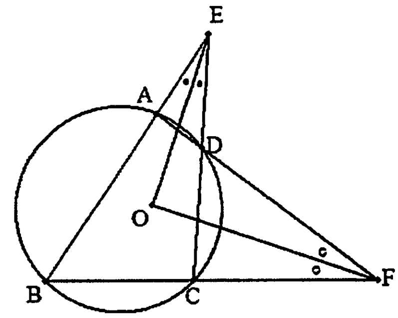
(2015/1/31　於ニッセイ MK ビル 7F)
立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫
tokioka@spc.ritsumei.ac.jp

円に内接する四角形に内接するひし形について

1　はじめに

問題 12　円に内接する四辺形ABCDの2組の対辺のなす角の各2等分線EO，FOは垂直であることを証明せよ。



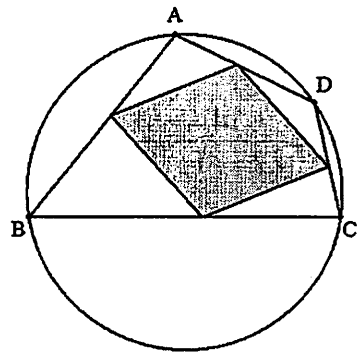
この問題は，参考文献にある「わかる幾何学」の 134 ページに掲載されている。この問題からヒントを得て，次の問題を考え，中学生にも分かるように解いてみた。

2　考えた問題

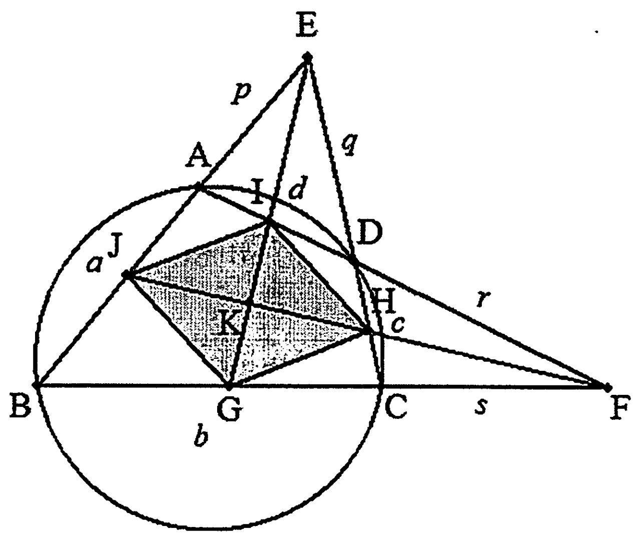
AB＝a，BC＝b，CD＝c，DA＝d である四角形 ABCD は円に内接している。このとき，四角形の各辺上に頂点をもつひし形について，

(1)　一辺の長さを求めよ。

(2)　面積を求めよ。



(解) (1)　与えられた図において，BA, CD の交点を E，BC，AD の交点を F とする。∠BEC の二等分線と BC，AD との交点をそれぞれ G, I，∠BFA の二等分線と CD，AB との交点をそれぞれ H，J とすると，四角形 GHIJ がひし形になることを証明する。



(証明) EG と FJ の交点を K とする。
△JBF∽△HDF であるから，
∠EJH＝∠JBF＋∠BFJ＝∠HDF＋∠DFH＝∠EHJ
よって△EJH は二等辺三角形となるから，
JK＝KH，EK⊥JH･･･①
同様に，△GBE∽△IDE であるから，
∠FGI＝∠GBE＋∠BEG＝∠IDE＋∠DEI＝∠FIG
よって△FIG は二等辺三角形となるから，
IK＝KG，FK⊥IG･･･②
①，②より四角形 GHIJ において，対角線が垂直で，互いに他を二等分しているのでひし形となる。■

次に，便宜的に，EA＝p，ED＝q，FD＝r，FC＝s とおき，ひし形の一辺と面積を求める。
角の二等分と比の定理より，

△FAB について，AJ＝$\dfrac{a(d+r)}{(d+r)+(b+s)}$，JB＝$\dfrac{a(b+s)}{(d+r)+(b+s)}$，

△FDC について，DH=$\dfrac{cr}{r+s}$

△EBC について，BG=$\dfrac{b(a+p)}{(a+p)+(c+q)}$，GC=$\dfrac{b(c+q)}{(a+p)+(c+q)}$，

△EAD について，ID=$\dfrac{dq}{p+q}$

△JBF∽△HDF であるから，JB : HD=BF : DF

JB・DF=HD・BF より，$\dfrac{a(b+s)}{(d+r)+(b+s)}\times r=\dfrac{cr}{r+s}\times(b+s)$

$a\neq c$ のとき，$r+s=\dfrac{c(b+d)}{a-c}\cdots$①

$a=c$ のとき，四角形 ABCD は等脚台形となり， BC，CD，DA，AB の中点をそれぞれ G，H，I，J とすると，四角形 GHIJ はひし形になる。この場合の一辺の長さと面積は後ほど考える。

