平方根の正則連分数に関する考察（その３）

２００８年1月２３日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

０．はじめに

２の平方根を近似する正則連分数において、項番号を等比数列のように飛ばして部分分数列を得る方法を紹介します。

１．正則連分数の項番号が奇数のものについて

前回の考察（その２）において、項番号の飛び越えが等差数列的でしたが、分子、分母の一般項を奇数乗することによりこう番号を等比数列的に飛ばすことができます。さらに、指数乗的に項番号を飛ばす方法に発展させることができます。

正則連分数の分子数、分母数の x_k ， y_k を次のように定式化しました。

$\alpha = 1+\sqrt{2}$ ， $\overline{\alpha} = 1-\sqrt{2}$ とおくと、

$$x_k = \frac{\alpha^k + \overline{\alpha}^k}{2} \quad , \quad y_k = \frac{\alpha^k - \overline{\alpha}^k}{2\sqrt{2}}$$

分子数、分母数を累乗計算します。後述で一括して項番号を等比数列的に飛ばす計算方法を記述します。

（１）奇数乗計算

・３乗計算から記述します。$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を組合せ数とします。

$$(x_k)^3 = (\frac{\alpha^k + \overline{\alpha}^k}{2})^3 = \frac{\alpha^{3k} + \overline{\alpha}^{3k} + 3(\alpha\overline{\alpha})^k(\alpha^k + \overline{\alpha}^k)}{4 \cdot 2}$$

$$4(x_k)^3 = \frac{\alpha^{3k} + \overline{\alpha}^{3k}}{2} + 3(-1)^k \cdot \frac{\alpha^k + \overline{\alpha}^k}{2}$$

$$4(x_k)^3 = x_{3k} + (-1)^k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_k$$

$$(y_k)^3 = (\frac{\alpha^k - \overline{\alpha}^k}{2\sqrt{2}})^3 = \frac{\alpha^{3k} - \overline{\alpha}^{3k} - 3(\alpha\overline{\alpha})^k(\alpha^k - \overline{\alpha}^k)}{8 \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$8(y_k)^3 = y_{3k} - 3(-1)^k y_k$$

$$8(y_k)^3 = y_{3k} - (-1)^k \binom{3}{1} y_k$$

・５乗計算

$$(x_k)^5 = (\frac{\alpha^k + \overline{\alpha}^k}{2})^5 = \frac{\alpha^{5k} + \overline{\alpha}^{5k} + 5(\alpha\overline{\alpha})^k(\alpha^{3k} + \overline{\alpha}^{3k}) + 10(\alpha\overline{\alpha})^{2k}(\alpha^k + \overline{\alpha}^k)}{16 \bullet 2}$$

$$16(x_k)^5 = \frac{\alpha^{5k} + \overline{\alpha}^{5k}}{2} + 5(-1)^k \bullet \frac{\alpha^{3k} + \overline{\alpha}^{3k}}{2} + 10(-1)^{2k} \bullet \frac{\alpha^k + \overline{\alpha}^k}{2}$$

$$4^2(x_k)^5 = x_{5k} + (-1)^k \binom{5}{1} x_{3k} + (-1)^{2k} \binom{5}{2} x_k$$

$$(y_k)^5 = (\frac{\alpha^k - \overline{\alpha}^k}{2\sqrt{2}})^5$$

$$= \frac{\alpha^{5k} - \overline{\alpha}^{5k} - 5(\alpha\overline{\alpha})^k(\alpha^{3k} - \overline{\alpha}^{3k}) + 10(\alpha\overline{\alpha})^{2k}(\alpha^k - \overline{\alpha}^k)}{64 \bullet 2\sqrt{2}}$$

$$64(y_k)^5 = \frac{\alpha^{5k} - \overline{\alpha}^{5k}}{2\sqrt{2}} - 5(-1)^k \bullet \frac{\alpha^{3k} - \overline{\alpha}^{3k}}{2\sqrt{2}} + 10(-1)^{2k} \bullet \frac{\alpha^k - \overline{\alpha}^k}{2\sqrt{2}}$$

$$8^2(y_k)^5 = y_{5k} - (-1)^k \binom{5}{1} y_{3k} + (-1)^{2k} \binom{5}{2} y_k$$

