チェビシェフ多項式 $T_n(x)$, $g_n(x)$ の因数分解

柳田(やなぎた)　五夫(いつお)

1　チェビシェフ多項式 $T_n(x)$, $g_n(x)$ の因数分解

1.1　チェビシェフ多項式の定義

チェビシェフ多項式 $T_n(x)$, $g_n(x)$ は

$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, $g_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$

を満たす多項式として定義される。$T_n(x)$, $g_n(x)$ の存在と性質に関する問題が京都大学で出題されている。

n は自然数とする。

(1)　すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = f_n(\cos\theta)\,,\ \sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

をみたし，係数がともに整数である n 次式 $f_n(x)$ と $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ。

(2)　$f_n'(x) = ng_n(x)$ であることを示せ。

(3)　p を 3 以上の素数とするとき，$f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ。
(1996 京都大・理)

次の事実は断らずに使用するので確認しておきたい。

$P(x)$ と $Q(x)$ を n 次以下の多項式とする。

(K1)　異なる $n+1$ 個の x の値に対して $P(x) = Q(x)$ が成り立つならば $P(x) = Q(x)$ は x についての恒等式である。

(K2)　すべての実数 θ に対して $P(\cos\theta) = Q(\cos\theta)$ が成り立つならば $P(x) = Q(x)$ は x についての恒等式である。

京都大学の問題 (1) の証明を数学的帰納法で行うと必要になる 3 項間の漸化式も含めて次の形にまとめておく。

n は自然数とする。

(1)　すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)\,,\ \sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

を満たす多項式 $T_n(x)$, $g_n(x)$ が存在する。

(2)　$T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 2x$,

$$T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$g_{n+2}(x) - 2xg_{n+1}(x) + g_n(x) = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす。

(3)　$T_1(x) = x$, $g_1(x) = 1$,

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) + (x^2 - 1)g_n(x) \qquad \cdots\cdots ③$$

$$g_{n+1}(x) = T_n(x) + xg_n(x) \qquad \cdots\cdots ④$$

を満たす。

(4)　(i)　$T_n(x)$ は係数がすべて整数である n 次の多項式で，x^n の係数は 2^{n-1} である。
また，$T_n(x)$ は n が偶数のとき偶関数で，n が奇数のとき奇関数である。

(ii)　$g_n(x)$ は係数がすべて整数である $n-1$ 次の多項式で，x^{n-1} の係数は 2^{n-1} である。
また，$g_n(x)$ は n が偶数のとき奇関数で，n が奇数のとき偶関数である。

(5)　$T_n'(x) = ng_n(x)$ である。

(6)　p を 3 以上の素数とするとき，$T_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れる。

[証明]　(1)，(2) をまとめて示す。

(1),(2)　$\cos\theta = \cos\theta$, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ とおけば

$$\cos\theta = T_1(\cos\theta),\ \cos 2\theta = T_2(\cos\theta)$$

を満たす。

$n = k-1,\ k$ のとき成り立つと仮定すると

$\cos(k-1)\theta = T_{k-1}(\cos\theta)\,, \cos k\theta = T_k(\cos\theta)$ となる多項式 $T_{k-1}(x)$, $T_k(x)$ が存在するから，

$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta$ を用いると

$$\cos(k+1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta - \cos(k-1)\theta = 2\cos\theta T_k(\cos\theta) - T_{k-1}(\cos\theta)\,.$$

$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$ とおけば $T_{k+1}(x)$ は多項式で

$$\cos(k+1)\theta = T_{k+1}(\cos\theta)$$

を満たす。

後半も同様に，$\sin\theta = 1\cdot\sin\theta$, $\sin 2\theta = 2\cos\theta\cdot\sin\theta$ より，$g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 2x$ とおけば

$$\sin\theta = g_1(\cos\theta)\sin\theta,\ \sin 2\theta = g_2(\cos\theta)\sin\theta$$

を満たす。

$n=k-1,\,k$ のとき成り立つと仮定すると
$\sin(k-1)\theta=g_{k-1}(\cos\theta)\sin\theta$, $\sin k\theta=g_k(\cos\theta)\sin\theta$ となる多項式 $g_{k-1}(x), g_k(x)$ が存在するから，
$\sin(n+1)\theta+\sin(n-1)\theta=2\sin n\theta\cos\theta$ を用いると

$$\sin(k+1)\theta=2\cos\theta\sin k\theta-\sin(k-1)\theta=\sin\theta\left(2\cos\theta g_k(\cos\theta)-g_{k-1}(\cos\theta)\right)\ .$$

$g_{k+1}(x)=2xg_k(x)-g_{k-1}(x)$ とおけば $g_{k+1}(x)$ は多項式で

$$\sin(k+1)\theta=g_{k+1}(\cos\theta)\sin\theta$$

を満たす。

(3) 加法定理を用いると $T_n(x)$，$g_n(x)$ の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned}T_{n+1}(\cos\theta)=\cos(n+1)\theta&=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta\\&=\cos\theta\cos n\theta+(\cos^2\theta-1)\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\\&=\cos\theta T_n(\cos\theta)+(\cos^2\theta-1)\cdot g_n(\cos\theta)\ ,\\g_{n+1}(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}&=\frac{\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta}\\&=\cos n\theta+\cos\theta\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\\&=T_n(\cos\theta)+\cos\theta\cdot g_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x)&=xT_n(x)+(x^2-1)g_n(x)\\g_{n+1}(x)&=T_n(x)+xg_n(x)\end{aligned}$$

を得る。

(4) $T_1(x)=x$ は 1 次式で，x の係数は $2^{1-1}=1$ で，$g_1(x)=1$ は 0 次の多項式での定数項は $2^{1-1}=1$ である。
$T_k(x),\,g_k(x)$ は整数係数の多項式で，$T_k(x)$ の最高次の項は $2^{k-1}x^k$，$g_k(x)$ の最高次の項は $2^{k-1}x^{k-1}$ であると仮定する。③，④ から

$$T_{k+1}(x)=xT_k(x)+(x^2-1)g_k(x) \qquad \cdots\cdots ③'$$
$$g_{k+1}(x)=T_k(x)+xg_k(x) \qquad \cdots\cdots ④'$$

