平方根の正則連分数に関する考察（その２）

２００８年1月２３日
北海道岩見沢農業高校
加藤秀隆

０．はじめに

２の平方根を近似する正則連分数の部分分数列を得る方法を紹介します。さらに、正則連分数の成分の循環節の長さが１のものに発展させることができます。

１．正則連分数群の数列化

$\sqrt{2}$ を近似する正則連分数を順に記述すると、

$$\frac{1}{0},\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\frac{41}{29},\frac{99}{70},\frac{239}{169},\frac{577}{408},\frac{1393}{985},\frac{3363}{2378},\frac{8119}{5741},\frac{19601}{13860},\frac{47321}{33461},\frac{114243}{80782},\cdots$$

第０項に $\frac{1}{0}$ をおきます。（平方根や累乗根の正則連分数を考える際には、常に第０項に $\frac{1}{0}$ をおきます。）これらの分数群を次のように分子・分母を同時に記述することにすると、

$$1+0\sqrt{2},1+1\sqrt{2},3+2\sqrt{2},7+5\sqrt{2},17+12\sqrt{2},41+12\sqrt{2},99+70\sqrt{2},\cdots$$

初項 1 で、公比が $1+\sqrt{2}$ の等比数列になっています。$X_k = x_k + y_k\sqrt{2}$ とおくと、X_k の一般項は、

$$X_k = (1+\sqrt{2})^k = x_k + y_k\sqrt{2}$$

です。さらに、正則連分数の分子、分母の x_k ，y_k を次のように定式化することができます。$\alpha = 1+\sqrt{2}$ ，$\overline{\alpha} = 1-\sqrt{2}$ とおくと（共役複素数を意識しています。）、

$$X_k = \alpha^k = \frac{\alpha^k + \overline{\alpha}^k}{2} + \frac{\alpha^k - \overline{\alpha}^k}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$$

より、

$$x_k = \frac{\alpha^k + \overline{\alpha}^k}{2} \ ,\ y_k = \frac{\alpha^k - \overline{\alpha}^k}{2\sqrt{2}}$$

この定式化により、正則連分数の部分分数列を得る計算法則を導くことができます。

２．正則連分数の部分分数群を得る計算法

正則連分数の部分分数群を得ることを縮約と呼ぶようです。

$$x_m\bullet x_{k+m}=\frac{\alpha^m+\overline{\alpha}^m}{2}\bullet\frac{\alpha^{k+m}+\overline{\alpha}^{k+m}}{2}$$

を計算します。

$$x_m\bullet x_{k+m}=\frac{\alpha^{k+2m}+\overline{\alpha}^{k+2m}+\alpha^m\overline{\alpha}^{k+m}+\alpha^{k+m}\overline{\alpha}^m}{4}$$

$$2x_m\bullet x_{k+m}=\frac{\alpha^{k+2m}+\overline{\alpha}^{k+2m}}{2}+(\alpha\overline{\alpha})^m\bullet\frac{\alpha^k+\overline{\alpha}^k}{2}$$

$$=x_{k+2m}+(-1)^m x_k$$

$$x_{k+2m}=2x_m\bullet x_{k+m}-(-1)^m x_k$$

同様に、

$$x_m\bullet y_{k+m}=\frac{\alpha^m+\overline{\alpha}^m}{2}\bullet\frac{\alpha^{k+m}-\overline{\alpha}^{k+m}}{2\sqrt{2}}$$

$$2x_m\bullet y_{k+m}=\frac{\alpha^{k+2m}-\overline{\alpha}^{k+2m}+\alpha^{k+m}\overline{\alpha}^m-\alpha^m\overline{\alpha}^{k+m}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\alpha^{k+2m}-\overline{\alpha}^{k+2m}}{2\sqrt{2}}+(\alpha\overline{\alpha})^m\bullet\frac{\alpha^k-\overline{\alpha}^k}{2\sqrt{2}}$$

$$=y_{k+2m}+(-1)^m y_k$$

$$y_{k+2m}=2x_m\bullet y_{k+m}-(-1)^m y_k$$

これらにより、正則連分数の分子数、分母数において、共通に項番号を飛び飛びに越えていく正則連分数の部分分数群を得ることができます。

・$m=1$ とすると、

$$x_{k+2}=2x_1\bullet x_{k+1}-(-1)x_k=2\bullet1\bullet x_{k+1}+x_k=2x_{k+1}+x_k$$

$$y_{k+2}=2x_1\bullet y_{k+1}-(-1)y_k=2\bullet1\bullet y_{k+1}+y_k=2y_{k+1}+y_k$$

