMA FUNCTION ”における定理 1 .1. の証明中の 「 $x>0$ に対して $F(x)>0\,,F'(x)<0\,,F''(x)>0$ 」の別証明を紹介したい.

定理１．１. *Let x be a positive real number. Then the function defined by*

$$F(x)=x\log x-x+\frac{1}{2}\log(2\pi)-\log\Gamma(x+1)+\frac{1}{2}\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6\left(x+\dfrac{3}{8}\right)}$$

is strictly completely monotone in $(0,\infty)$.

”strictly completely monotone”の定義は次のようになる.

A function f is **completely monotonic** in an interval I if f has derivatives of all orders in I which alternate in sign , that is $(-1)^n f^{(n)}(x)\ge 0$ for all $x\in I$ and $n=0,1,2,3,\ldots$ if this inequality is strict for all $x\in I$ and all non-negative integers n , then f is said to be **strictly completely monotonic**.

［証明］ 「 $x>0$ に対して $F(x)>0\,,F'(x)<0\,,F''(x)>0$ 」を示す.

微分することによって，$x>0$ に対して

$$F'(x)=\log x-\psi(x)-\frac{1}{x}+\frac{1}{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}+\frac{1}{6\left(x+\dfrac{3}{8}\right)^2}.$$

$$F''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{3\left(x+\dfrac{3}{8}\right)^3}-\psi'(x).$$

ここで，$\psi'(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$, $\displaystyle\frac{1}{x^m}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+k)^m}-\frac{1}{(x+k+1)^m}\right)$ $\quad (m=1,2,3)$ を利用すると

$$\begin{aligned}
F''(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+k)}-\frac{1}{(x+k+1)}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+k)^2}-\frac{1}{(x+k+1)^2}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+k+1/2)^2}-\frac{1}{(x+k+3/2)^2}\right)\\
&\quad-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+k+3/8)^3}-\frac{1}{(x+k+11/8)^3}\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}G(x+k)6^{-1}(x+k)^{-1}(x+k+1)^{-1}(x+k+1)^{-2}(x+k+1/2)^{-2}\\
&\qquad\cdot(x+k+3/2)^{-2}(x+k+3/8)^{-3}(x+k+11/8)^{-3}
\end{aligned}$$

を満たす整式 G をとり，さらに， $t=x+k>0$ とおくと，

$$G(t)=\frac{970299+7320528t+22163640t^2+34410416t^3}{2097152}$$
$$+\frac{28971264t^4+12809216t^5+2555904t^6+131072t^7}{2097152}>0$$

よって， $x>0$ に対して $F''(x)>0$ が成り立つから，$x>0$ で $F'(x)$ は単調増加である．
$\lim\limits_{x\to\infty}\bigl(\log x-\psi(x)\bigr)=0$ であることを用いると $\lim\limits_{x\to\infty}F'(x)=0$ となる．
したがって， $x>0$ で $F'(x)<0$ となり，$x>0$ で $F(x)$ は単調減少である．

スターリングの公式

「$x>0$ に対して $\log\Gamma(x)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\log x-x+\mu(x)$ が成り立つ．」

ことから，

$$\log\Gamma(x+1)=\log x+\log\Gamma(x)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+\mu(x).$$

これを使って $F(x)$ を書き直すと，

$$\begin{aligned}
F(x)&=x\log x-x+\frac{1}{2}\log(2\pi)-\log\Gamma(x+1)+\frac{1}{2}\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6\left(x+\frac{3}{8}\right)}\\
&=x\log x-x+\frac{1}{2}\log(2\pi)+\frac{1}{2}\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6\left(x+\frac{3}{8}\right)}\\
&\qquad-\left(\log\sqrt{2\pi}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+\mu(x)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-\log x\right)-\frac{1}{6\left(x+\frac{3}{8}\right)}-\mu(x)\\
&=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{6\left(x+\frac{3}{8}\right)}-\mu(x).
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\mu(x)=0$ より $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$ だから， $x>0$ のとき $F(x)>0$． □

付録 A　ベータ関数

A.1　ベータ関数の定義

ベータ関数は，$p > 0\,,q > 0$ としたときの定積分

$$B(p\,,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \tag{付録 A.1}$$

によって定義される．まず，定積分が収束することを示す．

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,, \quad J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

とおき，$J_1\,, J_2$ がともに収束することを示す．

J_1 については，$0 < p < 1$ のとき $\lim\limits_{x\to+0} x^{p-1}(1-x)^{q-1} = +\infty$ となるが，$\alpha = 1-p$ とおけば，$0 < \alpha < 1$ であり

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \lim_{x\to+0}(1-x)^{q-1} = 1$$

