平方根を近似する分数群の作り方

２００８年7月８日
北海道岩見沢農業高校
加藤秀隆

０．はじめに

平方根の正則連分数に関する考察シリーズのおまけのレポートです。平方根の数値を近似する正則連分数に今までスポットライトが当たっていました。今回は正則連分数から離れて、平方根を近似する数値を作る分数群を遊び感覚で作っていきます。電卓片手にお付き合いください。

１．平方根を近似する分数の作り方

正則連分数を意識しません。$\sqrt{D} \quad \dfrac{x}{y}$ を考えます。少しくらい違っていても構いません。下限方向ばかりでなく、上限方向の自然数値、分数でもよいです。

$\sqrt{D} \quad \dfrac{x_m}{y_m} \quad \sqrt{D} \quad \dfrac{x_n}{y_n}$ のとき、$\sqrt{D} = \dfrac{x_k}{y_k} - \varepsilon_k$ とおくと、

$$\varepsilon_k = \frac{x_k}{y_k} - \sqrt{D} \qquad y_k \varepsilon_k = x_k - y_k \sqrt{D}$$

このことにより、

$$y_m \varepsilon_m \cdot y_n \varepsilon_n = (x_n - y_n \sqrt{D})(x_m - y_n \sqrt{D}) = x_m x_n + y_m y_n D - (x_m y_n + y_m x_n)\sqrt{D}$$

$$\sqrt{D} = \frac{x_m x_n + y_m y_n D}{x_m y_n + y_m x_n} - \frac{y_m y_n}{x_m y_n + y_m x_n} \cdot \varepsilon_m \varepsilon_n$$

$$\frac{x_{m+n}}{y_{m+n}} = \frac{x_m x_n + y_m y_n D}{x_m y_n + y_m x_n} \qquad \varepsilon_{m+n} = \frac{y_m y_n}{x_m y_n + y_m x_n} \cdot \varepsilon_m \varepsilon_n$$

とおいて、次々に分数を作っていくことにします。この分子数と分母数は、次の展開計算からも得ることができます。

$$x_{m+n} + y_{m+n}\sqrt{D} = (x_m + y_m \sqrt{D})(x_n + y_n \sqrt{D})$$

$$= x_m x_n + y_m y_n D + (x_m y_n + y_m x_n)\sqrt{D}$$

三角関数のド･モワブルの公式

$$\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = (\cos\alpha + i \sin\alpha)(\cos\beta + i \sin\beta)$$
$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta + i(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)$$
$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

に似ています。三角関数の倍角公式が隠れていてもおかしくありません。ネピア数eの複素数乗の微分・積分が関与している可能性が大です。

$m=n$ として、

$$\frac{x_{2n}}{y_{2n}}=\frac{x_n x_n+y_n y_n D}{x_n y_n+y_n x_n}=\frac{x_n{}^2+y_n{}^2 D}{2x_n y_n}$$

を得ます。この計算法は、平方根を近似するニュートン・ラフソン法と重なります。

誤差評価は、$\varepsilon_{n+n}=\dfrac{y_n y_n}{x_n y_n+y_n x_n}\bullet\ \varepsilon_n\varepsilon_n$

$$\varepsilon_{2n}=\frac{y_n{}^2}{2x_n y_n}\varepsilon_n{}^2=\frac{y_n}{2x_n}\varepsilon_n{}^2$$ です。

$m=1$ として、

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=\frac{x_n x_1+y_n y_1 D}{x_n y_1+y_n x_1}\qquad \varepsilon_{n+1}=\frac{y_n y_1}{x_n y_1+y_n x_1}\bullet\ \varepsilon_n\varepsilon_1$$