この２つは、普通の正則連分数群の分子、分母に成り立つ共通な連続３項間の漸化式になっています。

・$m=2$ とすると、

$$x_{k+4}=2x_2\bullet x_{k+2}-(-1)^2 x_k=2\bullet3\bullet x_{k+2}-x_k=6x_{k+2}-x_k$$

$$y_{k+4} = 2x_2 \cdot y_{k+2} - (-1)^2 y_k = 2 \cdot 3 \cdot y_{k+2} - y_k = 6y_{k+2} - y_k$$

これらにより項番号を２つずつ飛ぶ正則連分数の部分分数列を得ることができます。

$k = 0,2,4,6,\cdots$ **として、**

$$x_4 = 6x_2 - x_0 = 6 \cdot 3 - 1 = 17 \qquad y_4 = 6y_2 - y_0 = 6 \cdot 2 - 0 = 12$$
$$x_6 = 6x_4 - x_2 = 6 \cdot 17 - 3 = 99 \qquad y_6 = 6y_4 - y_2 = 6 \cdot 12 - 2 = 70$$
$$x_8 = 6x_6 - x_4 = 6 \cdot 99 - 17 = 577 \qquad y_8 = 6y_6 - y_4 = 6 \cdot 70 - 12 = 408$$

$k = 1,3,5,7,\cdots$ **として、**

$$x_5 = 6x_3 - x_1 = 6 \cdot 7 - 1 = 41 \qquad y_5 = 6y_3 - y_1 = 6 \cdot 5 - 1 = 29$$
$$x_7 = 6x_5 - x_3 = 6 \cdot 41 - 7 = 239 \qquad y_7 = 6y_5 - y_3 = 6 \cdot 29 - 5 = 169$$
$$x_9 = 6x_7 - x_5 = 6 \cdot 239 - 41 = 1393 \qquad y_9 = 6y_7 - y_5 = 6 \cdot 169 - 29 = 985$$

これらを正則連分数成分による形式で記述することができることを示し、数式変形と正則連分数成分の循環形式を記します。行列計算もできます。

項番号 $0,2,4,6,8,\cdots$ **の正則連分数について**

$$\frac{1}{0}, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \frac{577}{408}, \cdots$$

第２項から負の正則連分数成分を認めながらの記述をします。 $x = \sqrt{2}$

$$2\sqrt{2} = 2x = 3 + 2x - 3 = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{2x-3}} = 3 + \cfrac{1}{-6 + \cfrac{12x-17}{2x-3}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{-6 + \cfrac{1}{\cfrac{2x-3}{12x-17}}} = 3 + \cfrac{1}{-6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{-70x+99}{12x-17}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{-6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cfrac{12x-17}{-70x+99}}}} = 3 + \cfrac{1}{-6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{-6 + \cfrac{-408x+577}{-70x+99}}}} = \cdots$$

$$2\sqrt{2} = [3,-6,6,-6,6,-6,6,\cdots]$$

$-6,6$ **が循環していきます。循環部分について、分数を小数展開したときの記法（ドット）を用いることにします。**

$$2\sqrt{2}=[3;-\dot{6},\dot{6}] \qquad y_2\sqrt{2}=[x_2;-\dot{2}x_2,2\dot{x}_2]$$

$$\sqrt{2}=\frac{1}{2}[3,-\dot{6},\dot{6}]=\frac{1}{2}\bullet\left\{\frac{3}{1},\frac{-17}{-6},\frac{-99}{-35},\frac{577}{204},\frac{3363}{1189},\frac{-19601}{-6930},\frac{-114243}{-40391},\cdots\right\}$$

$$=\left\{\frac{3}{2},\frac{17}{12},\frac{99}{70},\frac{577}{408},\frac{3363}{2378},\frac{19601}{13860},\frac{114243}{80782},\cdots\right\}$$

関数電卓計算を記述します。

$$2\sqrt{2}=2.828427125$$

正式な正則連分数では、整数部分の２を引いて逆数を作りますが、３を引いて逆数を作ります。

$$2\sqrt{2}-3=-0.171572875$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-3}=\frac{1}{-0.171572875}=-5.828427125$$

