

陰関数の接線方程式

～これで納得(夏得)！2次曲線の接線も暗記じゃなくて導ける～

平成20年8月9日(土)第66回北数教数学教育実践研究会

北海道釧路江南高等学校 木村 尚士

Proposition 1) 2次曲線 $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は、

$$Ax_0x + By_0y + C \cdot \frac{x_0y + y_0x}{2} + D \cdot \frac{x + x_0}{2} + E \cdot \frac{y + y_0}{2} + F = 0$$

となることが知られている。

すなわち、 $x^2 \rightarrow x_0x$, $y^2 \rightarrow y_0y$, $xy \rightarrow \frac{x_0y + y_0x}{2}$, $x \rightarrow \frac{x + x_0}{2}$, $y \rightarrow \frac{y + y_0}{2}$, 定数 \rightarrow 定数

というように、微分でもするかのような変形をするだけで、曲線上の点 (x_0, y_0) における接線方程式が得られる。

このことを、次のように確かめることができる。

曲線の式 $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ を x で微分すると、

$$2Ax + 2Byy' + C(y + xy') + D + Ey' = 0 \dots\dots ①$$

ところで、この曲線上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は、点 (x_0, y_0) における接線の傾きを y' とすると、 $y = y'(x - x_0) + y_0$ であるから、これを y' について解くと、

$$y' = \frac{y - y_0}{x - x_0} \dots\dots ②$$

となる。よって、①式に $x = x_0$, $y = y_0$ を代入した式と②を連立すると、接線の方程式が得られる。

$$2Ax_0 + 2By_0 \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0} + C(y_0 + x_0 \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0}) + D + E \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0} = 0$$

$$Ax_0(x - x_0) + By_0(y - y_0) + C \cdot \frac{y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0)}{2} + D \cdot \frac{x - x_0}{2} + E \cdot \frac{y - y_0}{2} = 0$$

ここで、点 (x_0, y_0) は、この曲線上の点であるから、

$$-Ax_0^2 - By_0^2 - Cx_0y_0 - Dx_0 - Ey_0 = F \text{ より}$$

$$Ax_0x - Ax_0^2 + By_0y - By_0^2 + C \cdot \frac{y_0x + x_0y}{2} - Cx_0y_0 + D \cdot \frac{x + x_0}{2} - Dx_0 + E \cdot \frac{y + y_0}{2} - Ey_0 = 0$$

$$Ax_0x + By_0y + C \cdot \frac{y_0x + x_0y}{2} + D \cdot \frac{x + x_0}{2} + E \cdot \frac{y + y_0}{2} + F = 0$$

■

また、与えられた2次曲線が標準形を平行移動した形の場合にも対応できるように、次の Proposition 2) についても調べてみよう。

Proposition 2) 2次曲線 $A(x-p)^2 + B(y-q)^2 + C = 0$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は、

$$A(x_0 - p)(x - p) + B(y_0 - q)(y - q) + C = 0$$

となることが知られている。

すなわち、 $(x-p)^2 \rightarrow (x_0-p)(x-p)$, $(y-q)^2 \rightarrow (y_0-q)(y-q)$, 定数 \rightarrow 定数
 というように変形をするだけで、曲線上の点 (x_0, y_0) における接線方程式が得られる。

このことも、次のように確かめることができる。

曲線の式 $A(x-p)^2 + B(y-q)^2 + C = 0$ を x で微分すると、

$$2A(x-p) + 2B(y-q)y' = 0 \dots\dots①$$

先ほどの Proposition 1) と同様、①式に $x = x_0$, $y = y_0$ を代入した式と②式

$$y' = \frac{y-y_0}{x-x_0} \dots\dots② \quad \text{を連立すると、接線の方程式が得られる。}$$

$$2A(x_0 - p) + 2B(y_0 - q) \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0} = 0$$

$$A(x_0 - p)(x - x_0) + B(y_0 - q)(y - y_0) = 0$$

ここで、点 (x_0, y_0) はこの曲線上の点であるから、 $-A(x_0-p)^2 - B(y_0-q)^2 = C$ より

$$A(x_0 - p)\{(x - p) - (x_0 - p)\} + B(y_0 - q)\{(y - q) - (y_0 - q)\} = 0$$

$$A(x_0 - p)(x - p) - A(x_0 - p)^2 + B(y_0 - q)(y - q) - B(y_0 - q)^2 = 0$$

$$A(x_0 - p)(x - p) + B(y_0 - q)(y - q) + C = 0$$



以上のことから、たとえば次の円上の点 (x_0, y_0) における接線方程式は、

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad x_0x + y_0y = r^2$$

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x_0-p)(x-p) + (y_0-q)(y-q) = r^2$$

(※上記2つの円とその接線については、上の式を x 方向に p 、 y 方向に q 平行移動することで下の式を得ることもできる)

となるばかりでなく、楕円・双曲線・放物線・反比例曲線上の点 (x_0, y_0) における接線方程式も次のように得られる。

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x_0x}{a^2} \pm \frac{y_0y}{b^2} = 1 \quad (\text{複号同順})$$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} \pm \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(x_0-p)(x-p)}{a^2} \pm \frac{(y_0-q)(y-q)}{b^2} = 1 \quad (\text{複号同順})$$

(※上記2つの曲線とその接線についても同様に、上の式を x 方向に p 、 y 方向に q 平行移動することで下の式を得ることも可能である)

$$y^2 = 4px \quad \rightarrow \quad y_0y = 2p(x + x_0)$$

$$xy = k \quad \rightarrow \quad x_0y + y_0x = 2k$$

$$(x-p)(y-q) = k \quad \rightarrow \quad (x_0-p)(y-q) + (y_0-q)(x-p) = 2k$$

(※上記2つの曲線とその接線についても同様に、上の式を x 方向に p 、 y 方向に q 平行移動することで下の式を得ることも可能である)