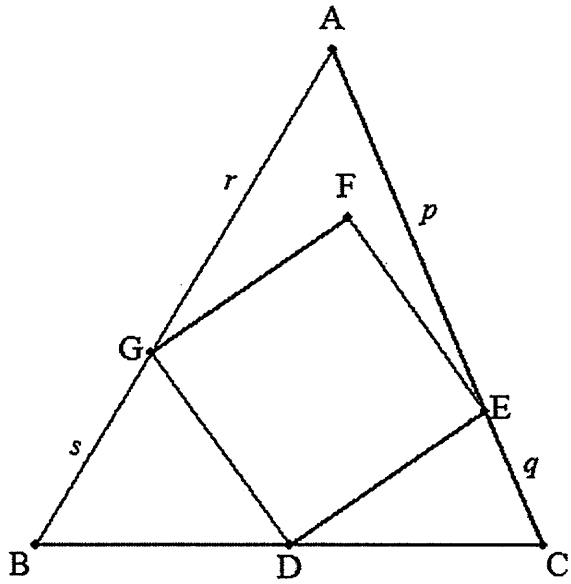
立命館慶祥中学校・高等学校　時岡郁夫
tokioka@spc.ritsumei.ac.jp

△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正方形問題

パターン1

△ABC について，BC の中点を D とし，CA 上に点 E を，△ABC 内に点 F を，AB 上に点 G を，四角形 DEFG が正方形になるようにとる。AE＝p，EC＝q，AG＝r，GB＝s とおくとき，



