

趣味の数学問題集

第 2 版

時岡郁夫 作・編集

はじめに

この問題集は私が高校時代に作成した問題（１００題程度）と大学時代に作成した問題，教員になり作成・編集した問題をまとめたものである．

高校時代の私の趣味は，自分で作った問題を先生方に解いてもらうことであった．問題の中には先生方でも解けない問題もあったので，私の相手をしてくれた数学の先生は１～２名しかいなかったと思う．

A問題は高校１年生で解ける程度，**B問題**は高校２年生で解ける程度，**C問題**は高校３年生で解ける程度を示している．

ただ，内容に偏りがあるのは，あくまで趣味として作成した問題だからである．高校当時，私の興味をもっていた分野が，一目瞭然である．

高校の定期考査でそのまま使用できる問題は少ないと思うが，大学入試問題としてなら使用できる問題は数多くあると自負している．

この問題集は，数学をこよなく愛する生徒に刺激を与えるものとなることを願っている．

２０００年３月１５日

北海道札幌拓北高等学校教諭 時 岡 郁 夫

C 問題

1. O を原点として, 平面上に $n+1$ 個の点 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ を次のようにとる.

$$A_0(1,0), \angle A_{i+1}OA_i = \frac{2p}{n}, \angle OA_iA_{i+1} = \frac{p}{2} (i=0,1,2,\dots,n-1, n \geq 5). \text{ このとき, 次の問いに答よ.}$$

(1) 多角形 $A_0A_1A_2 \cdots A_n$ (かたつむり形) の面積を求めよ.

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sec^{\frac{4p}{x}} x - 1}{\tan x}$ を求めよ.

2. $0 < a_n \leq \frac{p}{4}, \tan a_n = \frac{1}{n^2 + n + 1} (n=0,1,2,\dots)$ のとき, 次の問いに答よ.

(1) $\tan a_0, \tan(a_0 + a_1), \tan(a_0 + a_1 + a_2)$ の値を求めよ.

(2) $\tan(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})$ の値を求めよ.

(3) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を求めよ.

3. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は $\tan a_n = \frac{1}{n+a}, \tan b_n = \frac{1}{(n+a)^2 + (n+a) + 1}, 0 < b_n < a_n < \frac{p}{2}$ によって定義さ

れる. ただし, $n=0,1,2,\dots$ で, 定数 a はすべての n に対し $a_n - b_n \leq \frac{3p}{20}$ を満たす最小の整数である.

このとき, 次の問いに答よ.

(1) $\cot \frac{3p}{20}$ の値を求め, その近似値を小数第 2 位まで計算せよ.

(2) a の値を求めよ.

(3) $\tan(a_0 - a_1), \tan b_0, \tan(a_1 - a_2), \tan b_1$ の値を求めよ.

(4) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ を求めよ.

(1) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2 \cot a_n + 1) \sin^2 b_n$ を求めよ.

4. $y^2(y+1) = x(x+1)^2$ のとき, 次の極限值 a, b をそれぞれ求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = a$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = b$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_e n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ を求めよ .

6. $n!$ の桁数を N , $N(n) = n(\log_{10} n - \log_{10} e) + 2$ とおくとき , 次の問いに答よ .

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{\frac{N}{n}}}{n}$ を求めよ .

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N - N(n)}{n}$ を求めよ .

7. $p_1, p_2, \dots, p_n$ を 0 でない相異なる数とする . このとき , 「 p_1 分の p_2 分の ... 分の p_n 」 と読める分数の個数を a_n とおく . 例えば , $n = 2$ のとき , 「 p_1 分の p_2 」 = $\left\{ \frac{p_2}{p_1} \right\}$ より , $a_2 = 1$, $n = 3$ のとき , 「 p_1 分の

の p_2 分の p_3 」 = $\left\{ \frac{\frac{p_3}{p_2}}{\frac{p_1}{p_2}}, \frac{p_3}{p_1} \right\}$ より , $a_3 = 2$ である . 次の問いに答よ .

(1) $a_1 = 1, a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \ (n \geq 2)$ を証明せよ .

(2) a_n を求めよ .

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ .

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ を求めよ .

8. n 桁の自然数の中から 1 つ取り出して , その m 乗が $m(n-1)+1$ 桁になる確率を $P(n, m)$ とおくとき , 次の問いに答よ . ただし , m は自然数とする .

(1) $P(n, m)$ を求めよ .

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, m)$ を求めよ .

(3) 任意の n の値に対して , $P(n, m) \geq 0.01$ となる最大の m の値を求めよ .

ただし , $\log_{10} 1.09 = 0.0374$ とする .

9. $q = \frac{p}{2n+1}$ のとき , $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \cos(2k-1)q}$ の値を求めよ .

10. 分数方程式 $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = k$ (定数) について, 次の問いに答よ.

(1) $k > 0$ のとき, 正の解 3 個, 負の解 2 個もつことを証明せよ.

(2) $k = 0$ のとき, 解を求めよ.

11. 台形 $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD = 1$, $BC = x > 1$) において AB, DC の中点をそれぞれ E, F , また, 2 本の対角線の交点 G を通り, EF に平行な直線が AB, DC と交わる点をそれぞれ H, I とするとき, 次の問いに答よ.

(1) $f(x) = \frac{S_{\square HEFI}}{S_{\square ABCD}}$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の最大値と, そのときの x の値を求めよ.