により、次々に分数を作り、その分数の誤差評価をしてもよいです。

平方根を近似する初期値に用いる分数や２つ目の近似分数をどのように設定してもよいです。平方根を近似する分数を３個以上用意してもよいです。

$$\sqrt{D}\quad \frac{x_k}{y_k}\quad \sqrt{D}\quad \frac{x_m}{y_m}\quad \sqrt{D}\quad \frac{x_n}{y_n}$$

$$\begin{aligned}y_k\varepsilon_k\bullet\ y_m\varepsilon_m\bullet\ y_n\varepsilon_n&=(x_k-y_k\sqrt{D})(x_n-y_n\sqrt{D})(x_m-y_n\sqrt{D})\\&=x_k x_m x_n+(x_k y_m y_n+y_k x_m y_n+y_k y_m x_n)D\\&\qquad -(x_k x_m y_n+x_k y_m x_n+y_k x_m x_n+y_k y_m y_n D)\sqrt{D}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x_{k+m+n}}{y_{k+m+n}}&=\frac{x_k x_m x_n+(x_k y_m y_n+y_k x_m y_n+y_k y_m x_n)D}{x_k x_m y_n+x_k y_m x_n+y_k x_m x_n+y_k y_m y_n D}\\&\qquad-\frac{y_k y_m y_n}{x_k x_m y_n+x_k y_m x_n+y_k x_m x_n+y_k y_m y_n D}\bullet\ \varepsilon_k\varepsilon_m\varepsilon_n\end{aligned}$$

近似分数を

$$\frac{x_{k+m+n}}{y_{k+m+n}}=\frac{x_k x_m x_n+(x_k y_m y_n+y_k x_m y_n+y_k y_m x_n)D}{x_k x_m y_n+x_k y_m x_n+y_k x_m x_n+y_k y_m y_n D}$$

とおき、誤差評価は、

$$\varepsilon_{k+m+n} = \frac{y_k y_m y_n}{x_k x_m y_n + x_k y_m x_n + y_k x_m x_n + y_k y_m y_n D} \cdot \varepsilon_k \varepsilon_m \varepsilon_n$$

２．$\sqrt{2}$ を近似する分数群

$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$　をヒントにした近似分数を考えます。

$\sqrt{2}$　$1 = \frac{1}{1} = \frac{x_1}{y_1}$　とおくのが、順当なところです。

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1{}^2 + y_1{}^2 D}{2x_1 y_1} = \frac{1^2 + 1^2 \cdot 2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

項番号を飛ばしていきましょう。

$$\frac{x_4}{y_4} = \frac{x_2{}^2 + y_2{}^2 D}{2x_2 y_2} = \frac{3^2 + 2^2 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12} = 1.41666\cdots$$

$$\frac{x_8}{y_8} = \frac{x_4{}^2 + y_4{}^2 D}{2x_4 y_4} = \frac{17^2 + 12^2 \cdot 2}{2 \cdot 17 \cdot 12} = \frac{577}{408} = 1.41421568\cdots$$

誤差評価をしてみます。$\varepsilon_{2n} = \frac{y_n}{2x_n} \varepsilon_n{}^2$　によります。

$$\varepsilon_1 = 1 - \sqrt{2} = -0.414213562\cdots$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot} \varepsilon_1{}^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = 0.0857864376\cdots$$

$$\varepsilon_4 = \frac{2}{2 \cdot 3} \varepsilon_2{}^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1{}^2\right)^2 = \frac{1}{12} \varepsilon^4 = 0.000072212648\cdots$$

$$\varepsilon_8 = \frac{12}{2 \cdot 17} \varepsilon_2{}^2 = \frac{6}{17} \cdot \left(\frac{1}{12} \varepsilon_1{}^4\right)^2 = \frac{1}{408} \varepsilon^8 = 0.00000212390141\cdots$$

得ている近似分数群が、より強く $\sqrt{2}$　を近似していることを示しています。

$\sqrt{2}$　$1.4 = \frac{7}{5} = \frac{x_1}{y_1}$　とおいてみましょう。

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1{}^2 + y_1{}^2 D}{2x_1 y_1} = \frac{7^2 + 5^2 \cdot 2}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{49+50}{70} = \frac{99}{70} = 1.41428571\cdots$$

