自然数のべき和に関する覚え書き

(Two Algorithms for the Sums of Integer Powers)

北海道岩見沢農業高等学校
加藤秀隆

1　はじめに.

自然数のべき和公式の導出に関してはその歴史は古く, その方法も数多知られている. 本研究会でもこれまで中村 [1]・稲葉 [2] 等によるいくつかの結果が紹介されている. ここでは, それらの結果の一部を補完あるいは拡張する. はじめに, 奇数乗べきに関する中村の結果に関連して, 偶数乗の場合を考察し, さらにそのアルゴリズムに関して現れる多項式の係数を一般的に与える. 次に, 数を $n \times n$ 個配列した視覚的な方法で, 稲葉によっても紹介された視覚的な点の配置の総和によるべき和公式の導出法に関して, より一般的な数の配置に変えた方法を紹介する.

2　中村による方法とその拡張

2－1　中村における奇数乗べき和導出アルゴリズムとその補遺

中村において, 紹介されている奇数乗のべき和公式の導出アルゴリズムを再掲しておく. $p_m(k) = k^m(k+1)^m$ と置いたとき, $p_m(k)$ の差分 $\Delta p_m(k) = k^m(k+1)^m - (k-1)^m k^m$ に関する恒等式

$$
\begin{aligned}
k(k+1) - (k-1)k &= 2k \\
k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2 &= 4k^3 \\
k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 &= 6k^5 + 2k^3 \\
k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4 &= 8k^7 + 8k^5 \\
k^5(k+1)^5 - (k-1)^5k^5 &= 10k^9 + 20k^7 + 2k^5
\end{aligned}
$$

の, それぞれの式に順次 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ を代入して両辺の和をとることにより, それぞれ

$$
\begin{aligned}
n(n+1) &= 2\sum_{k=1}^{n} k \\
n^2(n+1)^2 &= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 \\
n^3(n+1)^3 &= 2\sum_{k=1}^{n}(3k^5 + 1k^3) \\
n^4(n+1)^4 &= 8\sum_{k=1}^{n}(k^7 + k^5) \\
n^5(n+1)^5 &= 2\sum_{k=1}^{n}(5k^9 + 10k^7 + k^5)
\end{aligned}
$$

なる関係式を得る. ここで, 低次のべき和公式を既知とすれば容易に奇数乗のべき和公式を得ることができる.

このことを行列表示すると

$$\begin{bmatrix} n(n+1) \\ n^2(n+1)^2 \\ n^3(n+1)^3 \\ n^4(n+1)^4 \\ n^5(n+1)^5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 3 & & \\ 0 & 0 & 4 & 4 & \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(n) \\ S_3(n) \\ S_5(n) \\ S_7(n) \\ S_9(n) \end{bmatrix}$$

ただし, $S_k(n)$ は k 乗べき和をあらわすものとする.

ここに現れる行列は, $(1,1)-$ パスカルの三角形（初期値を 1, 1 ではじめた通常のもの）

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \end{array}$$

の各行のとびとびの値になっている. 行列要素はパスカルの三角形から, もしくは, 一般的な関係式

$$\begin{aligned} k^m(k+1)^m - (k-1)^m k^m &= 2\sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{2j-1} k^{2m-2j+1} \\ &= 2\sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{2m-2j+1} k^{2j-1} \end{aligned}$$

から容易に得られるから, この逆行列を適当な数式処理ソフトウェアで求めてやれば, 奇数乗べき和の公式を効率よく求めることができる.

２－２　中村の方法の偶数乗べき和公式への拡張

上記の方法を偶数乗の場合にあてはめて考察する. 基本的な関係は, $q_m(k) = k^m(k+1)^m(2k+1)$ と置いたときの $q_m(k)$ の差分 $\Delta q_m(k) = k^m(k+1)^m(2k+1) - (k-1)^m k^m(2k-1)$ に関する恒等式

$$\begin{aligned} k(k+1)(2k+1) - (k-1)k(2k-1) &= 6k^2 \\ k^2(k+1)^2(2k+1) - (k-1)^2k^2(2k-1) &= 10k^4 + 2k^2 \\ k^3(k+1)^3(2k+1) - (k-1)^3k^3(2k-1) &= 14k^6 + 10k^4 \\ k^4(k+1)^4(2k+1) - (k-1)^4k^4(2k-1) &= 18k^8 + 28k^6 + 2k^4 \\ k^5(k+1)^5(2k+1) - (k-1)^5k^5(2k-1) &= 22k^{10} + 60k^8 + 14k^6 \end{aligned}$$