・７乗、９乗の計算結果を記述します。

$$4^3(x_k)^7 = x_{7k} + (-1)^k \binom{7}{1} x_{5k} + (-1)^{2k} \binom{7}{2} x_{3k} + (-1)^{3k} \binom{7}{3} x_k$$

$$8^3(y_k)^7 = y_{7k} - (-1)^k \binom{7}{1} y_{5k} + (-1)^{2k} \binom{7}{2} y_{3k} - (-1)^{3k} \binom{7}{3} y_k$$

$$4^4(x_k)^9 = x_{9k} + (-1)^k \binom{9}{1} x_{7k} + (-1)^{2k} \binom{9}{2} x_{5k} + (-1)^{3k} \binom{9}{3} x_{3k} + (-1)^{4k} \binom{9}{4} x_k$$

$$8^4(y_k)^9 = y_{9k} - (-1)^k \binom{9}{1} y_{7k} + (-1)^{2k} \binom{9}{2} y_{5k} - (-1)^{3k} \binom{9}{3} y_{3k} + (-1)^{4k} \binom{9}{4} y_k$$

（２）偶数乗計算

$$(x_k)^2 = \left(\frac{\alpha^k + \overline{\alpha}^k}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^{2k} + \overline{\alpha}^{2k} + 2(\alpha\overline{\alpha})^k}{4}$$

$$2(x_k)^2 = \frac{\alpha^{2k} + \overline{\alpha}^{2k}}{2} + (-1)^k = x_{2k} + (-1)^k \bullet \frac{1}{2}\binom{2}{1}$$

$$2\bullet 4(x_k)^4 = x_{4k} + (-1)^k \binom{4}{1} x_{2k} + (-1)^{2k} \bullet \frac{1}{2}\binom{4}{2}$$

$$2\bullet 4^2 (x_k)^6 = x_{6k} + (-1)^k \binom{6}{1} x_{4k} + (-1)^{2k} \binom{6}{2} x_{2k} + (-1)^{3k} \bullet \frac{1}{2}\binom{6}{3}$$

$$2\bullet 4^3 (x_k)^8 = x_{8k} + (-1)^k \binom{8}{1} x_{6k} + (-1)^{2k} \binom{8}{2} x_{4k} + (-1)^{3k} \binom{8}{3} x_{2k} + (-1)^{4k} \bullet \frac{1}{2}\binom{8}{4}$$

分母数 y_k を利用した項番号の偶数倍計算を次のようにします。項番号の奇数倍計算でも全く同形式の数式が成り立ちます。

$$2x_k y_k = 2\bullet \frac{\alpha^k + \overline{\alpha}^k}{2} \bullet \frac{\alpha^k - \overline{\alpha}^k}{2\sqrt{2}} = \frac{\alpha^{2k} - \overline{\alpha}^{2k}}{2\sqrt{2}} = y_{2k}$$

$$2x_{3k} y_k = 2\bullet \frac{\alpha^{3k} + \overline{\alpha}^{3k}}{2} \bullet \frac{\alpha^k - \overline{\alpha}^k}{2\sqrt{2}} = \frac{\alpha^{4k} - \overline{\alpha}^{4k} - (\alpha\overline{\alpha})^k (\alpha^{2k} - \overline{\alpha}^{2k})}{2\sqrt{2}}$$

$$= y_{4k} - (-1)^k y_{2k}$$

$$2x_{5k} y_k = y_{6k} - (-1)^k y_{4k}$$

$$2x_{7k} y_k = y_{8k} - (-1)^k y_{6k}$$

$$2x_{9k} y_k = y_{10k} - (-1)^k y_{8k}$$

次の計算もできます。

$$2x_k y_{3k} = 2\bullet \frac{\alpha^k + \overline{\alpha}^k}{2} \bullet \frac{\alpha^{3k} - \overline{\alpha}^{3k}}{2\sqrt{2}} = \frac{\alpha^{4k} - \overline{\alpha}^{4k} + (\alpha\overline{\alpha})^k (\alpha^{2k} - \overline{\alpha}^{2k})}{2\sqrt{2}}$$