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{{x_2}^2+{y_2}^2D}{2x_2y_2}=\frac{99^2+70^2\cdot 2}{2\cdot 99\cdot 70}=\frac{9801+9800}{13860}=\frac{19601}{13860}$$

$$=1.41421356\cdots$$

次は、電卓計算を越えます。江戸時代の久留島義太氏も平方根を小数展開したしたとき、どこまでを記述しようかと迷ったことと思います。十進 BASIC による計算によると、

$$\frac{x_8}{y_8}=\frac{{x_4}^2+{y_4}^2D}{2x_4y_4}=\frac{19601^2+13860^2\cdot 2}{2\cdot 19601\cdot 13860}=\frac{384199201+384199200}{543339720}$$

$$=\frac{768398401}{543339720}=1.4142135623730950\cdots$$

誤差評価をしてみます。$\varepsilon_{2n}=\dfrac{y_n}{2x_n}{\varepsilon_n}^2$ によります。

$$\varepsilon_1=\frac{7}{5}-\sqrt{2}=-0.0142135623\cdots$$

$$\varepsilon_2=\frac{5}{2\cdot 7}{\varepsilon_1}^2=\frac{5}{14}\left(\frac{7}{5}-\sqrt{2}\right)^2=0.0000721519126\cdots$$

$$\varepsilon_4=\frac{70}{2\cdot 99}{\varepsilon_2}^2=\frac{35}{99}\left(\frac{5}{14}\varepsilon_1\right)^2=\frac{125}{2772}{\varepsilon_1}^4=0.00000000184046926\cdots$$

を得ることができます。誤差表示の小数の位に注目しましょう。現在では、桁数読みされています。近似している桁数を記述すると、

$0\to 0\to 2\to 5\to\cdots$

$1\to 4\to 8\to 16\to\cdots$

２つ目のほうが、より早い近似を得ることができます。

別の近似小数を分数化して考えます。$\sqrt{2}\quad 1.41=\dfrac{141}{100}=\dfrac{x_1}{y_1}$ とします。

$$\frac{x_2}{y_2}=\frac{{x_1}^2+{y_1}^2D}{2x_1y_1}=\frac{141^2+100^2\cdot 2}{2\cdot 141\cdot 100}=\frac{39881}{28200}=1.41421985\cdots$$

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{{x_2}^2+{y_2}^2D}{2x_2y_2}=\frac{39881^2+28200^2\cdot 2}{2\cdot 39881\cdot 28200}=\frac{3180974161}{2249288400}=1.4142135623\cdots$$

$$\frac{x_8}{y_8}=\frac{x_4{}^2+y_4{}^2D}{2x_4y_4}=\frac{3180974161^2+2249288400^2\cdot 2}{2\cdot 3180974161\cdot 2249288400}$$

$$=\frac{20237193225698773921}{14309856562074064800}=1.414213562373095048801\cdots$$

３回のループ計算で小数第２１位まで近似しています。

$\sqrt{2}\quad 1.4,1.5$ **をあえて、はずします。**

・$\sqrt{2}\quad 1.2=\frac{6}{5}=\frac{x_1}{y_1}$ **とおくと、**

$$\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1{}^2+y_1{}^2D}{2x_1y_1}=\frac{6^2+5^2\cdot 2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{86}{60}=\frac{43}{30}=1.4\cdots$$

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{x_2{}^2+y_2{}^2D}{2x_2y_2}=\frac{43^2+30^2\cdot 2}{2\cdot 43\cdot 30}=\frac{3649}{2580}=1.414\cdots$$

$$\frac{x_8}{y_8}=\frac{x_4{}^2+y_4{}^2D}{2x_4y_4}=\frac{3649^2+2580^2\cdot 2}{2\cdot 3649\cdot 2580}=\frac{26628001}{18828840}=1.41421356\cdots$$

