平方根の正則連分数に関する考察（その８）

２００８年6月１０日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

０．はじめに

正則連分数を知らない人でも、$\sqrt{2}$ を近似する分数群を得ることができます。正則連分数は、欧州ではフェルマーに始まります。日本でも独自に構築されていることが分かりました。江戸時代中期(１７２６年)に、久留島義太（くるしまよしひろ）氏が「平方零約術」として編み出していました。欧州と全く同じ計算方法です。すでにそれぞれの地で解平方（法）が誕生しており、平方根を小数展開しています。すでにご存知の方が大勢いらっしゃると思いますが、久留島数学を紹介します。

１．$\sqrt{2}$ を近似する分数群の誕生について（私見）

$\sqrt{2}=1+\varepsilon \qquad 0<\varepsilon<1 \quad \varepsilon=\sqrt{2}-1=0.41421356\cdots$

$\varepsilon=\sqrt{2}-1$ とおいて、累乗展開してみましょう。

$$\varepsilon^2=(\sqrt{2}-1)^2=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}=\frac{3}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\varepsilon^3=(\sqrt{2}-1)^3=2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1=-7+5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}+\frac{\varepsilon^3}{5}$$

$$\varepsilon^4=(\sqrt{2}-1)^4=4-8\sqrt{2}+12-4\sqrt{2}+1=17-12\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}=\frac{17}{12}-\frac{\varepsilon^4}{12}$$

ε を数値計算の誤差と考えると $\sqrt{2}$ の近似が格段に良くなっていく様子が見えます。しかも、下限方向と上限方向からの近似が交互に現れています。以上の展開計算による近似分数群の入手は、正則連分数成分の循環節の長さが１のものに対して成立します。

２．久留島義太氏の正則連分数計算

久留島義太氏は、有理化において

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

記号処理のない時代ですが、私たち同様の計算をしています。

一般に行われている正則連分数計算を見やすいようにすると、彼が行っていたと思われる方法が見えてきます。

$\sqrt{67}$ の正則連分数の入手方法を記述します。

$\sqrt{67}=8+\varepsilon \quad 0<\varepsilon<1 \quad \varepsilon=\sqrt{67}-8$ とおきましょう。

$\sqrt{67} \quad \dfrac{x_n}{y_n}$ とおくとき、$x_0=1, y_0=0$ を彼は、独自に得ています。

$x_1=8, y_1=1$

$$\sqrt{67}=8+\varepsilon=8+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{67}-8}=\frac{\sqrt{67}+8}{67-64}=\frac{8+\varepsilon+8}{3}=\frac{16+\varepsilon}{3}=5+\frac{\varepsilon+1}{3}=5+\cfrac{1}{\cfrac{3}{\varepsilon+1}}$$

實$=16$　法$=3$　段数$=5$　不尽$=1$

$x_2=5x_1+x_0=5•8+1=41$

$y_2=5y_1+y_0=5•1+0=5$

$$\frac{3}{\varepsilon+1}=\frac{3}{\sqrt{67}-8+1}=\frac{3}{\sqrt{67}-7}=\frac{3(\sqrt{67}+7)}{67-49}=\frac{3(8+\varepsilon+7)}{18}=\frac{15+\varepsilon}{6}$$

$$=2+\frac{\varepsilon+3}{6}=2+\cfrac{1}{\cfrac{6}{\varepsilon+3}}$$

實$=15$　法$=6$　段数$=2$　不尽$=3$

$x_3=2x_2+x_1=2•41+8=90$

$y_3=2y_2+y_1=2•5+1=11$

$$\frac{6}{\varepsilon+3}=\frac{6}{\sqrt{67}-8+3}=\frac{6}{\sqrt{67}-5}=\frac{6(\sqrt{67}+5)}{67-25}=\frac{6(8+\varepsilon+5)}{42}=\frac{13+\varepsilon}{7}$$

$$=1+\frac{\varepsilon+6}{7}=1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{\varepsilon+6}}$$