(1) $p^2+q^2=r^2+s^2$ を証明せよ。

(2)正方形の 1 辺を p,q,r,s を用いて表せ。

(3) BC を p,q,r,s を用いて表せ。

（解）(1)（証明）

△ABC 内に点 L を，GB＝GL，GB⊥GL となるようにとると，

△GBD≡△GLF（2 辺夾角相等）であるから，

BD＝LF･･･①，∠BDG＝∠LFG･･･②　である。

また，△AGL は直角三角形となるから，

$AG^2+GB^2=AG^2+GL^2=AL^2$･･･③　である。

次に，△DCE と△FLE について

DC＝DB＝FL（①より）･･･④

DE＝FE（仮定より）･･･⑤

∠EDC＝180°－（∠BDG＋90°）＝90°－∠BDG

＝∠EFG－∠LFG＝∠EFL･･･⑥

④～⑥より，2 辺夾角相等より，△DCE≡△FLE であるから

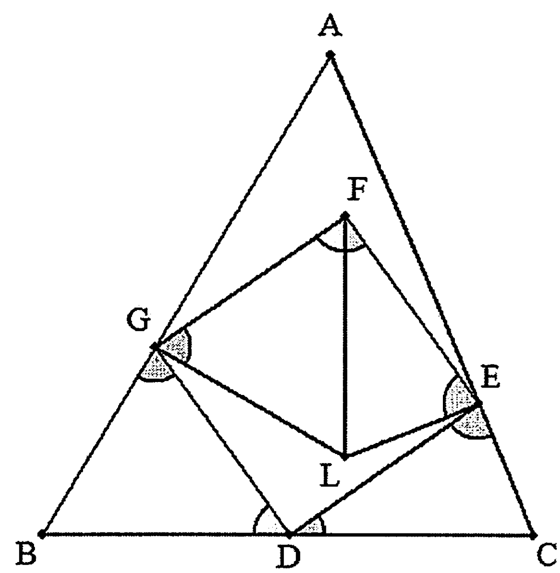
EC＝EL･･･⑦

∠CEL＝∠CED＋∠DEL＝∠LEF＋∠DEL＝90° より

△AEL は直角三角形となるから，

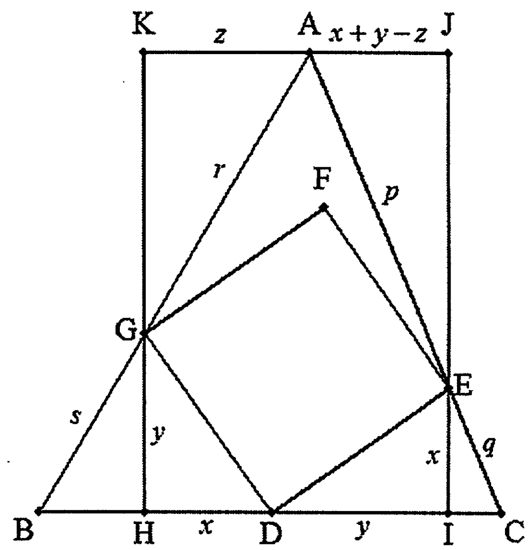
$AE^2+EC^2=AE^2+EL^2=AL^2$･･･⑧

③，⑧より，$AE^2+EC^2=AG^2+GB^2$ ■



(2) 図のように，BC と辺を共有し，E，A，G を通る長方形 HIJK をつくり，HD＝x，DI＝y とおくと，

△GHD≡△DIE より，GH＝y，EI＝x である。



△GBH∽△GAK，△ECI∽△EAJ より

KH$=\dfrac{r+s}{s}y$，JI$=\dfrac{p+q}{q}x$ で，KH=JI より

$$\frac{r+s}{s}y=\frac{p+q}{q}x$$

$$x:y=\frac{r+s}{s}:\frac{p+q}{q}=q(r+s):s(p+q)$$

$x=q(r+s)k,y=s(p+q)k\cdots$⑨とおける。

ただし，$k>0$。

次に，KA$=z$ とおくと，AJ$=x+y-z$

BH : AK$=s$: r より

BH$=\dfrac{s}{r}$AK$=\dfrac{s}{r}z\cdots$⑩

同様に，CI : AJ$=q$: p より CI$=\dfrac{q}{p}$AK$=\dfrac{q}{p}(x+y-z)\cdots$⑪

BD=DC であるから，BH+HD=DI+IC

⑩，⑪より

$$\frac{s}{r}z+x=y+\frac{q}{p}(x+y-z)$$

$$z=\frac{\left(\dfrac{q}{p}-1\right)x+\left(\dfrac{q}{p}+1\right)y}{\dfrac{s}{r}+\dfrac{q}{p}}=\frac{r\{(q-p)x+(q+p)y\}}{ps+qr}$$

⑨より

$$z=\frac{r\{(q-p)\times q(r+s)k+(q+p)\times s(p+q)k\}}{ps+qr}=\frac{r\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\}}{ps+qr}k$$

⑩より，BH$=\dfrac{s\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\}}{ps+qr}k$

△GBH は直角三角形であるから，BH²+GH²=GB²

$$\left[\frac{s\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\}}{ps+qr}k\right]^2+\{s(p+q)k\}^2=s^2$$

$$k^2=\frac{s^2}{\left[\dfrac{s\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\}}{ps+qr}\right]^2+\{s(p+q)\}^2}=\frac{(ps+qr)^2}{\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\}^2+\{(p+q)(ps+qr)\}^2}$$

$$=\frac{(ps+qr)^2}{2(p^2+q^2)(q^2r^2+2q^2rs+p^2s^2+2pqs^2+2q^2s^2)}=\frac{(ps+qr)^2}{2(p^2+q^2)\{q^2(r+s)^2+s^2(p+q)^2\}}\cdots⑫$$

また，△GDH は直角三角形であるから，⑫より

$$\mathrm{GD}^2=\mathrm{DH}^2+\mathrm{GH}^2=x^2+y^2=\{q(r+s)k\}^2+\{s(p+q)k\}^2=\{q^2(r+s)^2+s^2(p+q)^2\}k^2=\frac{(ps+qr)^2}{2(p^2+q^2)}$$

