順列や円順列のちょっとしたアイデア（その２）

2010 年 6 月 25 日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

１．円順列

円を中心から 4 等分します。この 4 か所を異なる色により塗り分けしたいと思います。

(1) 4 色の場合　　(2) 5 色の場合　　(3) 6 色の場合　　(7) 7 色の場合

それぞれ何通りの色分けがあるか。

円順列の基本は、どのようにして回転を止めるかです。

(1) 4 色の場合は、回転を止めるため 1 ヶ所色指定をします。従って、$3\cdot2\cdot1=6$ 通りです。

(2) 5 色の場合は、塗り分けに使用しない 1 色をまず選びます。どの色でもよいので 5 通り。そのあと 4 色による色分けします。$5\cdot3\cdot2\cdot1=30$ 通り

(3)、(4) 塗り分けに使用しない 2 色、3 色を選ぶ必要があるので、円順列後の組合せ計算を教えた後授業展開することができます。融合問題になります。

(3) 6 色から塗り分けに使用しない 2 色をまず選び、${}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 通り。4 色による 4 分割円の塗り分けは、6 通り。∴15×6=90 通り

(4) 7 色から塗り分けに使用しない 2 色をまず選び、${}_7C_2=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$ 通り。4 色による 4 分割円の塗り分けは、6 通り。∴21×6=126 通り

２．特殊な円順列

同心円を 2 円用意します。中心部の円をそのままにして、外側部分を 4 等分します。5 つの部分を 5 色で塗り分けたいと思います。まず中心部の円を 5 色のどれかで塗ります。生徒も中心部分から塗ることを提案してきます。続いて、外側の 4 分割した部分の色分けをします。回転を止めるため、4 か所のうち一か所を残っている 4 色のうちの 1 色で塗り、他の 3 つの部分の色塗りします。

$$5\cdot3\cdot\ \cdot2\cdot1=30 \text{ 通り}$$

この考えを 6 色、7 色、8 色用意したときに応用してみます。

6 色の場合→1 色残します。${}_6C_1=6$ 通り、5 色塗りは 30 通りなので、6×30=180 通り

7 色の場合→2 色残します。${}_7C_2=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$ 通り、5 色塗りは 30 通りなので、21×30=630 通り

8 色の場合→3 色残します。${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 通り、5 色塗りは 30 通りなので、56×30=1680 通り

３．正六面体の 6 色塗り分け

正六面体の 6 色塗り分けをどのように突破するかです。高校数学の現場では、滅多に考えません。

教える機会（チャンス）はほとんどありません。立体なので回転の止め方は、二重にします。まず上の面を色指定で塗って固定します。残っている 5 色のどれかで底の面を自由に塗ります。続いて横回転を止めるために正面の面を残っている 4 色から 1 色、色指定して塗ります。残っている 3 面は自由に 3 色塗りできます。

$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30$ 通り

用意されている色が 7,8,9 色の場合での 6 面の異なる色による塗り分けは、どうなるか。

7 色→1 色残します。用いる 6 色を選んでもよい。

${}_7C_1 = 7$ 通り、6 色塗りは 30 通りなので、7×30=210 通り

8 色→2 色残します。用いる 6 色を選んでもよい。

${}_8C_2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ 通り、6 色塗りは 30 通りなので、28×30=840 通り

9 色→3 色残します。用いる 6 色を選んでもよい。

${}_9C_3 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ 通り、6 色塗りは 30 通りなので、84×30=2520 通り

4．8 人を正方形のテーブル 2 つのまわりに座らせる

8 人を正方形のテーブル 2 つの周りに座る（立たす）場合の数の計算において、座席指定が自分の計算方法であっているかどうか心配になりました。確認作業の結果、送った計算方法がベストのように思います。確認作業を記述します。テーブルが 2 つあるので 1 つずつのテーブルの座席指定をどうするかです。8 人を a,b,c,d,e,f,g,h とします。

（1） 1 つのテーブルに a,b と他の 2 人、2 つ目のテーブルに残りの 4 人

（2）1 つのテーブルに a と b を含まない 3 人、2 つ目のテーブルに b と残り 3 人

としてみました。

（1）1 つ目のテーブルは、a を座席指定します。

$${}_6C_2 \times 3! = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 90 \text{（通り）}$$

2 つ目のテーブルでは、残っている 4 人のうちの 1 人を座席指定します。

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ （通り）

2 つのテーブルを合わせて、$90 \times 6 = 540$ （通り）

（2）1 つ目のテーブルは、a を座席指定し、2 つ目のテーブルは b を座席指定します。

1 つ目のテーブルは、${}_6C_3 \times 3! = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ （通り）

2 つ目のテーブルは、b と残っている 3 人なので b を座席指定したあと、3 人を自由に座らす（立たす）ことになり、

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ （通り）

2 つのテーブルを合わせて、$120 \times 6 = 720$ （通り）

以上により、$540 + 720 = 1260$ （通り）になります。

円順列の回転を止める作業は、授業では座席指定（指定席を作る）をしてから座らせたり、立たせたり、並ばせたり、置いたりしています。

1 つ目のテーブルは、a を座席指定して数えて、

●⑦⑥⑤=210（通り）

2 つ目のテーブルでは、残っている 4 人のうちの誰かを座席指定して、●③②①=6（通り）

2 つのテーブルあわせて、${}_7P_3 \times {}_3P_3$ でもよいし、${}_7P_3 \times 3!$ でもよい。

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 42 \times 30 = 1260$ （通り）

●⑦⑥⑤●③②①=1260（通り）

こんなアイデアもどうでしょうか。4 人ずつ 2 グループに分けて、それぞれでテーブルのまわりに座って（立って）もらう。

$$\frac{{}_8C_4 \times {}_4C_4}{2!} \times 3! \times 3! = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{1}{2 \cdot 1} \times 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 35 \cdot 36 = 1260$$ （通り）

参考文献

数研出版：数学 A　Study- Up ノート

私的通信：稲葉芳成（京都府立北桑田高校）