同様に，△GBE∽△IDE であるから，GB : BE=ID : DE

GB・DE=BE・ID より，$\dfrac{b(a+p)}{(a+p)+(c+q)}\times q=(a+p)\times\dfrac{dq}{p+q}$

$b\neq d$ のとき，$p+q=\dfrac{d(a+c)}{b-d}\cdots$②

$b=d$ のとき，四角形 ABCD は等脚台形となり，この場合の一辺の長さと面積も後ほど考える。

次に，EJ=EH より　EA+AJ=ED+DH であるから，$p+\dfrac{a(d+r)}{(d+r)+(b+s)}=q+\dfrac{cr}{r+s}$

$$q-p=\frac{a(d+r)}{(d+r)+(b+s)}-\frac{cr}{r+s}$$

これに①を代入して整理すると，$q-p=\dfrac{d(a-c)}{b+d}\cdots$③

同様に，FI=FG より　FD+DI=FC+CG であるから，

$r+\dfrac{dq}{p+q}=s+\dfrac{b(c+q)}{(a+p)+(c+q)}$，$r-s=\dfrac{b(c+q)}{(a+p)+(c+q)}-\dfrac{dq}{p+q}$

これに②を代入して整理すると，$r-s=\dfrac{c(b-d)}{a+c}\cdots$④

②，③を p,q について解くと　$p=\dfrac{d(ad+bc)}{(b+d)(b-d)},q=\dfrac{d(ab+cd)}{(b+d)(b-d)}$

同様に，①，④を r,s について解くと　$r=\dfrac{c(ab+cd)}{(a+c)(a-c)},s=\dfrac{c(ad+bc)}{(a+c)(a-c)}$

GI=EG−EI で， EG=$\sqrt{EB\cdot EC-BG\cdot CG}$，EI=$\sqrt{EA\cdot ED-AI\cdot DI}$ である。(※)

EG=$\sqrt{EB\cdot EC-BG\cdot CG}$

$$=\sqrt{(a+p)(c+q)-\frac{b(a+p)}{(a+p)+(c+q)}\cdot\frac{b(c+q)}{(a+p)+(c+q)}}=\frac{\sqrt{(a+p)(c+q)\{(a+c+p+q)^2-b^2\}}}{(a+c+p+q)}$$

ここで，$a+p=a+\dfrac{d(ad+bc)}{(b+d)(b-d)}=\dfrac{b(ab+cd)}{(b+d)(b-d)}$，$c+q=c+\dfrac{d(ab+cd)}{(b+d)(b-d)}=\dfrac{b(ad+bc)}{(b+d)(b-d)}$，

$a+c+p+q=a+c+\dfrac{d(a+c)}{b-d}=\dfrac{b(a+c)}{b-d}$ より

$$EG=\frac{\sqrt{\dfrac{b(ab+cd)}{(b+d)(b-d)}\cdot\dfrac{b(ad+bc)}{(b+d)(b-d)}\left[\left\{\dfrac{b(a+c)}{b-d}\right\}^2-b^2\right]}}{\dfrac{b(a+c)}{b-d}}=\frac{b\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(a-b+c+d)(a+b+c-d)}}{(a+c)(b+d)(b-d)}$$

同様に，EI$=\sqrt{EA\cdot ED-AI\cdot DI}$ を計算すると，EI$=\dfrac{d\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(a-b+c+d)(a+b+c-d)}}{(a+c)(b+d)(b-d)}$

よって，GI=EG−EI$=\dfrac{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(a-b+c+d)(a+b+c-d)}}{(a+c)(b+d)}$…⑤

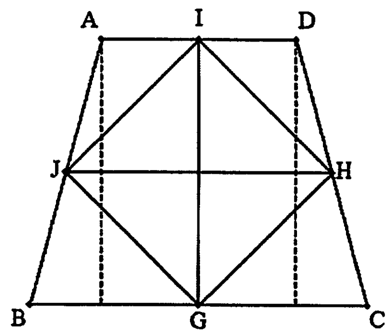
同様に，HJ=FJ−FH$=\sqrt{FA\cdot FB-AJ\cdot BJ}-\sqrt{FD\cdot FC-DH\cdot CH}$ を計算すると