である．これらの式に順次 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ を代入して両辺の和をとることにより，それぞれ

$$
\begin{aligned}
n(n+1)(2n+1) &= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
n^2(n+1)^2(2n+1) &= 2\sum_{k=1}^{n} (5k^4 + k^2) \\
n^3(n+1)^3(2n+1) &= 2\sum_{k=1}^{n} (7k^6 + 5k^4) \\
n^4(n+1)^4(2n+1) &= 2\sum_{k=1}^{n} (9k^8 + 14k^6 + k^4) \\
n^5(n+1)^5(2n+1) &= 2\sum_{k=1}^{n} (11k^{10} + 30k^8 + 7k^6)
\end{aligned}
$$

を得る．これをまた行列表示すれば，

$$
\begin{bmatrix} n(n+1)(2n+1) \\ n^2(n+1)^2(2n+1) \\ n^3(n+1)^3(2n+1) \\ n^4(n+1)^4(2n+1) \\ n^5(n+1)^5(2n+1) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 5 & & & \\ 0 & 5 & 7 & & \\ 0 & 1 & 14 & 9 & \\ 0 & 0 & 7 & 30 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2(n) \\ S_4(n) \\ S_6(n) \\ S_8(n) \\ S_{10}(n) \end{bmatrix}
$$

となるが，ここに現れる行列は，$(1, 2)-$ パスカルの三角形（初期値を 1，2 ではじめたもの）

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & & & & & & \\
1 & 3 & 2 & & & & & \\
1 & 4 & 5 & 2 & & & & \\
1 & 5 & 9 & 7 & 2 & & & \\
1 & 6 & 14 & 16 & 9 & 2 & & \\
1 & 7 & 20 & 30 & 25 & 11 & 2 & \\
1 & 8 & 27 & 50 & 55 & 36 & 13 & 2
\end{array}
$$

の各行のとびとびの値になっている．この行列要素は一般的に

$$
k^m(k+1)^m(2k+1) - (k-1)^m k^m(2k-1) = 2\sum_{j=1}^{m+1} \frac{2j+1}{m+1} \binom{m+1}{2m-2j+1} k^{2j}
$$

なる関係式によって与えられる [3] から，この逆行列を適当な数式処理ソフトウェアで求めてやれば，やはり偶数乗べき和の公式を効率よく求めることができる．

2－3　偶数乗べき和公式と奇数乗べき和公式のひとつの関係式

上記の２つの結果から直ちに以下の関係式を得る．

$$
\begin{bmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 5 & & & \\ 0 & 5 & 7 & & \\ 0 & 1 & 14 & 9 & \\ 0 & 0 & 7 & 30 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2(n) \\ S_4(n) \\ S_6(n) \\ S_8(n) \\ S_{10}(n) \end{bmatrix} = (2n+1) \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 3 & & \\ 0 & 0 & 4 & 4 & \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(n) \\ S_3(n) \\ S_5(n) \\ S_7(n) \\ S_9(n) \end{bmatrix}
$$

より

$$\begin{bmatrix} S_2(n) \\ S_4(n) \\ S_6(n) \\ S_8(n) \\ S_{10}(n) \end{bmatrix} = (2n+1) \begin{bmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 5 & & & \\ 0 & 5 & 7 & & \\ 0 & 1 & 14 & 9 & \\ 0 & 0 & 7 & 30 & 11 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 3 & & \\ 0 & 0 & 4 & 4 & \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(n) \\ S_3(n) \\ S_5(n) \\ S_7(n) \\ S_9(n) \end{bmatrix}$$

$$= (2n+1) \begin{bmatrix} 1/3 & & & & \\ -1/15 & 2/5 & & & \\ 1/21 & -1/7 & 3/7 & & \\ -1/15 & 8/45 & -2/9 & 4/9 & \\ 5/33 & -13/33 & 14/33 & -10/33 & 5/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(n) \\ S_3(n) \\ S_5(n) \\ S_7(n) \\ S_9(n) \end{bmatrix}.$$

これによって, 偶数乗べき和公式を下位の奇数乗べき和たちの和として求めることができる. しかしながらここで現れる最終の係数の行列の一般的な形は数式処理ソフトウェアで計算したものであって, 容易に使える形としては現在のところ求めることができていない. 気軽に発見できる特徴として, 第１列に Bernoulli 数 $2B_{2n}$ が現れていることあたりがあげられよう.

