趣味の数学問題集
第２版

時岡郁夫　作・編集

はじめに

この問題集は私が高校時代に作成した問題（１００題程度）と大学時代に作成した問題，教員になり作成・編集した問題をまとめたものである．

高校時代の私の趣味は，自分で作った問題を先生方に解いてもらうことであった．問題の中には先生方でも解けない問題もあったので，私の相手をしてくれた数学の先生は１～２名しかいなかったと思う．

A問題は高校１年生で解ける程度，B問題は高校２年生で解ける程度，C問題は高校３年生で解ける程度を示している．

ただ，内容に偏りがあるのは，あくまで趣味として作成した問題だからである．高校当時，私の興味をもっていた分野が，一目瞭然である．

高校の定期考査でそのまま使用できる問題は少ないと思うが，大学入試問題としてなら使用できる問題は数多くあると自負している．

この問題集は，数学をこよなく愛する生徒に刺激を与えるものとなることを願っている．

２０００年3月１５日

北海道札幌拓北高等学校教諭　　時　岡　郁　夫

B問題

1. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ **のとき，次の問いに答よ．**

(1) $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=-12\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ **を証明せよ．**

(2) $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ **を証明せよ．**

(3) $(1+\cos\alpha\cos\beta)^2+(1+\cos\beta\cos\gamma)^2+(1+\cos\gamma\cos\alpha)^2$ **の値を求めよ．**

2. $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ **のとき，** $\cos\theta\cos 3\theta\cos 5\theta$ **の値を求めよ．**

3. 次の四角形 $ABCD$ **で，** $\angle ADB$ **の大きさを求めよ．**

(1) $\angle ADB=20^\circ,\angle DBC=60^\circ,\angle BCA=50^\circ,\angle ACD=30^\circ$

(2) $\angle ADB=20^\circ,\angle DBC=60^\circ,\angle BCA=30^\circ,\angle ACD=50^\circ$

4. 長方形 $ABCD$ **の辺** CD **の中点を** E **とするとき，** $\angle DBE$ **の正接の値の最大値と，そのときの辺の比** $AB:BC$ **を求めよ．**

5. $f_n(x)=(\cos\theta+x\sin\theta)^n-(\cos n\theta+x\sin n\theta)$ **（**n **は2以上の整数）とおくとき，次の問いに答よ．**

(1) $f_n(x)$ **は** x^2+1 **を因数にもつことを証明せよ．**

(2) すべての実数 x **に対して，** $f_4(x)>0$ **となるように，** $\sin\theta$ **の値の範囲を求めよ．**

6. x, y **がすべての実数値をとるとき，次の式の最大・最小値を求めよ．**

$z=a\sin x\sin y+b\sin x\cos y+c\cos x\sin y+d\cos x\cos y$

7. $\sqrt{3}\sin x\sin y+\sqrt{2}\sin x\cos y-\cos x\sin y-\sqrt{2}\cos x\cos y$ **の最大・最小値を求めよ．ただし，**

$\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\le y\le\dfrac{5\pi}{4}$ **とする．**

8. 一辺の長さが a **である正方形に含まれる最大の正五角形一辺の長さを求めよ．**

9．次の問いに答よ．

(2)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$ を因数分解せよ．

(3)　3次方程式 $x^3-3uvx+u^3+v^3=0$ を解け．

(4)　3次方程式 $x^3+ax+b=0$ を解け．

(5)　3次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の解法を述べよ．

10．$1<\sum_{k=1}^{n}\log(1+k)\log\left(1+\frac{2}{k}\right)<4$ を満たす n の値の個数を求めよ．

11．k が2以上の整数で，$\log_{10} kx$ の仮数は $\log_{10} x$ の仮数の k 倍であるとき，次の問いに答よ．

(1)　$0<\boldsymbol{a}<x\le\boldsymbol{b}$ で，上の関係を満たす x が存在するための $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},k$ の条件を求めよ．

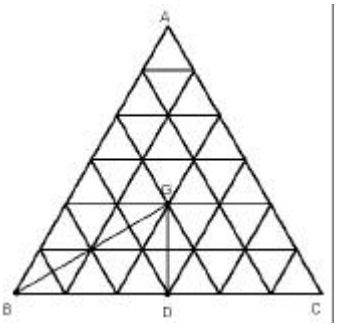
(2)　$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}=10^m$ （m は正の整数)のとき，上の関係を満たす x の値の個数を求めよ．