６を加えて逆数を作ります。

$$-5.828427125+6=0.171572875$$

$$\frac{1}{0.171572875}=5.828427117$$

６を引いて逆数を作ります。

$$5.828427117-6=-0.171572882$$

本来の値は、

$$-0.171572875$$

逆数を作ると、

$$\frac{1}{-0.171572875}=-5.828427117$$

６を加えて逆数を作ります。前述の計算作業を繰り返すことになります。

行列計算は、次のようにします。

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17&3\\-12&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\-12\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-99&-17\\-70&-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-99\\-70\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}577&-99\\408&-70\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}577\\408\end{pmatrix}$$

項番号1,3,5,7,9,・・・の正則連分数について

$$\frac{1}{1},\frac{7}{5},\frac{41}{29},\frac{239}{169},\frac{1393}{985},\cdots$$

$$\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-1=1+x-1=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{x-1}}=1+\cfrac{2}{\cfrac{2}{x-1}}=1+\cfrac{2}{5+\cfrac{-5x+7}{x-1}}$$

$$=1+\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{-5x+7}}}=1+\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{-6+\cfrac{-29x+41}{-5x+7}}}$$

$$=1+\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{-6+\cfrac{1}{\cfrac{-5x+7}{-29x+41}}}}=1+\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{-6+\cfrac{1}{6+\cfrac{169x-239}{-29x+41}}}}$$

$$=1+\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{-6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{-29x+41}{169x-239}}}}}=1+\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{-6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{-6+\cfrac{985x-1393}{169x-239}}}}}=\cdots$$

$$\sqrt{2}=[1+\frac{2}{5},-\dot{6},\dot{6}] \qquad \sqrt{2}=[1+\frac{x_3-y_3}{y_3},-2x_2,2x_2]$$

と記述することができます。さらに、変形することができます。

準備計算をします。$x_k-y_k=y_{k-1}$**です。**

$$x_k-y_k=\frac{\alpha^k+\bar{\alpha}^k}{2}-\frac{\alpha^k-\bar{\alpha}^k}{2\sqrt{2}}=\frac{(\alpha^k+\bar{\alpha}^k)\sqrt{2}-\alpha^k+\bar{\alpha}^k}{2\sqrt{2}}$$

分子$=(\alpha^k+\bar{\alpha}^k)(1+\sqrt{2}-1)-\alpha^k+\bar{\alpha}^k$

$$=(\alpha^k+\bar{\alpha}^k)(\alpha-1)-\alpha^k+\bar{\alpha}^k$$

$$=\alpha^{k+1}-\alpha^k+\alpha\bar{\alpha}^k-\bar{\alpha}^k-\alpha^k+\bar{\alpha}^k$$

$$= \alpha^k(\alpha - 2) + (\alpha\overline{\alpha})\overline{\alpha}^{k-1}$$

$$= \alpha^k \bullet \frac{1}{\alpha} - \overline{\alpha}^{k-1}$$

$$= \alpha^{k-1} - \overline{\alpha}^{k-1}$$

$$x_k - y_k = \frac{\alpha^{k-1} - \overline{\alpha}^{k-1}}{2\sqrt{2}} = y_{k-1}$$

正則連分数の第 3 項を

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$$

とします。

$$\sqrt{2} = [1 + \frac{2}{5}, -\dot{6}, \dot{6}]$$

$$\sqrt{2} = [1 + \frac{x_3 - y_3}{y_3}, -\dot{2}x_2, 2\dot{x}_2] = [1 + \frac{y_2}{y_3}, -\dot{2}x_2, 2\dot{x}_2]$$

関数電卓計算を記述します。まず、$\sqrt{2}$**の整数部分の 1 を引きます。**

$$\sqrt{2} - 1 = 0.414213562$$

この数値を、第 3 項の（分子数ー分母数）で割ります。ここでは、2 で割ります。そして、逆数を作ってください。

$$\frac{0.41421362}{2} = 0.207106781$$

$$\frac{1}{0.207106781} = 4.828427125$$

この数値を越える 5 がy_3**です。この 5 を引いて、逆数を作ります。**

$$\frac{1}{4.828427125 - 5} = -5.828427126$$

この数値に 6 を加えて、逆数を作ります。

$$\frac{1}{-5.828427126 + 6} = \frac{1}{0.171572874} = 5.828427164$$

ここでも本来は、5.828427126**です。6 を引いて、逆数を作ります。**

$$\frac{1}{5.828427126 - 6} = \frac{1}{-0.17157274} = -5.828427164 \equiv -5.828427126$$

