第 91 回数学教育実践研究会資料

(2014/11/29　於アスティ 45 ビル)
立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫

tokioka@spc.ritsumei.ac.jp

n 次方程式の n 個の解の k 乗の和の求め方について

1　はじめに

問題解法代数学辞典（参考文献）の第 8 編　方程式の理論　第 3 章　四次方程式及び高次方程式　6.その他に，次の問題と解答が掲載されている。

3051. ある四次方程式の四つの根の 1 乗，2 乗，3 乗，4 乗の和がそれぞれ　u_1, u_2, u_3, u_4 であるという。この方程式を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$　求める四次方程式を　$f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$

とすれば，微分を用いて　$\dfrac{xf'(x)}{f(x)} = \dfrac{4x^4 + 3px^3 + 2qx^2 + rx}{x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s}$

そこで普通の割り算をすれば

$$4 - \frac{p}{x} + \frac{p^2 - 2q}{x^2} + \frac{-p^3 + 3pq - 3r}{x^3} + \frac{p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2 - 4s}{x^4} + \cdots$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad & u_1 = -p \\ & u_2 = p^2 - 2q \\ & u_3 = -p^3 + 3pq - 3r \\ & u_4 = p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2 - 4s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad & p = -u_1 \\ & q = \frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2} - u_2\right) \\ & r = \frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3} + 3u_1u_2 - 2u_3\right) \\ & s = \frac{1}{24}\left(u_1^{\ 4} - 6u_1^{\ 2}u_2 + 8u_1u_3 + 3u_2^{\ 2} - 6u_4\right) \end{aligned}$$

故に求める四次方程式は

$$x^4 - u_1x^3 + \frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2} - u_2\right)x^2 + \frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3} + 3u_1u_2 - 2u_3\right)x + \frac{1}{24}\left(u_1^{\ 4} - 6u_1^{\ 2}u_2 + 8u_1u_3 + 3u_2^{\ 2} - 6u_4\right) = 0$$

2　証明

上の解答に使用されている

$$\begin{aligned} \frac{xf'(x)}{f(x)} &= \frac{4x^4 + 3px^3 + 2qx^2 + rx}{x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s} \\ &= 4 - \frac{p}{x} + \frac{p^2 - 2q}{x^2} + \frac{3pq - 3r - p^3}{x^3} + \frac{4pr + 2q^2 - 4p^2q + p^4 - 4s}{x^4} + \cdots \\ &= u_0 + \frac{u_1}{x} + \frac{u_2}{x^2} + \frac{u_3}{x^3} + \cdots \end{aligned}$$

の証明を試みたい。ただし，u_k は 4 次方程式の 4 個の解の k 乗の和を表す。

n 次方程式 $f(x)=0$ の n 個の解の k 乗の和を u_k とおくと，$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{x^k}$ である。

証　n 次方程式 $f(x)=0$ の n 個の解 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ の k 乗の和を u_k とおく。
すなわち，$u_k={\alpha_1}^k+{\alpha_2}^k+\cdots+{\alpha_n}^k$
$a\neq 0$ として，$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ とおける。
両辺の絶対値をとってから対数をとると，

$$\log|f(x)|=\log|a|+\sum_{i=1}^{n}\log|x-\alpha_i|$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i}$$

両辺に x を掛けると，

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{x-\alpha_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\dfrac{\alpha_i}{x}}\cdots①$$

$\max\left(\left|\dfrac{\alpha_1}{x}\right|,\left|\dfrac{\alpha_2}{x}\right|,\cdots,\left|\dfrac{\alpha_n}{x}\right|\right)<1$ なる十分大きい x に対して（※），①の右辺は，

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha_i}{x}+\frac{{\alpha_i}^2}{x^2}+\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{{\alpha_1}^2}{x^2}+\cdots\right)+\left(1+\frac{\alpha_2}{x}+\frac{{\alpha_2}^2}{x^2}+\cdots\right)+\cdots+\left(1+\frac{\alpha_n}{x}+\frac{{\alpha_n}^2}{x^2}+\cdots\right)$$

$$=u_0+\frac{u_1}{x}+\frac{u_2}{x^2}+\cdots$$

$\therefore\ \dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{x^k}$　（公式）　終証