實$=13$　法$=7$　段数$=1$　不尽$=6$

$x_4=1x_3+x_2=90+41=131$

$y_4=1y_3+y_2=11+5=16$

$$\frac{7}{\varepsilon+6}=\frac{7}{\sqrt{67}-8+6}=\frac{7}{\sqrt{67}-2}=\frac{7(\sqrt{67}+2)}{67-4}=\frac{7(8+\varepsilon+2)}{63}=\frac{10+\varepsilon}{9}$$

$$=1+\frac{\varepsilon+1}{9}=1+\cfrac{1}{\cfrac{9}{\varepsilon+1}}$$

實$=10$　法$=9$　段数$=1$　不尽$=1$

$x_5=1x_4+x_3=131+90=221$

$$y_5 = 1y_4 + y_3 = 16 + 11 = 27$$

$$\frac{9}{\varepsilon+1} = \frac{9}{\sqrt{67}-8+1} = \frac{9}{\sqrt{67}-7} = \frac{9(\sqrt{67}+7)}{67-49} = \frac{9(8+\varepsilon+7)}{18} = \frac{15+\varepsilon}{2}$$

$$= 7 + \frac{\varepsilon+1}{2} = 7 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\varepsilon+1}} \qquad \text{實} = 15 \quad \text{法} = 2 \quad \text{段数} = 7 \quad \text{不尽} = 1$$

$$x_6 = 7x_5 + x_4 = 7 \bullet 221 + 131 = 1678$$

$$y_6 = 7y_5 + y_4 = 7 \bullet 27 + 16 = 205$$

$$\frac{2}{\varepsilon+1} = \frac{2}{\sqrt{67}-8+1} = \frac{2}{\sqrt{67}-7} = \frac{2(\sqrt{67}+7)}{67-49} = \frac{8+\varepsilon+7}{9} = \frac{15+\varepsilon}{9}$$

$$= 1 + \frac{\varepsilon+6}{9} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{9}{\varepsilon+6}} \qquad \text{實} = 15 \quad \text{法} = 9 \quad \text{段数} = 1 \quad \text{不尽} = 6$$

$$x_7 = 1x_6 + x_5 = 1678 + 221 = 1899$$

$$y_7 = 1y_6 + y_5 = 205 + 27 = 232$$

$$\frac{9}{\varepsilon+6} = \frac{9}{\sqrt{67}-8+6} = \frac{9}{\sqrt{67}-2} = \frac{9(\sqrt{67}+2)}{67-4} = \frac{9(8+\varepsilon+2)}{63} = \frac{10+\varepsilon}{7}$$

$$= 1 + \frac{\varepsilon+3}{7} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{\varepsilon+3}} \qquad \text{實} = 10 \quad \text{法} = 7 \quad \text{段数} = 1 \quad \text{不尽} = 3$$

$$x_8 = 1x_7 + x_6 = 1899 + 1678 = 3577$$

$$y_8 = 1y_7 + y_6 = 232 + 205 = 437$$

$$\frac{7}{\varepsilon+3} = \frac{7}{\sqrt{67}-8+3} = \frac{7}{\sqrt{67}-5} = \frac{7(\sqrt{67}+5)}{67-25} = \frac{7(8+\varepsilon+5)}{42} = \frac{13+\varepsilon}{6}$$

$$= 2 + \frac{\varepsilon+1}{6} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{6}{\varepsilon+1}} \qquad \text{實} = 13 \quad \text{法} = 6 \quad \text{段数} = 2 \quad \text{不尽} = 1$$

$$x_9 = 2x_8 + x_7 = 2 \bullet 3577 + 1899 = 9053$$

$$y_9 = 2y_8 + y_7 = 2 \bullet 437 + 232 = 1106$$

$$\frac{6}{\varepsilon+1} = \frac{6}{\sqrt{67}-8+1} = \frac{6}{\sqrt{67}-7} = \frac{6(\sqrt{67}+7)}{67-49} = \frac{6(8+\varepsilon+7)}{18} = \frac{15+\varepsilon}{3}$$

$$= 5 + \frac{\varepsilon}{3} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\varepsilon}} \qquad \text{實} = 15 \quad \text{法} = 3 \quad \text{段数} = 5 \quad \text{不尽} = 0$$

