モンモール数（完全順列、攪乱順列、derangement）覚書 01

北海道岩見沢農業高等学校
加藤秀隆
E-mail:gori@hokkaido-c.ed.jp

１．はじめに

1708 年の神父モンモール氏がトランプ 13 枚を用いた問題に由来します。レオンハルト・オイラー氏やドナルド・クヌース氏もモンモール数を考察しています。プレゼントや弁当の交換問題（ただし、自分のものは貰えないとします。）として話題にすることができます。モンモール数をある関数を順次微分して得ることができます。また、行列を用いるとモンモール数と階乗数に互換性があり、このことを利用してモンモール数を簡単に入手することができます。

２．モンモール数とは

数字１，２，３，４，・・・を左から順に並べる順列において 1 番目に 1 以外の数字を、2 番目に 2 以外の数字を、3 番目に 3 以外の数字をというように並べていったときの場合の数を指します。モンモール数を順に記すと

０，１，２，９，４４，２６５，１８５４，１４８３３，１３３４９６，
１３３４９６１，１４６８４５７０，１７６２１４８４１,・・・

３．モンモール数を表す漸化式 2 本と一般項 a_n

① $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}), a_1 = 0, a_2 = 1 \quad (n = 3,4,5,\cdots)$

② $a_n = na_{n-1} + (-1)^n, a_1 = 0 \quad (n = 2,3,4,\cdots)$

③ $a_n = {}_nP_n - {}_nP_{n-1} + {}_nP_{n-2} - {}_nP_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\,{}_nP_1 + (-1)^n\,{}_nP_0 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

$$= n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right),\quad {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad （順列数）$$

包除原理が主流のようですが､独自に①や②､③を入手するところに醍醐味があります。

４．母関数について

$\dfrac{b_0}{0!} + \dfrac{b_1}{1!}x + \dfrac{b_2}{2!}x^2 + \dfrac{b_3}{3!}x^3 + \dfrac{b_4}{4!}x^4 + \cdots$ を数式化したものを指数型母関数といい、

$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots$ を数式化したものを通常型母関数といいます。

５．$n!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!})$を係数にもつ指数型母関数について$\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}$を係数にもつ通常型母関数を考えればよいことになります。

e^{-x}の無限級数展開　$e^{-x}=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\cdots\cdots$

$\frac{1}{1-x}$の無限級数展開　$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots$

２つの数式の積を考えて、

$$F(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$=\frac{1}{0!}+(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!})x+(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!})x^2+(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})x^3+(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})x^4$$

$$+(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})x^4+(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})x^5+\cdots\cdots$$

この右辺を順次微分しながら、$x=0$ を代入しましょう。

1 階微分により、$1!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!})$

2 階微分により、$2!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!})$

3 階微分により、$3!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})$

4 階微分により、$4!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})$

5 階微分により、$5!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})$

モンモール数を構成しています。一般項a_nが、

$$a_n=n!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!})$$

となることも分かります。おまけがあります。$a_0=1$です。全く考えていませんでした。

６．モンモール数の漸化式以外の入手方法について

５．により漸化式をプログラムする方法のほかに、関数 $F(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$ を順次微分しながら、$x=0$ を代入する方法があることが判明しました。

1 階微分　$xe^{-x}(1-x)^{-2}$　　$x=0$ を代入して　$0=a_1$

2 階微分　$(1+x^2)e^{-x}(1-x)^{-3}$　　$x=0$ を代入して　$1=a_2$

3 階微分　$(2+3x+x^3)e^{-x}(1-x)^{-4}$　　$x=0$ を代入して　$2=a_3$

4 階微分　$(9+8x+6x^2+x^4)e^{-x}(1-x)^{-5}$　　$x=0$ を代入して　$9=a_4$

5 階微分　$(44+45x+20x^2+10x^3+x^5)e^{-x}(1-x)^{-6}$　　$x=0$ を代入して　$44=a_5$

6 階微分　$(265+264x+135x^2+40x^3+15x^4+x^6)e^{-x}(1-x)^{-7}$

$x=0$ を代入して　$265=a_6$

7 階微分　$(1854+1855x+924x^2+315x^3+70x^4+21x^5+x^7)e^{-x}(1-x)^{-8}$

$x=0$ を代入して　$1854=a_7$

７．二項変換

数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ のあいだで、$b_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i$　による変換を二項変換といいます。

行列書きすると

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & 0 \\ & & & & & & \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \\ a_n \end{pmatrix}$$

この変換の典型的な例としてモンモール数が登場します。

次の行列計算をしてみて下さい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \\ 44 \\ 265 \\ 1854 \end{pmatrix}$$

モンモール数から階乗数が得られています。逆行列により階乗数からモンモール数を入手可能なことを示しています。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -21 & 35 & -35 & 21 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 24 \\ 120 \\ 720 \\ 5040 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \\ 44 \\ 265 \\ 1854 \end{pmatrix}$$

７．おわりに

モンモール数を完全に吸い込む母関数をご存知の方がおられましたら、一報をお願い致します。数列を変換することを考察しているものがありました。この中で、二項変換の典型的な例としてモンモール数が扱われています。まだ読破していませんが。

参考文献

Micheal Z.Spivey and Laura L.Steil :The k − Binomial Transforms and the Hankel Transform(Journal of Integer Sequences,Vol.9(2006)Article 06.1.1