従って、以上の計算が循環していきます。

行列計算は、次のようにします。

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1\\5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-41&7\\-29&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-41\\-29\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-239&-41\\-169&-29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-239\\-169\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1393&-239\\985&-169\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1393\\985\end{pmatrix}$$

・$m=3$ とすると、

$$x_{k+6}=2x_3\bullet x_{k+3}-(-1)^3x_k=2\bullet 7\bullet x_{k+3}+x_k=14x_{k+3}+x_k$$

$$y_{k+6}=2x_3\bullet y_{k+3}-(-1)^3y_k=2\bullet 7\bullet y_{k+3}+y_k=14y_{k+3}+y_k$$

このタイプは、正則連分数の形式を継承します。その様子を見ましょう。
項番号0,3,6,9,12,・・・の正則連分数について、$k=0,3,6,9,12,\cdots$ を代入することにより、

$$\frac{1}{0},\frac{7}{5},\frac{99}{70},\frac{1393}{985},\frac{19601}{13860},\cdots$$

を得ます。

関数電卓での計算を記述します。

$$5\sqrt{2}=7.071067812$$

ここから、普通の正則連分数計算をしていきます。この数値から５を引いて、逆数を作ります。

$$\frac{1}{7.071067812-7}=14.07106781$$

この数値から１４を引いて逆数を作ると、

$$\frac{1}{14.07106781-14}=14.07106721$$

正式な値は、上記のものです。従って、正則連分数成分のように１４が循環します。

$$5\sqrt{2}=[7;\dot{1}\dot{4}] \qquad y_3\sqrt{2}=[x_3;2\dot{x}_3]$$

$$\sqrt{2}=\frac{1}{5}[7;\dot{1}\dot{4}]$$

$$=\frac{1}{5}\bullet\left\{\frac{7}{1},\frac{99}{14},\frac{1393}{197},\frac{19601}{2772},\frac{275807}{39005},\cdots\right\}$$

$$=\left\{\frac{7}{5},\frac{99}{70},\frac{1393}{985},\frac{19601}{13860},\frac{275807}{195025},\cdots\right\}$$

$$\begin{pmatrix}7&1\\5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}99&7\\70&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}99\\70\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7&1\\5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1393&99\\985&70\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1393\\985\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7&1\\5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19601&1393\\13860&985\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19601\\13860\end{pmatrix}$$

項番号1,4,7,10,13,$\cdots$ の正則連分数について、$k=1,4,7,10,13,\cdots$を代入して、

$$\frac{1}{1},\frac{17}{12},\frac{239}{169},\frac{3363}{2378},\frac{47321}{33461},\cdots$$

を得ます。正則連分数の第 4 項を、

$$\frac{17}{12}=1+\frac{5}{12}$$

として、前述の計算をします。

$$\sqrt{2}-1=0.414213562$$

$$\frac{0.414213562}{5}=0.082842712$$

$$\frac{1}{0.082842712}=12.07106781$$

$$\frac{1}{12.07106781-12}=14.07106781$$

$$\frac{1}{14.07106781-14}=14.07106917$$

正式な値は、上記のものです。従って、正則連分数成分のように１４が循環します。

$$\sqrt{2}=[1+\frac{5}{12},\dot{1}\dot{4}]\qquad\sqrt{2}=[1+\frac{x_4-y_4}{y_4},2\dot{x}_3]=[1+\frac{y_3}{y_4},2\dot{x}_3]$$

$$\begin{pmatrix}1&5\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&1\\12&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\12\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&5\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}239&17\\169&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}239\\169\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&5\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3363&239\\2378&169\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3363\\2378\end{pmatrix}$$

