平方根の正則連分数について

(Continued Fraction for all Square Root Numbers)

２００８年3月１０日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

０．はじめに

チェビシェフ(Schebysheff,Chebyshev)氏の２つの多項式を利用して、平方数以外のすべての自然数の平方根の正則連分数を入手する方法を紹介します。

１．チェビシェフ多項式

三角関数の倍角公式に由来します。

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta) = T_n(x)$$
$$\sin n\theta = \sin\theta \cdot U_{n-1}(\cos\theta)$$
$$U_{n-1}(\cos\theta) = U_{n-1}(x)$$

とおくとき、$T_n(x)$ を第１種チェビシェフ多項式、$U_n(x)$ を第２種チェビシェフ多項式と呼んでいます。チェビシェフ多項式の様子を２つずつ見ましょう。

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 - 3\cos\theta \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$\sin 2\theta = \sin\theta \cdot 2\cos\theta \qquad U_2(x) = 2x$$

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\ &= \sin\theta \cdot (3 - 4\sin^2\theta) \\ &= \sin\theta \cdot (4\cos^2\theta - 1) \qquad U_3(x) = 4x^2 - 1\end{aligned}$$

$T_1(x) = x$，$T_0(x) = 1$，$U_1(x) = 1$，$U_0(x) = 0$ です。

面白い関係式が３本成立します。いずれも、三角関数の倍角公式から導くことができます。

① $\left(\dfrac{1}{n}T_n(x\right)' = U_{n-1}(x)$

② $T_n(x), U_n(x)$ ともに、次の３項間漸化式を満たす。

$$a_{n+2} = 2xa_{n+1} - a_n$$

③ $T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x)$

その他のことも既に調べられており、それぞれの母関数も定式化されています。下記を参照してください。

Wikipedia,the free encyclopedia

http://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polinomials

2．チェビシェフ多項式の定式化

３項間の漸化式の特性方程式

$$t^2 - 2xt + 1 = 0$$

を解くと、

$$t = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$T_n = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}$$

$$U_{n-1} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2\sqrt{x^2-1}}$$

２つの多項式に次の関係式が成り立ちます。

$$T_n(x)^2 - (x^2-1)U_{n-1}(x)^2 = 1$$

この関係式は、純粋ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$ と同値です。

$x + \sqrt{x^2-1} = x + y\sqrt{D}$　とおくと、

$$x^2 - 1 = y^2 D$$
$$x^2 - y^2 D = 1$$

純粋ペル方程式です。これを満たす自然数の組 (x, y) は、平方数以外の自然数を D　としたときの平方根 $\sqrt{D}$　を、

$$\sqrt{D} \qquad \frac{x}{y}$$

として最良に近似する正則連分数であり、小数展開を与えるものです。

$$T_n(x)^2 - (x^2-1)U_{n-1}(x)^2 = 1$$

$$T_n(x)^2 - y^2 D \cdot U_{n-1}(x)^2 = 1$$

$$T_n(x)^2 - D(yU_{n-1}(x))^2 = 1$$

３．定式化した数式からのチェビシェフ多項式の構築

$$T_0(x)=\frac{1+1}{2}=1 \qquad U_0(x)=\frac{1-1}{2}=0$$

$$T_1(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}+x-\sqrt{x^2-1}}{2}=x$$

$$U_1(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-1}-(x-\sqrt{x^2-1})}{2\sqrt{x^2-1}}=1$$

$$T_2(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2+(x-\sqrt{x^2-1})^2}{2}=-1+2x^2$$

$$U_2(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{2\sqrt{x^2-1}}=2x$$

$$T_3(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^3+(x-\sqrt{x^2-1})^3}{2}=-3x+4x^3$$

$$U_3(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^3-(x-\sqrt{x^2-1})^3}{2\sqrt{x^2-1}}=-1+4x^2$$

