平方根の正則連分数に関する考察（その４）

２００８年1月２３日
北海道岩見沢農業高校
加藤秀隆

０．はじめに

３の平方根の正則連分数の一般項を作り、部分分数列を得る縮約計算を紹介します。

１．一般項について

$\sqrt{3}$ の正則連分数は、$\frac{1}{0},\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{19}{11},\frac{26}{15},\frac{71}{41},\frac{97}{56},\frac{265}{153},\cdots$ です。

分子、分母を次のように同時に記述しましょう。

$$1+0\sqrt{3},1+\sqrt{3},2+\sqrt{3},5+3\sqrt{3},7+4\sqrt{3},19+11\sqrt{3},26+15\sqrt{3},71+41\sqrt{3},97+56\sqrt{3},\cdots$$

これらを数列として眺めると、第 1 項の $1+\sqrt{3}$ が公比的な振る舞いをしています。乗数を順に記述すると、

$$1+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{2},1+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{2},\cdots$$

そこで、乗数を $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ とすると一般項は、次のようになります。偶数項と奇数項とで記述が異なります。$k \geq 0$

$$X_{2k}=2^{k}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{2k} \qquad X_{2k+1}=2^{k+1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{2k+1}$$

$\sqrt{3}$ の正則連分数の分子、分母の一般項を作ると、次のようになります。

$X_n=x_n+y_n\sqrt{3}$ $,\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $,\overline{\alpha}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ とおくことにより、

$$x_{2k}=2^{k}\bullet\frac{\alpha^{2k}+\overline{\alpha}^{2k}}{2} \qquad y_{2k}=2^{k}\bullet\frac{\alpha^{2k}-\overline{\alpha}^{2k}}{2\sqrt{3}}$$

$$x_{2k+1}=2^{k+1}\bullet\frac{\alpha^{2k+1}+\overline{\alpha}^{2k+1}}{2} \qquad y_{2k+1}=2^{k+1}\bullet\frac{\alpha^{2k+1}-\overline{\alpha}^{2k+1}}{2\sqrt{3}}$$

１．正則連分数の部分分数群を得る計算方法

４系列の計算式を作ります。

（１）偶数項の上を走る（滑る）部分分数群を得る計算方法

$$x_{2m}\bullet x_{2k+2m}=2^m\bullet\frac{\alpha^{2m}+\overline{\alpha}^{2m}}{2}\bullet 2^{k+m}\bullet\frac{\alpha^{2k+2m}+\overline{\alpha}^{2k+2m}}{2}$$

$$=2^{k+2m-1}\left(\frac{\alpha^{2k+4m}+\overline{\alpha}^{2k+4m}}{2}+(\alpha\overline{\alpha})^{2m}\bullet\frac{\alpha^{2k}+\overline{\alpha}^{2k}}{2}\right)$$

$$=2^{k+2m-1}\left(\frac{x_{2k+4m}}{2^{k+2m}}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2m}\bullet\frac{x_{2k}}{2^k}\right)$$

$$=2^{-1}(x_{2k+4m}+x_{2k})$$

$$2x_{2m}\bullet x_{2k+2m}=x_{2k+4m}+x_{2k}$$

$$x_{2k+4m}=2x_{2m}\bullet x_{2k+2m}-x_{2k}$$

$$2x_{2m}\bullet y_{2k+2m}=2\bullet 2^m\bullet\frac{\alpha^{2m}+\overline{\alpha}^{2m}}{2}\bullet 2^{k+m}\bullet\frac{\alpha^{2k+2m}-\overline{\alpha}^{2k+2m}}{2\sqrt{3}}$$

$$=2^{k+2m}\left(\frac{\alpha^{2k+4m}-\overline{\alpha}^{2k+4m}}{2\sqrt{3}}+(\alpha\overline{\alpha})^{2m}\bullet\frac{\alpha^{2k}-\overline{\alpha}^{2k}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$=2^{k+2m}\left(\frac{y_{2k+4m}}{2^{k+2m}}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2m}\bullet\frac{y_{2k}}{2^k}\right)$$