・$\sqrt{2}\quad 1.6=\frac{8}{5}=\frac{x_1}{y_1}$ **とおくと、**

$$\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1{}^2+y_1{}^2D}{2x_1y_1}=\frac{8^2+5^2\cdot 2}{2\cdot 8\cdot 5}=\frac{114}{80}=\frac{57}{40}=1.4\cdots$$

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{x_2{}^2+y_2{}^2D}{2x_2y_2}=\frac{57^2+40^2\cdot 2}{2\cdot 57\cdot 40}=\frac{6449}{4560}=1.4142\cdots$$

$$\frac{x_8}{y_8}=\frac{x_4{}^2+y_4{}^2D}{2x_4y_4}=\frac{6449^2+4560^2\cdot 2}{2\cdot 6449\cdot 4560}=\frac{83176801}{58814880}=1.414213562\cdots$$

・**近似分数２つを組ませて、**$\sqrt{2}\quad 1.2=\frac{6}{5}=\frac{x_1}{y_1}\quad \sqrt{2}\quad 1.6=\frac{8}{5}=\frac{x_2}{y_2}$

とおいて、様子を見ます。

$$\frac{x_3}{y_3}=\frac{x_{1+2}}{y_{1+2}}=\frac{x_1x_2+y_1y_2D}{x_1y_2+y_1x_2}=\frac{6\bullet 8+5\bullet 5\bullet 2}{6\bullet 5+5\bullet 8}=\frac{98}{70}=\frac{7}{5}$$

前述の近似分数を得てしまいました。

・$\sqrt{2} \quad 1.3=\dfrac{13}{10}=\dfrac{x_1}{y_1} \quad \sqrt{2} \quad 1.4=\dfrac{7}{5}=\dfrac{x_2}{y_2}$ とおくとどうなるでしょうか。

$$\frac{x_3}{y_3}=\frac{x_{1+2}}{y_{1+2}}=\frac{x_1x_2+y_1y_2D}{x_1y_2+y_1x_2}=\frac{13\bullet 7+10\bullet 5\bullet 2}{13\bullet 5+10\bullet 7}=\frac{191}{135}=1.414\bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{x_6}{y_6}=\frac{x_3{}^2+y_3{}^2D}{2x_3y_3}=\frac{191^2+135^2\bullet 2}{2\bullet 191\bullet 135}=\frac{72931}{51570}=1.414213\bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{x_{12}}{y_{12}}=\frac{x_6{}^2+y_6{}^2D}{2x_6y_6}=\frac{72931^2+51570^2\bullet 2}{2\bullet 72931\bullet 51570}=\frac{10637860561}{7522103340}$$

$$=1.414213562373\bullet\bullet\bullet$$

近似している桁数が、$1{,}1\to 3\to 6\to 12\to\bullet\bullet\bullet$

・$\sqrt{2} \quad 1.5=\dfrac{3}{2}=\dfrac{x_1}{y_1} \quad \sqrt{2} \quad 1.6=\dfrac{8}{5}=\dfrac{x_2}{y_2}$

とおいて、様子を見てみましょう。

$$\frac{x_3}{y_3}=\frac{3\bullet 8+2\bullet 5\bullet 2}{3\bullet 5+2\bullet 8}=\frac{44}{31}=1.\bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{x_6}{y_6}=\frac{x_3{}^2+y_3{}^2D}{2x_3y_3}=\frac{44^2+31^2\bullet 2}{2\bullet 44\bullet 31}=\frac{3858}{2728}=1.4142\bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{x_{12}}{y_{12}}=\frac{x_6{}^2+y_6{}^2D}{2x_6y_6}=\frac{3858^2+2728^2\bullet 2}{2\bullet 3858\bullet 2728}=\frac{29768132}{21049248}=1.414213562\bullet\bullet\bullet$$

３．$\sqrt{3}$ を近似する分数群

$\sqrt{3} \quad 1=\dfrac{1}{1}=\dfrac{x_1}{y_1}$ としてみましょう。

$$\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1{}^2+y_1{}^2D}{2x_1y_1}=\frac{1^2+1^2\bullet 3}{2\bullet 1\bullet 1}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2$$