・$m=4$ とすると、

$$x_{k+8}=2x_4\bullet x_{k+4}-(-1)^4x_k=2\bullet17x_{k+4}-x_k=34x_{k+4}-x_k$$

$$y_{k+8}=2x_4\bullet y_{k+4}-(-1)^4y_k=2\bullet17y_{k+4}-y_k=34y_{k+4}-y_k$$

これ以降、数式変形と行列計算を省略します。

項番号0,4,8,12,16,・・・**である部分分数列について**

$$\frac{1}{0},\frac{17}{12},\frac{577}{408},\frac{19601}{13860},\frac{665857}{470832},\frac{22619537}{15994428},\cdots$$

$$12\sqrt{2}=[17;-\dot{3}4,3\dot{4}]\quad y_4\sqrt{2}=[x_4;-\dot{2}x_4,2\dot{x}_4]\quad \sqrt{2}=\frac{1}{12}[17;-\dot{3}4,3\dot{4}]$$

項番号1,5,9,13,17,・・・**である部分分数列について**

$$\frac{1}{1},\frac{41}{29},\frac{1393}{985},\frac{47321}{33461},\frac{1607521}{1136689},\frac{54608393}{38613965},\cdots$$

$$\sqrt{2}=[1+\frac{12}{29},-\dot{3}4,3\dot{4}]\quad \sqrt{2}=[1+\frac{x_5-y_5}{y_5},-\dot{2}x_4,2\dot{x}_4]$$

$$=[1+\frac{y_4}{y_5},-\dot{2}x_4,2\dot{x}_4]$$

・$m=5$ とすると、

$$x_{k+10}=2x_5\bullet x_{k+5}-(-1)^5x_k=2\bullet41\bullet x_{k+5}+x_k=82x_{k+5}+x_k$$

$$y_{k+10}=2x_5\bullet y_{k+5}-(-1)^5y_k=2\bullet41\bullet y_{k+5}+y_k=82y_{k+5}+y_k$$

項番号0,5,10,15,20,・・・**である部分分数列について**

$$\frac{1}{0},\frac{41}{29},\frac{3363}{2378},\frac{275807}{195025},\frac{22619537}{15994428},\frac{1855077841}{1311738121},\cdots$$

$$29\sqrt{2}=[41;8\dot{2}]\quad y_5\sqrt{2}=[x_5;2\dot{x}_5]\quad \sqrt{2}=\frac{1}{29}[41;8\dot{2}]$$

項番号1,6,11,16,21,・・・**である部分分数列について**

$$\frac{1}{1},\frac{99}{70},\frac{8119}{5741},\frac{665857}{470832},\frac{54608393}{38613965},\frac{4478554083}{3166815962},\cdots$$

$$\sqrt{2}=[1+\frac{29}{70},\dot{82}] \qquad \sqrt{2}=[1+\frac{x_6-y_6}{y_6},2\dot{x}_5]$$

$$=[1+\frac{y_5}{y_6},2\dot{x}_5]$$

・$m=6$ とすると、

$$x_{k+12}=2x_6\cdot x_{k+6}-(-1)^6x_k=2\cdot 99\cdot x_{k+6}-x_k=198x_{k+6}-x_k$$

$$y_{k+12}=2x_6\cdot y_{k+6}-(-1)^6y_k=2\cdot 99\cdot y_{k+6}-y_k=198y_{k+6}-y_k$$

項番号0,6,12,18,24,•••**である部分分数列について**

$$\frac{1}{0},\frac{99}{70},\frac{19601}{13860},\frac{3880899}{2744210},\frac{768398401}{543339720},\frac{152139002499}{107578520350},\cdots$$

$$70\sqrt{2}=[99;-\dot{198},\dot{198}] \qquad y_6\sqrt{2}=[x_6;-\dot{2}x_6,2\dot{x}_6] \qquad \sqrt{2}=\frac{1}{70}[99;-\dot{198},\dot{198}]$$

項番号1,7,13,19,25,•••**である部分分数列について**

$$\frac{1}{1},\frac{239}{169},\frac{47321}{33461},\frac{9369319}{6625109},\frac{1855077841}{1311738121},\frac{367296043199}{259717522849},\cdots$$

$$\sqrt{2}=[1+\frac{70}{169},-\dot{198},\dot{198}] \qquad \sqrt{2}=[1+\frac{x_7-y_7}{y_7},-\dot{2}x_6,2\dot{x}_6]$$

$$=[1+\frac{y_6}{y_7},-\dot{2}x_6,2\dot{x}_6]$$

・$m=7$ とすると、

$$x_{k+14}=2x_7\cdot x_{k+7}-(-1)^7x_k=2\cdot 239\cdot x_{k+7}+x_k=478x_{k+7}+x_k$$

$$y_{k+14}=2x_7\cdot y_{k+7}-(-1)^7y_k=2\cdot 239\cdot y_{k+7}+y_k=478y_{k+7}+y_k$$

