$\mathbf{(1+x+x^2+\cdots+x^m)^n}$ の展開式における係数の値について

On the coefficients in expansion of polynomial $(1+x+x^2+\cdots+x^m)^n$

北海道岩見沢農業高等学校
加藤秀隆

1　はじめに.

多項式 $(1+x+x^2+\cdots+x^m)^n$ の展開式における係数の値については, よく知られた多項定理によって求めることができる. 実際, 展開式は

$$\sum_{q_0+q_1+q_2+q_3+\cdots+q_m=n} \frac{n!}{q_0!q_1!q_2!\cdots q_m!} x^{q_1+2q_2+3q_3+\cdots+mq_m}$$

となるから, x の i 次の項の係数の値を $C(m,n,i)$ と書くことにすれば, その値は

$$C(m,n,i) = \sum_{\substack{q_0+q_1+q_2+q_3+\cdots+q_m=n \\ q_1+2q_2+3q_3+\cdots+mq_m=i}} \frac{n!}{q_0!q_1!q_2!\cdots q_m!}$$

として 計算機などで容易にその値を知ることができる. また, 数式処理ソフトウェアを用いれば, 実際に式を展開して簡単にそれを得ることも可能である. しかしながら, 手計算では存外煩わしい. 例えば, $C(4,3,5)$ の値を求めようと考えても $q_0+q_1+q_2+q_3+q_4=3$ かつ $q_1+2q_2+3q_3+4q_4=5$ を満たす 4 通りの場合を考えてその和を求めなくてはならない. この作業は簡単そうに見えるが実際にやってみると思わぬややこしさに悩まされる. ここでは, 先の展開式を少しだけ変形することにより各係数の値を求める別の方法を紹介する. この方法では 2 つの二項係数の積の和をとることにより値を求めることができる.

2　$(1+x+x^2+\cdots+x^m)^n$ の展開式.

まず, $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^m) = (1-x^{m+1})$ であることに注意すると,

$$(1+x+x^2+\cdots+x^m)^n = \frac{(1-x)^n(1+x+x^2+\cdots+x^m)^n}{(1-x)^n} = (1-x^{m+1})^n(1-x)^{-n}$$

となるから, ここで負の二項係数を用いて

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= (1-x^{m+1})^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} x^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{j(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} x^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{j+k} \binom{n}{j} \binom{-n}{k} x^{j(m+1)+k}
\end{aligned}$$

と表すことが出来る.

ここで展開式における x の次数が i である項の係数をあらためて $C(m,n,i)$ と書くことにする. このとき $j(m+1)+k=i$ であることから

$$C(m,n,i) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i-jm} \binom{n}{j} \binom{-n}{i-(m+1)j}$$

となる. ここで, 負の二項係数を用いたくない場合には, よく知られた関係式 $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$ を用いることにより

$$C(m,n,i) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n+i-(m+1)j-1}{i-(m+1)j}$$

となる. 一例として *Mathematica* にて $C(4,3,i)$ の値を計算してみると

```
m=4;n=3;
Table[Sum[(-1)^(i-j*m)*Binomial[n,j]*Binomial[-n,(i-(m+1)*j)],{j,0,n}],{i,0,m*n}]
```

に対して $\{1, 3, 6, 10, 15, 18, 19, 18, 15, 10, 6, 3, 1\}$ を得る.

3 応用.

ひとつの応用としては, よく知られた事実として $C(m,n,i)$ は $m+1$ 個の面を持つサイコロを n 個投げたときの目の和が i になる場合の数を表している. このとき, 各面の数字は 0 から m とし, サイコロの形状は正多面体を想像するよりも, むしろ鉛筆転がしの要領で, 多角柱を想像されたい. もちろん奇数面の場合には出た目（面）が真上に来ないので, 便宜上, 出た目は机上に接する面の値としておくことに注意する.

4 参考文献他.

Sloane の On-Line Encyclopedia of Integer Sequences! によれば, $C(1,n,i)$, $C(2,n,i)), \ldots$ が登録されていて, 各についての記述を見ることができる. 特に $C(2,n,i)$, 三項係数については Eric Weisstein's World of Mathematics の Trinomial Coefficient の項を参考にすることもできる. そこで得られている結果については, おそらく一般的な場合にも多くが成り立つものと予想でき, 既に知られているもの?とも思われるが, その検証は今後の課題である.

$(1+x+x^2+x^3+x^4+etc)^n$ の展開については, 既に 18 世紀にオイラーによって研究されている. 1801 年に出版された論文 De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunque $(1+x+x^2+x^3+x^4+etc)^n$ の英訳は arXiv.org のページにて math.HO/0505425 として誰でも入手することができる.