$T_{k+1}(x),\,g_{k+1}(x)$ は整数係数の多項式である。
③$'$ から $T_{k+1}(x)$ の最高次の項は $x\cdot2^{k-1}x^k+x^2\cdot2^{k-1}x^{k-1}=2^kx^{k+1}$ となり，$T_{k+1}(x)$ は $k+1$ 次式で x^{k+1} の係数は 2^k である。また④$'$ から $g_{k+1}(x)$ の最高次の項は $2^{k-1}x^k+x\cdot2^{k-1}x^{k-1}=2^kx^k$ となり，$g_{k+1}(x)$ は k 次式で x^k の係数は 2^k である。
$T_1(x)=x$ は奇関数，$g_1(x)=1$ は偶関数である。
次に $T_k(x)=(-1)^kT_k(x)$，$g_k(x)=(-1)^{k+1}g_k(x)$ を仮定すると ③，④から

$$\begin{aligned}T_{k+1}(-x)&=(-x)T_k(-x)+(x^2-1)g_k(-x)\\&=(-1)^{k+1}xT_k(x)+(-1)^{k+1}(x^2-1)g_k(x)\\&=(-1)^{k+1}\left\{xT_k(x)+(x^2-1)g_k(x)\right\}\\&=(-1)^{k+1}T_{k+1}(x)\\g_{k+1}(-x)&=T_k(-x)+(-x)g_k(-x)\\&=(-1)^kT_k(x)+(-1)^{k+2}xg_k(x)\\&=(-1)^{k+2}\left\{T_k(x)+xg_k(x)\right\}\\&=(-1)^{k+2}g_{k+1}(x)\end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも成り立つ。

(5) $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ の両辺を θ で微分すると，

$$-n\sin n\theta = T_n'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)$$

すなわち

$$-ng_n(\cos\theta)\sin\theta = -T_n'(\cos\theta)\sin\theta$$

$\sin\theta \fallingdotseq 0$ のとき $ng_n(\cos\theta) = T_n'(\cos\theta)$ となるが，$\sin\theta \fallingdotseq 0$ をみたす θ に対して $\cos\theta$ は無限個の値を取るから

$$ng_n(x) = T_n'(x)\,.$$

(6) p は 3 以上の素数であるから奇数である。(4)(i)(ii) から

$$T_p(x) = t_px^p + t_{p-2}x^{p-2} + \cdots + t_1x,\ t_p = 2^{p-1}\,,$$

$$g_p(x) = u_{p-1}x^{p-1} + u_{p-3}x^{p-3} + \cdots + u_0,\ u_{p-1} = 2^{p-1}$$

とおける。(5) より $T_p'(x) = pg_p(x)$ が成り立つから

$$(p-2m)t_{p-2m} = pu_{p-2m-1}\,,\quad m = 0, 1, \cdots, \left[\frac{p}{2}\right]$$

$1 < m \leqq [p/2]$ のとき p と $p-2m$ は互いに素であるから，$t_{p-2m} = \dfrac{pu_{p-2m-1}}{p-2m}$ が整数になるのは u_{p-2m-1} が $p-2m$ で割り切れるときである。
よって，$1 < m \leqq [p/2]$ のとき $t_{p-2m} = p\cdot\dfrac{u_{p-2m-1}}{p-2m}$ は p の倍数であるから，$T_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れる。 □

[**注 1**] (K2) より
すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)\,,\ \sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

を満たす多項式 $T_n(x), g_n(x)$ はそれぞれ一つだけ存在する。
なぜならば，$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$, $\cos n\theta = P_n(\cos\theta)$ とすれば，$T_n(\cos\theta) = P_n(\cos\theta)$ がすべての実数 θ に対して成り立つから，(K2) より $P = T_n$ である。$g_n(x)$ についても同様に示せる。
[**注 2**] $T_0(x)$ と $g_0(x)$ を $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2-1$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 2x$ であるから

$$T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$g_{n+2}(x) - 2xg_{n+1}(x) + g_n(x) = 0 \qquad \cdots\cdots②$$

が $n=0$ のときも成り立つように $T_0(x) = 1,\ g_0(x) = 0$ と定義しておく。

チェビシェフ多項式 $T_n(x)\,, g_n(x)$ の因数分解は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\,,\ T_1(x) = x\,,\ T_2(x) = 2x^2-1\,,\\
T_3(x) &= 4x^3-3x = x(4x^2-3)\,,\\
T_4(x) &= 8x^4-8x^2+1\,,\\
T_5(x) &= 16x^5-20x^3+5x = x(16x^4-20x^2+5)\,,\\
T_6(x) &= 32x^6-48x^4+18x^2-1 = (2x^2-1)(16x^4-16x^2+1)\,,\\
T_7(x) &= 64x^7-112x^5+56x^3-7x = x(64x^6-112x^4+56x^2-7)\,,\\
T_8(x) &= 128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1\,,\\
T_9(x) &= 256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x = x(4x^2-3)(64x^6-96x^4+36x^2-3)\,,\\
T_{10}(x) &= 512x^{10}-1280x^8+1120x^6-400x^4+50x^2-1\,,\\
&= (2x^2-1)(256x^8-512x^6+304x^4-48x^2+1)\,,\\
T_{11}(x) &= 1024x^{11}-2816x^9+2816x^7-1232x^5+220x^3-11x\,,\\
&= x(1024x^{10}-2816x^8+2816x^6-1232x^4+220x^2-11)\,,\\
T_{12}(x) &= 2048x^{12}-6144x^{10}+6912x^8-3584x^6+840x^4-72x^2+1\,,\\
&= (8x^4-8x^2+1)(256x^8-512x^6+320x^4-64x^2+1)\,,\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_0(x) &= 0\,,\ g_1(x) = 1\,,\ g_2(x) = 2x\,,\\
g_3(x) &= 4x^2-1 = (2x+1)(2x-1)\,,\\
g_4(x) &= 8x^3-4x = 4x(2x^2-1)\,,\\
g_5(x) &= 16x^4-12x^2+1 = (4x^2+2x-1)(4x^2-2x-1)\,,\\
g_6(x) &= 32x^5-32x^3+6x = 2x(2x-1)(2x+1)(4x^2-3)\,,\\
g_7(x) &= 64x^6-80x^4+24x^2-1 = (8x^3-4x^2-4x+1)(8x^3+4x^2-4x-1)\,,\\
g_8(x) &= 128x^7-192x^5+80x^3-8x = 8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)\,,\\
g_9(x) &= 256x^8-448x^6+240x^4-40x^2+1\,,\\
&= (16x^4+8x^3-12x^2-4x+1)(16x^4-8x^3-12x^2+4x+1)\,,\\
&= (2x-1)(2x+1)(8x^3-6x-1)(8x^3-6x+1)\,,\\
g_{10}(x) &= 512x^9-1024x^7+672x^5-160x^3+10x\\
&= 2x(4x^2-2x-1)(4x^2+2x-1)(16x^4-20x^2+5)\,,\\
g_{11}(x) &= 1024x^{10}-2304x^8+1792x^6-560x^4+60x^2-1\,,\\
&= (32x^5-16x^4-32x^3+12x^2+6x-1)(32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1)\,,\\
g_{12}(x) &= 2048x^{11}-5120x^9+4608x^7-1792x^5+280x^3-12x\,,\\
&= 4x(2x-1)(2x+1)(2x^2-1)(4x^2-3)(16x^4-16x^2+1)\,,\\
g_{13}(x) &= 4096x^{12}-11264x^{10}+11520x^8-5376x^6+1120x^4-84x^2+1\,,\\
&= (64x^6-32x^5-80x^4+32x^3+24x^2-6x-1)\\
&\qquad\times(64x^6+32x^5-80x^4-32x^3+24x^2+6x-1)\,,\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