$$= y_{4k} + (-1)^k y_{2k}$$

$$2x_k y_{5k} = y_{6k} + (-1)^k y_{4k}$$

$$2x_k y_{7k} = y_{8k} + (-1)^k y_{6k}$$

$$2x_k y_{9k} = y_{10k} + (-1)^k y_{8k}$$

２．行列表記

分子数、分母数の奇数乗から記述します。

$$\begin{pmatrix} x_k \\ 4(x_k)^3 \\ 4^2(x_k)^5 \\ 4^3(x_k)^7 \\ 4^4(x_k)^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^k\binom{3}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{2k}\binom{5}{2} & (-1)^k\binom{5}{1} & 1 & 0 & 0 \\ (-1)^{3k}\binom{7}{3} & (-1)^{2k}\binom{7}{2} & (-1)^k\binom{7}{1} & 1 & 0 \\ (-1)^{4k}\binom{9}{4} & (-1)^{3k}\binom{9}{3} & (-1)^{2k}\binom{9}{2} & (-1)^k\binom{9}{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{3k} \\ x_{5k} \\ x_{7k} \\ x_{9k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_k \\ 8(y_k)^3 \\ 8^2(y_k)^5 \\ 8^3(y_k)^7 \\ 8^4(y_k)^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(-1)^k\binom{3}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{2k}\binom{5}{2} & -(-1)^k\binom{5}{1} & 1 & 0 & 0 \\ -(-1)^{3k}\binom{7}{3} & (-1)^{2k}\binom{7}{2} & -(-1)^{3k}\binom{7}{1} & 1 & 0 \\ (-1)^{4k}\binom{9}{4} & -(-1)^{3k}\binom{9}{3} & (-1)^{2k}\binom{9}{2} & -(-1)^k\binom{9}{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ y_{3k} \\ y_{5k} \\ y_{7k} \\ y_{9k} \end{pmatrix}$$

偶数乗を記述します。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2(x_k)^2 \\ 8(x_k)^4 \\ 32(x_k)^6 \\ 128(x_k)^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{2}{1}(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{4}{2}(-1)^{2k} & \binom{4}{1}(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{6}{3}(-1)^{3k} & \binom{6}{2}(-1)^{2k} & \binom{6}{1}(-1)^k & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{8}{4}(-1)^{4k} & \binom{8}{3}(-1)^{3k} & \binom{8}{2}(-1)^{2k} & \binom{8}{1}(-1)^k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_{2k} \\ x_{4k} \\ x_{6k} \\ x_{8k} \end{pmatrix}$$

$$2y_k\begin{pmatrix} x_k \\ x_{3k} \\ x_{5k} \\ x_{7k} \\ x_{9k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(-1)^k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(-1)^k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2k} \\ y_{4k} \\ y_{6k} \\ y_{8k} \\ y_{10k} \end{pmatrix}$$

$$2x_k\begin{pmatrix} y_k \\ y_{3k} \\ y_{5k} \\ y_{7k} \\ y_{9k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2k} \\ y_{4k} \\ y_{6k} \\ y_{8k} \\ y_{10k} \end{pmatrix}$$

以上の記述より、逆行列を乗ずることができます。

・　項番号を奇数倍で飛ばす計算方法

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{3k} \\ x_{5k} \\ x_{7k} \\ x_{9k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5(-1)^{2k} & -5(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ -7(-1)^{3k} & 14(-1)^{2k} & -7(-1)^k & 1 & 0 \\ 9(-1)^{4k} & -30(-1)^{3k} & 27(-1)^{2k} & -9(-1)^k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ 4(x_k)^3 \\ 4^2(x_k)^5 \\ 4^3(x_k)^7 \\ 4^4(x_k)^9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_k \\ y_{3k} \\ y_{5k} \\ y_{7k} \\ y_{9k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5(-1)^{2k} & 5(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ 7(-1)^{3k} & 14(-1)^{2k} & 7(-1)^k & 1 & 0 \\ 9(-1)^{4k} & 30(-1)^{3k} & 27(-1)^{2k} & 9(-1)^k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_k \\ 8(y_k)^3 \\ 8^2(y_k)^5 \\ 8^3(y_k)^7 \\ 8^4(y_k)^9 \end{pmatrix}$$

・項番号を偶数倍で飛ばす方法

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_{2k} \\ x_{4k} \\ x_{6k} \\ x_{8k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{2k} & -4(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ -(-1)^{3k} & 9(-1)^{2k} & -6(-1)^k & 1 & 0 \\ (-1)^{4k} & -16(-1)^{3k} & 20(-1)^{2k} & -8(-1)^k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2(x_k)^2 \\ 8(x_k)^4 \\ 32(x_k)^6 \\ 128(x_k)^8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{2k} \\ y_{4k} \\ y_{6k} \\ y_{8k} \\ y_{10k} \end{pmatrix} = 2y_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{2k} & (-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ (-1)^{3k} & (-1)^{2k} & (-1)^k & 1 & 0 \\ (-1)^{4k} & (-1)^{3k} & (-1)^{2k} & (-1)^k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{3k} \\ x_{5k} \\ x_{7k} \\ x_{9k} \end{pmatrix}$$