$$=y_{2k+4m}+y_{2k}$$

$$y_{2k+4m}=2x_{2m}\bullet y_{2k+2m}-y_{2k}$$

（２）奇数項の上を走る部分分数群を得る計算方法

$$x_{2k+4m+1}=2x_{2m}\bullet x_{2k+1+2m}-x_{2k+1}$$

$$y_{2k+4m+1}=2x_{2m}\bullet y_{2k+1+2m}-y_{2k+1}$$

（３）偶数項と奇数項から偶数項を得る計算方法

$$x_{2k+4m+2}=x_{2m+1}\bullet x_{2k+2m+1}+x_{2k}$$

$$y_{2k+4m+2}=x_{2m+1}\bullet y_{2k+2m+1}+y_{2k}$$

（４）奇数項と偶数項から奇数項を得る計算方法

$$x_{2k+4m+3}=2x_{2m+1}\bullet x_{2k+1+2m+1}+x_{2k+1}$$

$$y_{2k+4m+3}=2x_{2m+1}\bullet y_{2k+1+2m+1}+y_{2k+1}$$

（1） において、$m=1,2,3,4,\cdots$ とおくと、

$$x_{2k+4} = 2x_2 \cdot x_{2k+2} - x_{2k} = 2\cdot 2x_{2k+2} - x_{2k} = 4x_{2k+2} - x_{2k}$$
$$y_{2k+4} = 2x_2 \cdot y_{2k+2} - y_{2k} = 4y_{2k+2} - y_{2k} \qquad ①$$

$$x_{2k+8} = 2x_4 \cdot x_{2k+4} - x_{2k} = 2\cdot 7x_{2k+4} - x_{2k} = 14x_{2k+4} - x_{2k}$$
$$y_{2k+8} = 2x_4 \cdot y_{2k+4} - y_{2k} = 14y_{2k+4} - y_{2k} \qquad ②$$

$$x_{2k+12} = 2x_6 \cdot x_{2k+6} - x_{2k} = 2\cdot 26x_{2k+6} - x_{2k} = 52x_{2k+6} - x_{2k}$$
$$y_{2k+12} = 2x_6 \cdot y_{2k+6} - y_{2k} = 52y_{2k+6} - y_{2k} \qquad ③$$

$$x_{2k+16} = 2x_8 \cdot x_{2k+8} - x_{2k} = 2\cdot 97x_{2k+8} - x_{2k} = 194x_{2k+8} - x_{2k}$$
$$y_{2k+16} = 2x_8 \cdot y_{2k+8} - y_{2k} = 194y_{2k+8} - y_{2k} \qquad ④$$

①において $k=0,1,2,3,\cdots$ を代入すると、

$$x_4 = 4x_2 - x_0 = 4\cdot 2 - 1 = 7$$
$$y_4 = 4y_2 - y_0 = 4\cdot 1 - 0 = 4$$
$$x_6 = 4x_4 - x_2 = 4\cdot 7 - 2 = 26$$
$$y_6 = 4y_4 - y_2 = 4\cdot 4 - 1 = 15$$
$$x_8 = 4x_6 - x_4 = 4\cdot 26 - 7 = 97$$
$$y_8 = 4y_6 - y_4 = 4\cdot 15 - 4 = 56$$
$$x_{10} = 4x_8 - x_6 = 4\cdot 97 - 26 = 362$$
$$y_{10} = 4y_8 - y_6 = 4\cdot 56 - 15 = 209$$

正則連分数の部分分数列として並べると、

$$\frac{1}{0},\frac{2}{1},\frac{7}{4},\frac{26}{15},\frac{97}{56},\frac{362}{209},\cdots$$

