サイコロの目の積の場合の数

2008年10月17日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

１．はじめに

　複数のサイコロの目の積の場合の数を母関数の係数として得ることができることを示し、複数の二項係数によりピンポイント計算する方法を紹介します。

２．目の積の場合の数

準備として、2個の目の積の場合の数から積み重ねています。

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

目の積	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
場合の数	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4	2	1	2	2	2	1	2	1

サイコロ3個の目の積の場合の数は、この積に1から6を掛けながら場合の数を作っていきます。サイコロ4個の目の積の場合の数も、この2個の表を参考にして計算することができます。代表として3個の目の積が8,10になる場合の数と4個の目の積が24になる場合の数を数えることにします。

・3個の目の積が8になるのは、2個の目の積2に対し3個目の目が4、目の積4に対し3個目の目が2、目の積8に対し3個目の目が1の場合なので、

$$2+3+2=7\text{ 通り}$$

・3個の目の積が10になるのは、2個の目の積2に対し3個目の目が5、目の積5に対し3個目の目が2、目の積10に対し3個目の目が1の場合なので

$$2+2+2=6\text{ 通り}$$

・4個の目の積が24になる場合の数は、

$$24=1\cdot 24,2\cdot 12,3\cdot 8,4\cdot 6,6\cdot 4,8\cdot 3,12\cdot 2,24\cdot 1$$

なので、対称性を考えて

$$(1\cdot 2+2\cdot 4+2\cdot 2+3\cdot 4)\cdot 2=26\cdot 2=52\text{ 通り}$$

３．サイコロの目の積の母関数について

サイコロ 1 個の目を $x=2, y=3, z=5$ として $1+x+y+x^2+z+xy$ のように数式化すると、サイコロを n 個振ったとき出る目の積の母関数は、

$$(1+x+x^2+y+z+xy)^n$$

展開式の例を示すと、

・3 個の目の積が 8,10 になる場合の数を、$8=2^3=x^3, 10=2\cdot 5=xz$　として、

$$(1+x+x^2+y+z+xy)^3=\cdots+6xz+\cdots+7x^3+\cdots$$

・4 個の目の積が 24 になる場合の数は、$24=2^3\cdot 3=x^3y$ として、

$$(1+x+x^2+y+z+xy)^4=\cdots+52x^3y+\cdots$$

次第に項数が多くなり計算を困難なものになっていきます

ところで、数式計算ソフト Mathematica などを用いると簡単に係数計算ができます。例えば、目の積が $24=2^3\cdot 3=yx^3=z^0y^1x^3$ の場合の数を示す係数計算は、

```
n = 4; p = 0; q = 1; r = 3;
shiki = Expand[(1 + x + x^2 + y + z + x * y)^n];
Coefficient[shiki,z^p*y^q*x^r]
```

で十分です。これにより、52（通り）を得ます。

次節以降において、この展開式の係数を複数の二項係数計算によりピンポイントで得る方法を紹介します。

４．目の積の場合の数をピンポイント計算する簡易形

多項定理の要領で 3 個の目の積が 8 になる場合の数を、$8=2^3=x^3$ として考えます。

$$(1+x+x^2+y+z+xy)^3=(\quad)(\quad)(\quad)$$

( )3 個の中から x を 1 つずつ選んで積を作る x^3、( )1 個の中から x を選び残りの ( )2 個の 1 個から x^2 を選んで作る x^3 があります。( )の中から y、z を選ぶ必要がないので、求める場合の数を $(1+x+x^2)^3$ の展開式における x^3 の係数に委ねることにします。

・二項係数計算（多項定理）の要領で、${}_3C_3+{}_3C_1\cdot{}_2C_1=1+3\cdot 2=7$（通り）

・$(1+x+x^2)^3$ の展開式では、

$$(1+x+x^2)^3=1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$$

により、7（通り）

続いて $10=2\cdot 5=xz$ の係数計算をしてみます。まず、z に注目して( )3 個のうち( )1 個の中から z を 1 つ選んだあと残り( ) 2 個のうちの 1 個から x を選んで zx を作るとよいので zx の係数は、二項係数計算により

$${}_3C_1\cdot{}_2C_1=3\cdot 2=6 \text{（通り）}$$

ところで、z を選んでいる際の( )の中は $1+z$ として十分です。また、x の係数は

$(1+x+x^2)^2$ から求まるので、場合の数を与える係数計算を数式 $(1+z)^3(1+x+x^2)^2$ のような簡易形に委ねてよいことになります。$(1+z)^3$ の z の係数と $(1+x+x^2)^2$ の x の係数の積を考えて、

$${}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ （通り）}$$

・4 個の目の積が 24 になる場合の数は、$24 = 2^3 \cdot 3 = x^3 y$

$$(1+x+x^2+y+z+xy)^3 = (\quad)(\quad)(\quad)(\quad)$$

として、まず 4 つの $(\quad)$ の 1 つから y を 1 つ選びます。このとき $(\quad)$ の中を、

$$1+x+y+xy = (1+y)(1+x)$$

とします。y を 1 つ選ぶときに xy を選んでもよく、このときは $(1+y)(1+x)$ から同時に y と x を選ぶようにします。残りの 3 つの $(\quad)$ の中の $1+x+x^2$ から x^3 を作る（先に xy を選んでいると x^2 を作る）とよいです。目の積の場合の数をピンポイント計算する簡易形を $(1+y)^4(1+x)(1+x+x^2)^3$ として求めると、

