平方根の正則連分数に関する考察（その９）

２００８年6月２４日
北海道岩見沢農業高校
加藤秀隆

０．はじめに

「最上流　算法平方零約術　会田等左衛門安明編」に記述されていることに関する続編です。前段に「試真数」として正則連分数を得る計算と正則連分数を記述しています。このことについては、レポート（その８）で紹介済みです。中段に「逐求弱一強一之術」として記述されていることを今回紹介します。

１．逐求弱一強一之術について

久留島義太氏または弟子、孫弟子により正則連分数成分の１つの循環節内での正則連分数により、弱数１に属する正則連分数、強数１に属する正則連分数を見つける方法を発見しています。ペル方程式右辺定数が１（強数１）、-1（弱数１）を作る旅に出かけ成功していました。

・　近似分数を作る準備

$\varepsilon_n = \dfrac{x_n}{y_n} - \sqrt{D} \quad \varepsilon_m = \dfrac{x_m}{y_m} - \sqrt{D}$ とおくと、

$$y_m\varepsilon_m \bullet y_n\varepsilon_n = (x_n - y_n\sqrt{D})(x_m - y_n\sqrt{D}) = x_m x_n + y_m y_n D - (x_m y_n + y_m x_n)\sqrt{D}$$

$$\sqrt{D} = \frac{x_m x_n + y_m y_n D}{x_m y_n + y_m x_n} - \frac{y_m y_n}{x_m y_n + y_m x_n} \bullet \ \varepsilon_m \varepsilon_n$$

から、

$\dfrac{x_{m+n}}{y_{m+n}} = \dfrac{x_m x_n + y_m y_n D}{x_m y_n + y_m x_n}$　が次の近似分数を作る公式です。この分数について、

$$x_{m+n}{}^2 - y_{m+n}{}^2 D = (x_m x_n + y_m y_n D)^2 - (x_m y_n + y_m x_n)^2 D$$

$$= x_m{}^2 x_n{}^2 + 2x_m x_n y_m y_n D + y_m{}^2 y_n{}^2 D^2 - (x_m{}^2 y_n{}^2 + 2x_m x_n y_m y_n + y_m{}^2 x_n{}^2)D$$

$$= x_m{}^2(x_n{}^2 - y_n{}^2 D) + y_m{}^2(y_n{}^2 D^2 - x_n{}^2 D)$$

$$= (x_m{}^2 - y_m{}^2 D)(x_n{}^2 - y_n{}^2 D)$$

$x_m{}^2 - y_m{}^2 D = a_m \quad x_n{}^2 - y_n{}^2 D = a_n$ とおくと、

$$x_{m+n}{}^2 - y_{m+n}{}^2 D = (x_m{}^2 - y_m{}^2 D)(x_n{}^2 - y_n{}^2 D) = a_m a_n$$

まず、$\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{17}$ について記述していますが、正則連分数成分の循環節が１のものです。$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \dfrac{x_n x_1 + y_n y_1 D}{x_n y_1 + y_n x_1}$ とおき、$\sqrt{5} \quad 2 = \dfrac{2}{1} = \dfrac{x_1}{y_1}$ により、

$$x_1{}^2 - y_1{}^2 D = 2^2 - 1^2 \bullet 5 = -1$$

$\dfrac{2}{1}$ は、弱数１に属する正則連分数です。弱数１を (-1) と書くことにします。

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{2 \bullet 2 + 1 \bullet 1 \bullet 5}{2 \bullet 1 + 1 \bullet 2} = \frac{9}{4}$$

は、$(-1) \bullet (-1) = (1)$ になり強数１ (1) に属します。

$$(1) \bullet (-1) = (-1) \quad (-1) \bullet (-1) = (1)$$

弱１、強１を繰り返しながら、$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \dfrac{x_n x_1 + y_n y_1 D}{x_n y_1 + y_n x_1}$ により次々に正則連分数を作っていくことができます。

$$\sqrt{5} = \frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{682}{305}, \frac{2889}{1292}$$

までを記述していますが、既に「試真数」に 10 個の正則連分数

$$\sqrt{5} = \frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{682}{305}, \frac{2889}{1292}, \frac{12238}{5473}, \frac{51841}{23184}, \frac{219602}{98209}, \frac{930249}{416020}$$

が記述されています。

ここからが本題です。$\sqrt{560} = \dfrac{23}{1}, \dfrac{24}{1}, \dfrac{47}{2}$ は、31 弱、16 強、31 弱です。このことから、

$$\sqrt{560} = \frac{71}{3} \quad \text{（強１）}$$

を得ることができます。同じ弱数 (-31) の $\sqrt{560} = \dfrac{23}{1}, \dfrac{47}{2}$ から、

$$\sqrt{560} = \frac{23 \bullet 47 + 1 \bullet 2 \bullet 560}{23 \bullet 2 + 1 \bullet 47} = \frac{2201}{93}$$

