平方根の正則連分数に関する考察（その７）

２００８年5月１４日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

０．はじめに

平方数以外の自然数の平方根を小数展開するとき、その数値を最良な形で近似する正則連分数が創られ、久しく研究されてきました。小数の平方根を近似する正則連分数のいくつかを紹介します。独自な正則連分数の循環節の長さ（周期）をもっています。稚拙な十進 BASIC によるプログラムですが、添付します。改良すると自然数の平方根の正則連分数も得ることができます。読者各位の検証や追跡をお願いします。

１．1 より大きな小数の平方根を近似する正則連分数について

自然数のものから得ることができることから、追求されてこなかったようです。計算ソフトの Mathematica により正則連分数成分の入手を図りましたが、20 個までいきませんでした。計算命令を解除されてしまいました。

まず、$\sqrt{1.1}$ を近似する正則連分数について記述します。

$$\sqrt{1.1} = \sqrt{\frac{110}{100}} = \frac{\sqrt{110}}{10}$$

$$\sqrt{110} = [10;2,20,2,20,2,20,\bullet\bullet\bullet] = [10;\dot{2},\dot{20}]$$

$$= \frac{10}{1},\frac{21}{2},\frac{430}{41},\frac{881}{84},\frac{18050}{1721},\frac{36981}{3526},\frac{757670}{72241},\frac{1552321}{148008},\bullet\bullet\bullet$$

このことから、

$$\sqrt{1.1} = 1,\frac{21}{20},\frac{43}{41},\frac{881}{840},\frac{1805}{1721},\frac{36981}{35260},\frac{75767}{72241},\frac{1552321}{1480080},\bullet\bullet\bullet$$

私のレポート（その１）をプログラムしたものから、$\sqrt{1.1}$ を近似する正則連分数は、

$$\sqrt{1.1} = [1;20,2,20,2,20,2,\bullet\bullet\bullet] = [1;\dot{20},\dot{2}]$$

$$= 1,\frac{21}{20},\frac{43}{41},\frac{881}{840},\frac{1805}{1721},\frac{36981}{35260},\frac{75767}{72241},\frac{1552321}{1480080},\bullet\bullet\bullet$$

一致していますが、連分数成分の循環に注目してください。配置されている数（数字）の順（循環）が違っています。この中にペル方程式の形式をみたすものがあります。

$$21^2 - 1.1\bullet 20^2 = 441 - 1.1\bullet 400441 - 440 = 1$$

$\sqrt{1.1} \quad \dfrac{x}{y}$ とおくと、ペル方程式をみたす正則連分数の分子数、分母数を次の展開式から得ることができます。

$$x + y\sqrt{1.1} = (21 + 20\sqrt{1.1})^n$$

また、これによる分子数、分母数を 2 本のチェビシェフ多項式から入手することもできます。

1 を越える小数の平方根を近似する正則連分数には、必ずペル方程式をみたすものが含まれます。前述のように 100 を越える自然数の平方根を近似するペル方程式から必然的に導くことができます。$\sqrt{1.2}, \sqrt{120}$ の正則連分数成分から記述します。

$$\sqrt{1.2} = [1;10,2,10,2,10,2,\bullet\bullet\bullet] = [1;\dot{10}.\dot{2}]$$

$$\sqrt{120} = [10;1,20,1,20,1,20,\bullet\bullet\bullet] = [10;\dot{1},\dot{20}]$$

自然数の平方根の正則連分数成分の循環に似ていますが、次第に異なる体系をもつことが見えてきます。

$$\sqrt{1.3} = [1;7,7,2,7,7,2,7,7,2,\bullet\bullet\bullet] = [1;\dot{7},7,\dot{2}]$$

$$\sqrt{130} = [11;2,2,22,2,2,22,2,2,22,\bullet\bullet\bullet] = [11;\dot{2},2,\dot{22}]$$

$$\sqrt{1.4} = [1;5,2,5,2,5,2,\bullet\bullet\bullet] = [1;\dot{5},\dot{2}] \qquad \sqrt{140} = [11;\dot{1},4,1,\dot{22}]$$

$$\sqrt{1.5} = [1;\dot{4},\dot{2}] \qquad \sqrt{150} = [12;\dot{4},\dot{24}]$$

$$\sqrt{1.6} = [1;\dot{3}1,3,\dot{2}] \qquad \sqrt{160} = [12;\dot{1},1,1,5,1,1,1,\dot{24}]$$

$$\sqrt{1.7} = [1;\dot{3},3,\dot{2}] \qquad \sqrt{170} = [13;\dot{26}]$$

$$\sqrt{1.8} = [1;\dot{2},1,12,1,2,\dot{2}] \qquad \sqrt{180} = [13;\dot{2},2,2,\dot{26}]$$

$$\sqrt{1.9} = [1;\dot{2},1,1,1,3,1,26,1,3,1,26,1,3,1,1,1,2,2]$$

$$\sqrt{190} = [13;\dot{1},3,1,1,1,2,2,2,1,1,1,3,1,\dot{26}]$$

循環節の最後の配置については、自然数のものを踏襲しますが微妙な違いがあることが見えてきたことと思います。

３．0 と 1 のあいだの小数の平方根近似する正則連分数成分について

小数の平方根を近似する正則連分数は、ペル方程式の右辺定数において正負の有限小数値をとります。

$$\sqrt{0.1}=[0;3,\dot{6}] \qquad \sqrt{0.2}=[0;2,\dot{4}]$$

$$\sqrt{0.3}=[0;1,\dot{1},4,1,\dot{2}] \qquad \sqrt{0.4}=[0;1,\dot{1},1,\dot{2}]$$