いずれも前述した３項間漸化式からも作ることできます。$T_9(x),U_9(x)$ までを記述しておくと、

$$T_4(x)=1-8x^2+8x^4$$
$$U_4(x)=1-12x^2+16x^4$$

$$T_5(x)=5x-20x^3+16x^5$$

$$U_5(x)=6x-32x^3+32x^5$$

$$T_6(x)=-1+18x^2-48x^4+32x^6$$

$$U_6(x)=-1+24x^2-80x^4+64x^6$$

$$T_7(x)=-7x+56x^3-112x^5+64x^7$$

$$U_7(x)=-8x+80x^3-192x^5+128x^7$$

$$T_8(x)=1-32x^2+160x^4-256x^6+128x^8$$

$$U_8(x)=1-40x^2+240x^4-448x^6+256x^8$$

$$T_9(x)=9x-120x^3+432x^5-576x^7+256x^9$$

$$U_9(x)=10x-160x^3+672x^5-1024x^7+512x^9$$

4．平方根の正則連分数の部分分数列について

次の関係式により、すべての平方数以外の自然数の平方根の純粋ペル方程式の上を走る部分分数列を得ることができます。

$$T_n(x)^2-D(yU_{n-1}(x))^2=1$$

この y がすばらしい役割を演じます。第 1 段階として項番号を等差数列的に飛ばす計算、第 2 段階として等比数列的に飛ばす計算、第 3 段階として指数関数的に飛ばす計算、第４段階として任意に飛ばす計算方法を記述します。

$$x=3\to x^2-1=8=y^2D\to y=2,D=2$$
$$x=2\to x^2-1=3=y^2D\to y=1,D=3$$
$$x=9\to x^2-1=80=y^2D\to y=4,D=5$$
$$x=5\to x^2-1=24=y^2D\to y=2,D=6$$
$$x=8\to x^2-1=63=y^2D\to y=3,D=7$$
$$x=3\to x^2-1=8=y^2D\to y=1,D=8$$
$$x=19\to x^2-1=360=y^2D\to y=6,D=10$$
$$x=10\to x^2-1=99=y^2D\to y=3,D=11$$
$$x=7\to x^2-1=48=y^2D\to y=2,D=12$$
$$x=649\to x^2-1=421200=y^2D\to y=180,D=13$$

（1）平方根の正則連分数の項番号を等差数列的に飛ばす計算

第 1 段階として、$(x,y,D)=(3,2,2)$ から ２の平方根の正則連分数を追跡してみましょう。

$$T_2(3)=-1+2•3^2=17 \quad yU_1(3)=2(2•3)=12$$

$$T_3(3)=-3•3+4•3^3=99 \quad yU_2(3)=2(-1+4•3^2)=70$$

$$T_4(3)=1-8•3^2+8•3^4=577 \quad yU_2(3)=2(-4•3+8•3^3)=408$$

$(x,y,D)=(2,1,3)$ **として、３の平方根の正則連分数を追跡してみます。**

$$T_2(2)=-1+2•2^2=7 \quad yU_1(2)=1(2•2)=4$$

$$T_3(2)=-3•2+4•2^3=26 \quad yU_2(2)=1(-1+4•2^2)=15$$

$T_4(2) = 1 - 8 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^4 = 97 \quad yU_2(2) = 1(-4 \cdot 2 + 8 \cdot 2^3) = 56$

$(x, y, D) = (9,4,5)$ として、５の平方根の正則連分数を追跡してみます。

$T_2(9) = -1 + 2 \cdot 9^2 = 161 \quad yU_1(9) = 4(2 \cdot 9) = 72$

$T_3(9) = -3 \cdot 9 + 4 \cdot 9^3 = 2889 \quad yU_2(9) = 4(-1 + 4 \cdot 9^2) = 1292$

$T_4(9) = 1 - 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^4 = 51841 \quad yU_2(2) = 4(-4 \cdot 9 + 8 \cdot 9^3) = 23184$

(x, y, D) は、Mathworld で 102 までの平方根のリストが公開されています。

http://mathworld.wolfram.com/pell equation.htlm

（２）平方根の正則連分数の項番号を等比数列的に飛ばす計算

第２段階は、合成関数の考え１の③と①からです。

$(x, y, D) = (3,2,2)$ から ２の平方根の正則連分数を追跡してみます。

$T_2(3) = -1 + 2 \cdot 3^2 = 17 \quad yU_1(3) = 2(2 \cdot 3) = 12$

$T_2(17) = -1 + 2 \cdot 17^2 = 577 \quad yU_1(17) = 12(2 \cdot 17) = 408$

$T_2(577) = -1 + 2 \cdot 577^2 = 665857 \quad yU_1(577) = 408(2 \cdot 577) = 470832$