を作ります。可約分数で、約分すると強１に属します。ペル方程式の様子を確認します。

$$2201^2 - 93^2 \cdot 560 = (-31) \cdot (-31) = 31^2$$

$$\left(\frac{2201}{31}\right)^2 - \left(\frac{93}{31}\right)^2 \cdot 560 = \frac{31^2}{31^2}$$

$$71^2 - 3^2 \cdot 560 = 1$$

強数１に属する $\sqrt{560} = \dfrac{71}{3}$ **を作り上げることができました。江戸時代中期に既に発見されていたことになります。すばらしい塾生がいたものです。ただし、久留島義太氏本人なのかも知れません。**

続いて、$\sqrt{73}$ **についての記述があります。**

$\sqrt{73} = \dfrac{8}{1}, \dfrac{9}{1}, \dfrac{17}{2}, \dfrac{94}{11}$ **は、**9 **弱、**8 **強、３弱、３強**です。

$\sqrt{73} = \dfrac{1068}{125}$　（**弱１**）

を得ることができます。$\sqrt{73} = \dfrac{17}{2}, \dfrac{94}{11}$ **として、**

$$\sqrt{73} = \frac{17 \cdot 94 + 2 \cdot 11 \cdot 73}{17 \cdot 11 + 2 \cdot 94} = \frac{3204}{375}$$

３弱、３強の組合せから、

$$3204^2 - 375^2 \cdot 73 = (-3) \cdot (3) = (-3^2)$$

$$\left(\frac{3204}{3}\right)^2 - \left(\frac{375}{3}\right)^2 \cdot 73 = -\frac{3^2}{3^2}$$

$$1068^2 - 125^2 \cdot 73 = -1$$

弱１に属する $\sqrt{73} = \dfrac{1068}{125}$ **を作ることができました。すばらしいアイデアです。**

平方根の正則連分数成分の循環節の長さを代表する平方根に、「逐求弱一強一之術」を適用してみます。

・長さ２の代表を $\sqrt{3} = \dfrac{1}{1}, \dfrac{2}{1}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{4}, \cdots$　**とします。**

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \frac{4}{2}$$

$$x_1 = 1, y_1 = 1 \qquad x_1{}^2 - y_1{}^2 \cdot 3 = 1^2 - 1^2 \cdot 3 = 1 - 3 = -2$$

なので$\dfrac{4}{2}$ は、$(-2)\bullet(-2)=4$ に属しますが、

$$4^2-2^2\bullet3=2^2$$

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2\bullet3=\left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$2^2-1^2\bullet3=1$$

$\dfrac{2}{1}$ は、$\sqrt{3}$ における強１に属する正則連分数になります。

・ 長さ３の代表は、$\sqrt{41}=\dfrac{6}{1},\dfrac{13}{2},\dfrac{32}{5},\dfrac{397}{62},\dfrac{826}{129},\dfrac{2049}{320},\bullet\bullet\bullet$であり、順に弱５、強５、弱１、5 強、弱５、強１です。３つの組合せを考えます。弱１に属する正則連分数を得ると目標は達成されますが、強１の様子も一緒に見ましょう。

$$\sqrt{41}=\frac{6}{1},\frac{13}{2}\qquad\sqrt{41}=\frac{13}{2},\frac{397}{62}\qquad\sqrt{41}=\frac{6}{1},\frac{826}{129}$$

・ $\sqrt{41}=\dfrac{6}{1},\dfrac{13}{2}$ として次の近似分数を作ると、

$$\sqrt{41}=\frac{6\bullet13+1\bullet2\bullet41}{6\bullet2+1\bullet13}=\frac{160}{25}$$

$$160^2-25^2\bullet41=(-5)\bullet(5)=(-5^2)$$

$$\left(\frac{160}{5}\right)^2-\left(\frac{25}{5}\right)^2\bullet41=-\frac{5^2}{5^2}$$

$$32^2-5^2\bullet41=-1$$

$\dfrac{32}{5}$ は、$\sqrt{41}$ における弱１に属する正則連分数になります。

・ $\sqrt{41}=\dfrac{13}{2},\dfrac{397}{62}$ として次の近似分数を作ると、

$$\sqrt{41}=\frac{13\bullet397+2\bullet62\bullet41}{13\bullet62+2\bullet397}=\frac{10245}{1600}$$

$$10245^2-1600^2\bullet41=(5)\bullet(5)=(-5^2)$$

$$\left(\frac{10245}{5}\right)^2-\left(\frac{1600}{5}\right)^2\bullet41=\frac{5^2}{5^2}$$