GD>0 であるから正方形の 1 辺は

$$\mathrm{GD}=\boxed{\frac{ps+qr}{\sqrt{2(p^2+q^2)}}}\cdots(答)$$

(3) BC＝2（BH＋HD）

$$=2\left[\frac{s\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\}}{ps+qr}k+q(r+s)k\right]$$

$$=\frac{2[s\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\}+q(ps+qr)(r+s)]}{ps+qr}k$$

$$=\frac{2(q^2r^2+2q^2rs+p^2s^2+2pqs^2+2q^2s^2)}{ps+qr}k$$

$$=\frac{2\{q^2(r+s)^2+s^2(p+q)^2\}}{ps+qr}\times\frac{ps+qr}{\sqrt{2(p^2+q^2)\{q^2(r+s)^2+s^2(p+q)^2\}}}$$

$$=\boxed{\sqrt{\frac{2\{(p+q)^2s^2+(r+s)^2q^2\}}{p^2+q^2}}}\cdots(答)$$

【別解】

(1) 正方形の 1 辺を x，BC＝a とおくと，GE＝$\sqrt{2}x$，BD＝DC＝$\dfrac{a}{2}$ である。

△AGE と△ABC において∠A が共通であるから，

$$\cos A=\frac{p^2+r^2-(\sqrt{2}x)^2}{2pr}=\frac{(p+q)^2+(r+s)^2-a^2}{2(p+q)(r+s)} \text{ より}$$

$$(p+q)(r+s)(p^2+r^2-2x^2)-pr\{(p+q)^2+(r+s)^2-a^2\}=0\cdots①$$

△GBD と△ABC において∠B が共通であるから，

$$\cos B=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+s^2-x^2}{2\cdot\frac{a}{2}s}=\frac{a^2+(r+s)^2-(p+q)^2}{2a(r+s)} \text{ より}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+s^2-x^2=\frac{s}{2(r+s)}\{a^2+(r+s)^2-(p+q)^2\}\cdots②$$

△EDC と△ABC において∠C が共通であるから，

$$\cos C=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+q^2-x^2}{2\cdot\frac{a}{2}q}=\frac{a^2+(p+q)^2-(r+s)^2}{2a(p+q)}\text{ より}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+q^2-x^2=\frac{q}{2(p+q)}\left\{a^2+(p+q)^2-(r+s)^2\right\}\cdots③$$

②，③はx^2，a^2についての連立２元１次方程式である。

②－③からx^2を消去し，a^2について解く。

$$s^2-q^2=\left(\frac{s}{2(r+s)}-\frac{q}{2(p+q)}\right)a^2-\left(\frac{s}{2(r+s)}+\frac{q}{2(p+q)}\right)\left\{(p+q)^2-(r+s)^2\right\}$$

$$(ps-qr)a^2=\{s(p+q)+q(r+s)\}\left\{(p+q)^2-(r+s)^2\right\}+2(p+q)(r+s)(s^2-q^2)\cdots④$$

[1]　$ps-qr=0$のとき

$p:q=r:s$ より GE // BC となるから，$p=r, q=s$ より，$p^2+q^2=r^2+s^2$ は成り立つ。

[2] $ps-qr\neq0$のとき，④から

$$a^2=\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+4p^2qs+3pq^2s-q^3r-qr^3-pr^2s-4qr^2s-3qrs^2}{ps-qr}\cdots⑤$$

⑤を③に代入して，x^2について解くと

$$x^2=\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+qrs^2-q^3r-qr^3-pq^2s-pr^2s}{4(ps-qr)}\cdots⑥$$

⑤，⑥を①の左辺に代入すると，

$$(p+q)(r+s)\left\{p^2+r^2-2\times\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+qrs^2-q^3r-qr^3-pq^2s-pr^2s}{4(ps-qr)}\right\}$$

$$-pr\left\{(p+q)^2+(r+s)^2-\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+4p^2qs+3pq^2s-q^3r-qr^3-pr^2s-4qr^2s-3qrs^2}{ps-qr}\right\}$$