これらの正則連分数成分による表記は、$1\sqrt{3} = [2;-\dot{4},\dot{4}]$

②において $k=0,1,2,3,\cdots$ を代入すると、次の分数群を得ます。

$$\frac{1}{0},\frac{7}{4},\frac{97}{56},\frac{1351}{780},\frac{18817}{10864},\cdots$$

$$4\sqrt{3} = [7;-\dot{1}4,1\dot{4}] \qquad \sqrt{3} = \frac{1}{4}[7;-\dot{1}4,1\dot{4}]$$

③において $k=0,1,2,3,\cdots$ を代入すると、次の分数群を得ます。

$$\frac{1}{0},\frac{26}{15},\frac{1351}{780},\frac{70226}{40545},\frac{3650401}{2107560},\cdots$$

$$15\sqrt{3}=[26;\dot{-52},\dot{52}] \qquad \sqrt{3}=\frac{1}{15}[26;\dot{-52},\dot{52}]$$

④において $k=0,1,2,3,\cdots$**を代入すると、次の分数群を得ます。**

$$\frac{1}{0},\frac{97}{56},\frac{18817}{10864},\frac{3650401}{2107560},\frac{708158977}{408855776},\cdots$$

$$56\sqrt{3}=[97,\dot{-194},\dot{194}] \qquad \sqrt{3}=\frac{1}{56}[97;\dot{-194},\dot{194}]$$

（2）において、 $m=1,2,3,4,\cdots$**とおくと、**

$$x_{2k+5}=2x_2\cdot x_{2k+3}-x_{2k+1}=4x_{2k+3}-x_{2k+1}$$
$$y_{2k+5}=2x_2\cdot y_{2k+3}-y_{2k+1}=4y_{2k+3}-y_{2k+1} \qquad ⑤$$

$$x_{2k+9}=2x_4\cdot x_{2k+5}-x_{2k+1}=14x_{2k+5}-x_{2k+1}$$
$$y_{2k+9}=2x_4\cdot y_{2k+5}-y_{2k+1}=14y_{2k+5}-y_{2k+1} \qquad ⑥$$

$$x_{2k+13}=2x_6\cdot x_{2k+7}-x_{2k+1}=52x_{2k+5}-x_{2k+1}$$
$$y_{2k+13}=2x_6\cdot y_{2k+7}-y_{2k+1}=52y_{2k+7}-y_{2k+1} \qquad ⑦$$

$$x_{2k+17}=2x_8\cdot x_{2k+9}-x_{2k+1}=194x_{2k+9}-x_{2k+1}$$
$$y_{2k+17}=2x_8\cdot y_{2k+9}-y_{2k+1}=194y_{2k+9}-y_{2k+1} \qquad ⑧$$

⑤　**において** $k=0,1,2,3,\cdots$**を代入すると、項番号が**$0,2,4,6,8,\cdots$　**である部分分数列を得ます。**

$$\frac{1}{1},\frac{5}{3},\frac{19}{11},\frac{71}{41},\frac{265}{153},\cdots$$

$$\sqrt{3}=[1+\frac{2}{3},\dot{-4},\dot{4}]$$

⑥　⑥　**において** $k=0,1,2,3,\cdots$**を代入すると、項番号が**$0,4,8,12,16,\cdots$　**である部分分数列を得ます。**

$$\frac{1}{1},\frac{19}{11},\frac{265}{153},\frac{3691}{2131},\frac{51409}{29681},\cdots$$

$$\sqrt{3}=[1+\frac{8}{11},\dot{-14},\dot{14}]$$

⑦　において　$k=0,1,2,3,\cdots$を代入すると、項番号が$0,6,12,18,24,\cdots$　である部分分数列を得ます。

$$\frac{1}{1},\frac{71}{41},\frac{3691}{2131},\frac{191861}{110771},\frac{9973081}{5757961},\cdots$$

$$\sqrt{3}=[1+\frac{30}{41},-\dot{52},\dot{52}]$$

⑧　において　$k=0,1,2,3,\cdots$を代入すると、項番号が$0,8,16,24,32,\cdots$　である部分分数列を得ます。

$$\frac{1}{1},\frac{265}{153},\frac{51409}{29681},\frac{9973081}{5757961},\frac{1934726305}{1117014753},\cdots$$