であるから，J_1 は収束する．

J_2 については，$0 < q < 1$ のとき $\lim\limits_{x\to1-0} x^{p-1}(1-x)^{q-1} = +\infty$ となるが，$\alpha = 1-q$ とおけば，$0 < \alpha < 1$ であり

$$\lim_{x\to1-0}(1-x)^{\alpha}x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \lim_{x\to1-0} x^{p-1} = 1$$

であるから，J_2 は収束する．

(付録 A.1) で $x = 1-t$ とおくと

$$B(p\,,q) = \int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}\,(-dt) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt = B(q\,,p)\,.$$

よって

$$B(p\,,q) = B(q\,,p)\,. \tag{付録 A.2}$$

次に (付録 A.1) で $x = \cos^2\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$B(p\,,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta\,. \tag{付録 A.3}$$

とくに，$p = q = \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$B\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$$

から

$$B\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right)=\pi\,. \tag{付録 A.4}$$

（付録 A.1）で

$$x=\frac{1}{1+t} \qquad \left(t=\frac{1-x}{x}\right)$$

とおくと

$$B(p\,,q)=\int_{\infty}^{0}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{p-1}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{q-1}\frac{-dt}{(1+t)^2}=\int_0^{\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt\,.$$

よって

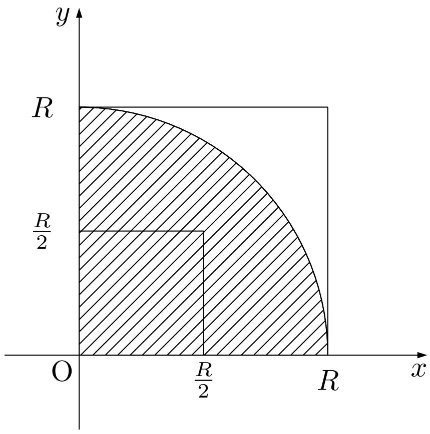
$$B(p\,,q)=\int_0^{\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt\,. \tag{付録 A.5}$$

A.2　ベータ関数とガンマ関数との関係

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{\infty}e^{-u}u^{x-1}\,du\int_0^{\infty}e^{-v}v^{y-1}\,dv$$

を考える. u の代わりに u^2 ，v の代わりに v^2 とおけば

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y)&=4\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-u^2}u^{2x-1}\,du\int_0^R e^{-v^2}v^{2y-1}\,dv\\&=4\lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^R e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv\end{aligned}$$



となる. 積分は 1 辺の長さが R である正方形の周及び内部 S_R にわたる二重積分である. 1 辺の長さが $R/2$ である正方形の周及び内部を $S_{R/2}$，原点を中心とし R を半径とする四分円の周及び内部を C_R とすると

$$\begin{aligned}\int_{S_{R/2}}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv&<\int_{C_R}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv\\&<\int_{S_R}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv\end{aligned}$$

が成り立つ. 不等式の第 1 の積分と第 3 の積分は $R\to\infty$ のとき同一の極限値

$$\int_0^{\infty}e^{-u^2}u^{2x-1}\,du\int_0^{\infty}e^{-v^2}v^{2y-1}\,dv$$

をもつから，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv$$

という関係が成り立つ．

右辺の積分を求めるために，$(u\,,v)$ から極座標 $(r\,,\theta)$ に $u=r\cos\theta\,,\,v=r\sin\theta$ によって変換すれば

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(r\,,\theta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

より

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv\\
&\quad=\lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2x-1}(r\sin\theta)^{2y-1}rdr\,d\theta\\
&\quad=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-r^2}r^{2x+2y-1}\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta\\
&\quad=\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2x+2y-1}\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta
\end{aligned}$$

となる．第 1 の積分は $r=\sqrt{t}$ とおくと

$$\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2x+2y-1}\,dr=\int_0^\infty e^{-t}t^{x+y-1}r^1\,\frac{dt}{2r}=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+y-1}\,dt=\frac{\Gamma(x+y)}{2}\,.$$

第 2 の積分は (付録 A.3) より $B(x,y)/2$ である．したがって

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)B(x\,,y) \qquad \text{(付録 A.6)}$$

という関係が得られた．よって，ベータ関数は

$$B(x\,,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \text{(付録 A.7)}$$

とガンマ関数を使って表せる．

(付録 A.6) で $y=1-x$ とおき，(付録 A.5) を使うと

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=B(x\,,1-x)=\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$$

となる．複素関数の積分を使うと，この積分の値は $\pi/\sin\pi x$ となるから，再び

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\qquad(0<x<1) \qquad \text{(付録 A.8)}$$

が得られることになる．

参考文献

[1] 高木　貞治，解析概論，岩波書店

[2] M・ケッヒャー　訳者　長岡　昇勇，数論的古典解析，シュプリンガー