このような因数分解になる理由を探ってみた。

1.2　$T_p(x)$ (p は 3 以上の素数）の因数分解

有理数係数の多項式 $f(x)$ が，有理数係数の一次以上の多項式の積に分解されるとき，$f(x)$ は可約であるといい，このような分解が不可能なとき，$f(x)$ は既約であるという。

定理 1　p を 3 以上の素数とすると，$T_p(x)/x$ は既約である。

$p \geqq 3$ を素数とすると，$T_p(x) = x \cdot \{T_p(x)/x\}$ の形にのみ因数分解できることになる。

［証明］ $T_p(x)$ は係数がすべて整数である p 次の多項式で，x^p の係数は 2^{p-1} である。また，p は奇数であるから，$T_p(x)$ は奇関数である。

$T_p(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + \cdots + t_px^p$ とおくと，$t_p = 2^{p-1}\,, t_0 = t_2 = \cdots = t_{p-1} = 0\,.$

$T_p(x)/x = t_1 + t_3x^2 + \cdots + t_px^{p-1}$ の定数項 t_1 を求める。$T_n'(x) = ng_n(x)$ を用いると

$$t_1 = \lim_{x\to 0}\frac{T_p(x)}{x} = T_p'(0) = p\cdot g_p(0) = p\cdot \sin\frac{p\pi}{2} = p\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

p は 3 以上の素数であるから，$T_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れる。以上のことから $T_p(x)/x = t_1 + t_3x^2 + \cdots + t_px^{p-1}$ について

$$t_i \equiv 0 \pmod{p}\ (i = 1, 2, \cdots, p-1)\,,$$

$$t_p = 2^{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p}\,,\ t_1 = p\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$

が成り立つから，アイゼンシュタイン (Eisenstein) の定理

アイゼンシュタイン (Eisenstein) の定理

整数係数の多項式 $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ において，ある素数 p が存在し，最高次の係数 c_n を除いて，その他の係数 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ が p で割り切れるとする。定数項 c_0 が p^2 で割り切れないならば，$f(x)$ は既約である。

より $T_p(x)/x$ は既約である。　□

次の定理も知っていると便利である。

定理　整数係数をもつ多項式が可約ならば，その多項式は整数係数をもつ多項式の積に分解される。

1.3　$T_n(x)$ の性質

$T_n(x)$ の因数分解を考える際必要となる $T_n(x)$ の性質を示しておく。

m, n を負でない整数とすると

(T1)　$T_{mn}(x) = T_m(T_n(x))$.

(T2)　$T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x) = 2T_m(x)T_n(x)$.

［証明］ $x = \cos\theta$ とおくと

$T_{mn}(\cos\theta) = \cos mn\theta$, $T_m(T_n(\cos\theta)) = T_m(\cos n\theta) = \cos(m(n\theta)) = \cos mn\theta$.

$m \geqq n$ のとき

$$\begin{aligned} T_{m+n}(\cos\theta) + T_{|m-n|}(\cos\theta) &= \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta \\ &= 2\cos m\theta\cos n\theta = 2T_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

から (T1)，(T2) は成り立つ。 □

(T1) から次の定理を得る。

定理 2　$n \geqq 2$ を整数とする。n の約数 h が奇数ならば $T_{n/h}(x)$ は $T_n(x)$ の約数である。

証明の前に，方程式 $T_n(x) = 0$ の解を求めておく。まず，$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $T_n(x) = 0$ の実数解を求める。$x = \cos\theta$ とおくと $T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta = 0$ から

$$\theta = \frac{2k-1}{2n}\pi\ .\quad よって\quad \cos\left(\frac{2k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ , (k = 1, 2, \cdots, n)$$

は $T_n(x) = 0$ の解で， $T_n(x)$ は n 次式であるから，方程式 $T_n(x) = 0$ はこれ以外の解をもたない。

方程式 $T_n(x) = 0$ の解は $\xi_k = \cos\left(\frac{2k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$ である。

［定理 2 の証明］ $n = hn_1$ (n_1は整数) とおくと $T_n(x) = T_{hn_1}(x) = T_h(T_{n_1}(x))$.

$T_h(x)$ は奇関数であるから $T_h(0) = 0$ が成り立つ。

$T_{n_1}(x) = 0$ の解を $\xi_k = \cos\left(\frac{2k-1}{n_1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $(k = 1, 2, \cdots, n_1)$ とおくと，

$$T_n(\xi_k) = T_h(T_{n_1}(\xi_k)) = T_h(0) = 0\ .$$

したがって，因数定理から $T_n(x)$ は $T_{n_1}(x)$ で割り切れる。 □

［例］ $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$ は $6 = 3 \times 2$ より $T_2(x)$ で割り切れる。実際に割り算すると $T_6(x) = (2x^2 - 1)(16x^4 - 16x^2 + 1)$.

次に，m, n を $m \geqq n \geqq 1$ を満たす整数として，$T_m(x)$ が $T_n(x)$ で割り切れるための条件を求める。(定理 2 の逆を考える。)

定理 3　m, n を $m \geqq n$ を満たす正の整数とし，$l = [(m-n)/(2n)]$ とおくと

(i)　$T_m(x) = 2T_n(x)\displaystyle\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{k-1}T_{m-(2k-1)n}(x) + (-1)^{l+1}T_{|m-2(l+1)n|}(x)$.

(ii)　$T_n(x)$ は $T_m(x)$ の約数 $\iff$ ある負でない整数 p に対して $m = (2p+1)n$

［証明］ $[(m-n)/(2n)] = l$ から $(2l+1)n \leqq m < (2l+3)n$.