項番号0,7,14,21,28,•••**である部分分数列について**

$$\frac{1}{0},\frac{239}{169},\frac{114243}{80782},\frac{54608393}{38613965},\frac{26102926097}{18457556052},\frac{12477253282759}{8822750406821},\cdots$$

$$169\sqrt{2}=[239;\dot{478}] \qquad y_7\sqrt{2}=[x_7;2\dot{x}_7] \qquad \sqrt{2}=\frac{1}{169}[239;\dot{478}]$$

項番号1,8,15,22,29,•••**である部分分数列について**

$$\frac{1}{1},\frac{577}{408},\frac{275807}{195025},\frac{131836323}{93222358},\frac{63018038201}{44560482149},\frac{30122754096401}{21300003689580},\cdots$$

$$\sqrt{2}=[1+\frac{169}{408},\dot{4}7\dot{8}] \quad \sqrt{2}=[1+\frac{x_8-y_8}{y_8},\dot{2x_7}]$$

$$=[1+\frac{y_7}{y_8},\dot{2x_7}]$$

・$m=8$ とすると、

$$x_{k+16}=2x_8\bullet x_{k+8}-(-1)^8x_k=2\bullet 577\bullet x_{k+8}-x_k=1154x_{k+8}-x_k$$

$$y_{k+16}=2x_8\bullet y_{k+8}-(-1)^8y_k=2\bullet 577\bullet y_{k+8}-y_k=1154y_{k+8}-y_k$$

項番号 0,8,16,24,32,・・・である部分分数列について

$$\frac{1}{0},\frac{577}{408},\frac{665857}{470832},\frac{768398401}{543339720},\frac{886731088897}{627013566048},\frac{1023286908188737}{723573111879672},\cdots$$

$$408\sqrt{2}=[577;-\dot{1}154,115\dot{4}] \quad y_8\sqrt{2}=[x_8;-\dot{2}x_8,2\dot{x}_8]$$

項番号1,9,17,25,32,39,・・・である部分分数列について

$$\frac{1}{1},\frac{1393}{985},\frac{1607521}{1136689},\frac{1855077841}{1311738121},\frac{886731088897}{627013566048},\frac{423859315570607}{299713796309065},\cdots$$

$$\sqrt{2}=[1+\frac{408}{985},-\dot{1}154,115\dot{4}] \quad \sqrt{2}=[1+\frac{x_9-y_9}{y_9},-\dot{2}x_8,2\dot{x}_8]$$

$$=[1+\frac{y_8}{y_9},-\dot{2}x_8,2\dot{x}_8]$$

・$m=9$ とすると、

$$x_{k+18}=2x_9\bullet x_{k+9}-(-1)^9x_k=2\bullet 1393\bullet x_{k+9}+x_k=2786x_{k+9}+x_k$$

$$y_{k+18}=2x_9\bullet y_{k+9}-(-1)^9y_k=2\bullet 1393\bullet y_{k+9}+y_k=2786y_{k+9}+y_k$$

項番号 0,9,18,27,36,45,・・・である部分分数列について

$$\frac{1}{0},\frac{1393}{985},\frac{3880899}{2744210},\frac{10812186007}{7645370045},\frac{30122754096401}{21300003689580},\frac{83922003724759193}{59341817924539925},\cdots$$

$$985\sqrt{2}=[1393;\dot{2}786] \quad y_9\sqrt{2}=[x_9;\dot{2}x_9]$$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{985}[1393; 2\dot{7}86]$$

項番号1,10,19,28,37,・・・である部分分数列について

$$\frac{1}{1}, \frac{3363}{2378}, \frac{9369319}{6625109}, \frac{26102926097}{18457556052}, \frac{72722761475561}{51422757785981}, \frac{202605639573839043}{143263821649299118}, \cdots$$

$$\sqrt{2} = [1 + \frac{985}{2378}, 2\dot{7}86] \qquad \sqrt{2} = [1 + \frac{x_{10} - y_{10}}{y_{10}}, 2\dot{x}_9]$$

$$= [1 + \frac{y_9}{y_{10}}, 2\dot{x}_9]$$

以上のことから、帰納的に発展させることができます。参考文献はありません。

私的通信：千葉県立柏稜高校　西川　誠