$(1+y)^4$ の y の係数と $(1+x)(1+x+x^2)^3$ の x^3 の係数の積を考えて、

$${}_4\mathrm{C}_1 \cdot 13 = 4 \cdot 13 = 52 \text{ （通り）}$$

※ $(1+x)$ は、y を 1 つ選んだ際に xy を選んでいることを想定しています。

※ $(1+x)(1+x+x^2)^3 = 1+4x+9x^2+13x^3+13x^4+9x^5+4x^6+x^7$

5．目の積の場合の数をピンポイント計算する試み

サイコロ 10 個を振ったとき目の積が 129600 になる場合の数を、簡易形を利用しながら $z^2y^4x^6$ の係数として求めることができます。まず$(\ )$10 個のうち$(\ )$2 個の中から z を選び、残り$(\ )$8 個のうち$(\ )$4 個の中から y を選びます。残っている$(\ )$の個数は 4 個。係数計算の簡易形は、

$$(1+z)^{10}(1+y)^8(1+x)^4(1+x+x^2)^4$$

になります。z^2y^4 についての係数計算は、${}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot {}_8\mathrm{C}_2$ であり、$(1+x)^4(1+x+x^2)^4$ を次のように数式変形します。

$$\begin{aligned}(1+x)^4(1+x+x^2)^4 &= \frac{(1-x)^4(1+x)^4(1-x)^4(1+x+x^2)}{(1-x)^4(1-x)^4}\\ &= \frac{(1-x^2)^4(1-x^3)^4}{(1-x)^8}\\ &= (1-x^2)^4(1-x^3)^4(1-x)^{-8}\\ &= (1-x^3)^4(1-x^2)^4(1-x)^{-8}\end{aligned}$$

この数式変形から、負の二項係数計算も用いて x^6 の項計算は、

$$(1+x)^4(1+x+x^2)^4 = \sum_{i=0,j=0,k=0}^{3i+2j+k=6} {}_4\mathrm{C}_i(-x^3)^i \cdot {}_4\mathrm{C}_j(-x^2)^j \cdot {}_{-8}\mathrm{C}_k(-x)^k$$

$$=\sum(-1)^{i+j+k}{}_4\mathrm{C}_i\cdot{}_4\mathrm{C}_j\cdot{}_{-8}\mathrm{C}_k\cdot x^{3i+2j+k}$$

となります。x^6 の係数は、$3i+2j+k=6$ を満たす (i,j,k) の組を考え計算するとよく、i,j の順に考え $i=2,1,0$ として、

$$(i,j,k)=(2,0,0),(1,1,1),(1,0,3),(0,3,0),(0,2,2),(0,1,4),(0,0,6)$$

を得ます。

$$(-1)^{2+0+0}{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_{-8}\mathrm{C}_0+(-1)^{1+1+1}{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_{-8}\mathrm{C}_1+(-1)^{1+0+3}{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_{-8}\mathrm{C}_3$$

$$+(-1)^{0+3+0}{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_{-8}\mathrm{C}_0+(-1)^{0+2+2}{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_{-8}\mathrm{C}_2$$

$$+(-1)^{0+1+4}{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_{-8}\mathrm{C}_4+(-1)^{0+0+6}{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_{-8}\mathrm{C}_6$$

$$=4\cdot1\cdot1-4\cdot4\cdot(-8)+4\cdot1\cdot(-120)-1\cdot4\cdot1+1\cdot6\cdot36-1\cdot4\cdot330+1\cdot1\cdot1716$$

$$=4+128-480-4+216-1320+1716$$

$$=262$$

よって、$(1+z)^{10}(1+y)^8(1+x)^4(1+x+x^2)^4$ の $z^2y^4x^6$ の係数は、

$${}_{10}\mathrm{C}_2\cdot{}_8\mathrm{C}_4\cdot262=45\cdot70\cdot262=825300$$

６．目の積の場合の数のピンポイント計算の一般形

サイコロを n 個振ったとき目の積を素因数分解して、$2^r\cdot3^q\cdot5^p=z^py^qx^r$ とすると求める場合の数は、

$${}_n\mathrm{C}_p\cdot{}_{n-p}\mathrm{C}_q\cdot\sum_{i=0,j=0,k=0}^{3i+2j+k=r}(-1)^{i+j+k}\cdot{}_{n-p-q}\mathrm{C}_i\cdot{}_q\mathrm{C}_j\cdot{}_{-n+p}\mathrm{C}_k$$

になります。目の積の場合の数を求める十進 BASIC プログラムを添付します。検証は、読者各位に委ねます。

７．私的通信

西川誠：千葉県立柏稜高校（サイコロの目の積の母関数の創始者）

稲葉芳成：京都府立北桑田高校（Mathematica による係数計算）

```
100 DECLARE EXTERNAL FUNCTION C
110 INPUT　PROMPT "サイコロの個数":n
120 INPUT　PROMPT "目の積を素因数分解した 5,3,2 の指数を順に入力": p,q,r
130 LET s=0
140 LET sss=0
150 LET ss=C(n,p)*C(n-p,q)
```

```
160 LET i=INT(r/3)
170     LET j=r-3*i
180     LET jj=INT(j/2)
190     LET k=j-2*jj
200     LET sss=sss+(-1)^(i+jj+k)*C(n-p-q,i)*C(q,jj)*C(-n+p,k)
210         LET jj=jj-1
220         IF jj>=0 THEN 190
230         LET i=i-1
240         IF i>=0 THEN 170
250 LET s=ss*sss
260 PRINT "求める場合の数は";s;"通りになります。"
270 END
280 EXTERNAL FUNCTION C(x,y)
300 LET a=1
310 IF y<0 THEN LET a=0
320 IF y=0 THEN GOTO 360
330 FOR i=1 TO y
340     LET a=a*(x-i+1)/i
350 NEXT i
360 LET C=a
370 END FUNCTION
```