$$x_{10} = 5x_9 + x_8 = 5 \bullet 9053 + 3577 = 48842$$

$$y_{10} = 5y_9 + y_8 = 5 \bullet 1106 + 437 = 5967$$

$$\frac{3}{\varepsilon}=\frac{3}{\sqrt{67}-8}=\frac{3(\sqrt{67}+8)}{67-64}=\sqrt{67}+8=8+\varepsilon+8=\frac{16+\varepsilon}{1}=16+\frac{\varepsilon+0}{1}$$

$$=16+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\varepsilon}}$$

實$=16$　法$=1$　段数$=16$　不尽$=0$

$$x_{11}=16x_{10}+x_9=16\cdot48842+9053=790525$$
$$y_{11}=16y_{10}+y_9=16\cdot5967+1106=96578$$

$$\frac{1}{\varepsilon}=\cdots$$

正則連分数成分が循環節を作り、

$$\sqrt{67}=[8;\dot{5},2,1,1,7,1,1,2,5,\dot{16}]$$

$$=\frac{8}{1},\frac{41}{5},\frac{90}{11},\frac{131}{16},\frac{221}{27},\frac{1678}{205},\frac{1899}{232},\frac{3577}{437},\frac{9053}{1106},\frac{48842}{5967},\frac{790525}{965787},\cdots$$

となっていきます。

３．平方根の正則連分数の強弱判定について

続いて久留島義太氏は、$\frac{x_n}{y_n}>\sqrt{D}$ であるとき強、$\frac{x_n}{y_n}<\sqrt{D}$ であるとき弱として記述います。解平方による数値と分数を実際に割った数値を比較しての記述と思われます。

$\varepsilon_n=\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{D}$ とおくと、$\varepsilon_n>0$ のとき強、$\varepsilon_n<0$ のとき弱判定です。D を、はじめは平方数以外の自然数を想定していますが、途中から正の平方数以外の数（小数や分数も可）としています。x_n,y_n は自然数です。さらに強弱の判定を、

$$y_n\varepsilon_n=x_n-y_n\sqrt{D}$$

と変形し、この正負の判定を $x_n+y_n\sqrt{D}>0$ との積

$$(x_n-y_n\sqrt{D})(x_n+y_n\sqrt{D})={x_n}^2-{y_n}^2D$$

に委ねています。これは、 ペル方程式に登場する計算式です。強数１、弱数１、強数３は、ここによる数値です。$\sqrt{67}$ では、法として順に３弱、６強、７弱、９強、２弱
９強、７弱、６強、３弱、１強　の記述があります。実際に計算してみます。

$${x_1}^2-{y_1}^2\cdot67=8^2-1^2\cdot67=64-67=-3$$

$$x_2{}^2 - y_2{}^2 \bullet 67 = 41^2 - 5^2 \bullet 67 = 1681 - 1675 = 6$$

$$x_3{}^2 - y_3{}^2 \bullet 67 = 90^2 - 11^2 \bullet 67 = 8100 - 8107 = -7$$

$$x_4{}^2 - y_4{}^2 \bullet 67 = 131^2 - 16^2 \bullet 67 = 17161 - 17152 = 9$$

$$x_5{}^2 - y_5{}^2 \bullet 67 = 221^2 - 27^2 \bullet 67 = 48841 - 48843 = -2$$

$$x_6{}^2 - y_6{}^2 \bullet 67 = 1678^2 - 205^2 \bullet 67 = 2815684 - 2815675 = 9$$

$$x_7{}^2 - y_7{}^2 \bullet 67 = 1899^2 - 232^2 \bullet 67 = 3606201 - 3606208 = -7$$

$$x_8{}^2 - y_8{}^2 \bullet 67 = 3577^2 - 437^2 \bullet 67 = 12794929 - 12794923 = 6$$

$$x_9{}^2 - y_9{}^2 \bullet 67 = 9053^2 - 1106^2 \bullet 67 = 81956809 - 81956812 = -3$$

$$x_{10}{}^2 - y_{10}{}^2 \bullet 67 = 48842^2 - 5967^2 \bullet 67 = 2385540964 - 2385540963 = 1$$

$$y_m\varepsilon_m \bullet y_n\varepsilon_n = (x_n - y_n\sqrt{D})(x_m - y_n\sqrt{D}) = x_m x_n + y_m y_n D - (x_m y_n + y_m x_n)\sqrt{D}$$

$$\sqrt{D} = \frac{x_m x_n + y_m y_n D}{x_m y_n + y_m x_n} - \frac{y_m y_n}{x_m y_n + y_m x_n} \bullet \varepsilon_m \varepsilon_n$$