3　2の公式の利用例

n 次方程式の n 個の解の k 乗の和の求め方について，k の値が $k=2,3$ くらいまでなら，対称式を利用するのが一般的で，それ以上になると漸化式を利用する求め方も知られている。しかし，次の例題なら，上の公式を使うと単純計算で求めることができる。

【例 1】4 次方程式 $x^4+4x^3+x^2+x+1=0$ の 4 つの解の 10 乗の和を求めよ。

解　$f(x)=x^4+4x^3+x^2+x+1$ とおくと，$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\dfrac{4x^4+12x^3+2x^2+x}{x^4+4x^3+x^2+x+1}$

分母，分子の多項式の各係数を掃き出し，次の単純計算をする。

	4	−4	14	−55	206	−779	2951	−11176	42326	−160300	607099			
1 4 1 1 1	4	12	2	1	0									
	4	16	4	4	4									
		−4	−2	−3	−4									
		−4	−16	−4	−4	−4								
			14	1	0	4								
			14	56	14	14	14							
				−55	−14	−10	−14							
				−55	−220	−55	−55	−55						
					206	45	41	55						
					206	824	206	206	206					
						−779	−165	−151	−206					
						−779	−3116	−779	−779	−779				
							2951	628	573	779				
							2951	11804	2951	2951	2951			
								−11176	−2378	−2172	−2951			
								−11176	−44704	−11176	−11176	−11176		
									42326	9004	8225	11176		
									42326	169304	42326	42326	42326	
										−160300	−34101	−31150	−42326	
										−160300	−641200	−160300	−160300	−160300
											607099	129150	117974	160300

よって，4つの解の 10 乗の和は，607099 … 答

【例 2】ある n 次方程式の n 個の解の 1 乗，2 乗，・・・，n 乗の和を，それぞれ $u_1, u_2, \cdots, u_n$ とする。
$n=2$，$n=3$，$n=4$，$n=5$，$n=6$ のとき，この方程式をそれぞれ求めよ。

※$n=4$ のとき，冒頭の問題 3051 である。

解　公式 $\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{u_k}{x^k}$ を使って，順次計算すると，

$n=2$ のとき

$$x^2-u_1x+\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right)=0$$

$n=3$ のとき

$$x^3-u_1x^2+\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right)x+\frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3}+3u_1u_2-2u_3\right)=0$$

$n=4$ のとき

$$x^4-u_1x^3+\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right)x^2+\frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3}+3u_1u_2-2u_3\right)x+\frac{1}{24}\left(u_1^{\ 4}-6u_1^{\ 2}u_2+8u_1u_3+3u_2^{\ 2}-6u_4\right)=0$$

$n=5$ のとき

$$x^5-u_1x^4+\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right)x^3+\frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3}+3u_1u_2-2u_3\right)x^2+\frac{1}{24}\left(u_1^{\ 4}-6u_1^{\ 2}u_2+8u_1u_3+3u_2^{\ 2}-6u_4\right)x$$
$$+\frac{1}{120}\left(-u_1^{\ 5}+10u_1^{\ 3}u_2-20u_1^{\ 2}u_3-15u_1u_2^{\ 2}+30u_1u_4+20u_2u_3-24u_5\right)=0$$

$n=6$ のとき

$$x^6-u_1x^5+\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right)x^4+\frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3}+3u_1u_2-2u_3\right)x^3+\frac{1}{24}\left(u_1^{\ 4}-6u_1^{\ 2}u_2+8u_1u_3+3u_2^{\ 2}-6u_4\right)x^2$$
$$+\frac{1}{120}\left(-u_1^{\ 5}+10u_1^{\ 3}u_2-20u_1^{\ 2}u_3-15u_1u_2^{\ 2}+30u_1u_4+20u_2u_3-24u_5\right)x$$
$$+\frac{1}{720}(u_1^{\ 6}-15u_1^{\ 4}u_2+40u_1^{\ 3}u_3+45u_1^{\ 2}u_2^{\ 2}-90u_1^{\ 2}u_4-120u_1u_2u_3+144u_1u_5-15u_2^{\ 3}+40u_3^{\ 2}$$
$$+90u_2u_4-120u_6)=0$$