３　もうひとつの偶数乗・奇数乗べき和公式導出アルゴリズム

自然数のべき和公式の導出法に於いて視覚的な方法はこれまでもいくつか紹介されてきている. ここでは, $n \times n$ 状に数値を配列して数え上げることにより, 順次べき乗和を導出する方法をみていくことにする. 端緒として m 乗べき和の平方から $2m+1$ 乗べき和を作る手順については稲葉によっても紹介されているが, ここではあらためて 0 乗べき和の平方積から 1 乗べき和公式, 1 乗べき和の平方積から 3 乗べき和公式を構築する方法を一般化する. n 行 n 列に配置した数の和を 2 通りの求め方で計算することにより, 任意の i 乗べき和と j 乗べき和の積から $i+j+1$ 乗べき和公式を得ることができる. 特に, このうち m 乗べき和の平方から $2m+1$ 乗べき和の公式, さらに m 乗べき和と $m+1$ 乗べき和の積から $2m+2$ 乗べき和の公式を求める方法を紹介する.

３－１　m 乗べき和の平方積から $2m+1$ 乗べき和の構築

はじめに 0 乗べき和の積から 1 乗べき和の導出方法を再度, 具体的にみてみよう. そのために 1 を図のように n 行 n 列に配置する. これは・を配置して・の個数を数えてもよい.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

配置した 1 の総和は, 1 列目の 1 の和と 1 行目の 1 の和を考えて

$$(1+1+1+\cdots+1)(1+1+1+\cdots+1) = n^2$$

一方, 鏡像 L 字 (⌟ 字) 状に 1 個, 3 個, 5 個, $\cdots$ というように和を累積していくことを考える. k 番目の鏡像 L 字状和は, 1 が横に k 個, 1 が縦に k 個並んでいるので横を先に数え, 縦を上から下に向かって数えると $k+(k-1)=2k-1$ となるから, その和をとれば $2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} = n^2$ の関係式を得る.

次に 1 乗べき和の積から 3 乗べき和を導出してみよう.

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\
2 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & \cdots & 2(n-2) & 2(n-1) & 2n \\
3 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & \cdots & 3(n-2) & 3(n-1) & 3n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
n-2 & (n-2)\cdot 2 & (n-2)\cdot 3 & \cdots & (n-2)(n-2) & (n-2)(n-1) & (n-2)n \\
n-1 & (n-1)\cdot 2 & (n-1)\cdot 3 & \cdots & (n-1)(n-2) & (n-1)(n-1) & (n-1)n \\
n & n\cdot 2 & n\cdot 3 & \cdots & n(n-2) & n(n-1) & n\cdot n
\end{array}
$$

この総和は, $(1+2+3+\cdots+n)(1+2+3+\cdots+n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ である. 一方, ⌟ 字状の k 番目の和は,

$$
\begin{aligned}
k(1+2+3+\cdots)+(1+2+3+\cdots+(k-1))k &= k\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}k(k-1)k \\
&= k^3
\end{aligned}
$$

となる. したがってこの和をとることにより

$$
\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
$$

なる関係式を得ることができる.

一般的に, m 乗べき和から $2m+1$ 乗べき和の公式を得るには同様の配置を 2 通りの方法で数えればよいことが容易に想像される. ここでの ⌟ 字状和を考える際に有効となるのが, それらを表す多項式の係数間の関係である. ここで, m 乗べき和の平方積から $2m+1$ 乗べき和公式導出の以上の方法における k 番目の ⌟ 字状和の結果として得られる k の多項式の係数についてみてみよう. これらは一瞥して次頁のような関係にある.

	k^3	k^5	k^7	k^9	k^{11}	k^{13}	k^{15}	k^{17}
$m=1$	$\mathbf{1}$							
		$\searrow\times\frac{2}{3}$						
$m=2$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{2}{3}}$						
		$\searrow\times\frac{3}{2}$	$\searrow\times\frac{3}{4}$					
$m=3$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$					
			$\searrow\times\frac{4}{3}$	$\searrow\times\frac{4}{5}$				
$m=4$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{\frac{1}{15}}$	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$\mathbf{\frac{2}{5}}$				
			$\searrow\times\frac{5}{2}$	$\searrow\times\frac{5}{4}$	$\searrow\times\frac{5}{6}$			
$m=5$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{5}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$			
				$\searrow\times\frac{6}{3}$	$\searrow\times\frac{6}{5}$	$\searrow\times\frac{6}{7}$		
$m=6$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{1}{21}}$	$-\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\frac{2}{7}}$		
				$\searrow\times\frac{7}{2}$	$\searrow\times\frac{7}{4}$	$\searrow\times\frac{7}{6}$	$\searrow\times\frac{7}{8}$	
$m=7$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$-\mathbf{\frac{7}{12}}$	$\mathbf{\frac{7}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	
					$\searrow\times\frac{8}{3}$	$\searrow\times\frac{8}{5}$	$\searrow\times\frac{8}{7}$	$\searrow\times\frac{8}{9}$
$m=8$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	

