数学Ⅲ（数列の極限）の授業実践

北海道根室高等学校　　木村　郁夫

平成23年6月11日

1　はじめに

4月から3年生理系クラスの担任を持っています。授業は3年生が中心であり、数学Ⅲを週5時間、数学Cを週2時間、他に数学Ⅱと数学Bを合わせて週8時間担当しています。今回は数学Ⅲの「数列の極限」において、授業で特に意識した点を中心に紹介します。

2　極限の導入

教科書では、例えば次のように紹介されています。

定義 1 (収束・極限・極限値)
数列 $\{a_n\}$ において、n を限りなく大きくするとき、a_n がある値 α に限りなく近づくことを、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表す。このとき、

- $\{a_n\}$ は α に収束する。
- α を数列 $\{a_n\}$ の極限値 ($\{a_n\}$ の 極限 は α)

という。

しかし、無限の概念がつかみづらい生徒には、このような説明は唐突であり、理解が難しいようです。

生徒が小学校以来学んできた内容とは違い、極限は「厳密さと大雑把さのバランス感覚が大切な分野」です。そこで、これらの定義を板書する前に「110円と120円のジュースの値段の違いは意識するかもしれないが、10,000,000,000円と10,000,000,001円の違いは感覚的にはほぼ0だろう。」「$\dfrac{1}{10}=0.1$ だが、$\dfrac{1}{10000000000}$ はほぼ0と考えても差支えないだろう。」といったことを黒板で説明し、理解を求めました。計算よりも、まずは感覚的に納得してもらうことがこの分野の導入には大切であると感じています。

そうすれば、極限の例として

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\{1+(0.1)^n\}=1$$

であることを感覚的に理解させるのは困難ではありません。「収束する」や「極限値」といった用語については、これらの具体例をもって説明すれば納得させやすいです。

3　発散

教科書では、例えば次のように紹介されています。

定義 2 (発散)

1. 正の無限大に発散（＝限りなく大きくなる）

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ または } n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \infty$$

2. 負の無限大に発散（＝値は負で、絶対値は限りなく大きくなる）

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ または } n \to \infty \text{ のとき } a_n \to -\infty$$

3. 振動（＝ *1.* と *2.* 以外）

極限値はない

「負の無限大に発散」する場合については、関数の極限における $x \to 0$ と混同させないため、「限りなく小さくなる」という意味合いではないことを強調しておく必要があります。

発散する場合の具体例として、1. は $a_n = 2^n$、2. は $a_n = -3n$、3. は $a_n = (-1)^n$ を取り上げました。1. と 2. についてはグラフを利用した説明、3. については 1 と -1 が交互に表れるので、いつまでたっても 1 つの値に落ち着かないからといった程度の説明です。いずれは、瞬間的に判断してもらうことが必要なところであるため、生徒には 1. と 2. と 3. それぞれについて 1 つずつ例を挙げさせ、教科書の問題を数問解かせるのみといった扱いにしました。

4　極限の性質

教科書では、例えば次のように紹介されています。

定理 3

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする。

1. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　　ただし、k は定数

2. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta,\ \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$

3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$　　ただし、$\beta \neq 0$

これらの定理を利用した演習問題としては、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 3 \text{ のとき、} \lim_{n\to\infty} (3a_n + b_n),\ \lim_{n\to\infty} \frac{b_n + 4}{a_n - 3} \text{ を求めよ。}$$

といったものが挙げられます。しかし、生徒は計算しているうちに、極限操作が四則演算について閉じていることの前提である「数列が収束する」ことが抜け落ちてしまうことが多分にあるようです。

例えば、

$\boxed{1}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$ であるとき、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であることを示せ。

$\boxed{2}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ である数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について、$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$ は常に成り立つか。