$$2049^2-320^2 \cdot 41=1$$

$\dfrac{2049}{320}$ **は、$\sqrt{41}$ における強１に属する正則連分数になります。**

・ $\sqrt{41}=\dfrac{6}{1},\dfrac{826}{129}$ **から、**

$$\sqrt{41}=\frac{6 \cdot 826+1 \cdot 129 \cdot 41}{6 \cdot 129+1 \cdot 826}=\frac{10245}{1600}$$

$$10245^2-1600^2 \cdot 41=(-5) \cdot (-5)=5^2$$

$$\left(\frac{10245}{5}\right)^2-\left(\frac{1600}{5}\right)^2 \cdot 41=1$$

$$2049^2-320^2 \cdot 41=1$$

$\dfrac{2049}{320}$ **は、$\sqrt{41}$ における強１に属する正則連分数です。いかがでしょうか。久留島義太氏の流れを汲む会田氏の「最上流　平方零約術」の一到達点です。**

平方数以外の自然数の平方根を小数展開するとき、弱１、強１に属する正則連分数の割り算展開は解平方のスピードを超えます。このことが、正則連分数の歴史を作ってきました。

平方根の正則連分数成分の循環節の長さの代表と弱数、強数を記述しますので、追跡計算してみてください。

長さ１$\rightarrow \sqrt{2} \rightarrow (-1),(1),\cdots$

長さ２$\rightarrow \sqrt{3} \rightarrow (-2),(1),\cdots$

長さ３$\rightarrow \sqrt{41} \rightarrow (-5),(5),(-1),(5),(-5),(1),\cdots$

長さ４$\rightarrow \sqrt{7} \rightarrow \dfrac{2}{1},\dfrac{3}{1},\dfrac{5}{2},\dfrac{8}{3},\cdots$

$(-3)(2)(-3)(1)$

長さ５$\rightarrow \sqrt{13} \rightarrow \dfrac{3}{1},\dfrac{4}{1},\dfrac{7}{2},\dfrac{11}{3},\dfrac{18}{5},\cdots$

$(-4)(3)(-3)(4)(-1)$

長さ6→ $\sqrt{19} \to \frac{4}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{48}{11}, \frac{61}{14}, \frac{170}{39}, \cdots$

$(-3)(5)(-2)(5)(-3)(1)$

2．フェルマー問題

フェルマー氏が、ヨーロッパ数学学会に挑戦状を突きつけた問題です。

「$x^2 - 61y^2 = 1$ を満たす最小の自然数の組を求めよ。」

会田氏が知っていたとすると、とびついてますね。$\sqrt{61}$ の正則連分数が関係することを知っているからです。彼の得意とするところで、2回の計算で解を得ます。$\sqrt{61}$ の正則連分数成分の循環節の長さは、11 です。長さが奇数なので、弱1の正則連分数があるはずです。

$$\sqrt{61} \to \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{39}{5}, \frac{125}{16}, \frac{164}{21}, \frac{453}{58}, \frac{1070}{137}, \frac{1523}{195}, \frac{5639}{722}, \frac{24079}{3083}, \frac{29718}{3805}, \cdots$$

$(-12)(3)(-4)(9)(-5)\ (5)\ (-9)\ (4)(-3)\ (12)\ (-1)$

まず、5 つ目と 6 つ目の正則連分数により近似分数を作ります。2つ目と9つ目、1つ目と 10 個目の正則連分数によっても同じ近似分数を作ることができます。

$$\frac{x_{11}}{y_{11}} = \frac{164 \cdot 453 + 21 \cdot 58 \cdot 61}{164 \cdot 58 + 21 \cdot 453} = \frac{148590}{19025}$$

$(-5)(5) = (-25)$

$148590^2 - 19025^2 \cdot 61 = -25 = -5^2$

$$\left(\frac{148590}{5}\right)^2 - \left(\frac{19025}{5}\right)^2 \cdot 61 = -1$$

$29718^2 - 3805^2 \cdot 61 = -1$

これが、正式な $\frac{x_{11}}{y_{11}} = \frac{29718}{3805}$ です。そして、フェルマー問題の解を得ます。

$$\frac{x_{22}}{y_{22}} = \frac{29718 \cdot 29718 + 3805 \cdot 3805 \cdot 61}{29718 \cdot 3805 + 3805 \cdot 29718} = \frac{1766319049}{226153980}$$

$(-1)(-1) = (1)$

$1766319049^2 - 226153980^2 \cdot 61 = 1$

$x^2 - 61y^2 = 1$ を満たす最小の自然数の組は、

$(x, y) = (1766319049, 226153980)$

です。歴史的には、やはり正則連分数の力を借りて解決しています。

参考文献

会田等左衛門安明：「最上流　算法平方零約術」（山形大学附属図書館所蔵）