$(x, y, D) = (2,1,3)$ として、３の平方根の正則連分数を追跡します。

$T_2(2) = -1 + 2 \cdot 2^2 = 7 \quad yU_1(2) = 1(2 \cdot 2) = 4$

$T_2(7) = -1 + 2 \cdot 7^2 = 97 \quad yU_1(7) = 4(2 \cdot 7) = 56$

$T_2(97) = -1 + 2 \cdot 97^2 = 18817 \quad yU_1(97) = 56(2 \cdot 97) = 10864$

$(x, y, D) = (9,4,5)$ として、５の平方根の正則連分数を追跡します。

$T_2(9) = -1 + 2 \cdot 9^2 = 161$

$yU_1(9) = 4(2 \cdot 9) = 72$

$T_2(161) = -1 + 2 \cdot 161^2 = 51841$

$yU_1(161) = 72(2 \cdot 161) = 23184$

$T_2(51841) = -1 + 2 \cdot 51841^2 = 5374978561$

$yU_1(51841) = 23184(2 \cdot 51841) = 2403763488$

（３）平方根の正則連分数の項番号を指数関数的に飛ばす計算

$(x, y, D) = (3,2,2)$ から ２の平方根の正則連分数を追跡してみます。

$T_2(3) = -1 + 2 \cdot 3^2 = 17 \quad yU_1(3) = 2(2 \cdot 3) = 12$

$$T_4(17) = 1 - 8•17^2 + 8•17^4 = 665857$$

$$yU_3(17) = 12(-4•17 + 8•17^3) = 470832$$

$(x, y, D) = (2,1,3)$ として、３の平方根の正則連分数を追跡します。

$$T_2(2) = -1 + 2•2^2 = 7 \quad yU_1(2) = 1(2•2) = 4$$

$$T_4(7) = 1 - 8•7^2 + 8•7^4 = 18817$$

$$yU_3(17) = 4(-4•7 + 8•7^3) = 10864$$

$(x, y, D) = (9,4,5)$ として、５の平方根の正則連分数を追跡します。

$$T_2(9) = -1 + 2•9^2 = 161$$

$$yU_1(9) = 4(2•9) = 72$$

$$T_4(161) = 1 - 8•161^2 + 8•161^4 = 5374978561$$

$$yU_3(161) = 72(-4•161 + 8•161^3) = 2403763488$$

（４）平方根の正則連分数の項番号を任意に飛ばす計算

第 1 種チェビシェフ多項式の合成関数は、1 の③により任意に成立します。第 2 種チェビシェフ多項式については、微分形式を意識しながら計算すると得ることができます。

$$T_3(T_2(x)) = T_6(x) = -1 + 18x^2 - 48x^4 + 32x^6$$

$$\left(\frac{1}{6}T_6(x)\right)' = U_5(x) = 6x - 32x^3 + 32x^5$$

などです。次の数式により、平方根のペル方程式を満たす正則連分数の項番号を１０の累乗で飛ばしてみてください。

$$T_5(T_2(x)) = T_{10}(x) = -1 + 50x^2 - 400x^4 + 1120x^6 - 1280x^8 + 512x^{10}$$

$$U_{10}(x) = \left(\frac{1}{10}T_{10}(x)\right)' = 10x - 160x^3 + 672x^5 - 1024x^7 + 512x^9$$

ペル方程式を満たす自然数の組を得る展開式の累乗計算を指数乗で計算することに相当します。

参考文献

Mathworld:

http://mathworld.wolfram.com/pell equation.htlm

Wikipedia,the free encyclopedia:

http://en.wikipedia.org/wiki/chebyshev_polinomials

Jeroen Demeyer(2007):Diophantine Sets over Polynomial Rings and Hilbert's Tenth Problem for function Fields　の 77 ﾍﾟｰｼﾞから 80 ﾍﾟｰｼﾞを参照してください。

http://cage.ugent.be/~jdemeyer/phd.pdf