(i)　(T2) で m のところに $m - n$ を代入すると

$m \geqq n$ のとき

$$T_m(x) = 2T_n(x)T_{m-n}(x) - T_{|m-2n|}(x) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

⑤で m のところに $m-2n$ を代入すると，$m \geqq 3n$ のとき

$$T_{m-2n}(x) = 2T_n(x)T_{m-3n}(x) - T_{|m-4n|}(x)\,.$$

したがって，⑤は $m \geqq 3n$ のとき

$$T_m(x) = 2T_n(x)\left\{T_{m-n}(x) - T_{m-3n}(x)\right\} + T_{|m-4n|}(x)$$

となる。これを繰り返すと，$m \geqq (2l-1)n$ のとき

$$\begin{aligned} T_m(x) = 2T_n(x)&\left\{T_{m-n}(x) - T_{m-3n}(x) + \cdots + (-1)^{l-1}T_{m-(2l-1)n}(x)\right\} \\ &+ (-1)^l T_{|m-2ln|}(x) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

となる。

$(2l+1)n \leqq m < (2l+3)n$ から $n \leqq m-2ln$ となるので $\deg(T_n(x)) \leqq \deg(T_{m-2ln}(x))$. したがって，もう一度同様な操作を行わなければならない。(T2) で m のところに $m-(2l+1)n$ を代入すると

$$T_{m-2ln}(x) = 2T_n(x)T_{m-(2l+1)n}(x) - T_{|m-2(l+1)n|}(x)$$

⑥でこれを用いると

$$\begin{aligned} T_m(x) = 2T_n(x)&\left\{T_{m-n}(x) - T_{m-3n}(x) + \cdots + (-1)^{l}T_{m-(2l+1)n}(x)\right\} \\ &+ (-1)^{l+1} T_{|m-2(l+1)n|}(x) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

すなわち

$$T_m(x) = 2T_n(x)\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{k-1}T_{m-(2k-1)n}(x) + (-1)^{l+1}T_{|m-2(l+1)n|}(x)$$

となる。

(ii) (ア) $(2l+1)n < m < (2l+3)n$ のとき $|m-2(l+1)n| < n$ となるので

$$\deg(T_{|m-2(l+1)n|}(x)) < \deg(T_n(x))\,.$$

したがって，$T_m(x)$ を $T_n(x)$ で割ったときの商と余りは

$$Q(x) = 2\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{k-1}T_{m-(2k-1)n}(x)\,,\ R(x) = (-1)^{l+1}T_{|m-2(l+1)n|}(x) \fallingdotseq 0\,.$$

（イ） $m = (2l+1)n$ のとき $m-2(l+1)n = -n$ より⑦は

$$T_m(x) = T_n(x)\left\{2\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{k-1}T_{m-(2k-1)n}(x) + (-1)^{l+1}\right\}.$$

したがって，$T_m(x)$ を $T_n(x)$ で割ったときの商と余りは

$$Q(x) = 2\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{k-1}T_{m-(2k-1)n}(x) + (-1)^{l+1}\,,\ R(x) = 0\,.$$

したがって，$T_m(x)$ は $T_n(x)$ で割り切れる。

以上のことから

$$T_n(x) \text{ は } T_m(x) \text{ の約数} \Longleftrightarrow m = (2l+1)n$$

($\Longrightarrow$)

$T_n(x)$ は $T_m(x)$ の約数 のとき，$m = (2l+1)n$ が成り立つから，$p = l$ とおけばよい。

($\Longleftarrow$)

ある負でない整数 p に対して $m = (2p+1)n$ が成り立つとき，$p = \dfrac{m-n}{2n}$ であるから

$$l = \left[\frac{m-n}{2n}\right] = [p] = p\,.$$

したがって，$m = (2l+1)n$ が成り立つから，$T_n(x)$ は $T_m(x)$ の約数 である。 □

W. Watkins と J. Zeitlin（参考文献 [3]）の結果

$\Psi_n(x)$ を $\cos(2\pi/n)$ の 最小多項式 (有理数係数の多項式 $p(x)$ があって，$p(\cos(2\pi/n))=0$ となるようなものの中で，次数が最小のもの) とすると

(i) $n=2s+1$(奇数) のとき $T_{s+1}(x)-T_s(x)=2^s\prod_{d|n}\Psi_d(x)\,.$

(ii) $n=2s$(偶数) のとき $T_{s+1}(x)-T_{s-1}(x)=2^s\prod_{d|n}\Psi_d(x)\,.$

定義から $\Psi_1(x)=x-1\,,\Psi_2(x)=x+1$ である。

を用いると次の補題を得る。

補題 1 m が 2 以上の整数のとき $\Psi_{2^m}(x)=\dfrac{T_{2^{m-2}}(x)}{2^{2^{m-2}-1}}\,.$

［証明］ $n=2^m, s=2^{m-1}$ のとき

$$T_{2^{m-1}+1}(x)-T_{2^{m-1}-1}(x)=2^{2^{m-1}}\prod_{d|2^m}\Psi_d(x) \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$n=2^{m-1}, s=2^{m-2}$ のときを考えて

$$T_{2^{m-2}+1}(x)-T_{2^{m-2}-1}(x)=2^{2^{m-2}}\prod_{d|2^{m-1}}\Psi_d(x) \qquad \cdots\cdots ⑨$$

よって ⑧ ÷ ⑨ から

$$2^{2^{m-2}}\Psi_{2^m}(x)=\frac{T_{2^{m-1}+1}(x)-T_{2^{m-1}-1}(x)}{T_{2^{m-2}+1}(x)-T_{2^{m-2}-1}(x)}\,.$$

$x=\cos\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{T_{2^{m-1}+1}(\cos\theta)-T_{2^{m-1}-1}(\cos\theta)}{T_{2^{m-2}+1}(\cos\theta)-T_{2^{m-2}-1}(\cos\theta)}&=\frac{\cos(2^{m-1}+1)\theta-\cos(2^{m-1}-1)\theta}{\cos(2^{m-2}+1)\theta-\cos(2^{m-2}-1)\theta}\\&=\frac{-2\sin 2^{m-1}\theta\sin\theta}{-2\sin 2^{m-2}\theta\sin\theta}\\&=\frac{2\sin 2^{m-2}\theta\cos 2^{m-2}\theta}{\sin 2^{m-2}\theta}=2T_{2^{m-2}}(\cos\theta)\end{aligned}$$