$$=\frac{(p+q)(r+s)(ps+qr)(p^2+q^2-r^2-s^2)}{2(ps-qr)}\quad\text{(計算省略)}$$

よって，$\dfrac{(p+q)(r+s)(ps+qr)(p^2+q^2-r^2-s^2)}{2(ps-qr)}=0$ より

$$p^2+q^2-r^2-s^2=0\quad\therefore p^2+q^2=r^2+s^2$$

以上[1]，[2]より $p^2+q^2=r^2+s^2$ が成立する。

(2)　⑥の分子を s について整理すると

$$x^2=\frac{ps^3+qrs^2+p\left(p^2-q^2-r^2\right)s+qr\left(p^2-q^2-r^2\right)}{4(ps-qr)}=\frac{s^2(ps+qr)+(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2\right)}{4(ps-qr)}$$

$$=\frac{(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2+s^2\right)}{4(ps-qr)}=\frac{(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2+p^2+q^2-r^2\right)}{4(ps-qr)}=\frac{(ps+qr)\left(2p^2-2r^2\right)}{4(ps-qr)}$$

$$=\frac{(ps+qr)\left(p^2-r^2\right)}{2(ps-qr)}\cdots⑦$$

$$=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2(ps-qr)(ps+qr)}=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2\left(p^2s^2-q^2r^2\right)}=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2\left\{p^2\left(p^2+q^2-r^2\right)-q^2r^2\right\}}=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2\left(p^4+p^2q^2-p^2r^2-q^2r^2\right)}$$

$$=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2\left\{p^2\left(p^2+q^2\right)-r^2\left(p^2+q^2\right)\right\}}=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2\left(p^2+q^2\right)\left(p^2-r^2\right)}=\frac{(ps+qr)^2}{2\left(p^2+q^2\right)}$$

$x>0$ より，$x=\boxed{\dfrac{ps+qr}{\sqrt{2\left(p^2+q^2\right)}}}\cdots$ (答)

(3) ⑤で，$a>0$ より

$$a=\boxed{\sqrt{\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+4p^2qs+3pq^2s-q^3r-qr^3-pr^2s-4qr^2s-3qrs^2}{ps-qr}}}\cdots \text{(答)}$$

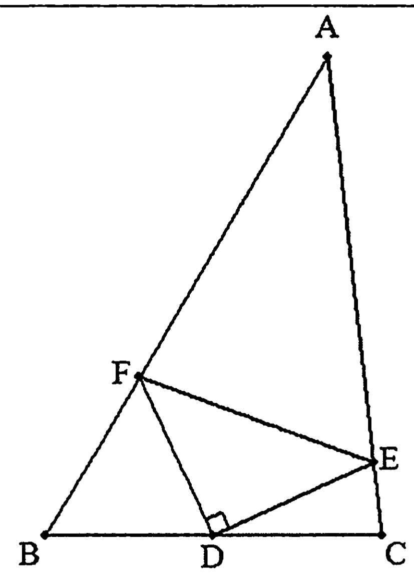
（補足）⑦を用いて

$$\cos A=\frac{p^2+r^2-2x^2}{2pr}=\frac{p^2+r^2-2\times\dfrac{(ps+qr)\left(p^2-r^2\right)}{2(ps-qr)}}{2pr}=\boxed{\frac{pq-rs}{qr-ps}}$$

【例】趣味の数学問題集 A288 から（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）

△ABC について，BC の中点を D，CA，AB 上にそれぞれ，点 E，F を，図のように，△DEF が直角二等辺三角形になるようにとる。
AE＝11，EC＝2，AF＝10 のとき，
(1)　DE を求めよ。
(2)　△ABC の面積を求めよ。

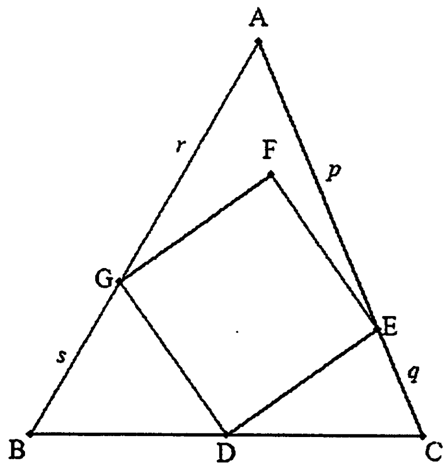
（答）(1) $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$　(2) $\dfrac{117}{2}$