$\dfrac{x_{m+n}}{y_{m+n}} = \dfrac{x_m x_n + y_m y_n D}{x_m y_n + y_m x_n}$ **とおくことにします。**

これのペル方程式の様子を見てみます。誤差評価は、$\varepsilon_{m+n} = \dfrac{y_m y_n}{x_m y_n + y_m x_n} \bullet \varepsilon_m \varepsilon_n$ **でします。**

$$x_{m+n}{}^2 - y_{m+n}{}^2 D = (x_m x_n + y_m y_n D)^2 - (x_m y_n + y_m x_n)^2 D$$

$$= x_m{}^2 x_n{}^2 + 2x_m x_n y_m y_n D + y_m{}^2 y_n{}^2 D^2 - (x_m{}^2 y_n{}^2 + 2x_m x_n y_m y_n + y_m{}^2 x_n{}^2)D$$

$$= x_m{}^2 (x_n{}^2 - y_n{}^2 D) + y_m{}^2 (y_n{}^2 D^2 - x_n{}^2 D)$$

$$= (x_m{}^2 - y_m{}^2 D)(x_n{}^2 - y_n{}^2 D)$$

$x_m{}^2 - y_m{}^2 D = a_m \quad x_n{}^2 - y_n{}^2 D = a_n$ とおくと、

$$x_{m+n}{}^2 - y_{m+n}{}^2 D = (x_m{}^2 - y_m{}^2 D)(x_n{}^2 - y_n{}^2 D) = a_m a_n$$

$$\begin{aligned}
&a_m = 1, a_n = 1 \to a_m a_n = 1 \\
&a_m = -1, a_n = -1 \to a_m a_n = 1 \\
&a_m = -1, a_n = 1 \to a_m a_n = -1 \\
&a_m = a, a_n = 1 \to a_m a_n = a \\
&a_m = -1, a_n = a \to a_m a_n = -a
\end{aligned}$$

久留島義太氏は正則連分数の強弱を追いかけている中で、弱数 1、強数 1 の分数群に成り立つ性質（特長、法則）を見つけています。

初期値として弱数 1 の正則連分数が得られると、弱数 1 と強数 1 の正則連分数の上を交互に走る正則連分数を得ることができ、弱数 1 の正則連分数は、正則連分数成分の循環節の長さが奇数のものにあります。

初期値として強数 1 の正則連分数が得られると強数 1 の正則連分数の上だけを走る正則連分数を得ることができます。正則連分数成分の循環節の長さが奇数・偶数のどちらにもあります。強数 1 を満たす正則連分数の追跡は、現代に通じるものがあります。

（1）$\sqrt{2}$ を近似する分数群

$\sqrt{2} = 1 + \varepsilon_1 = \dfrac{1}{1} + \varepsilon_1 = \dfrac{x_1}{y_1} + \varepsilon_1$ **とおくと、** $x_1{}^2 - y_1{}^2 D = 1^2 - 1^2 \bullet 2 = 1 - 2 = -1$

$\dfrac{1}{1}$ **は、弱数 1 に属します。** $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \dfrac{x_n x_1 + y_n y_1 D}{x_n y_1 + y_n x_1}$

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 x_1 + y_1 y_1 D}{x_1 y_1 + x_1 y_1} = \frac{1 \bullet 1 + 1 \bullet 1 \bullet 2}{1 \bullet 1 + 1 \bullet 1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$\dfrac{3}{2}$ **は、強数 1 に属します。**

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 \bullet D}{x_1 y_2 + y_1 x_2} = \frac{1 \bullet 3 + 1 \bullet 2 \bullet 2}{1 \bullet 2 + 1 \bullet 3} = \frac{3+4}{2+3} = \frac{7}{5}$$