といった問いは、こうした危険性を指摘するのに適した問題といえます。

前者の問いは、大半の生徒が思わく通り

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

と勘違いしていました。$\lim_{n\to\infty} b_n$ の収束が前提とされていないので、このような変形はできません。正しくは、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) \\
&= \alpha - (\alpha - \beta) \\
&= \alpha - \alpha + \beta \\
&= \beta \qquad \square
\end{aligned}$$

5　不定形の極限

教科書の例題にしたがって問題を解かせた後、極限の大局的な見方を養うことを目的として次のような考え方を紹介しました。

$\boxed{1}$ 整式の場合の極限は、最高次の項で決まる。

(1) $n^2 - 3n \sim n^2 \to \infty\ (n \to \infty)$

(2) $n - 3n^2 \sim -3n^2 \to -\infty\ (n \to \infty)$

$\boxed{2}$ 分数式の場合の極限は、分母の最高次数と分子の最高次数の次数比較で決まる。

(1) $\frac{2n+1}{3n-2} \sim \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \to \frac{2}{3}\ (n \to \infty)$

(2) $\frac{4n-1}{n^2+3} \sim \frac{4n}{n^2} \sim \frac{4}{n} \to 0\ (n \to \infty)$

(3) $\frac{n^2-2n}{2n+1} \sim \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \to \infty\ (n \to \infty)$

$\boxed{3}$ $\sqrt{\infty} - \sqrt{\infty}$ の形の極限は、$\sqrt{x} = x\ (x \geqq 0)$ を利用し、$\sqrt{\ }$ 内の定数項は無視して考える。

(1) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \sim \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0 \to 0\ (n \to \infty)$

(2) $\sqrt{n^2+n} - n = \sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} - n \sim \sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} - n = n + \frac{1}{2} - n = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}\ (n \to \infty)$

6　はさみうちの原理

教科書では、例えば次のように紹介されています。

定理 4

すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

はさみうちの原理を使う極限としては、例えば $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta$ や $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$ があります。

しかし、こういった $1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ や $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ を機械的に運用して答が得られる問題だけを演習させるのでは、極限値がほとんど 0 になってしまい、生徒の記憶に定着させて有用性を訴えるには乏しい感があります。

はさみうちの原理の本質は「自ら不等式をうまく立てる」ことにありますから、例えば、

$\boxed{1}$ はさみうちの原理を用いて $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 自然数 n の桁数を $N(n)$ とおくとき、$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_{10} n}{N(n)}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ n を 2 以上の自然数とし、集合 A_n を $A_n = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots, n\}$ により定める。A_n の相異なる 2 つの要素 $x,\ y$ について、積 xy の下一桁が 1 となるような組合せの総数を a_n とおく。例えば、$a_2 = 0,\ a_7 = 1,\ a_{19} = 5$ である。

(1) $a_{10},\ a_{100}$ を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\log_n a_n$ を求めよ。

といった問題を追加することで、

- 「極限値を予測できるが直接的に求めることが困難な数列」あるいは「極限値を求めることそのものが困難な数列」に対して、厳密に議論を進めることができる。
- 最終的に a_n と b_n が同じ極限値を持つ必要があり、先々を予測して不等式を立てなくてはいけない。

といった点を強調することができ、生徒の理解が深まります。興味関心が特に高い生徒は、予想外の答に対して感動を示していました（上記の$\boxed{3}$）。

また、生徒の到達度によっては「すべての自然数 n に対して仮定が成り立つ必要はなく、ある番号 N から先のすべての n $(n \geqq N)$ に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ が成り立てば十分である。」と補足することも、より高度な議論を展開する上では大切であると思います。

7　おわりに

このように振り返って書いてみると、生意気な表現ばかり並んだ格好になりました。まだまだ荒削りな部分が多く、日々の教材研究の大切さを身にしみて感じているところです。

多くの先生方からのご指摘を賜りながら、また新たな機会に授業実践を紹介させていただきます。

参考文献

[1] 『改訂版　新編 数学Ⅲ』（数研出版 2008）

[2] 『大学への数学　微積分 基礎の極意』（東京出版 2000 年）