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{x_2{}^2+y_2{}^2D}{2x_2y_2}=\frac{2^2+1^2\bullet 3}{2\bullet 2\bullet 1}=\frac{7}{4}=1.75$$

$$\frac{x_8}{y_8}=\frac{{x_4}^2+{y_4}^2D}{2x_4y_4}=\frac{7^2+4^2\bullet 3}{2\bullet 7\bullet 4}=\frac{97}{56}=1.732\bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{x_{16}}{y_{16}}=\frac{{x_8}^2+{y_8}^2D}{2x_8y_8}=\frac{97^2+56^2\bullet 3}{2\bullet 97\bullet 56}=\frac{18817}{10864}=1.7320508\bullet\bullet\bullet$$

$\sqrt{3}$　$1.7=\frac{17}{10}=\frac{x_1}{y_1}$ とすると、どんな展開になるでしょうか。

$$\frac{x_2}{y_2}=\frac{{x_1}^2+{y_1}^2D}{2x_1y_1}=\frac{17^2+10^2\bullet 3}{2\bullet 17\bullet 10}=\frac{589}{340}=1.732\bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{{x_2}^2+{y_2}^2D}{2x_2y_2}=\frac{589^2+340^2\bullet 3}{2\bullet 589\bullet 340}=\frac{693721}{400520}=1.7320508\bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{x_8}{y_8}=\frac{{x_4}^2+{y_4}^2D}{2x_4y_4}=\frac{693721^2+400520^2\bullet 3}{2\bullet 693721\bullet 400520}=\frac{962497637041}{555698269840}$$

$$=1.732050807568877\bullet\bullet\bullet$$

$\sqrt{3}$　$1.732=\frac{1732}{1000}=\frac{433}{250}=\frac{x_1}{y_1}$ とすると、どんな展開になるでしょうか。

$$\frac{x_2}{y_2}=\frac{{x_1}^2+{y_1}^2D}{2x_1y_1}=\frac{433^2+250^2\bullet 3}{2\bullet 433\bullet 250}=\frac{374989}{216500}=1.73205080\bullet\bullet\bullet$$

次は、電卓の表示範囲を越えていきますが、

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{{x_2}^2+{y_2}^2D}{2x_2y_2}=\frac{374989^2+216500^2\bullet 3}{2\bullet 374989\bullet 216500}=\frac{281233500121}{162370237000}$$

$$=1.732050807568877293\bullet\bullet\bullet$$

まで近似します。

$\sqrt{3}$　$1.7320508=\frac{17320508}{10000000}=\frac{x_1}{y_1}$ とすると、どんな展開になるでしょうか。可約分数ですが、このまま計算します。電卓の表示性能範囲を越えていきますが、

$$\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1{}^2+y_1{}^2D}{2x_1y_1}=\frac{17320508^2+10000000^2\cdot 3}{2\cdot 17320508\cdot 10000000}=\frac{599999997378064}{346410160000000}$$

$$=1.732050807568877\cdots$$

まで一致します。小数７桁の近似分数から小数 15 桁の近似分数を得たことになります。

４．$\sqrt{10}$ を近似する分数群について

$\sqrt{10}=3.16227766\cdots\cdot$ 　より、$\sqrt{10}$ 　 $3=\dfrac{3}{1}=\dfrac{x_1}{y_1}$ として、

$$\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1{}^2+y_1{}^2D}{2x_1y_1}=\frac{3^2+1^2\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 1}=\frac{19}{6}=3.1666\cdots$$

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{x_2{}^2+y_2{}^2D}{2x_2y_2}=\frac{19^2+6^2\cdot 10}{2\cdot 19\cdot 6}=\frac{721}{228}=3.1622\cdots$$

$$\frac{x_8}{y_8}=\frac{x_4{}^2+y_4{}^2D}{2x_4y_4}=\frac{721^2+228^2\cdot 10}{2\cdot 721\cdot 228}=\frac{1039681}{328776}=3.16227766016\cdots$$

