平面上の3直線に関する一考察

北海道根室高等学校　　木村　郁夫

平成22年11月27日

概 要

数学II「図形と方程式」の分野における、平面上の3直線に関する問題について考察し、一つの結論を導きます。次に、得られた結論を用いて実際に問題を解いてみます。

1　はじめに

問題集で次のような問を見かけることがあります。

(1) 3直線 $3x+8y+18=0,\ 6x+4y+3a=0,\ 3ax+2y+12=0$ が1点で交わるとき、定数 a の値を求めよ。

(2) 3直線 $x+3x-2=0,\ x+ay=0,\ ax-2y+12=0$ が三角形を作らないとき、定数 a の値を求めよ。

(3) 3直線 $4x+3y+12=0,\ 3x-4y+9=0,\ 2x-y-4=0$ で作られる三角形の面積を求めよ。

一般的な解法としては、
(1)$\cdots$2直線の交点を、第3の直線が通過する。
(2)$\cdots$ 少なくとも2直線が平行である場合、または、3直線が1点で交わる場合を考える。
(3)$\cdots$ 三角形の3頂点を連立方程式によって求める。
です。それでは、これら以外の手段は存在しないのでしょうか。

2　準備

線形代数学の知識を借用します。

定義 1 (余因子)
A を n 次の正方行列とする。行列式 $\det A$ において a_{ij} を交差点とする行ベクトルと列ベクトルを除いて作る行列式を

$$D_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とし、それに $(i,\ j)$ に対応する符号 $(-1)^{i+j}$ をかけたものを

$$\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$$

とおく。Δ_{ij} を $\det A$ の (i,j) 余因子（または余因数）という。

定理 2 (行列式と余因子の関係)
$\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$,　$\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}\ (j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

3　平面上の 3 直線が三角形を作らないための必要十分条件

平面上の 3 直線を $\begin{cases} l_1 : \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ l_2 : \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \\ l_3 : \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0 \end{cases}$ とし、行列 A を $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ と定義します。

3 直線のうち、少なくとも 2 つが一致の場合は三角形になりえないので、これらの 3 直線が全て相異なるときを考えます。

3 直線が三角形を作らないのは、先ほど述べた次の 2 つの場合です。

(ア) 少なくとも 2 直線が平行である場合

(イ) 3 直線が 1 点で交わる場合

まず（ア）について考えます。

平行条件により $l_i \,/\!/\, l_j \iff \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i = 0$ ですから、3 つの等式

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0,\ \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = 0,\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 = 0$$

のうち、少なくとも一つが成り立ちます。3 直線が平行ならばこれら全てが成り立ちます。

よって、この場合は

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) = 0$$

すなわち Δ_{ij} の定義から

$$\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33} = 0$$

が必要十分です。

次に（イ）について考えます。3 直線の交点を $(\lambda,\ \mu)$ とおくと、

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2\lambda + \beta_2\mu + \gamma_2 = 0 \\ \alpha_3\lambda + \beta_3\mu + \gamma_3 = 0 \end{cases} \iff A\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots (*)$$

が成り立ちます。

もし、A^{-1} が存在するならば、$(*)$ の両辺に左から A^{-1} を作用させることにより $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が得られますが、これは不合理です。

よって、A^{-1} が存在しないこと、すなわち $\det A = 0$ が必要十分です。

以上のことから、求める必要十分条件は（ア）または（イ）、すなわち

$$\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33} = 0 \quad \text{または} \quad \det A = 0$$

であることが分かりました。この条件は、3 直線の少なくとも 2 つが一致する場合も成り立ちます。

4　平面上の 3 直線が作る三角形の面積

先ほどと同じく、3 直線を $\begin{cases} l_1 : \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ l_2 : \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \\ l_3 : \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0 \end{cases}$ とします。三角形を作らない場合の結論により、

$$\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33} \fallingdotseq 0 \quad \text{かつ} \quad \det A \fallingdotseq 0$$

が保障されています。

$$l_2 \text{と} l_3 \text{の交点を} (\lambda_1,\ \mu_1),\quad l_3 \text{と} l_1 \text{の交点を} (\lambda_2,\ \mu_2),\quad l_1 \text{と} l_2 \text{の交点を} (\lambda_3,\ \mu_3)$$