これらの対角線上は $\frac{2}{m+1}$ であって, 各行すなわち m のところの横の係数の和は 1 となっている. つまり, 対角線のところからはじめて, 前行から順次 $\frac{m+1}{m+2}, \frac{m+1}{m}, \frac{m+1}{m-2}, \ldots$ と乗じて分母が 1 以下になったらやめるようにすると各係数の和が 1 であることと併せて係数達を順次知ることができる.

3－2 m 乗べき和と $m+1$ 乗べき和の積から $2m+2$ 乗べき和の構築

これまでの方法と同様にして偶数乗べき和の公式を得る. ひとつだけの例として 1 乗べき和と 2 乗べき和の積から 4 乗べき和の公式を求めてみよう. これまでと同様に数を配列しておく.

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & (n-2)^2 & (n-1)^2 & n^2 \\
2 & 2\cdot 2^2 & 2\cdot 3^2 & \cdots & 2(n-2)^2 & 2(n-1)^2 & 2n^2 \\
3 & 3\cdot 2^2 & 3\cdot 3^2 & \cdots & 3(n-2)^2 & 3(n-1)^2 & 3n^2 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
n-2 & (n-2)\cdot 2^2 & (n-2)\cdot 3^2 & \cdots & (n-2)(n-2)^2 & (n-2)(n-1)^2 & (n-2)n^2 \\
n-1 & (n-1)\cdot 2^2 & (n-1)\cdot 3^2 & \cdots & (n-1)(n-2)^2 & (n-1)(n-1)^2 & (n-1)n^2 \\
n & n\cdot 2^2 & n\cdot 3^2 & \cdots & n(n-2)^2 & n(n-1)^2 & n\cdot n^2
\end{array}
$$

この総和は,

$$
\begin{aligned}
(1+2+3+\cdots+n)(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) &= \frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n+1)
\end{aligned}
$$

である. 一方, ┘字状の k 番目の和は,

$$
\begin{aligned}
&k(1^2+2^2+3^3+\cdots+k^2)+((k-1)+(k-2)+(k-3)+\cdots+1)\cdot k^2 \\
&= k\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\frac{1}{2}k(k-1)\cdot k^2 \\
&= \frac{5}{6}k^4+\frac{1}{6}k^2
\end{aligned}
$$

となる. したがってこの和をとることにより

$$
\frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n}k^4+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n+1)
$$

なる関係式を得るから, $S_2(n)$ を既知とすれば, $S_4(n)$ を求めることができる.

また, この場合の k 番目の ┘字状和の結果として得られる k の多項式の係数についてみてみると, やはり一定の規則性を持っていることがわかる.

