常用対数値 $\log_{10}2$ の最良な近似分数の構成方法

北海道岩見沢農業高校
加藤秀隆

$2^3=8,\ 2^{10}=1024,\ 1<8<10,\ 1000<1024<10000$ であることより

$$0<\log_{10}2<1\ ,\ 3<10\cdot\log_{10}2<4$$

$$\frac{3}{10}<\log_{10}2<\frac{1}{3}$$

$\log_{10}2$ を下限、上限からはさみながら効率的に収束していくような分数を何とか入手することができないかを、「最適分数」と名付けて探し始めました。前述の不等式を言葉にすると10の中では最大２の３乗が収まり、1000では２の10乗は少しはみ出すということになります。$\frac{3}{10}$ や $\frac{1}{3}$ の次の分数をどのように入手するかが最大のポイントでした。２の累乗を浮動点小数表示することで解決することができました。２の累乗はすぐに大海の海に飲み込まれてしまいます。２の累乗の様子を見ていきましょう。2つの系列を見ることができます。

$2\cdot2\cdot2=8\quad 2\cdot2\cdot2\cdot2=1.6\cdot10$　　（８の入手です！）

$2\cdot8\cdot8\cdot8=1.024\cdot10^3\quad 2\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8=8.192\cdot10^3$　　（1024の入手です！）

この2つの 2^3 と 2^{10} で下限からの３乗($\log_2 10 \fallingdotseq \frac{1}{3}$)と上限からの10乗($\log_2 10 \fallingdotseq \frac{3}{10}$)を入手したことのなります。10の累乗部分（指数表示）を省略することします。これもプログラムを組む上では大切なことになります。以下、すべて浮動点小数表示で記します。

$8\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024$
$=9.903520314283042199192993792$

$8\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024\cdot1.024$
$=1.01412048018258352119736256430 08$

（9.903520314283042199192993792の入手です！）

$1.024\cdot9.903520314283042199192993792\cdot9.903520314283042199192993792$
$=1.00974195868289511092701256356196637398170423693954944610595703125$

$1.024\cdot9.903520314283042199192993792\cdot9.903520314283042199192993792$
$\cdot9.903520314283042199192993792$
$=9.946464728195732843107644962936416802009123015946954348809279537863189$
94025066751066112

（1.00974195868289511092701256356196637398170423693954944610595703125の入手です）

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　1

それらがどのように現れ、どのように関係（リレー）していくかも示唆しています。前者の数値に後者の数値を乗じている個数が $\log_2 10$ の正則連分数の分子群を与えます。正則連分数の表記法に従うと

$$\log_2 10 = [3; 3, 9, 2, \cdots\cdots]$$

となります。さらに、この正則連分数表記を行列計算することができます。近似分数の分子、分母を

$$\begin{pmatrix}\text{分子}\\ \text{分母}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$ によって得ることができます。

　先行数字群を特定していく十進BASICプログラムを記述します。n(0)から始めてn(989)までです。十進BASICでは、n(990)以降もしてしまいますが、正しくありません。小数展開の機能上の限界にぶつかっています。行番号は不要です。ただし、プリントアウトはしないで下さい。相当数の用紙（A4 200枚強）を必要とします。計算が止まった時点で、中断･中止にして下さい。Word文書等に複写（コピー）することができます。また、近似分数を小数展開したものもプログラムに組み込むことができます。

```
OPTION BASE 0
DIM n(989)
LET c=2
LET d=2
LET cc=1
LET dd=d
LET e=c
LET m1=1
LET m2=0
LET m3=0
LET m4=1
LET mm1=0
LET mm2=0
LET mm3=0
LET mm4=0
LET s=0
DO
```

```
LET i=1
 DO WHILE e>=cc
        LET  cc=cc*dd
        LET e=cc*dd
        IF e>10 THEN LET e=e/10
        LET i=i+1
 LOOP
 LET n(s)=i-1
 LET mm1=m1*n(s)+m2
 LET mm2=m1
 LET mm3=m3*n(s)+m4
 LET mm4=m3
 LET m1=mm1
 LET m2=mm2
 LET m3=mm3
 LET m4=mm4
 PRINT s;",";n(s)
 PRINT s;",";cc
 PRINT s;",";m1
 PRINT s;",";m3
 LET t=cc
 LET cc=dd
 LET dd=t
 LET e=t
 LET i=1
 LET s=s+1
 DO WHILE e<=dd
         LET cc=cc*dd
         IF cc>10 THEN LET cc=cc/10
         LET e=cc*dd
         IF e>10 THEN LET e=e/10
         LET i=i+1
 LOOP
 LET n(s)=i-1
```

```
    LET mm1=m1*n(s)+m2
    LET mm2=m1
    LET mm3=m3*n(s)+m4
    LET mm4=m3
    LET m1=mm1
    LET m2=mm2
    LET m3=mm3
    LET m4=mm4
    PRINT s;",";n(s)
    PRINT s;",";cc
    PRINT s;",";m1
    PRINT s;",";m3
    LET t=cc
    LET cc=dd
    LET dd=t
    LET s=s+1
LOOP
END
```

F9ボタンで計算を作動させます。後半に劇的な状況を示します。このプログラムではn(990)以降も計算させることができますが、正しくありません。990番以降の正則連分数展開は、 4,2,19,2,4,2,1,2,16,1,3,1,1,1,1,1,1,3,152,5,・・・・・・です。２の常用対数値を利用したプログラムも作ったところ、1935番までの分子群を特定することができました。

以上は、2004年5月に「数学のいずみ」に投稿して、京都府立鳥羽高等学校の稲葉芳成先生から英国と豪州の2氏（Terrence Jackson氏とKeith Matthers氏）の論文に正則連分数展開の十進BASICプログラムを加味したものを頂いたものを基盤にしてのプログラムです。稲葉先生に感謝申し上げます。ほとんどを彼のプログラムから学びました。

文献

TERENCE JACKSON AND KEITH MATTHEWS ON SHANKS' ALGORITHM FOR COMPUTING THE CONTINUED FRACTION OF $\log_b a$
http://www.numbertheory.org/pdfs/log.pdf