HJ$=\dfrac{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(-a+b+c+d)(a+b-c+d)}}{(a+c)(b+d)}$…⑥

⑤，⑥より，ひし形の一辺の長さは，

$$\sqrt{\left(\frac{GI}{2}\right)^2+\left(\frac{HJ}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{(a+c)(b+d)}\cdots⑦$$

最後に，$a=c$ のとき，等脚台形 ABCD の BC，CD，DA，AB の中点をそれぞれ G，H，I，J とすると，四角形 GHIJ はひし形となる。



GI$=\sqrt{AB^2-\left(\dfrac{BC-DA}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{b-d}{2}\right)^2}$，

HJ$=\dfrac{BC+DA}{2}=\dfrac{b+d}{2}$ であるから

ひし形の一辺の長さは，

$$\sqrt{\left(\frac{GI}{2}\right)^2+\left(\frac{HJ}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{GI^2+HJ^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\left(\frac{b-d}{2}\right)^2+\left(\frac{b+d}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+bd}}{2}$$

この結果は，⑦で $a=c$ と置いたものに一致する。

$b=d$ の場合も同様に⑦の結果と一致するから，以上より

ひし形の一辺の長さは　$\dfrac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{(a+c)(b+d)}$… (答)

(2)　⑤，⑥より，$a\neq c, b\neq d$ のときは，ひし形の面積は，

$$\frac{1}{2}\text{GI}\cdot\text{HJ}=\frac{(ab+cd)(ad+bc)\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2(a+c)^2(b+d)^2}\cdots⑧$$

$a=c$ のとき，(1)より

GI$=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{b-d}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{(2a-b+d)(2a+b-d)}}{2}$，HJ$=\dfrac{b+d}{2}$ であるから

ひし形の面積は，$\dfrac{1}{2}$GI・HJ$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{(2a-b+d)(2a+b-d)}}{2}\cdot\dfrac{b+d}{2}=\dfrac{(b+d)\sqrt{(2a-b+d)(2a+b-d)}}{8}$

この結果は，⑧で $a=c$ と置いたものに一致する。

$b=d$ の場合も同様に⑧の結果に一致するから，以上よりひし形の面積は，

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2(a+c)^2(b+d)^2}\cdots\text{(答)}$$

3　補足

円に内接する四角形 ABCD の 4 辺の長さが，AB＝a，BC＝b，CD＝c，DA＝d であるとき，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{4}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\left(p=\frac{a+b+c+d}{2}\right)$$

であることが，知られている。（参考文献［2］参照）

これを用いると，ひし形の面積は，$\dfrac{2(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(b+d)^2}S$ と表すことができ，四角形 ABCD の面積 S との比がわかる。

また，四角形 ABCD の外接円の半径 R は

$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

であるから，ひし形の一辺の長さは，$\dfrac{4S}{(a+c)(b+d)}R$ と表すことができ，四角形 ABCD の外接円の半径 R との比がわかる。（参考文献［2］参照）

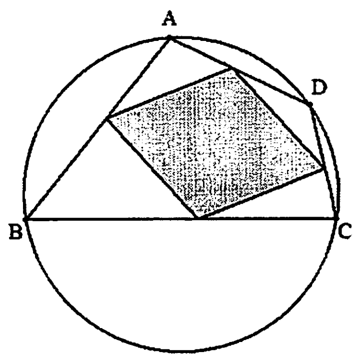
4　おわりに

具体例を作ってみた。高校生なら，どのように求めるのであろうか。

AB＝6，BC＝8，CD＝3，DA＝4 である四角形 ABCD は円に内接している。四角形の各辺上に頂点をもつひし形について，

(1)　一辺の長さを求めよ。

(2)　面積を求めよ。



（答）(1)　$\dfrac{10\sqrt{10}}{9}$　(2)　$\dfrac{50\sqrt{39}}{27}$

【参考文献】

［1］　わかる数学全書Ⅲ　わかる幾何学（秋山武太郎著，春日屋伸昌改訂／日新出版／1990 年 7 月 30 日 13 版発行）

［2］　時岡郁夫の Website（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）にある「こだわり数学」58.円に内接する四角形の対角線について

［3］　（※）について，時岡郁夫の Website（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）にある「趣味の数学問題集」B112(3)にある内角の二等分線の公式を使用。

（2014/11/22）