$$\sqrt{3}=[1+\frac{112}{153},-\dot{194},\dot{194}]$$

項番号が、偶数→奇数→偶数→奇数→偶数→・・・の流れで得る部分分数列と奇数→偶数→奇数→偶数→奇数→・・・の流れで得る部分分数列の２種類があります。

（３）偶数項と奇数項から偶数項を得る計算方法において、$m=1,2,3,4,\cdots$とおくと、

$$x_{2k+6}=x_3\cdot x_{2k+3}+x_{2k}=5x_{2k+3}+x_{2k}$$
$$y_{2k+6}=x_3\cdot y_{2k+3}+y_{2k}=5y_{2k+3}+y_{2k} \qquad ⑨$$

$$x_{2k+10}=x_5\cdot x_{2k+5}+x_{2k}=19x_{2k+5}+x_{2k}$$
$$y_{2k+10}=x_5\cdot y_{2k+5}+y_{2k}=19y_{2k+5}+y_{2k} \qquad ⑩$$

$$x_{2k+14}=x_7\cdot x_{2k+7}+x_{2k}=71x_{2k+7}+x_{2k}$$
$$y_{2k+14}=x_7\cdot y_{2k+7}+y_{2k}=71y_{2k+7}+y_{2k} \qquad ⑪$$

$$x_{2k+18}=x_9\cdot x_{2k+9}+x_{2k}=265x_{2k+9}+x_{2k}$$
$$y_{2k+18}=x_9\cdot y_{2k+9}+y_{2k}=265y_{2k+9}+y_{2k} \qquad ⑫$$

（４）奇数項と偶数項から奇数項を得る計算方法において、$m=1,2,3,4,\cdots$とおくと、

$$x_{2k+7}=2x_3\cdot x_{2k+4}+x_{2k+1}=10x_{2k+4}+x_{2k+1}$$
$$y_{2k+7}=2x_3\cdot y_{2k+4}+y_{2k+1}=10y_{2k+4}+y_{2k+1} \qquad ⑬$$

$$x_{2k+11}=2x_5\cdot x_{2k+6}+x_{2k+1}=38x_{2k+6}+x_{2k+1}$$
$$y_{2k+11}=2x_5\cdot y_{2k+6}+y_{2k+1}=38y_{2k+6}+y_{2k+1} \qquad ⑭$$

$$x_{2k+15} = 2x_7 \cdot x_{2k+8} + x_{2k+1} = 142x_{2k+8} + x_{2k+1}$$
$$y_{2k+15} = 2x_7 \cdot y_{2k+8} + y_{2k+1} = 142y_{2k+8} + y_{2k+1} \qquad ⑮$$

$$x_{2k+19} = 2x_9 \cdot x_{2k+10} + x_{2k+1} = 530x_{2k+10} + x_{2k+1}$$
$$y_{2k+19} = 2x_9 \cdot y_{2k+8} + y_{2k+1} = 530y_{2k+10} + y_{2k+1} \qquad ⑯$$

項番号の流れを３項ずつ飛ぶ$0 \to 3 \to 6 \to 9 \to 12 \to 15 \to \cdots$とします。

⑨ において、$k=0$として、

$$x_6 = 5x_3 + x_0 = 5 \cdot 5 + 1 = 26$$
$$y_6 = 5y_3 + y_0 = 5 \cdot 3 + 0 = 15$$

⑬ において、$k=1$として、

$$x_9 = 10x_6 + x_3 = 10 \cdot 26 + 5 = 265$$
$$y_9 = 10 \cdot y_6 + y_3 = 10 \cdot 15 + 3 = 153$$

⑩ において、$k=3$として、

$$x_{12} = 5x_9 + x_6 = 5 \cdot 265 + 26 = 1351$$
$$y_{12} = 5y_9 + y_6 = 5 \cdot 153 + 15 = 780$$