正則連分数は、

$$\sqrt{2} = \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{507}{488}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \frac{8119}{5741}, \frac{19601}{13860},$$

$$\frac{47321}{33461}, \frac{114243}{80782}, \bullet\bullet\bullet$$

（2）$\sqrt{3}$ を近似する分数群

$\sqrt{3}=1+\varepsilon_1=\frac{1}{1}+\varepsilon_1=\frac{x_1}{y_1}+\varepsilon_1$ とおくと、$\frac{1}{1}$ は、弱数 2 の正則連分数です。

$$\sqrt{3}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{2}{1}$$

これは、強 1 の正則連分数です。正則連分数計算からの入手です。以上の 2 個の正則連分数により、3 個目以降を得ることができます。$\sqrt{3}$ の正則連分数成分の循環節の長さは、2なので以上の 2 個からすべてを得ることができます。

$$\frac{x_3}{y_3}=\frac{x_1x_2+y_1y_2D}{x_1y_2+y_1x_2}=\frac{1\cdot2+1\cdot1\cdot3}{1\cdot1+1\cdot2}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{x_1x_3+y_1y_3D}{x_1y_3+y_1x_3}=\frac{1\cdot5+1\cdot3\cdot3}{1\cdot3+1\cdot5}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{x_5}{y_5}=\frac{x_1x_4+y_1y_4D}{x_1y_4+y_1x_4}=\frac{1\cdot7+1\cdot4\cdot3}{1\cdot4+1\cdot7}=\frac{19}{11}$$

繰り返すと次が得られます。

$$\sqrt{3}=\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{19}{11},\frac{26}{15},\frac{71}{41},\frac{97}{56},\frac{265}{153},\frac{362}{209},\frac{989}{571},\frac{1351}{780},\frac{3691}{2131},\frac{5042}{2911},\frac{13775}{7953},\cdots$$

3 項間漸化式も見えます。

$\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\cdots$ において、同様のことを試みてください。

（3）強数1の正則連分数

平方根の正則連分数に関する考察（その6）の前段に相当します。

$$\sqrt{2}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{x_4}{y_4}=\frac{{x_2}^2+{y_2}^2D}{2x_2y_2}=\frac{3^2+2^2\cdot2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{17}{12}$$

$$\frac{x_6}{y_6}=\frac{x_2x_4+y_2y_4D}{x_2y_4+y_2x_4}=\frac{3\cdot17+2\cdot12\cdot2}{3\cdot12+2\cdot17}=\frac{99}{70}$$

$$\frac{x_8}{y_8}=\frac{{x_4}^2+{y_4}^2D}{2x_4y_4}=\frac{17^2+12^2\cdot2}{2\cdot17\cdot12}=\frac{577}{408}$$

$$\frac{x_{10}}{y_{10}}=\frac{x_2x_8+y_2y_8D}{x_2y_8+y_2x_8}=\frac{3\cdot577+2\cdot408\cdot2}{3\cdot408+2\cdot577}=\frac{3363}{2378}$$

項番号を等比数列的に飛ばすところまでは至っていませんが、久留島義太氏もこの計算方法を得ています。

4．久留島義太氏が追いかけようとした平方根を順に紹介します。

（1）弱数 1、強数 1 をもつ平方根

$\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{17}$

（2）強数 1 の平方根

$\sqrt{560}, \sqrt{21}$

（3）弱数 1 の平方根

$\sqrt{73}, \sqrt{17.8}$

（4）強数 1 により部分分数群を追いかけた平方根

$\sqrt{560}, \sqrt{21}$

（5）弱数 1、強数 1 をもつ部分分数群を追いかけた平方根

$\sqrt{73}$

（6）強数 1 の平方根の分析

$\sqrt{67}$

（7）弱数 1 の平方根の分析

$\sqrt{73}$

今後、これ以降の解析を進めます。

参考文献

久留島義太：「平方零約術」　山形大学附属図書館所蔵
repo.lib.yamagata-u.ac.jp/handl/123456789/3388

松本登志雄：和算家の考え方　その四　ー近似分数と零約術ー
（埼玉県立小川高等学校　教諭）
www2.spec.ed.jp/krk/sugaku/2004/kyokaken/main/pdf/
5_1 matsumoto_ogawa.jp

林　邦英：私的通信