第１１２回北数教数学教育実践研究会

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ の指導について

令和２年１月２５日（土）
北海道札幌手稲高等学校教諭
木　村　郁　夫

1

問題

漸化式 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 3a_n + 2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

先生方はどのように指導していますか？

2

教科書では・・・

$a_{n+1} = 3a_n + 2$ を変形すると，

特性方程式
$c = 3c + 2$ を解くと，
$c = -1$

$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 2$，公比 3 の等比数列

$a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$（答）

3

よくある生徒のつまづき

- そもそも $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$ の変形ができない

↓

特性方程式の解と漸化式の変形が結びついていない

- 変形後の数列の初項も a_1 としてしまう

↓

数列 $\{a_n + 1\}$ を新たに考えていると理解できていない

式変形だけを指導しても，生徒が理解するのは難しい

4

そこで・・・（導入）

$a_1 = 1$

$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$

$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$

$a_5 = 3a_4 + 2 = 3 \cdot 53 + 2 = 161$

各項に **1をたす**

$a_1 + 1 = 2$

$a_2 + 1 = 6$

$a_3 + 1 = 18$

$a_4 + 1 = 54$

$a_5 + 1 = 162$

初項２，公比３
の等比数列

$a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$

1を移項

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ （答）

どうやって
1をみつけるのだろう？

漸化式のままで考えると・・・（展開）

$a_{n+1} = 3a_n + 2$ ・・・①

$a_{n+1} - c = 3(a_n - c)$ ・・・②

数列 $\{a_n\}$ の各項から
cを引いたものが，
等比数列

①－②から，

$c = 2 + 3c$

$c = -1$ ・・・③

「−1を引く」＝「1を足す」
だから，
c＝－1が，先ほどの**1**に相当

③を②に代入して，

$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

これ以降の変形は，
具体と対応させて説明