陰関数の接線方程式

～これで納得（夏得）！２次曲線の接線も暗記じゃなくて導ける～

平成２０年８月９日（土）第６６回北数教数学教育実践研究会

北海道釧路江南高等学校　木村　尚士

Proposition１）　２次曲線　$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}xy+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0$　上の点$(x_0\,,y_0)$ における接線の方程式は、

$$\mathrm{A}x_0x+\mathrm{B}y_0y+\mathrm{C}\cdot\frac{x_0y+y_0x}{2}+\mathrm{D}\cdot\frac{x+x_0}{2}+\mathrm{E}\cdot\frac{y+y_0}{2}+\mathrm{F}=0$$

となることが知られている。

すなわち、$x^2\to x_0x$ ，$y^2\to y_0y$ ，$xy\to\frac{x_0y+y_0x}{2}$ ，$x\to\frac{x+x_0}{2}$，$y\to\frac{y+y_0}{2}$ ，定数→定数

というように、微分でもするかのような変形をするだけで、曲線上の点$(x_0\,,y_0)$ における接線方程式が得られる。

このことを、次のように確かめることができる。

曲線の式　$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}xy+\mathrm{D}x+\mathrm{E}x+\mathrm{F}=0$ を x で微分すると、

$$2\mathrm{A}x+2\mathrm{B}yy\ +\mathrm{C}(y+xy')+\mathrm{D}+\mathrm{E}y'=0\cdots\cdots①$$

ところで、この曲線上の点$(x_0\,,y_0)$ における接線の方程式は、点$(x_0\,,y_0)$ における接線の傾きを y とすると、$y=y\,(x-x_0)+y_0$ であるから、これを y について解くと、

$$y'=\frac{y-y_0}{x-x_0}\ \cdots\cdots②$$

となる。よって、①式に $x=x_0$ ，$y=y_0$ を代入した式と②を連立すると、接線の方程式が得られる。

$$2\mathrm{A}x_0+2\mathrm{B}y_0\cdot\frac{y-y_0}{x-x_0}+\mathrm{C}(y_0+x_0\cdot\frac{y-y_0}{x-x_0})+\mathrm{D}+\mathrm{E}\cdot\frac{y-y_0}{x-x_0}=0$$

$$\mathrm{A}x_0(x-x_0)+\mathrm{B}y_0(y-y_0)+\mathrm{C}\cdot\frac{y_0(x-x_0)+x_0(y-y_0)}{2}+\mathrm{D}\cdot\frac{x-x_0}{2}+\mathrm{E}\cdot\frac{y-y_0}{2}=0$$

ここで、点$(x_0\,,y_0)$ は、この曲線上の点であるから、

$$-\mathrm{A}{x_0}^2-\mathrm{B}{y_0}^2-\mathrm{C}x_0y_0-\mathrm{D}x_0-\mathrm{E}y_0=\mathrm{F}\ \text{より}$$

$$\mathrm{A}x_0x-A{x_0}^2+\mathrm{B}y_0y-\mathrm{B}{y_0}^2+\mathrm{C}\cdot\frac{y_0x+x_0\mathrm{y}}{2}-\mathrm{C}x_0y_0+\mathrm{D}\cdot\frac{x+x_0}{2}-\mathrm{D}x_0+\mathrm{E}\cdot\frac{y+y_0}{2}-\mathrm{E}y_0=0$$

$$\mathrm{A}x_0x+\mathrm{B}y_0y+\mathrm{C}\cdot\frac{y_0x+x_0\mathrm{y}}{2}+\mathrm{D}\cdot\frac{x+x_0}{2}+\mathrm{E}\cdot\frac{y+y_0}{2}+\mathrm{F}=0$$

■

また、与えられた２次曲線が標準形を平行移動した形の場合にも対応できるように、次の Proposition２）についても調べてみよう。

Proposition２）　２次曲線　$\mathrm{A}(x-p)^2+\mathrm{B}(y-q)^2+\mathrm{C}=0$　上の点(x_0,y_0) における接線の方程式は、

$$\mathrm{A}(x_0-p)(x-p)+\mathrm{B}(y_0-q)(y-q)+\mathrm{C}=0$$

となることが知られている。

すなわち、$(x-p)^2 \to (x_0-p)(x-p)$ ，$(y-q)^2 \to (y_0-q)(y-q)$ ，定数→定数

というように変形をするだけで、曲線上の点(x_0,y_0) における接線方程式が得られる。

このことも、次のように確かめることができる。

曲線の式　$\mathrm{A}(x-p)^2+\mathrm{B}(y-q)^2+\mathrm{C}=0$　を x で微分すると、

$$2\mathrm{A}(x-p)+2\mathrm{B}(y-q)y'=0 \cdots\cdots ①$$

先ほどの Proposition１）と同様、①式に $x=x_0$, $y=y_0$ を代入した式と②式

$y'=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ ……②　を連立すると、接線の方程式が得られる。

$$2\mathrm{A}(x_0-p)+2\mathrm{B}(y_0-q)\cdot\frac{y-y_0}{x-x_0}=0$$

$$\mathrm{A}(x_0-p)(x-x_0)+\mathrm{B}(y_0-q)(y-y_0)=0$$

ここで、点(x_0,y_0) はこの曲線上の点であるから、$-\mathrm{A}(x_0-p)^2-\mathrm{B}(y_0-q)^2=\mathrm{C}$ より

$$\mathrm{A}(x_0-p)\{(x-p)-(x_0-p)\}+\mathrm{B}(y_0-q)\{(y-q)-(y_0-q)\}=0$$

$$\mathrm{A}(x_0-p)(x-p)-\mathrm{A}(x_0-p)^2+\mathrm{B}(y_0-q)(y-q)-\mathrm{B}(y_0-q)^2=0$$

$$\mathrm{A}(x_0-p)(x-p)+\mathrm{B}(y_0-q)(y-q)+\mathrm{C}=0$$

■

以上のことから、たとえば次の円上の点(x_0,y_0) における接線方程式は、

$$x^2+y^2=r^2 \quad \to \quad x_0x+y_0y=r^2$$

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \quad \to \quad (x_0-p)(x-p)+(y_0-q)(y-q)=r^2$$

(※上記２つの円とその接線については、上の式を x 方向に p、y 方向に q 平行移動することで下の式を得ることもできる)

となるばかりでなく、楕円・双曲線・放物線・反比例曲線上の点(x_0,y_0) における接線方程式も次のように得られる。

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \to \quad \frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}=1 \qquad \text{(複号同順)}$$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}\pm\frac{(y-q)^2}{b^2}=1 \quad \to \quad \frac{(x_0-p)(x-p)}{a^2}\pm\frac{(y_0-q)(y-q)}{b^2}=1 \qquad \text{(複号同順)}$$

(※上記２つの曲線とその接線についても同様に、上の式を x 方向に p、y 方向に q 平行移動することで下の式を得ることも可能である)

$$y^2=4px \quad \to \quad y_0y=2p(x+x_0)$$

$$xy=k \quad \to \quad x_0y+y_0x=2k$$

$$(x-p)(y-q)=k \quad \to \quad (x_0-p)(y-q)+(y_0-q)(x-p)=2k$$

(※上記２つの曲線とその接線についても同様に、上の式を x 方向に p、y 方向に q 平行移動することで下の式を得ることも可能である)