から

$$\Psi_{2^m}(x)=\frac{T_{2^{m-2}}(x)}{2^{2^{m-2}-1}}\,. \qquad \square$$

定理 3 と補題 1 から次の定理を得る。

定理 4 n を正の整数とすると，
$T_n(x)$ が既約 $\Longleftrightarrow$ 負でない整数 m が存在して $n=2^m$

［証明］ $(\Longrightarrow)$

$n\fallingdotseq 2^m$ のとき，n の約数の中には少なくとも 2 つの奇数が存在するから，定理 3 の (ii) より $T_n(x)$ は可約である。

$(\Longleftarrow)$

負でない整数 m が存在して $n=2^m$ とする。
$m=0,\ 1$ のとき $T_1(x)=1\,,T_2(x)=x$ は既約であるから，$m\geqq 2$ すなわち $n\geqq 4$ と仮定する。
$T_n(x)$ が可約であるとすると，$T_n(x)=f_1(x)f_2(x)$ を満たす有理数係数の多項式 $f_1(x)\,, f_2(x)$ $(\deg(f_1(x))\geqq 1,\ \deg(f_2(x))\geqq 1\,)$ が存在する。

$T_n\left(\cos(\pi/2^{m+1})\right) = 0$ から $f_1\left(\cos(\pi/2^{m+1})\right) = 0$ または $f_2\left(\cos(\pi/2^{m+1})\right) = 0$ が成り立つ。
補題 1 から $\cos\left(2\pi/2^{m+2}\right)$ の最小多項式は $\Psi_{2^{m+2}}(x) = T_{2^m}(x)/2^{2^m-1} = T_n(x)/2^{n-1}$ となるから，$f_1(x)$ または $f_2(x)$ は $T_{2^m}(x) = T_n(x)$ で割り切れ，残りの $f_1(x)$ か $f_2(x)$ は定数となり，$T_n(x)$ が可約であることに反する。
よって，$T_n(x)$ は既約である。 □

1.4 $g_n(x)$ の性質

$T_n(x)$ のときと同様に，$g_n(x)$ の性質を示しておく。

m, n を正の整数とすると

(g1) $g_{mn}(x) = g_m(T_n(x))g_n(x)$.

(g2) $g_{m+n}(x) + \mathrm{sgn}(m-n)g_{|m-n|}(x) = 2g_m(x)T_n(x)$.

ただし，$\mathrm{sgn}(x)$ は符号関数で

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \qquad \text{とする。}$$

［証明］ $x = \cos\theta$ とおくと

(g1) $g_{mn}(\cos\theta) = \dfrac{\sin mn\theta}{\sin\theta}$,

$$g_m(T_n(\cos\theta))g_n(\cos\theta) = g_m(\cos n\theta)\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin mn\theta}{\sin n\theta}\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin mn\theta}{\sin\theta}$$

から $g_{mn}(x) = g_m(T_n(x))g_n(x)$.

(g2) $m > n$ のとき

$$\begin{aligned} g_{m+n}(\cos\theta) + g_{m-n}(\cos\theta) &= \frac{\sin(m+n)\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin(m-n)\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{2\sin m\theta\cos n\theta}{\sin\theta} \\ &= 2g_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

から $g_{m+n}(x) + g_{m-n}(x) = 2g_m(x)T_n(x)$.

$m < n$ のとき

$$\begin{aligned} g_{m+n}(\cos\theta) - g_{n-m}(\cos\theta) &= \frac{\sin(m+n)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n-m)\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin(m+n)\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin(m-n)\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{2\sin m\theta\cos n\theta}{\sin\theta} \\ &= 2g_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

から $g_{m+n}(x) - g_{n-m}(x) = 2g_m(x)T_n(x)$.

$m = n$ のとき

$$\begin{aligned} g_{2m}(\cos\theta) &= \frac{\sin 2m\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{2\sin m\theta\cos m\theta}{\sin\theta} \\ &= 2g_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

から　$g_{2m}(x) = 2g_m(x)T_n(x)$.
したがって，(g2) は成り立つ。 □

(g1) から次の定理を得る。

定理 5　m , n を正の整数とする。
n は m の約数 $\Longrightarrow g_n(x)$ は $g_m(x)$ の約数

［証明］ $m = ln$ (l は正の整数) とおき (g1) を使うと

$$g_m(x) = g_{ln}(x) = g_l(T_n(x))g_n(x) \ .$$

□

(g2) から次の定理を得る。

定理 6　m, n を $m \geqq n$ を満たす正の整数とし，$l = [(m-n)/(2n)]$ とおくと

(i)　$$g_m(x) = 2g_n(x)\sum_{k=0}^{l} T_{m-(2k+1)n}(x) + \mathrm{sgn}(m-2ln-2n)g_{|m-2ln-2n|}(x) \, .$$

(ii)　$g_n(x)$ は $g_m(x)$ の約数 $\Longleftrightarrow$ ある整数 $p(\geqq 1)$ に対して $m = pn$

［証明］ $[(m-n)/(2n)] = l$ から $(2l+1)n \leqq m < (2l+3)n$.

(i)　(g2) において m のところに n ，n のところに $m-n$ を代入すると

$$g_m(x) + \mathrm{sgn}(2n-m)g_{|2n-m|}(x) = 2T_{m-n}(x)g_n(x) \, .$$

よって

$$g_m(x) = 2T_{m-n}(x)g_n(x) + \mathrm{sgn}(m-2n)g_{|m-2n|}(x) \, .$$

上の式において m のところに $m-2kn \, (k = 0, 1, \cdots, l)$ を代入すると

$$g_{m-2kn}(x) = 2T_{m-2kn-n}(x)g_n(x) + \mathrm{sgn}(m-2kn-2n)g_{|m-2kn-2n|}(x) \, .$$

$l = [(m-n)/(2n)]$ より $(2l+1)n \leqq m < (2l+3)n$ であるから
$k = 0, 1, \cdots, l-1$ のときは $m - 2kn - 2n \geqq m - 2(l-1)n - 2n = m - 2ln \geqq n$.
したがって

$$g_{m-2kn}(x) = 2T_{m-2kn-n}(x)g_n(x) + g_{m-2kn-2n}(x) \, .$$

上の式で $k = 0, 1, \cdots, l-1$ とおいたものと

$$g_{m-2ln}(x) = 2T_{m-2ln-n}(x)g_n(x) + \mathrm{sgn}(m-2ln-2n)g_{|m-2ln-2n|}(x)$$