$$= 2y_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{2k} & (-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ (-1)^{3k} & (-1)^{2k} & (-1)^k & 1 & 0 \\ (-1)^{4k} & (-1)^{3k} & (-1)^{2k} & (-1)^k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5(-1)^{2k} & -5(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ -7(-1)^{3k} & 14(-1)^{2k} & -7(-1)^k & 1 & 0 \\ 9(-1)^{4k} & -30(-1)^{3k} & 27(-1)^{2k} & -9(-1)^k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ 4(x_k)^3 \\ 4^2(x_k)^5 \\ 4^3(x_k)^7 \\ 4^4(x_k)^9 \end{pmatrix}$$

$$= 2y_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3(-1)^{2k} & -4(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ -4(-1)^{3k} & 10(-1)^{2k} & -6(-1)^k & 1 & 0 \\ 5(-1)^{4k} & -20(-1)^{3k} & 21(-1)^{2k} & -8(-1)^k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ 4(x_k)^3 \\ 4^2(x_k)^5 \\ 4^3(x_k)^7 \\ 4^4(x_k)^9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{2k} \\ y_{4k} \\ y_{6k} \\ y_{8k} \\ y_{10k} \end{pmatrix} = 2x_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{2k} & -(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ -(-1)^{3k} & (-1)^{2k} & -(-1)^k & 1 & 0 \\ (-1)^{4k} & -(-1)^{3k} & (-1)^{2k} & -(-1)^k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ y_{3k} \\ y_{5k} \\ y_{7k} \\ y_{9k} \end{pmatrix}$$

$$= 2x_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{2k} & -(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ -(-1)^{3k} & (-1)^{2k} & -(-1)^k & 1 & 0 \\ (-1)^{4k} & -(-1)^{3k} & (-1)^{2k} & -(-1)^k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5(-1)^{2k} & 5(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ 7(-1)^{3k} & 14(-1)^{2k} & 7(-1)^k & 1 & 0 \\ 9(-1)^{4k} & 30(-1)^{3k} & 27(-1)^{2k} & 9(-1)^k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ 8(y_k)^3 \\ 8^2(y_k)^5 \\ 8^3(y_k)^7 \\ 8^4(y_k)^9 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(-1)^k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3(-1)^{2k} & 4(-1)^k & 1 & 0 & 0 \\ 4(-1)^{3k} & 10(-1)^{2k} & 6(-1)^k & 1 & 0 \\ 5(-1)^{4k} & 20(-1)^{3k} & 21(-1)^{2k} & 8(-1)^k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ 8(y_k)^3 \\ 8^2(y_k)^5 \\ 8^3(y_k)^7 \\ 8^4(y_k)^9 \end{pmatrix}$$

３．正則連分数の部分分数列の計算

実際に項番号を飛ばしてみましょう。３倍で項番号を飛ばしてみます。

正則連分数を順に記述すると、

$$\frac{1}{0},\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\frac{41}{29},\frac{99}{70},\frac{239}{169},\frac{577}{408},\frac{1393}{985},\frac{3363}{2378},\frac{8119}{5741},\frac{19601}{13860},\frac{47321}{33461},\frac{114243}{80782},\cdots$$

です。

$$x_{3k} = -3(-1)^k x_k + 4(x_k)^3$$

$$y_{3k} = 3(-1)^k y_k + 8(y_k)^3$$

$k = 1,2$ とすると、

$$x_3 = -3(-1)^1 x_1 + 4(x_1)^3 = 3 \bullet 1 + 4 \bullet 1^3 = 7$$

$$y_3 = 3(-1)^1 y_1 + 8(y_1)^3 = -3 \bullet 1 + 8 \bullet 1^3 = 5$$

$$x_6 = -3(-1)^2 x_2 + 4(x_2)^3 = -3 \bullet 3 + 4 \bullet 3^3 = 99$$

$$y_6 = 3(-1)^2 y_2 + 8(y_2)^3 = 3 \bullet 2 + 8 \bullet 2^3 = 70$$

$k = 3,6$ とすると、

$$x_9 = -3(-1)^3 x_3 + 4(x_3)^3 = 3 \bullet 7 + 4 \bullet 7^3 = 1393$$

$$y_9 = 3(-1)^3 y_3 + 8(y_3)^3 = -3 \bullet 5 + 8 \bullet 5^3 = 985$$

$$x_{18} = -3(-1)^6 x_6 + 4(x_6)^3 = -3 \cdot 99 + 4 \cdot 99^3 = 3880899$$

$$y_{18} = 3(-1)^6 y_6 + 8(y_6)^3 = 3 \cdot 70 + 8 \cdot 70^3 = 2744210$$

$k = 9,18$ とすると、

$$x_{27} = -3(-1)^9 x_9 + 4(x_9)^3 = 3 \cdot 1393 + 4 \cdot 1393^3 = 10812186007$$