(3)　上の関係を満たす x の値が n 個あり，小さいものから順に並べて，i 番目の x の値を x_i とおくとき，x_i を $\boldsymbol{a},k,i$ を用いて表せ．

(4)　(3)で，$\sum_{i=1}^{n}x_i$ を求めよ．

12．$2\sqrt{n}-2<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\le 2\sqrt{n}-1\ (n\ge 1)$ を証明せよ．

13．一辺の長さが n の正三角形ＡＢＣの各辺を n 等分し，右図のように格子を入れる．このとき，次の問いに答よ．
(1)　大小すべての正三角形の個数を求めよ．
(2)　正三角形ＡＢＣの重心をＧ，ＢＣの中点をＤとするとき，⊿ＧＢＤに含まれる格子点の個数を求めよ．



14．$a_1,a_2,\cdots,a_n$ はみな整数で，$a_1-1=\frac{a_2-2}{2}=\cdots=\frac{a_n-n}{2^{n-1}}$ のとき，$\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2$ の最小値を求めよ．

15．$p=0,1,2,3,4$のとき，$a_1=a, a_{n+1}=2a_n-n^p\ (n=1,2,\cdots)$で定められる数列の一般項$a_n$を求めよ．

16．次の数列の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k^4+4}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{(k^2+k+1)^2+1}$

17．次の数列$\{a_n\},\{b_n\}$の一般項を求め，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k+b_k}$を求めよ．

$\{a_n\}: a_1=-18, a_2=-23, a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2^n$

$\{b_n\}: b_1=24, b_{n+1}=2b_n-n^3$

18．$a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=k(k\geq 2), a_n=a_{k-1}a_k a_{k+1}\cdots a_{n-1}+1(n\geq k)$のとき，等式

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}=1-\frac{1}{a_{k-1}a_k\cdots a_n}$$

を証明せよ．ただし，$n\geq k-1$とする．

19．数列$\{a_n\}$に対して，$\{a^{(k)}{}_n\}$を第k階差数列とする．

$a^{(k-1)}{}_{n+1}-a^{(k-1)}{}_n=a^{(k)}{}_n(k=1,2,\cdots,m), a^{(m)}{}_{n+1}-a^{(m)}{}_n=0$のとき，

$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{a^{(k)}{}_1}{k!}(n-1)(n-2)\cdots(n-k)$を証明せよ．

20．ある生徒は続けて遅刻をしないように心掛けている．この生徒が遅刻をした次の日には90%遅刻をしないが，遅刻をしなかった次の日には30%遅刻をする恐れがある．長い間には，この生徒は何%遅刻するか．

21．次の問いに答よ．

(1) $0<x<\sqrt[3]{A}<y$のとき，$\displaystyle x<\frac{x^2y+xy^2+A}{x^2+xy+y^2}<\sqrt[3]{A}<\frac{2y^3+A}{3y^2}<y$を証明せよ．

(2) $0<a_1<\sqrt[3]{A}<b_1, a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2b_n+a_nb_n{}^2+A}{a_n{}^2+a_nb_n+b_n{}^2}, b_{n+1}=\dfrac{2b_n{}^3+A}{3b_n{}^2}(n=1,2,\cdots)$とおくとき，２つの極限値$\lim_{n\to\infty}a_n, \lim_{n\to\infty}b_n$を求めよ．

22．$a_1 \neq 2, a_n a_m = a_{n+m} + a_{n-m}, a_{n+7} = a_n$ (n, m は整数) で定義される0と異なる数列$\{a_n\}$について，次の問いに答よ．

(1) a_0 の値を求めよ．

(2) $a_{-n} = a_n$ を証明せよ．

(3) $a_{n+7m} = a_n$ を証明せよ．

(4) すべてのa_nは，a_0, a_1, a_2, a_3 のいずれかに等しいことを証明せよ．

(5) $a_1 = a$ とおくとき，a_2, a_3, a_4 を a で表せ．

(6) $x = a$ を1つの解にもつ，最低次の有理数係数の方程式 $f(x) = 0$ を求めよ．ただし，多項式 $f(x)$ の最高次の項の係数は1である．

(7) $f(a_n)$ の値を求めよ．

(8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{a_n^{\,2}}$ の値を求めよ．

(9) a_n を a の最低次の有理数係数の多項式として表せ．

23．3次関数 $y = x^3 + 3x^2$ を x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動させた式をCとおく．このとき，次の問いに答よ．