を加えると

$$g_m(x) = 2g_n(x)\sum_{k=0}^{l} T_{m-(2k+1)n}(x) + \mathrm{sgn}(m-2ln-2n)g_{|m-2ln-2n|}(x)$$

を得る。

(ii)　$(2l+1)n \leqq m < (2l+3)n$ より $-n \leqq m - 2ln - 2n < n$ となる。
$m - 2ln - 2l \fallingdotseq -n$, 0 のとき，
$\deg(g_{|m-2ln-2n|}(x)) < \deg(T_n(x))$ となり，$g_m(x)$ を $g_n(x)$ で割ったときの余りは
$\mathrm{sgn}(m-2ln-2n)g_{|m-2ln-2n|}(x) \fallingdotseq 0$ である。
(ア) $m - 2ln - 2n = -n$ すなわち $m = (2l+1)n$ のとき

$$g_m(x) = g_n(x)\left(\sum_{k=0}^{l} T_{m-(2k+1)n}(x) - 1\right) .$$

(イ) $m - 2ln - 2n = 0$ すなわち $m = (2l+2)n$ のとき

$$g_m(x) = g_n(x)\left(\sum_{k=0}^{l} T_{m-(2k+1)n}(x)\right) .$$

以上のことから

$$g_n(x) \text{ は } g_m(x) \text{ の約数} \iff m = (2l+1)n \text{ または } m = (2l+2)n$$

$(\Longrightarrow)$

$g_n(x)$ は $g_m(x)$ の約数 のとき，$m = (2l+1)n$ または $m = (2l+2)n$ が成り立つから，$p = 2l+1$ または $p = 2l+2$ とおけばよい。

$(\Longleftarrow)$

ある正の整数 p に対して $m = pn$ が成り立つとき

$$l = \left[\frac{m-n}{2n}\right] = \left[\frac{p-1}{2}\right] .$$

$p = 2q+2$ $(q \geqq 0)$ のとき $l = q$ となるから $m = (2l+2)n$.

$p = 2q+1$ $(q \geqq 0)$ のとき $l = q$ となるから $m = (2l+1)n$.

したがって，$m = (2l+1)n$ または $m = (2l+2)n$ が成り立つから，$T_n(x)$ は $T_m(x)$ の約数 である。 □

1.5 $g_n(x)$ の因数分解

$g_n(x)$ の因数分解には次の等式が利用できる。

(g3) $g_{2n}(x) = 2g_n(x)T_n(x)$.

(g4) $g_{2n+1}(x) = (-1)^n A_n(x)A_n(-x)$.

ただし，$A_n(x)$ は $A_0(x) = 1$, $A_n(x) = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす多項式とする。

証明の前に，方程式 $g_n(x) = 0$ の解を求めておく。

まず，$-1 < x < 1$ の範囲で $g_n(x) = 0$ の実数解を求める。$x = \cos\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ とおくと

$g_n(x) = g_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 0$ から

$$\theta = \frac{k}{n}\pi \ (k = 1, 2, \cdots, n-1) .$$

よって，$\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ は $g_n(x) = 0$ の解で， $g_n(x)$ は $n-1$ 次式であるから，方程式 $g_n(x) = 0$ はこれ以外の解をもたない。

方程式 $g_n(x) = 0$ の解は $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ である。

［証明］ (g3) $x = \cos\theta$ とおくと，

$$g_{2n}(\cos\theta) = \frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta} = 2\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cdot\cos n\theta = 2g_n(\cos\theta)T_n(\cos\theta)$$

から $g_{2n}(x) = 2g_n(x)T_n(x)$ が成り立つ。

(g4) $g_{2n+1}(x)$ は $2n$ 次の多項式で最高次の係数は 2^{2n} となる。

また，$g_{2n+1}(x) = 0$ の解は $\cos k\pi/(2n+1)\,(k = 1, 2, \cdots, 2n)$ であるから，

$$\begin{aligned} g_{2n+1}(x) &= 2^{2n}\prod_{i=1}^{2n}\left(x - \cos\frac{i\pi}{2n+1}\right) \\ &= 2^n\prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right) \times 2^n\prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}\right) . \end{aligned}$$

ここで，

$$A_n(x) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right),\ B_n(x) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} \right)$$

とおくと，$g_{2n+1}(x) = A_n(x)B_n(x)$ が成り立つ。$\cos\phi = -\cos(\pi - \phi)$ より，

$$\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = -\cos \frac{2(n-k+1)\pi}{2n+1}\ .$$

これを使うと

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(x + \cos \frac{2(n-k+1)\pi}{2n+1} \right) \\
&= 2^n \prod_{i=1}^{n} \left(x + \cos \frac{2i\pi}{2n+1} \right) \\
&= (-1)^n 2^n \prod_{i=1}^{n} \left(-x - \cos \frac{2i\pi}{2n+1} \right) \\
&= (-1)^n A_n(-x)
\end{aligned}$$

を得る。したがって，

$$g_{2n+1}(x) = A_n(x)B_n(x) = (-1)^n A_n(x)A_n(-x)\,. \qquad \square$$

[注] $A_0(x) = 1,\ A_1(x) = 2^1 \left(x - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = 2x + 1$ で，後述の⑬

$$A_n(x) = 2xA_{n-1}(x) - A_{n-2}(x)$$

を用いると，数学的帰納法により $A_n(x)$ は多項式であることがわかる。

1.6　$T_m(x) - T_n(x)$ の因数分解

(g4) の証明と同様にして

$$\begin{aligned}
A_n(T_2(x)) = A_n(2x^2-1) &= 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(2x^2 - 1 - \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right) \\
&= 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(2x^2 - 2\cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right) \\
&= 2^n \prod_{k=1}^{n} 2 \left(x - \cos \frac{k\pi}{2n+1} \right) \left(x + \cos \frac{k\pi}{2n+1} \right) \\
&= 2^{2n} \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos \frac{k\pi}{2n+1} \right) \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos \frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} \right) \\
&= 2^{2n} \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos \frac{k\pi}{2n+1} \right) \prod_{k=n+1}^{2n} \left(x - \cos \frac{k\pi}{2n+1} \right) \\
&= 2^{2n} \prod_{k=1}^{2n} \left(x - \cos \frac{k\pi}{2n+1} \right) \\
&= g_{2n+1}(x)
\end{aligned}$$

が成り立つから，次の補題を得る。

補題 2　n を自然数とするとき

$$A_n(\cos\theta) = g_{2n+1}\left(\cos \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2} \right)\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}\,.$$