12. 2 定点 $A(0,1), B(0,2)$ に対し, $y = x^2$ 上に点 P をとる. $AP + BP$ が最小になるとき, 点 P の y 座標を求めよ.

13. $(1 + 2x + 3x^2 + \cdots)^m$ の x^n の係数を求めよ.

14. $x > 0, y > 0, z > 0$ のとき, $\frac{xyz}{y^2z^2 + x^2z + 3x^2 + y^2}$ の最大値を求めよ.

15. 一辺の長さが a である正三角形 ABC の辺 BC, AB 上にそれぞれ点 D, E を $\angle BAD = \angle ADE = q$ となるようにとる. q が 0 から $\frac{p}{3}$ まで連続的に変化するときの三角形 ADE の面積の平均値を求めよ.

16. < 次の文の $\square$ に数式を入れよ > 2 定点 $A(a,0), B(-a,0)$ ($a > 0$) からの距離の積が a^2 に等しい点の軌跡の方程式は $(x^2 + y^2)^2 = \square$ である. これを極座標 (極を原点, 始線を x 軸の正の方向にとる) で表すと, $r^2 = \square$ となり, この曲線をレムニスケートという. この曲線によって囲まれる部分の面積は $\square$ で, この曲線を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積は $\square$ である.

17. 2 次曲線 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ が実楕円を表す条件と, その面積を求めよ.

18. z は複素数で, 2 曲線 $|z| = 1, |z + \frac{1}{z}| = 1$ によって囲まれる部分で, 原点を含まない方の面積を求めよ.

19. 閉区間 $\left[0, \frac{p}{4}\right]$ で, 次の曲線で囲まれる部分の面積を求めよ.

(1) $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$

(2) $y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x$

(3) $y = \cot x, y = \sec x, y = \operatorname{cosec} x$

20. 曲線 $6x^3 + 11x^2y + 6xy^2 + y^3 = x$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

21. $x|x+y| + y|x-y| = 1$ のとき, $p \int_{-1}^1 y^2 dx$ の値を求めよ.

22. $f(x) = \int_{-1}^1 [tx^2 + (t^2 - 1)x - t] dt$ について, 次の問に答えよ.

(1) $f(-x) = f(x)$ を証明せよ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の最小値を求めよ.

(4) $\int_{-2}^2 f(x) dx$ を求めよ.

23. 次の条件 $\sim$ を満たす何回も微分可能な関数 $f(x)$ を求め, 下の問いに答よ.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left\{ f\left(\frac{kx+a}{n}\right) - f\left(\frac{kx+b}{n}\right) \right\}$$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = b - a = c \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

(1) $f(x)$ の最大・最小値と, そのときの x の値を求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸との間の部分の面積を求めよ.

24. 等式 $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{{}_nC_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ を証明せよ.

25. 次の無限級数をそれぞれ求めよ.

(1) $a_n = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx$ のとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を求めよ.

(2) $b_n = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{n-1} x \sin(n+1)x dx$ のとき, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ を求めよ.

26. $a + b = x, ab = x^2 (0 < x < 1)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a^n + b^n)$ とおくとき , 次の問いに答よ .

(1) $f(x)$ を求めよ .

(2) $f(x)$ の最大値と , そのときの x の値を求めよ .

(3) 区間 $[0, 1]$ における $f(x)$ の平均値を求めよ . ただし , $f(0) = 2, f(1) = 1$ と定義する .

27. 不定積分 $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^5}}$ を求めよ .

28. $\tan y = x^2 + x + 1$ のとき , $\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=k}$ を求めよ .

29. 次の定積分を求めよ .

$$(1) \quad A = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx, B = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2+x^4} dx$$

$$(2) \quad C = \int_0^1 \frac{1-3x+x^2}{1+x^2+x^4} dx$$

30. 3 次方程式 $x^3 + 3ax^2 + 9bx + 2ab = 0 (a, b \text{ は実数}) \dots$ について , 次の問いに答よ .

(1) が実数解だけをもつとき , 点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ .

(2) k を正の定数として , $0 \leq \frac{b}{k} \leq a \leq 1$ を満たす任意の a, b を選んだとき が実数解しかもたない確

率 $P(k)$ を求めよ .

(3) (2) で $P(k)$ の最大値と , そのときの k の値を求めよ .

31. $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx (n = 0, 1, 2, \dots)$ とおくとき , 次の問いに答よ .

(1) S_0, S_1 の値を求めよ .

S_n, S_{n-2} の関係式を求めよ .

$nS_{n-1}S_n$ の値を求めよ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} S_n$ の値を求めよ .

(2) $\cos x = y$ とおくと, S_{2m+1} はどうなるか .

$\cot x = y$ とおくと, S_{2m-2} はどうなるか .

$1 - y^2 \leq e^{-y^2} \leq 1 + y^2$ を証明せよ .

$S_{2m+1} < \int_0^\infty e^{-my^2} dy < S_{2m-2}$ を証明せよ .

$\int_0^\infty e^{-my^2} dy = \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy$ を証明せよ .

(3) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ の値を求めよ .

$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx$ の値を求めよ .

$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx$ の値を求めよ .

$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ とおくと, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ の値を求めよ .

32. 棒を水平に持って幅 a メートルの廊下から, それに直角な幅 b メートルの廊下に曲がりたい . これが可能であるための棒の最大の長さを求めよ .