と与え、$(\lambda_i,\ \mu_i)$ を Δ_{jk} を用いて表してみましょう。
$(\lambda_1,\ \mu_1)$ について考えてみます。条件から、

$$\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}$$

ですから、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2}\begin{pmatrix}\beta_3 & -\beta_2\\ -\alpha_3 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2}\begin{pmatrix}\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2\\ -\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\Delta_{13}}\begin{pmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{12}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります。また、index を適宜付け替えることにより、

$$\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \mu_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{23}}\begin{pmatrix}\Delta_{21}\\ \Delta_{22}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_3\\ \mu_3\end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{33}}\begin{pmatrix}\Delta_{31}\\ \Delta_{32}\end{pmatrix}$$

と分かります。つまり、$\lambda_i = \dfrac{\Delta_{i1}}{\Delta_{i3}},\ \mu_i = \dfrac{\Delta_{i2}}{\Delta_{i3}}\ (i=1,\ 2,3)$ です。
$\mathrm{P}(\lambda_2-\lambda_1,\ \mu_2-\mu_1)$, $\mathrm{Q}(\lambda_3-\lambda_1,\ \mu_3-\mu_1)$ とおくと、求める面積 S は $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積に等しいですから、

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|(\lambda_2-\lambda_1)(\mu_3-\mu_1)-(\lambda_3-\lambda_1)(\mu_2-\mu_1)\right|\\
&= \frac{1}{2}\left|\lambda_1(\mu_3-\mu_2)+\lambda_2(\mu_1-\mu_3)+\lambda_3(\mu_2-\mu_1)\right|\\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{13}}\times\frac{\Delta_{23}\Delta_{32}-\Delta_{22}\Delta_{33}}{\Delta_{23}\Delta_{33}}+\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{23}}\times\frac{\Delta_{33}\Delta_{12}-\Delta_{32}\Delta_{13}}{\Delta_{33}\Delta_{13}}+\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{33}}\times\frac{\Delta_{13}\Delta_{22}-\Delta_{12}\Delta_{23}}{\Delta_{13}\Delta_{23}}\right|\cdots\cdots(**)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}(\Delta_{23}\Delta_{32}-\Delta_{22}\Delta_{33}) &= \Delta_{11}\left\{(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)-(\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\right\}\\
&= -\alpha_1\Delta_{11}\left\{\gamma_1\Delta_{31}+\gamma_2\Delta_{32}+\gamma_3\Delta_{33}\right\}\\
&= -\alpha_1\Delta_{11}\det A
\end{aligned}$$

等が成り立ちますから、

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}}\times(-\alpha_1\Delta_{11}-\alpha_2\Delta_{21}-\alpha_3\Delta_{31})\det A\right|\\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}}\times(-\det A)\times\det A\right|\\
&= \frac{(\det A)^2}{2|\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}|}
\end{aligned}$$

よって、

$$S = \frac{(\det A)^2}{2|\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}|}$$

であることが分かりました。$\det A = 0$（3 直線が 1 点で交わるとき）のときは $S=0$、$\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}=0$（少なくとも 2 直線が平行である場合）のときは $S=\infty$ とみなすことができ、直観的にも納得です。

以上から、次の結論が得られました。

定理 3
平面上の 3 直線と行列を次のように与える。

$$\begin{cases} l_1 : \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ l_2 : \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \\ l_3 : \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

これら 3 直線が三角形が作らないための必要十分条件は

$$\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33} = 0 \quad \text{または} \quad \det A = 0$$

であり、$\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33} \fallingdotseq 0$ かつ $\det A \fallingdotseq 0$ のとき、これら 3 直線が作る三角形の面積は

$$\frac{(\det A)^2}{2|\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}|}$$

である。

5 おわりに

冒頭で挙げた問題を、定理 3 を使って解いてみましょう。模擬試験や入学試験の記述としては不向きですが、検算としては有効な方法だと思います。

(1) $\det\begin{pmatrix} 3 & 8 & 18 \\ 6 & 4 & 3a \\ 3a & 2 & 12 \end{pmatrix} = 0$ より、$3(4 \cdot 12 - 3a \cdot 2) - 8(6 \cdot 12 - 3a \cdot 3a) + 18(6 \cdot 2 - 4 \cdot 3a) = 0$

よって、$4a^2 - 13a - 12 = 0 \iff \underline{a = 4,\ -\frac{3}{4}}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & a & 0 \\ a & -2 & 12 \end{pmatrix}$ で、

$\det A = 0 \iff 1 \cdot 12a - 3 \cdot 12 - 2(-2 - a^2) = 0 \iff a = 2,\ -8$

または、

$\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33} = 0 \iff (-2 - a^2)(-2 - 3a)(a - 3) = 0 \iff a = 3,\ -\frac{2}{3}$