補題 2 から，$x=\cos\theta$ とおくと

$$A_n(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\,.$$

$x=\cos\theta$ のとき，$-x=\cos(\pi-\theta)$ で

(i) n が偶数のとき

$$A_n(-x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pi-\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\pi-\theta)}=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\,.$$

(ii) n が奇数のとき

$$A_n(-x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pi-\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\pi-\theta)}=-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\,.$$

したがって

$$B_n(x)=(-1)^nA_n(-x)=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$$

となる。

$T_n(x)$ を 第 1 種のチェビシェフ多項式，$U_n(x)=g_{n+1}(x)$ を 第 2 種のチェビシェフ多項式，$V_n(x)=B_n(x)$ を 第 3 種のチェビシェフ多項式，$W_n(x)=A_n(x)$ を 第 4 種のチェビシェフ多項式という。

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x\ ,$$

$$U_0(x)=1,\ U_1(x)=2x\ ,$$

$$V_0(x)=1,\ V_1(x)=2x-1\ ,$$

$$W_0(x)=1,\ W_1(x)=2x+1$$

で，すべて

$$P_n(x)=2xP_{n-1}(x)-P_{n-2}(x)\quad n=2,\ 3,\ \cdots$$

を満たす。

補題 2 は $T_m(x)-T_n(x)$ $(m>n)$ の因数分解に使うことができる。
$(m+n)+(m-n)=2m$ は偶数であるから，$m+n$ と $m-n$ の偶奇は一致する。$x=\cos\varphi$ とおくと，

(i) $m+n, m-n$ がともに奇数のとき，

$$\begin{aligned}T_m(\cos\varphi)-T_n(\cos\varphi)&=\cos m\varphi-\cos n\varphi\\&=-2\sin\frac{(m+n)\varphi}{2}\sin\frac{(m-n)\varphi}{2}\\&=-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{(m+n)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{(m-n)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\\&=(\cos\varphi-1)g_{(m+n)}(\cos\varphi/2)g_{(m-n)}(\cos\varphi/2)\\&=(\cos\varphi-1)A_{(m+n-1)/2}(\cos\varphi)A_{(m-n-1)/2}(\cos\varphi)\end{aligned}$$

から，

$$T_m(x)-T_n(x)=(x-1)A_{(m+n-1)/2}(x)A_{(m-n-1)/2}(x)\,.$$

(ii)　$m+n, m-n$ がともに偶数のとき，

$$\begin{aligned}
T_m(\cos\varphi)-T_n(\cos\varphi) &= \cos m\varphi-\cos n\varphi \\
&= -2\sin\frac{(m+n)\varphi}{2}\sin\frac{(m-n)\varphi}{2} \\
&= -2\sin^2\varphi\cdot\frac{\sin\frac{(m+n)\varphi}{2}}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\frac{(m-n)\varphi}{2}}{\sin\varphi} \\
&= 2(\cos^2\varphi-1)g_{(m+n)/2}(\cos\varphi)g_{(m-n)/2}(\cos\varphi)
\end{aligned}$$

から，

$$T_m(x)-T_n(x)=2(x^2-1)g_{(m+n)/2}(x)g_{(m-n)/2}(x)\,.$$

以上のことから

定理 7　m, n は $(m>n)$ を満たす正の整数とする。
(i) $m+n, m-n$ がともに奇数のとき，

$$T_m(x)-T_n(x)=(x-1)A_{(m+n-1)/2}(x)A_{(m-n-1)/2}(x)\,.$$

(ii) $m+n, m-n$ がともに偶数のとき，

$$T_m(x)-T_n(x)=2(x^2-1)g_{(m+n)/2}(x)g_{(m-n)/2}(x)\,.$$

定理 7(i) で $m=n+1$ とおくと

$$T_{n+1}-T_n(x)=(x-1)A_n(x) \qquad \cdots\cdots ⑩$$

を得る。

[注 1] ①から

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x) \qquad \cdots\cdots ⑪$$

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \qquad \cdots\cdots ⑫$$

を満たすから，⑫ $-$ ⑪ の両辺を $x-1$ で割ると，

$$\frac{T_{n+1}(x)-T_n(x)}{x-1}=2x\frac{T_n(x)-T_{n-1}(x)}{x-1}-\frac{T_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)}{x-1}\,.$$

したがって，⑩を用いて，

$$A_n(x)=2xA_{n-1}(x)-A_{n-2}(x)\,. \qquad \cdots\cdots ⑬$$

[注 2] $x=\cos\theta$ とおくと，$A_n(x)=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$ が成り立つことと

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\cos\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta=2\cos\theta\cos\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta$$

から⑬を導くこともできる。

具体的に $A_n(x)$ を求めるには，⑬ において $n=2,3,4,\cdots$ とおくと

$$\begin{aligned}
&A_0(x)=1\,,\\
&A_1(x)=2x+1\\
&A_2(x)=4x^2+2x-1\,,\\
&A_3(x)=8x^3+4x^2-4x-1\,,\\
&A_4(x)=16x^4+8x^3-12x^2-4x+1=(2x+1)(8x^3-6x+1)\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_5(x) &= 32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1\,,\\
A_6(x) &= 64x^6+32x^5-80x^4-32x^3+24x^2+6x-1\,,\\
A_7(x) &= 128x^7+64x^6-192x^5-80x^4+80x^3+24x^2-8x-1\\
&= (2x+1)(4x^2+2x-1)(16x^4-8x^3-16x^2+8x+1)\,,\\
A_8(x) &= 256x^8+128x^7-448x^6-192x^5+240x^4+80x^3-40x^2-8x+1\,,\\
A_9(x) &= 512x^9+256x^8-1024x^7-448x^6+672x^5+240x^4-160x^3-40x^2+10x+1\,,\\
A_{10}(x) &= 1024x^{10}+512x^9-2304x^8-1024x^7+1792x^6+672x^5-560x^4-160x^3\\
&\qquad\qquad +60x^2+10x-1\\
&= (2x+1)(8x^3+4x^2-4x-1)(64x^6-32x^5-96x^4+48x^3+32x^2-16x+1)\,,\\
A_{11}(x) &= 2048x^{11}+1024x^{10}-5120x^9-2304x^8+4608x^7+1792x^6-1792x^5-560x^4\\
&\qquad\qquad +280x^3+60x^2-12x-1\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{12}(x) &= 4096x^{12}+2048x^{11}-11264x^{10}-5120x^9+11520x^8+4608x^7-5376x^6\\
&\qquad\qquad -1792x^5+1120x^4+280x^3-84x^2-12x+1\\
&= (4x^2+2x-1)(1024x^{10}-2560x^9+2240x^8+32x^5-800x^4-40x^3+100x^2\\
&\qquad\qquad +10x-1)\,,\\
A_{13}(x) &= 8192x^{13}+4096x^{12}-24576x^{11}-11264x^{10}+28160x^9+11520x^8-15360x^7\\
&\qquad\qquad -5376x^6+4032x^5+1120x^4-448x^3-84x^2+14x+1\\
&= (2x+1)(8x^3-6x+1)(512x^9-1152x^7+864x^5-240x^3+8x+1)\,,\\
&\qquad \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