(1) Cの極値を求めよ．

(2) Cが原点で対称になるように， p, q の値を求めよ．

(3) Cが原点を通り，極大値が0となるように， p, q の値を求めよ．

(4) Cが直線 $y = 9x$ に接し，極小値が0となるように， p, q の値を求めよ．

24．4次関数 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ に2点で接する接線の方程式を求めよ．ただし，$3b^2 - 8ac > 0$ とする．

25．5次方程式 $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5x + 1 = 0$ の5つの解の n 乗の和を a_n とおくとき，次の問いに答よ．

(1) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + a_n + 2 = 0$ を証明せよ．

(2) a_{10} の値を求めよ．

26．3次方程式$x^3+px^2+qx+r=0$が相異なる3つの実数解をもつ条件を求めよ．ただし，p,q,rは実数とする．

27．a,bが$0\le b\le a\le 1$を満たしながら変化するとき，3次方程式$x^3+3ax^2+9bx+2ab=0$が虚数解をもたない確率を求めよ．

28．4つの3次方程式$x^3+ax^2+ax+a=0\cdots$①，$x^3+ax^2+ax-a=0\cdots$②，$x^3+ax^2-ax+a=0\cdots$③，$x^3+ax^2-ax-a=0\cdots$④について，次の問いに答よ．ただし，aは0でない定数とする．

(1) 相異なる3つの実数解をもつことができる方程式はどれか．またそれはどのようなaの値のときか．

(2) ①～④すべての方程式が，実数解をもたないようなaの値の範囲を求めよ．

29．x,y,zは実数で，$x+y+z=4, xyz=2$のとき，$xy+yz+zx$の取り得る値の範囲を求めよ．

30．x,y,zは実数で，$x+y+z=x^2+y^2+z^2=2$のとき，次の問いに答よ．

(1) $\max(x,y,z)-\min(x,y,z)$の取り得る値の範囲を求めよ．

(2) $x^3+y^3+z^3$の取り得る値の範囲を求めよ．

31．x,y,zは実数で，$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$のとき，$xyz$の取り得る値の範囲を求めよ．

32．$x^n+y^n+z^n=k_n$とおく．$k_1=a,k_2=b,k_3=c$のとき，k_4,k_5をa,b,cで表せ．

33．関数$y=\sin x+\cos ecx+\cos x+\sec x+\tan x+\cot x$について，次の問いに答よ．

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$におけるyの最小値と，そのときのxの値を求めよ．

(2) $\dfrac{\pi}{2}<x<2\pi$におけるyの最大値と，そのときの$\sin x,\cos x$の値を求めよ．

34．関数$y=(\sin x+\cos ecx)^2+(\cos x+\sec x)^2+(\tan x+\cot x)^2$の最小値と，そのときの$x$の値を求めよ．

35．1を解にもたないn次方程式$f(x)=0$のn個の解を$\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$とするとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\alpha_i}$の値を求めよ．

36．n 次方程式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$ の n 個の解の k 乗の和を s_k とおく．

$|x|>\max_{1\le i\le n}|a_i|+1$のとき，等式 $\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{s_k}{x^k}$ を証明せよ．

37．微分可能な関数 $f(x)$ に対して，次式で定義される関数 $F(x)$ を求めよ．

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{kx+a}{n}\right)-f\left(\frac{kx+b}{n}\right)\right\}(a\neq b)$$

38．$x\ge 1$のとき，$x^3,x^2,x,1,x^3-x,x^2-1$の中で２番目に小さい数を $f(x)$ とおくとき，$\int_1^2 f(x)dx$ の値を小数第２位まで正しく求めよ．ただし，$f(1)=0$ とする．また，$x^3-x-1=0$ の実数解を α とおくとき，$\alpha=1.3247,\alpha^2+3\alpha=5.7290$ である．

39．３次方程式 $x^3+px+q=0(p,q$ は実数$)$ が，実数解 $\alpha,\beta,\gamma(\alpha\le\beta\le\gamma)$ をもつとき，曲線 $y=x^3+px+q$ と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を β の最低次の整式として表せ．

40．曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ と x 軸とで囲まれた部分の面積は，$\dfrac{1}{12}(a^2-3b)^2$ 以下であることを証明せよ．

41．次の問いに答よ．

(1)　３次方程式 $x^3-3x+1=0$ を $x=r\cos\theta(r>0,0\le\theta\le\pi)$ とおいて解け．

(2)　曲線 $y=x^3-3x+1$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

42．a_i は実数 $(a_0\neq 0,i=0,1,2,\cdots,n)$ で，k は正の定数とする．

$\dfrac{a_0}{k+n+1}+\dfrac{a_1}{k+n}+\dfrac{a_2}{k+n-1}+\cdots+\dfrac{a_n}{k+1}=0$ のとき，n 次方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$ は，０と１の間に少なくとも１つの実数解をもつことを証明せよ．