$$\sqrt{0.5}=[0;1,\dot{2}] \qquad \sqrt{0.6}=[0;1,\dot{3},\dot{2}]$$

$$\sqrt{0.7}=[0;1,\dot{5},8,5,\dot{2}] \qquad \sqrt{0.8}=[0;1,\dot{8},\dot{2}]$$

$$\sqrt{0.9}=[0;1,\dot{18},\dot{2}]$$

0 から 1 のあいだの小数の平方根を近似する正則連分数は、すべてペル方程式を満たさないようです。参考文献となるものを海外に求めましたが、見つかりませんでした。自然数の平方根の逆数と同値な関係がありますが、このことについても読者各位の考察に委ねます。

後述のプログラムをアレンジすると 0 より大きな小数の 3 乗根以上の累乗根の正則連分数成分や正則連分数を得ることできます。

1 と 10 の間の平方根の正則連分数成分や正則連分数、ペル方程式右辺定数を得るプログラムです。最初の 21 組得ることを目標にしたものです。

```
100 FOR d=1.01 TO 9.99 STEP 0.01
111     FOR i=1.1 TO 9.9 STEP 0.1
112         IF d=i^2 THEN GO TO 525
113     NEXT i
115     LET a=INT(SQR(d))
120     LET m1=a
130     LET m2=1
140     LET m3=1
150     LET m4=0
160     LET s=1
```

```
161     LET b=m1^2-d*m3^2
162     PRINT d;s;m1;m3;b
163     LET s=1
165     LET m=1
170     FOR k=1 TO 10
180         DO
190             LET mm1=m1*n+m2
200             LET mm2=m1
210             LET mm3=m3*n+m4
220             LET mm4=m3
230             LET b=mm1^2-d*mm3^2
240             IF b<0 THEN GO TO 260
250             LET n=n+1
251         LOOP
260         LET mm1=mm1-m1
270         LET mm3=mm3-m3
280         LET m1=mm1
290         LET m2=mm2
300         LET m3=mm3
310         LET m4=mm4
320         LET b=m1^2-d*m3^2
330         PRINT d;s+1;n-1;m1;m3;b
340         LET s=s+1
350         DO
360             LET mm1=m1*m+m2
370             LET mm2=m1
380             LET mm3=m3*m+m4
390             LET mm4=m3
400             LET b=mm1^2-d*mm3^2
410             IF b>0 THEN GO TO 430
411             LET m=m+1
420         LOOP
430         LET mm1=mm1-m1
440         LET mm3=mm3-m3
450         LET m1=mm1
460         LET m2=mm2
```

```
470         LET m3=mm3
480         LET m4=mm4
490         LET b=m1^2-d*m3^2
500         PRINT d;s+1;m-1;m1;m3;b
510         LET s=s+1
511         LET n=1
512         LET m=1
520     NEXT k
525 NEXT d
530 END
```

次は、前述のものを改良したペル方程式を満たす最小の自然数の組を探すプログラムです。

```
100 FOR d=1.01 TO 9.99 STEP 0.01
111     FOR i=1.1 TO 9.9 STEP 0.1
112         IF d=i^2 THEN GO TO 525
113     NEXT i
115     LET a=INT(SQR(d))
120     LET m1=a
130     LET m2=1
140     LET m3=1
150     LET m4=0
160     LET s=1
163     LET n=1
165     LET m=1
170     FOR k=1 TO 10000
180         DO
190             LET mm1=m1*n+m2
200             LET mm2=m1
210             LET mm3=m3*n+m4
220             LET mm4=m3
230             LET b=mm1^2-d*mm3^2
240             IF b<0 THEN GO TO 260
250             LET n=n+1
251         LOOP
260         LET mm1=mm1-m1
270         LET mm3=mm3-m3
```

```
280         LET m1=mm1
290         LET m2=mm2
300         LET m3=mm3
310         LET m4=mm4
320         LET b=m1^2-d*m3^2
321         IF b<>1 THEN GO TO 340
330         PRINT d;s+1;m1;m3;b
331         GO TO 525
340         LET s=s+1
350         DO
360            LET mm1=m1*m+m2
370            LET mm2=m1
380            LET mm3=m3*m+m4
390            LET mm4=m3
400            LET b=mm1^2-d*mm3^2
410            IF b>0 THEN GO TO 430
411            LET m=m+1
420         LOOP
430         LET mm1=mm1-m1
440         LET mm3=mm3-m3
450         LET m1=mm1
460         LET m2=mm2
470         LET m3=mm3
480         LET m4=mm4
490         LET b=m1^2-d*m3^2
491         IF b<>-1 THEN GO TO 510
500         PRINT d;s+1;m1;m3;b
510         LET s=s+1
511         LET n=1
512         LET m=1
520      NEXT k
525 NEXT d
530 END
```

林　邦英：私的通信（名古屋市在住の数学愛好家の方です。「高校数学の窓」にレポートをたくさん寄稿しています。）