	k^2	k^4	k^6	k^8	k^{10}	k^{12}	k^{14}	k^{16}	
$m=1$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{5}{6}}$							
		$\searrow\times\frac{5}{2}$	$\searrow\times\frac{2}{4}\cdot\frac{7}{5}$						
$m=2$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{5}{12}}$	$\mathbf{\frac{7}{12}}$						
			$\searrow\times\frac{3}{3}\cdot\frac{7}{5}$	$\searrow\times\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{7}$					
$m=3$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{\frac{1}{30}}$	$\mathbf{\frac{7}{12}}$	$\mathbf{\frac{9}{20}}$					
			$\searrow\times\frac{7}{2}$	$\searrow\times\frac{4}{4}\cdot\frac{9}{7}$	$\searrow\times\frac{4}{6}\cdot\frac{11}{9}$				
$m=4$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{\frac{7}{60}}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$	$\mathbf{\frac{11}{30}}$				
				$\searrow\times\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{7}$	$\searrow\times\frac{5}{5}\cdot\frac{11}{9}$	$\searrow\times\frac{5}{7}\cdot\frac{13}{11}$			
$m=5$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{1}{42}}$	$-\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{11}{12}}$	$\mathbf{\frac{13}{42}}$			
				$\searrow\times\frac{9}{2}$	$\searrow\times\frac{6}{4}\cdot\frac{11}{9}$	$\searrow\times\frac{5}{7}\cdot\frac{13}{11}$	$\searrow\times\frac{6}{8}\cdot\frac{15}{13}$		
$m=6$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{3}{28}}$	$-\mathbf{\frac{11}{24}}$	$\mathbf{\frac{13}{12}}$	$\mathbf{\frac{15}{56}}$		
					$\searrow\times\frac{7}{3}\cdot\frac{11}{9}$	$\searrow\times\frac{5}{7}\cdot\frac{13}{11}$	$\searrow\times\frac{7}{7}\cdot\frac{15}{13}$	$\searrow\times\frac{7}{9}\cdot\frac{17}{15}$	
$m=7$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{\frac{1}{30}}$	$\mathbf{\frac{11}{36}}$	$-\mathbf{\frac{91}{120}}$	$\mathbf{\frac{5}{4}}$	$\mathbf{\frac{17}{72}}$	
					$\searrow\times\frac{11}{2}$	$\searrow\times\frac{5}{7}\cdot\frac{13}{11}$	$\searrow\times\frac{8}{6}\cdot\frac{15}{13}$	$\searrow\times\frac{8}{8}\cdot\frac{17}{15}$	$\searrow\times\frac{8}{10}\cdot\frac{19}{17}$
$m=8$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		

ここで, m が奇数のとき, k の最低次の係数には Bernoulli 数が現れている.

３－３ 補足的事柄

この章でみた方法では, 任意のべき乗の組合せによって上位べき和すなわち i 乗べき和と j 乗べき和の積から $i+j+1$ 乗べき和の公式を導出することができる．ここではあらためて 1 乗べき和との積という観点からもう一度眺めてみることにする．1 乗べき和との積の場合には数を

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2^m & 3^m & \cdots & (n-2)^m & (n-1)^m & n^m \\
2 & 2\cdot 2^m & 2\cdot 3^m & \cdots & 2(n-2)^m & 2(n-1)^m & 2n^m \\
3 & 3\cdot 2^m & 3\cdot 3^m & \cdots & 3(n-2)^m & 3(n-1)^m & 3n^m \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
n-2 & (n-2)\cdot 2^m & (n-2)\cdot 3^m & \cdots & (n-2)(n-2)^m & (n-2)(n-1)^m & (n-2)n^m \\
n-1 & (n-1)\cdot 2^m & (n-1)\cdot 3^m & \cdots & (n-1)(n-2)^m & (n-1)(n-1)^m & (n-1)n^m \\
n & n\cdot 2^m & n\cdot 3^m & \cdots & n(n-2)^m & n(n-1)^m & n\cdot n^m
\end{array}$$

のように配列して 2 通りの方法で数え上げればよい．⌟ 字状和で数えた場合を左辺にして奇数乗べき和との積の場合の様子を行列表示してみると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ -1/12 & 5/12 & 2/3 & 0 \\ 1/12 & -7/24 & 7/12 & 5/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_3(n) \\ S_5(n) \\ S_7(n) \\ S_9(n) \end{bmatrix} = S_1(n) \begin{bmatrix} S_1(n) \\ S_3(n) \\ S_5(n) \\ S_7(n) \end{bmatrix}$$

のようにあらわすことができる．ここから左辺の逆行列を適当な数式処理ソフトウェアなどで求めてやって上位のべき乗和を得る．また, このようにあらわすと奇数乗べき和についてはすべて $S_1(n)$ を因数にもつことがひと目でわかる．

４ おわりに

恒等式 $(k+1)^n - k^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i}$ を用いた計算が教科書的に, あるいは天下り的に一般化しているのが現状のようだが, ここでは少し違った見方でかつ, 特に初等的な方法でありながら興味深い方法を紹介したつもりである．下位のべき乗和公式から上位の公式を得るプロセスのひとつとして, 特に高校の現場で活躍されている諸兄の心に留めていただければと思う．

参考文献

[1] 中村文則, $\sum_{k=1}^{n} k^p$ の計算のちょっとした小手技, 数学のいずみ, 1999,
http://www.nikonet.or.jp/spring/sigma/sigma.htm
[2] 稲葉芳成, 自然数のべき和に関するメモＩ, 数学のいずみ, 2003,
http://www.nikonet.or.jp/spring/bekiwa/bekiwa.pdf
[3] 稲葉芳成, personal communication.