を得る。

$T_n(x)\,, g_n(x)$ と同様に $A_n(x)$ が $A_m(x)$ の約数 になるための条件を調べておく。

定理 8 m, n を $m \geqq n$ を満たす正の整数とする。

$$A_n(x) \text{ は } A_m(x) \text{ の約数} \iff \text{ある整数 } p(\geqq 1) \text{ に対して } 2m+1 = p(2n+1)$$

[証明] ($\Longrightarrow$)

$A_n(x)$ は $A_m(x)$ の約数 と仮定すると，$A_n(-x)$ は $A_m(-x)$ の約数 となる。

$(g4)$ を使うと $g_{2n+1}(x)$ は $g_{2m+1}(x)$ の約数 となり，定理 7 より，ある整数 $p(\geqq 1)$ に対して $2m+1 = p(2n+1)$ が成り立つ。

($\Longleftarrow$)

ある整数 $p(\geqq 1)$ に対して $2m+1 = p(2n+1)$ が成り立つとすると，p は奇数であるから $p = 2l+1$ $(l \geqq 0)$ とおくと，$2m+1 = (2l+1)(2n+1)$ とかける。$A_n(x) = 0$ の解は

$$\cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right) = \cos\left(\frac{2i(2l+1)\pi}{(2l+1)(2n+1)}\right) = \cos\left(\frac{2i(2l+1)\pi}{2m+1}\right) \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\,.$$

$m-(2l+1)n = m - \dfrac{2m+1}{2n+1}\cdot n = \dfrac{m-n}{2n+1} > 0$ であるから

$$\{i(2l+1) | i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \subset \{j | j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$$

すなわち

$$\left\{\cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right) \middle|\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\right\} \subset \left\{\cos\left(\frac{2j\pi}{2m+1}\right) \middle|\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m\right\}.$$

したがって $A_n(x) = 0$ の解は $A_m(x) = 0$ の解であるから $A_n(x)$ は $A_m(x)$ の約数となる。 □

1.7 大学入試問題等

III $f(x) = 2x^2 - 1$ として，以下の問いに答えよ。

(a) 2つの条件

$$\left.\begin{aligned} f(f(f(\cos\theta))) &= \cos\theta \\ f(\cos\theta) &\neq \cos\theta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (*)$$

を同時に満たす正の θ のうち，最小のものを α，2 番目に小さいものを β とすると，$\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$, $\beta = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ である。また，$(*)$ を満たす正の θ のうち，3 番目あるいは 4 番目に小さいものは $\boxed{\text{オ}}\alpha$ や $\boxed{\text{カ}}\beta$，5 番目あるいは 6 番目に小さいものは $\boxed{\text{キ}}\alpha$ や $\boxed{\text{ク}}\beta$ と表すことができる。

(b) x の多項式 $f(f(f(x))) - x$ は，$f(f(f(x))) - x = (f(x) - x)g(x)h(x)$ と表せる。ただし，

$$g(x) = \boxed{\text{ケ}}x^3 - \boxed{\text{コ}}x + \boxed{\text{サ}},$$
$$h(x) = 8x^3 + \boxed{\text{シ}}x^2 - 4x - \boxed{\text{ス}}$$

である。

(c) $g(\cos\theta) = 0$ を満たす θ に対して，$\cos 3\theta = \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ が成立する。

また，$h(\cos\beta) = \boxed{\text{チ}}$ となる。

(d) α, β に対し，次式が成立する。

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\left(\boxed{\text{オ}}\alpha\right)} + \frac{1}{\cos\left(\boxed{\text{キ}}\alpha\right)} = \boxed{\text{ツ}},$$

$$\cos\beta + \cos\left(\boxed{\text{カ}}\beta\right) + \cos\left(\boxed{\text{ク}}\beta\right) = \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}.$$

(2011 杏林大・医)

$f(\cos\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1 = \cos 2\varphi$ より $f(x) = T_2(x)$ となり，$f(f(f(x))) = T_8(x)$ が成り立つ。定理 7 (i) を用いて $T_8(x) - T_1(x)$ の因数分解は次のようにもできる。

$$\begin{aligned} T_8(x) - T_1(x) &= (x-1)A_4(x)A_3(x) \\ &= (x-1)(16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) \\ &= (x-1)(2x+1)(8x^3 - 6x + 1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) \quad . \end{aligned}$$

最小多項式関連の問題が模擬試験で出題されている．

以下で x の整式 $f(x)$，$g(x)$，$f_m(x)\,(m=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ はすべて整数係数で，最高次の係数が 1 であるとする．

(1) $f(\sqrt{2})=0,\ g(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$ を満たす $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ 1 つずつ挙げよ．

(2) 平方数でない n 個の正の整数 a_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ に対して，$\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\alpha_k}$ とする．このとき，$f_n(\alpha_n)=0$ を満たす $f_n(x)$ が存在することを示せ．ただし，平方数とは，ある整数の 2 乗で表される数のことである．

(3) $\sum_{k=10}^{29}\sqrt{k^2+1}$ が無理数であることを示せ．

ただし，必要ならば $k \geqq 1$ で $k<\sqrt{k^2+1}<k+\dfrac{1}{2k}$ が成り立つことを用いてよい．

（2013 高 3 駿台模試）

〈参考文献〉

［1］　柳田　五夫 , チェビシェフの多項式について，　数研通信 , No.17

［2］　柳田　五夫 , チェビシェフの多項式の係数について，数研通信 , No.69

［3］　W. Watkins and J. Zeitlin , *The minimalpolynomial of cos*$(2\pi/n)$, Amer. Math. Monthly **100** (1993),471-474.

［4］　M.O.Rayes ,V.Trevisan , and P.S. Wang , *Factorization properties of chebyshev polynomials* , Comput. Math. Appl. **50** (2005),1231-1240

Ver 1.0 2011 年 8 月 22 日

Ver 1.1 2014 年 1 月 12 日　2013 高 3 駿台模試の問題を追加