より、$\underline{a = -8,\ -\frac{2}{3},\ 2,\ 3}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 12 \\ 3 & -4 & 9 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ で、

$\det A = 4(16 + 9) - 3(-12 - 18) + 12(-3 + 8) = 100 + 90 + 60 = 250 = 2 \cdot 5^3$

$\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33} = (-3 + 8)(-4 - 6)(-16 - 9) = 2 \cdot 5^4$

より、$\dfrac{(\det A)^2}{2|\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}|} = \dfrac{2^2 \cdot 5^6}{2^2 \cdot 5^4} = \underline{25}$

参考文献

[1] 笠原晧司 著『線形代数学』(サイエンス社　1982 年)

[2] 数研出版編集部 編『改訂版オリジナル数学II』(数研出版　2007 年)

4 【A 分野：知識・理解】　〔2 × 14 = 28 点〕

解答欄には <u>結果のみ記入</u> すること。

(1) 次の点を解答欄の直線 AB 上にしるせ。

① 線分 AB を 1 : 3 に内分する点 P　② 線分 AB を 3 : 1 に外分する点 Q

(2) $\angle A = 80°$, $\angle B = 60°$ のとき、3 辺 a, b, c を長い順番に並べよ。

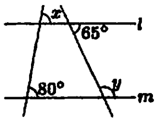
(3) 3 辺の長さが 6, x, 9 の三角形を作るとき、x のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) 半径 6cm と 4cm の 2 つの円がある。この 2 円が交わるのは、中心間の距離 $d$cm がどんな範囲にあるときか。

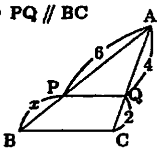
(5) 中心間の距離が 8cm のとき外接し、中心間の距離が 2cm のとき内接する 2 円がある。この 2 円の半径を求めよ。

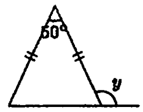
(6) 下の図において、x, y の値を求めよ。

① $l \parallel m$



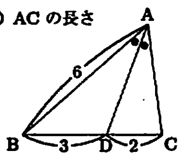
② PQ // BC



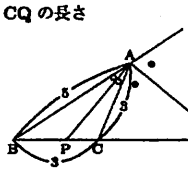


(7) 下の図において、大きさが等しい角を ● や ○ で表す。次のものを求めよ。

① AC の長さ

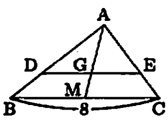


② CQ の長さ

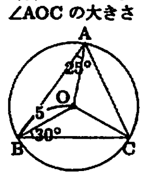


(8) 下の図において、G, O, I はそれぞれ △ABC の重心、外心、内心である。次のものを求めよ。

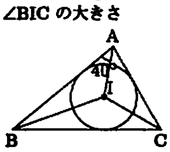
① BM の長さ
DE の長さ



② 線分 OC の大きさ
∠AOC の大きさ

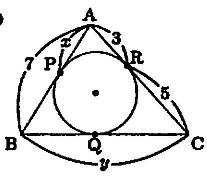


③ ∠CAI の大きさ
∠BIC の大きさ

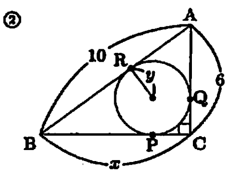


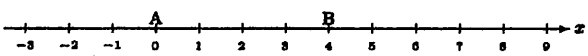
(9) 下の図において、P, Q, R は接点である。x, y の値を求めよ。

①



②



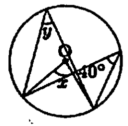
(1) 	
(2)	(3)
(4)	(5)　　cm と　　cm
(6)① $x =$　　, $y =$	② $x =$　　, $y =$
(7)① AC =	② CQ =
(8)① BM =　　, DE =	② OC =　　, ∠AOC =
③ ∠CAI =　　, ∠BIC =	
(9)① $x =$　　, $y =$	② $x =$　　, $y =$

5 【A 分野：知識・理解】　〔2 × 6 = 12 点〕

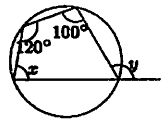
解答欄には <u>結果のみ記入</u> すること。

(1) 下の図において、点 O は円の中心、点 T は接点である。x, y の値を求めよ。

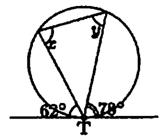
①



②

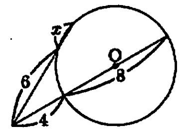


③

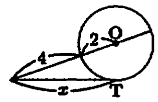


(2) 下の図において、点 O は円の中心、点 T は接点である。x の値を求めよ。

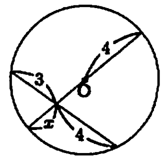
①



②



③

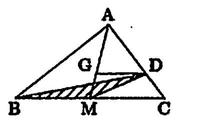


(1)① $x =$　　, $y =$	② $x =$　　, $y =$
③ $x =$　　, $y =$	
(2)① $x =$	② $x =$
③ $x =$	