$\sqrt{10}$ 　 $3.16227766=\dfrac{316227766}{100000000}=\dfrac{x_1}{y_1}$ として、

$$\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1{}^2+y_1{}^2D}{2x_1y_1}=\frac{316227766^2+100000000^2\cdot 10}{2\cdot 316227766\cdot 100000000}$$

遊びの範囲を越えています。

$$=\frac{199999999989350756}{63245553200000000}=3.16227766016837933\cdots$$

平方根を近似する初期値は、どんな自然数値でも、どんな分数値を思い浮かべてもよいです。

５．０より大きな平方数以外の有理数の平方根

（１）$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ を近似する分数群について

有理化して $\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ なので、$\sqrt{6}$ を近似する分数群から入手するのが、今までの

常識でした。ここでは、直接考えていきます。$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{1}{1}$ としましょう。

$$\frac{x_2}{y_2}=\frac{{x_1}^2+{y_1}^2D}{2x_1y_1}=\frac{1^2+1^2\bullet\frac{3}{2}}{2\bullet1\bullet1}=\frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{5}{4}$$

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{{x_2}^2+{y_2}^2D}{2x_2y_2}=\frac{5^2+4^2\bullet\frac{3}{2}}{2\bullet5\bullet4}=\frac{25+16\bullet\frac{3}{2}}{40}=\frac{49}{40}$$

$$\frac{x_8}{y_8}=\frac{{x_4}^2+{y_4}^2D}{2x_4y_4}=\frac{49^2+40^2\bullet\frac{3}{2}}{2\bullet49\bullet40}=\frac{2401+1600\bullet\frac{3}{2}}{3920}=\frac{4801}{3920}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=1.224744871391589049\bullet\bullet\bullet$$

関数電卓では、

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=1.224744871 \qquad \frac{4801}{3920}=1.224744898$$

さらに計算すると、

$$\frac{x_{16}}{y_{16}}=\frac{{x_8}^2+{y_8}^2D}{2x_8y_8}=\frac{4801^2+3920^2\bullet\frac{3}{2}}{2\bullet4801\bullet3920}=\frac{23049601+15366400\bullet\frac{3}{2}}{37639840}=\frac{46099201}{37639840}$$

$$\frac{46099201}{37639840}=1.224744871391589337\bullet\bullet\bullet$$

関数電卓の表示機能を越えて行きます。

（２）$\sqrt{\frac{1}{2}}$ を近似する分数群について

ここでも、直接計算していきましょう。$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2},\frac{7}{10}$ この２つから作ってみます。

$$\frac{x_3}{y_3}=\frac{1\bullet7+2\bullet10\bullet\frac{1}{2}}{1\bullet10+2\bullet7}=\frac{17}{24}$$

$$\frac{x_6}{y_6}=\frac{{x_3}^2+{y_3}^2D}{2x_3y_3}=\frac{17^2+24^2\bullet\frac{1}{2}}{2\bullet17\bullet24}=\frac{289+576\bullet\frac{1}{2}}{816}=\frac{577}{816}$$

$$\frac{x_{12}}{y_{12}} = \frac{x_6{}^2 + y_6{}^2 D}{2x_6 y_6} = \frac{577^2 + 816^2 \bullet \frac{1}{2}}{2 \bullet 577 \bullet 816} = \frac{332929 + 332928}{941664} = \frac{665857}{941664}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707106781186547524 \bullet \bullet \bullet$$

$$\frac{665857}{941664} = 0.7071067811873449553 \bullet \bullet \bullet$$

関数電卓では、

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707067812$$

$$\frac{665857}{941664} = 0.7071067812$$

いかがでしたか。０より大きな平方数以外の有理数の平方根の近似分数や近似小数展開を作るひとつの方法として採用していただけると幸甚です。参考文献は、ありません。