$$y_{27} = 3(-1)^9 y_9 + 8(y_0)^3 = -3 \cdot 985 + 8 \cdot 985^3 = 7645370045$$

$$x_{54} = -3(-1)^{18} x_{18} + 4(x_{18})^3 = -3 \cdot 3880899 + 4 \cdot 3880899^3$$

$$= 23380673249993320809$$

$$y_{54} = 3(-1)^{18} y_{18} + 8(y_{18})^3 = 3 \cdot 2744210 + 8 \cdot 2744210^3$$

$$= 165326326037771820630$$

正則連分数を小数展開すると、ほぼ平方根を分母数の桁数の 2 倍の桁数まで真の値に近づきます。関数電卓に組み込まれている関数の値に匹敵するのは、分子、分母がそれぞれ５桁もしくは６桁の分数からになります。

$$\frac{7}{5} = 1.4$$

$$\frac{99}{70} = 1.4142 \cdots$$

$$\frac{1393}{985} = 1.414213 \cdots$$

$$\frac{3880899}{2744210} = 1.414213562373 \cdots$$

ところで、$3k \to k$ とすると、

$$x_{9k} = -3(-1)^{3k} x_{3k} + 4(x_{3k})^3$$

$$y_{9k} = 3(-1)^{3k} y_{3k} + 8(y_{3k})^3$$

この数式においても、$3k \to k$ とすると、

$$x_{27k} = -3(-1)^{9k} x_{9k} + 4(x_{9k})^3$$

$$y_{27k} = 3(-1)^{9k} y_{9k} + 8(y_{9k})^3$$

　このような数式を作っておいてから、正則連分数の項番号を飛ばしていくこともできます。つづいて、５倍で項番号を飛ばしてみます。

$$x_{5k} = 5(-1)^{2k} x_k - 5(-1)^k \cdot 4(x_k)^3 + 4^2 (x_k)^5$$

$$y_{5k} = 5(-1)^{2k} y_k + 5(-1)^k \cdot 8(y_k)^3 + 8^2 (y_k)^5$$

$k=1$ を代入して、

$$x_5 = 5(-1)^2 x_1 - 5(-1)^1 \cdot 4(x_1)^3 + 4^2 (x_1)^5$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 1 + 20 \cdot 1^3 + 16 \cdot 1^5 = 41$$

$$y_5 = 5(-1)^2 y_1 + 5(-1)^1 \cdot 8(y_1)^3 + 8^2 (y_1)^5$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 1 - 40 \cdot 1^3 + 64 \cdot 1^5 = 29$$

$k=5$ を代入して、

$$x_{25} = 5(-1)^{10} x_5 - 5(-1)^5 \cdot 4(x_5)^3 + 4^2 (x_5)^5$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 41 + 20 \cdot 41^3 + 16 \cdot 41^5 = 1855077841$$

$$y_{25} = 5(-1)^{10} y_5 + 5(-1)^5 \cdot 8(y_5)^3 + 8^2 (y_5)^5$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 29 - 40 \cdot 29^3 + 64 \cdot 29^5 = 1311738121$$

　２回ずつの計算で第２５項の正則連分数を得ました。また、$k=2$ を代入して、

$$x_{10} = 5(-1)^4 x_2 - 5(-1)^2 \cdot 4(x_2)^3 + 4^2 (x_2)^5$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 3 - 20 \cdot 3^3 + 16 \cdot 3^5 = 3363$$

$$y_{10} = 5(-1)^4 y_2 + 5(-1)^2 \cdot 8(y_2)^3 + 8^2 (y_2)^5$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 2 + 40 \cdot 2^3 + 64 \cdot 2^5 = 2378$$

$k=10$ を代入して、

$$x_{50} = 5(-1)^{20} x_{10} - 5(-1)^{10} \cdot 4(x_{10})^3 + 4^2 (x_{10})^5$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 3363 - 20 \cdot 3363^3 + 16 \cdot 3363^5$$
$$= 6882627592338442563$$

$$y_{50} = 5(-1)^{20} y_{10} + 5(-1)^{10} \cdot 8(y_{10})^3 + 8^2 (y_{10})^5$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 2378 + 40 \cdot 2378^3 + 64 \cdot 2378^5$$
$$= 4866752642924153522$$

ここでも２回ずつの計算で第５０項の正則連分数を得たことになります。

**　ほかの項番号を飛ばす奇数倍、偶数倍の計算式により正則連分数を計算してみてください。参考にした文献はありません。**

私的通信：千葉県立柏稜高校　西川誠