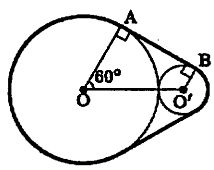
6 【A 分野：表現・処理】　〔4 × 2 = 8 点〕

必要な計算は余白を利用せよ。<u>結果のみは不可</u> とする。

(1) 下の図で、点 G は △ABC の重心で GD // BC である。△DBM の面積が 8cm^2 であるとき、△ABC の面積を求めよ。



(2) 外接している半径 6cm の円 O と半径 2cm の円 O′ に下の図のようにベルトを巻くとき、ベルトの長さを求めよ。円周率は π とし、ベルトの厚さは考えないものとする。



2. と **3.** は、解答欄 ア, イ, … に当てはまる数値をマークすること。

2.

〔20 点〕

【1】 a は定数とし、x の方程式

$$2x^2 + ax - a = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) ①が $x = \sqrt{2} - 1$ を解に持つとき

$$a = \boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

である。

(2) $2x^2 + ax - a - 2 = \left(x - \boxed{\text{ウ}}\right)\left(\boxed{\text{エ}}x + a + \boxed{\text{オ}}\right)$

と因数分解できる。

よって、a が整数のとき、①が正の整数を解に持つならば

$$a = \boxed{\text{カキ}},\ \boxed{\text{クケ}}$$

である。ただし、$\boxed{\text{カキ}} < \boxed{\text{クケ}}$ とする。

【2】 a を実数の定数とし、実数全体の集合を U とする。

U を全体集合とし、U の部分集合 A, B, C を

$A = \{x \mid 2 \leqq x \leqq 8\}$

$B = \{x \mid 4 \leqq x \leqq 9\}$

$C = \{x \mid a+3 \leqq x \leqq a+4\}$

とする。また、A, B の補集合をそれぞれ $\overline{A}$, $\overline{B}$ とする。

$$A \cup B = \left\{x \mid \boxed{\text{コ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{サ}}\right\}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \left\{x \mid x < \boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}} < x\right\}$$

である。

C に属するどんな実数 x に対しても、x が $A \cap B$ に属するような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ソ}}$$

である。

C に属するある実数 x に対して、x が $A \cap \overline{B}$ に属するような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{タチ}} \leqq x < \boxed{\text{ツ}}$$

である。

〔2007 第 3 回全統マーク模試〕

	解			答				欄				配点
	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	
ア	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
イ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	4
ウ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	1
エ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
オ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	1
カ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
キ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	2
ク	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ケ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	2
コ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
サ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	2
シ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ス	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	2
セ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	1
ソ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	1
タ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
チ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	2
ツ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	2

3.

〔20 点〕

円に内接する四角形 ABCD があり、

$$AB = 7,\ CD = DA = \frac{8}{5}\sqrt{10},\ \cos\angle ADC = -\frac{1}{4}$$

を満たしている。

このとき

$$AC = \boxed{\text{ア}},\ \cos\angle ABC = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ BC = \boxed{\text{エ}}$$

であり、三角形 ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}\sqrt{\boxed{\text{クケ}}},\ \sin\angle BAC = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$$

である。

さらに、線分 BC を直径とする円と線分 AB, AC との交点をそれぞれ E, F とし、三角形 AEF の外接円の半径を R とする。ただし、$E \neq B$, $F \neq C$ とする。

$$BE = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\ R = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}\sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}$$

であり、三角形 AEF の面積を T とすると

$$\frac{T}{S} = \frac{\boxed{\text{ヌネノ}}}{\boxed{\text{ハヒフ}}}$$

である。

〔2007 第 3 回全統マーク模試〕

	解			答				欄				配点
	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	
ア	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	3
イ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ウ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	2
エ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	3
オ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
カ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
キ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ク	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ケ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	3
コ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
サ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
シ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ス	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
セ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	3
ソ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
タ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	2
チ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ツ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
テ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ト	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ナ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ニ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	3
ヌ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ネ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ノ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ハ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
ヒ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	
フ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	3