パターン2

△ABCについて，BCの中点をDとし，CA上に点Eを，△ABC内に点Fを，AB上に点Gを，四角形DEFGが正方形になるようにとる。

BC＝a，CA＝b，AB＝cとおくとき，正方形の１辺をa,b,cを用いて表せ。



（解）正方形の１辺をx，EC＝q，GB＝sとおくと，AE＝$b-q$　AG＝$c-s$である。

パターン１の定理より，$(b-q)^2+q^2=(c-s)^2+s^2\cdots$①

$$\cos B=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+s^2-x^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot s}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\quad\therefore\frac{a^2}{4}+s^2-x^2=\frac{s}{2c}\left(a^2-b^2+c^2\right)\cdots②$$

$$\cos C=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+q^2-x^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot q}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\quad\therefore\frac{a^2}{4}+q^2-x^2=\frac{q}{2b}\left(a^2+b^2-c^2\right)\cdots③$$

①より，$2\left(s^2-q^2\right)=2(cs-bq)+b^2-c^2\cdots$④

②－③より，$s^2-q^2=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}s-\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}q\cdots$⑤

⑤を④に代入すると，$2\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}s-\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}q\right)=2(cs-bq)+b^2-c^2$

sについて解くと，$s=\frac{c\left(-a^2+b^2+c^2\right)q-bc\left(b^2-c^2\right)}{b\left(-a^2+b^2+c^2\right)}\cdots$⑥

⑥を④に代入すると，$q=\frac{b\left\{3\left(a^4-2a^2b^2+b^4-a^2c^2-b^2c^2\right)+\sqrt{3}\left(-a^2+b^2+2c^2\right)t\right\}}{4\left(-a^2+b^2+bc+c^2\right)\left(-a^2+b^2-bc+c^2\right)}\cdots$⑦

ただし，$t=\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$である。

⑦を③に代入すると

$$x=\frac{t\sqrt{a^6-2a^4\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(b^4-5b^2c^2\right)+9b^2c^2\left(b^2+c^2\right)-\sqrt{3}\left(-a^2+b^2+2c^2\right)\left(-a^2+2b^2+c^2\right)t}}{2\sqrt{2}\left(-a^2+b^2+bc+c^2\right)\left(-a^2+b^2-bc+c^2\right)}$$

…（答）

（補足） $s=\dfrac{c\left\{3\left(a^4-2a^2c^2+c^4-a^2b^2-b^2c^2\right)+\sqrt{3}\left(-a^2+2b^2+c^2\right)\right\}}{4\left(-a^2+b^2+bc+c^2\right)\left(-a^2+b^2-bc+c^2\right)}$

【課題】△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正三角形問題

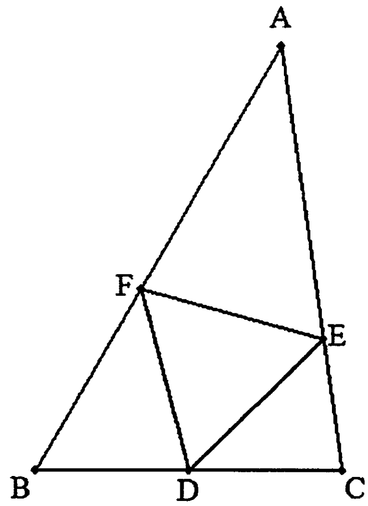
△ABC について，BC の中点をD とし，CA 上に点E を，AB 上に点F を，△DEF が正三角形になるようにとる。

AE= p , EC= q , AF= r , FB= s とおくとき，次を証明せよ。

(1) $3p^2+q^2=3r^2+s^2$

(2) （正三角形の1辺） $\dfrac{ps+qr}{\sqrt{3p^2+q^2}}$

(3) $\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$



※2015 年 8 月 7 日，北海道札幌南高等学校で開催される第 97 回全国算数・数学教育研究大会，高等学校　分科会 08　問題解決，数学的な見方・考え方において，発表予定です。

テーマ：「こだわり数学～難解，奇抜，爽快な問題の数々」