43．平面上に3点$O(0,0), A(14,0), B(5,12)$がある．点Pはx軸上をOからAまで動くとき，点Qもそれに伴って，常にBP上にあり，$PO:PA=QP:QB$を満足しながらOからBまで動く．このとき次の問いに答よ．

(1)　点Qの軌跡の方程式を求めよ．

(2)　点Qの軌跡と線分OBによって囲まれる部分の面積を求めよ．

44．空間に4点$O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)(a>0,b>0,c>0)$がある．三角錐$O-ABC$に内接する球の半径の長さを求めよ．

45．$\overrightarrow{OA}=(a,1), \overrightarrow{OB}=(1,b), \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=kS$のとき，$\angle AOB$の余弦の値を$k$を用いて表せ．ただし，$S$は$\Delta AOB$の面積である．

46．平面上に3点$O(0,0), A(14,0), B(5,12)$がある．ΔAOB内に1点Pを次の条件を満たすようにとるとき，点Pの軌跡の方程式をそれぞれ求めよ．

(1)　$\angle AOP=\angle OBP$

(2)　$\angle AOP=\angle ABP$

47．平面上に円錐曲線Cがある．その焦点Fを通る曲線の対称軸を始線(横軸)にとり，曲線との交点をRとする．始線上に点Fに対して点Rの反対側に点Aをとり，点F, Aからそれぞれ垂線を立て，曲線の上半分との交点をそれぞれQ, Pとする．今，$FA=2, AP=2\sqrt{3}$とするとき，次の各々の場合におけるCの曲線名とFRの長さを求めよ．

(1)　$FQ=1$

(2)　$FQ=2$

(3)　$FQ=3$

(4)　$FQ=4$

48．定点$(c,0)(c\neq 0)$を通る直線と2定直線$y=ax, y=bx(a>0,b>0,a\neq b)$との交点をそれぞれ$A, B$とするとき，線分$AB$の中点$M$の軌跡の方程式を求めよ．

49．2次曲線 $ax^2+2hxy+by^2=c$ を原点中心に $\theta(0°<\theta<90°)$ だけ回転すると，

$Ax^2+2Hxy+By^2=c$ となった．このとき，次の問いに答よ．

(1) 次の等式を証明せよ．

$A+B=a+b,\ AB-H^2=ab-h^2$

(2) $H=0$ となるように，回転角 θ を定めよ．

(3) (2)のとき，$2h(a-b)>0$ を証明せよ．

50．次の方程式を満たす複素数 z はどんな曲線上にあるか．

(1) $|z|=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$

(2) $\left|z+|z|\right|=1$

51．n 人の集団の中に，同じ月日に生れた人のいる確率を求めよ．ただし，2月29日生れの人はいないものとする．

52．$\alpha+\beta=u,\ \alpha\beta=v$ とおくとき，次の等式を証明せよ．

$$\alpha^n+\beta^n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n}{n-k}{}_{n-k}C_k u^{n-2k}v^k$$

53．52枚のトランプの中から任意の5枚のカードを引くとき，次のポーカーの役の確率を求めよ．

(1) ワンペア

(2) ツーペア

(3) スリーカード

(4) ストレート

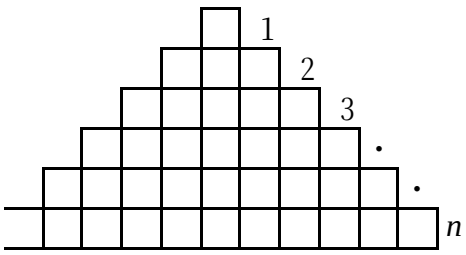
(5) フラッシュ

(6) フルハウス

(7)　フォーカード

(8)　ストレートフラッシュ

(9)　ロイヤルストレートフラッシュ

54．白球n個の入った袋の中から１個取り出し，代わりに黒球１個を入れる．次にまた，その袋の中から１個取り出し，代わりの黒球１個入れる．この操作をm回繰り返したとき，袋の中に白球r個残っている確率$P(n,m,r)$を求めよ．ただし，白球，黒球とも同形同質で，袋の中からは同程度に選ばれるものとする．

55．下図に含まれる大小すべての正方形，長方形の個数を求めよ．