⑬ において、$k=4$として、

$$x_{15} = 10x_{12} + x_9 = 10 \cdot 1351 + 265 = 13775$$
$$y_{15} = 10 \cdot y_{12} + y_9 = 10 \cdot 780 + 153 = 7953$$

⑨と⑬の計算が交互に続いていきます。

得られた部分分数列を記すと、

$$\frac{1}{0}, \frac{5}{3}, \frac{26}{15}, \frac{265}{153}, \frac{1351}{780}, \frac{13775}{7953}, \cdots$$

正則連分数成分による記述は、5 と 10 が交互に循環していきます。

$$3\sqrt{3} = [5; \dot{5}, \dot{10}] \qquad \sqrt{3} = \frac{1}{3}[5; \dot{5}, \dot{10}]$$

となります。

項番号が0,5,10,15,20,25,$\cdots$ である部分分数列は、⑩と⑭の計算を交互にします。

$$\frac{1}{0}, \frac{19}{11}, \frac{362}{209}, \frac{13775}{7953}, \frac{262087}{151316}, \frac{9973081}{5757961}, \cdots$$

$$11\sqrt{3} = [19; \dot{19}, \dot{38}] \qquad \sqrt{3} = \frac{1}{11}[19; \dot{19}, \dot{38}]$$

項番号が0,7,14,21,28,35,$\cdots$ である部分分数列は、⑪と⑮の計算を交互にします。

$$\frac{1}{0}, \frac{71}{41}, \frac{5042}{2911}, \frac{716035}{413403}, \frac{50843527}{29354524}, \frac{7220496869}{4168755811}, \cdots$$

$$41\sqrt{3}=[71;\dot{71},\dot{142}] \qquad \sqrt{3}=\frac{1}{41}[71;\dot{71},\dot{142}]$$

項番号が0,9,18,27,36,45,･･･ である部分分数列は、⑪と⑮の計算を交互にします。

$$\frac{1}{0},\frac{265}{153},\frac{70226}{40545},\frac{37220045}{21489003},\frac{9863382151}{5694626340},\frac{5227629760075}{3018173449203},\cdots$$

$$153\sqrt{3}=[265;\dot{265},\dot{530}] \qquad \sqrt{3}=\frac{1}{153}[265;\dot{265},\dot{530}]$$

項番号が1,4,7,10,13,16,･･･ である部分分数列は、⑬と⑨の計算を交互にします。

$$\frac{1}{1},\frac{7}{4},\frac{71}{41},\frac{362}{209},\frac{3691}{2131},\frac{18817}{10864},\cdots$$

$$\sqrt{3}=[1+\frac{3}{4},\dot{10},\dot{5}]$$

項番号が1,6,11,16,21,26,･･･ である部分分数列は、⑭と⑩の計算を交互にします。

$$\frac{1}{1},\frac{26}{15},\frac{989}{571},\frac{18817}{10864},\frac{716035}{413403},\frac{13623482}{7865521},\cdots$$

$$\sqrt{3}=[1+\frac{11}{15},\dot{38},\dot{19}]$$

項番号が1,8,15,22,29,36,･･･ である部分分数列は、⑮と⑪の計算を交互にします。

$$\frac{1}{1},\frac{97}{56},\frac{13775}{7953},\frac{978122}{564719},\frac{138907099}{80198051},\frac{9863382151}{5694626340},\cdots$$

$$\sqrt{3}=[1+\frac{41}{56},\dot{142},\dot{71}]$$

項番号が1,10,19,28,37,46,･･･ である部分分数列は、⑯と⑫の計算を交互にします。

$$\frac{1}{1},\frac{362}{209},\frac{191861}{110771},\frac{50843527}{29354524},\frac{26947261171}{15558008491},\frac{7141075053842}{4122901604639},\cdots$$

$$\sqrt{3}=[1+\frac{153}{209},\dot{530},\dot{265}]$$

以上の計算を正則連分数成分の循環節の長さが２のものに同形式で発展させることができます。

参考にした文献は、ありません。