※この結果から分かることは，n 次方程式の係数は，x^n の係数を 1 としたとき，順に

$$1, -u_1, \frac{1}{2}\left(u_1^{\,2}-u_2\right), \frac{1}{6}\left(-u_1^{\,3}+3u_1u_2-2u_3\right), \frac{1}{24}\left(u_1^{\,4}-6u_1^{\,2}u_2+8u_1u_3+3u_2^{\,2}-6u_4\right),$$

$$\frac{1}{120}\left(-u_1^{\,5}+10u_1^{\,3}u_2-20u_1^{\,2}u_3-15u_1u_2^{\,2}+30u_1u_4+20u_2u_3-24u_5\right),$$

$$\frac{1}{720}(u_1^{\,6}-15u_1^{\,4}u_2+40u_1^{\,3}u_3+45u_1^{\,2}u_2^{\,2}-90u_1^{\,2}u_4-120u_1u_2u_3+144u_1u_5-15u_2^{\,3}+40u_3^{\,2}+90u_2u_4$$
$$-120u_6), \cdots$$

であるということ。

4　補足

（※）の部分で，$f(x)=a\left(x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\right)=0$ の 1 つの解を α とするとき，$|\alpha|<\max\left(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\right)+1$ が成り立つことを証明する。

これが証明されると，$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{x^k}$ は実際，$|x|>\max\left(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\right)+1$ なる x で成り立つことになる。

$\boxed{\text{証}}$　$\max\left(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\right)=m$ とおくと，題意より，$m>0$ である。

今，$|\alpha|\geqq m+1\cdots$①と仮定する。

$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ より，

$x^n=-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-\cdots-a_{n-1}x-a_n$

両辺の絶対値をとり，$x=\alpha$ を代入すると，

$$|\alpha|^n=\left|-a_1\alpha^{n-1}-a_2\alpha^{n-2}-\cdots-a_{n-1}\alpha-a_n\right|\leqq|a_1||\alpha|^{n-1}+|a_2||\alpha|^{n-2}+\cdots+|a_{n-1}||\alpha|+|a_n|$$

$$\leqq m\left(|\alpha|^{n-1}+|\alpha|^{n-2}+\cdots+|\alpha|+1\right)\quad \because |a_1|\leqq m, |a_2|\leqq m, \cdots, |a_n|\leqq m \text{ より}$$

$$=\frac{m\left(|\alpha|^n-1\right)}{|\alpha|-1}\leqq\frac{m\left(|\alpha|^n-1\right)}{m}\quad \because ①\text{より}, |\alpha|-1\geqq m>0, |\alpha|>1\text{であるから}$$

$$=|\alpha|^n-1$$

よって，$|\alpha|^n\leqq|\alpha|^n-1$ となり，この不合理は①の仮定が原因である。

従って，$|\alpha|<\max\left(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\right)+1$　$\boxed{\text{終証}}$

5　おわりに

本校の図書館の蔵書に，問題解法代数学辞典（上／下）第 2 版があるが，「上巻　第 7 章　方程式の理論」の中に，最初に紹介した問題 3051 に相当する問題が見当たらない。なぜ，第 2 版のときに削除されたかは不明である。

しかし，n 次方程式の n 個の解の k 乗の和を求める方法に微分を使う方法があることはおもしろいと思い，今回の原稿にしました。

なお，今回の原稿は，第 44 回数実研（2003 年 2 月 1 日）で発表したときの資料の改訂版である。

【参考文献】

[1]　問題解法代数学辞典（笹部貞市郎著，昭和 45 年 5 月 1 日初版第 27 刷，聖文社，定価 3,500 円）
[2]　時岡郁夫の Website（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）こだわり数学　11